

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire d'Ain-Temouchent
BELHADJ BOUCHAIB

INSTITUT DES SCIENCES

DEPARTEMENT SCIENCES DE LA MATIERE



LMD L1 (SM/ST)

Polycopié de Cours et TD'S physique 2 (Electricité et Magnétisme)

Présenté par :

M_r ELAHMAR MOHAMED HICHEM

Année de l'édition : 2020

Table des matières

Avant-propos.....	I
Informations Sur La Matière:.....	II

PREMIÈRE PARTIE : ELECTRICITÉ

CHAPITRE I: ELECTROSTATIQUE

1.1 Différentes manières d'électriser.....	1
1.2 Différents types d'électricité.....	2
1.3 Force Electrique.....	3
1.4 Champ et Potentiel électrique.....	5
1.4.1 Champ électrique crée par une charge ponctuelle.....	5
1.4.2 Potentiel électrique crée par une charge ponctuelle	5
1.4.3 Théorème de superposition.....	5
1.4.4 Energie interne d'un système de charges ponctuelles.....	6
1.4.5 Relation entre le champ et Potentiel électrique.....	6
1.4.6 Lignes de champ et équipotentiellles.....	6
1.4.7 Dipôle électrique.....	6
1.5 Champ et potentiel électriques créés par des distributions continues.....	8
1.5.1 Densité de charges.....	8
1.5.2 Champ et potentiel électriques créés par un fil rectiligne uniformément chargé.....	8
1.5.3 Champ et potentiel électriques créés par un disque chargé en surface.....	9
1.6 Théorème de Gauss.....	10
1.6.1 Définition.....	10
1.6.2 Applications du théorème de Gauss.....	10
1.6.2.1 Champ crée par un plan infini uniformément chargé.....	10
1.6.2.2 Champ crée par sphère de rayon R, uniformément chargée.....	10
1.6.2.3 Fil uniformément chargé.....	12

CHAPITRE II: CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

2.1 Conducteur à l'équilibre électrostatique.....	14
2.1.1 Définition.....	14
2.1.2 Propriétés.....	14
2.1.3 Champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur.....	14
2.1.4 Pression électrostatique.....	14
2.1.5 Capacité d'un condensateur.....	14

2.1.6	Energie interne d'un conducteur.....	14
2.2	Phénomènes d'influence.....	15
2.2.1	Influence partielle.....	15
2.2.2	Influence totale.....	16
2.2.3	Relation entre la charge de B et les charges intérieures et intérieures de A.....	16
2.2.4	Condensateurs.....	17
2.2.5	Capacité d'un conducteur	17
2.2.6	Exemples de calcul de capacité d'un condensateur	17
2.2.7	Groupement de condensateurs.....	18

CHAPITRE III: ELECTRODYNAMIQUE

3.1	Conduction électrique.....	20
3.1.1	Conducteur électrique.....	20
3.1.2	Loi d'Ohm.....	21
3.1.3	Notions de conductivité, Résistivité et Mobilité.....	21
3.1.4	Effet Joule.....	22
3.1.5	Calcul de Résistance de conducteurs de formes différentes.....	22
3.1.6	Associations de Résistances.....	23
3.2	Réseaux Electriques	24
3.2.1	Eléments du circuit électrique.....	24
3.2.2	Générateurs électriques.....	24
3.2.3	Récepteurs.....	26
3.2.4	Les lois de Kirchhoff.....	27
3.2.5	Charge et décharge d'un condensateur.....	29
3.2.6	Energies mises en jeu.....	32

DEUXIÈME PARTIE : ELECTRICITÉ

CHAPITRE IV: INTERACTION ET INDUCTION MAGNETIQUE

4	L'interaction magnétique.....	33
4.2	Action d'un champ magnétique sur une charge en mouvement.....	33
4.2.1	Force de Lorentz.....	33
4.2.2	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique.....	34
4.3	Effet Hall (1880).....	36
4.4	Magnétisme dans les conducteurs.....	37
4.4.1	Force de Laplace.....	37
4.5	Champ magnétique crée par un courant.....	39

4.5.1	Loi de Biot et Savart.....	39
4.5.2	Champ créé par une spire circulaire en un point de son axe.....	41
4.6	Dipôle magnétique.....	42

TRAVAUX DIRIGÉS

TDN°01(Electrostatique).....	43
Solution TDN°01.....	44
TDN°02(Champs et Potentiel Electrique).....	47
Solution TDN°02.....	48
TDN°03(Champs et Potentiel Electrique créés par des distributions continues).....	52
Solution TDN°03.....	53
TDN°04(Electrocinétique).....	58
Solution TDN°04.....	59
TDN°05(Magnétique).....	63
Solution TDN°05.....	64
Référence.....	68

Avant-propos

La physique, peut être définie comme la science qui étudie, par l'expérimentation et par le développement, les concepts et les théories qui visent à expliquer l'ensemble des phénomènes naturels, en établissant les lois qui les régissent. Autrement dit, la physique est fondée sur des concepts prédéfinis et des postulats fondamentaux. la physique se divise en plusieurs spécialités suivant le type d'objet étudié. Dans le manuel de la physique nous avons quatre grandes parties de la physique sont présentées. Chaque partie couvre plusieurs domaines présentés en chapitre sous forme de rappel de cours, d'exercices et de solutions d'exercices, Et parmi ces parties, nous étudierons la partie.

Electricité et magnétisme

Partie de la physique qui étudie l'ensemble des phénomènes Electriques et magnétiques dus aux charges électriques au repos ou en mouvement. cette partie est présentée suivant plusieurs chapitres : l'électrostatique, qui s'intéresse aux corps électrisés, sans circulation de courant ; conducteurs Electriques ,On dit qu'un conducteur est à l'équilibre électrostatique si toutes ses charges sont immobiles et ne sont soumises à aucune force ; l'électrocinétique qui étudie les courants électriques de manière générale et traite plus particulièrement des actions dynamique entre les courants électriques ; l'électromagnétisme, qui analyse les actions réciproque des aimants et des courants.

Informations Sur Matière

Le Semestre: 2

Matière: Physique 2/ Electricité

Public cible : Socle Commun L1 : SM, ST, MI

Contenu de la matière:

A. Cours

1. Electrostatique (5 semaines) : Charges et champ électrostatiques - Potentiel électrostatique - Flux du champ électrique – Théorème de Gauss - Dipôle électrique

2. Les conducteurs (2 semaines) : Définition et propriétés des conducteurs en équilibre - Pression électrostatique - Capacité d'un conducteur et d'un condensateur.

3. Electrocinétique (5 semaines) : Conducteur électrique - Loi d'Ohm - Loi de Joule - Circuits électriques - Application de la loi d'Ohm aux réseaux - Lois de Kirchhoff.

4. Electromagnétisme (3 semaines) : Définition d'un champ magnétique - Force de Lorentz - Loi de Laplace - Loi de Biot et Savart - Dipôle magnétique.

B. Travaux Dirigés :

1. TDN°01 (Electrostatique)
2. TDN°02 (Champs et Potentiel Electrique)
3. TDN°03 (Champs et Potentiel Electrique créés par des distributions continues)
4. TDN°04 (Electrocinétique)
5. TDN°05 (Magnétique)

Mode d'évaluation : Continu : 33% Examen: 67%

Semestre	Code	Intitulé	Cours/semaine	TD/semaine	TOTAL
S2	Phys2	Electricité	1x1h30	1x1h30	3h00

Chapitre I

ELECTROSTATIQUE

1.1 Différentes manières d'électriser :

1.1.1 Par frottement :

En frottant deux corps de la liste triboélectrique, celui qui se trouve avant se charge positivement l'autre se charge négativement.

Exemple : si on frotte du verre avec de la peau de lapin : le verre se charge(-) et la peau de lapin en (+).



Figure -1.1-

1.1.2 Par contact :

Lorsqu'on met deux corps électrisés (chargés) en contact, il y a transfert de charges (des électrons dans notre cas) d'un corps à l'autre jusqu'à arriver à nouvel état d'équilibre (ce concept sera expliqué plus en détail dans la suite du cours)

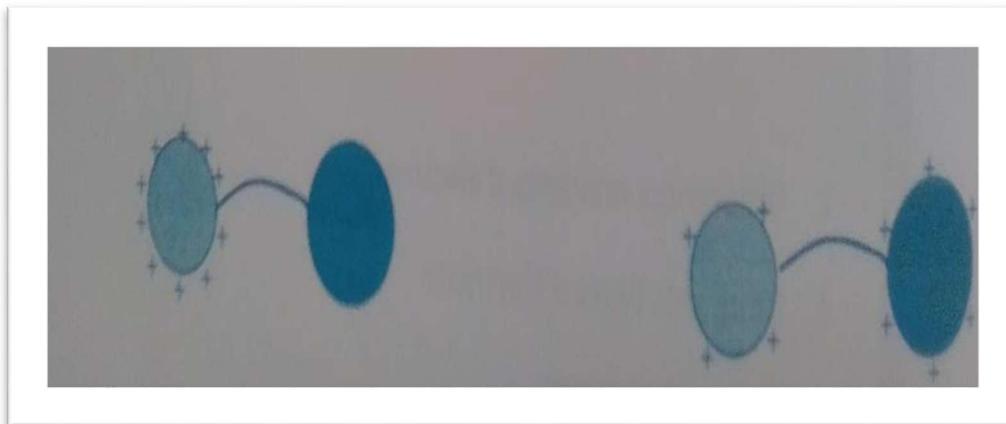


Figure -1.2-

1.1.3 En reliant un conducteur à une source de courant (exemple générateur continu):

Ce conducteur sera chargé du même signe de charge que la borne à laquelle il est relié.

- Durant toutes ces opérations il y a conservation de la charge totale, si on prend deux corps portant des charges Q_1 et Q_2 respectivement et après une des opérations cités plus haut, les corps porteront des charges Q_1' et Q_2' respectivement, on a alors [6]:

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \quad (1.1)$$

1.2 Différents types d'électricité :

Après électrisation de corps on se rend compte que si on les rapprochait les uns des autres, certains s'attirent(Attraction) et d'autre repoussent(Répulsion).

1.2.1 Première expérience :

On suspend par un fil une boule faite de sureau ou de polystyrène. On approche de cette boule une tige de verre ou d'ambre préalablement frottée : les deux tiges, chacune de son côté, l'attirent, puis la repoussent juste après l'avoir contactée (. Par contre, si on approche simultanément les deux tiges côte à côte de la boule, rien ne se passe (figure -1.3-)

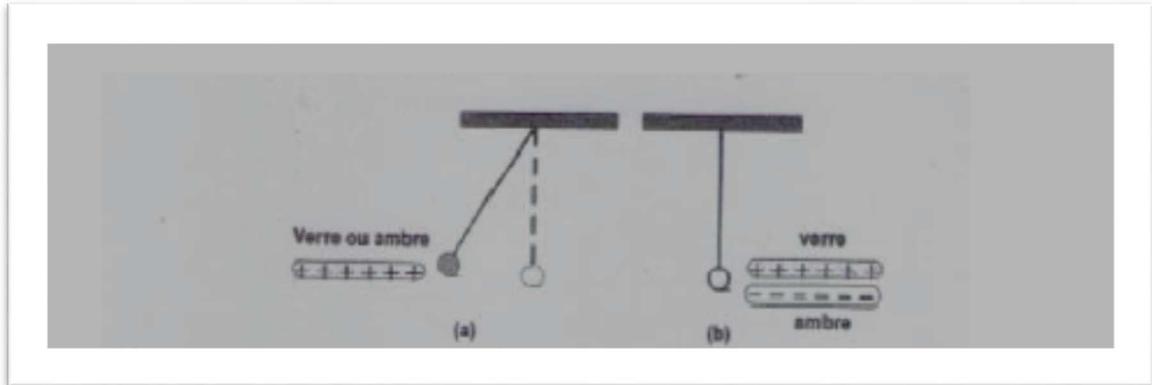


Figure -1.3- : Expérience d'électrisation

1.2.2 Deuxième expérience :

Si deux boules de la figure -1.4-, ont été électrisées suite à leur contact avec la tige de verre frottée, elles se repoussent. Par contre les deux boules s'attirent si chacune d'elles a touché l'une des deux tiges qui a touché l'une des deux tiges qui a été frottée et qu'elle est de matière différente de celle de l'autre tige.[1]

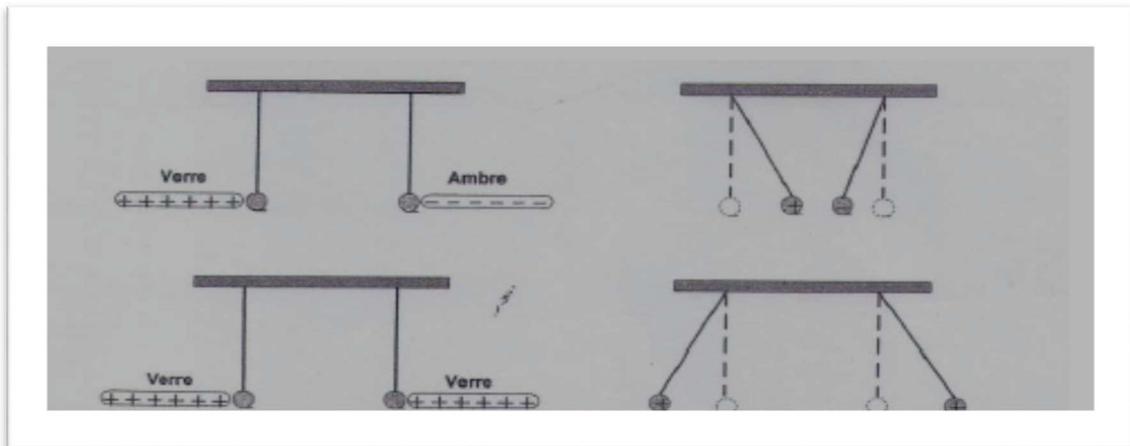


Figure -1.4-: Electrisation, attraction et répulsion entre des charges

1.3 Force Electrique :

Coulomb à montrer qu'entre deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r , s'exerce une force électrique :

$$\vec{F} = \frac{Kq_1q_2}{r^2} \vec{u} \quad (1.2)$$

Avec $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$

(Le vecteur unitaire \vec{u} va de la charge qui crée la force vers celle qui la subit.)

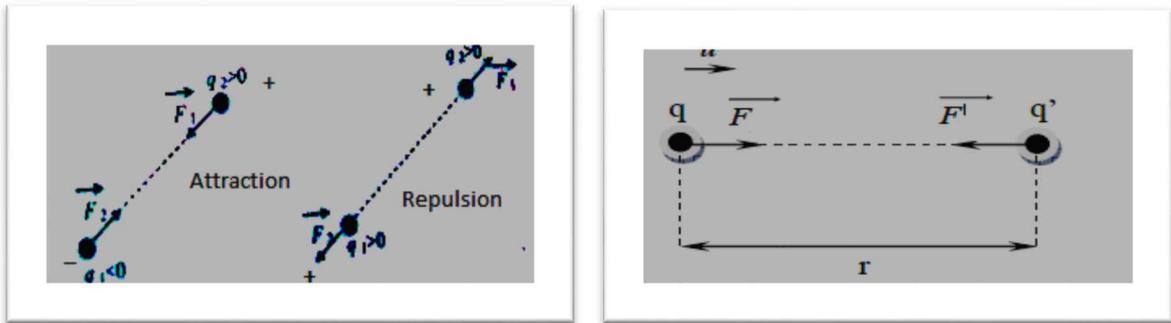


Figure -1.5-

On peut en tirer désormais une définition du coulomb:

C'est la charge d'un point électrisé qui, placé à un mètre d'une charge identique, subit de sa part une force de $9 \cdot 10^9 \Rightarrow$ Nécessité d'utiliser des sous multiples du coulomb

Micro C ($1\mu C = 10^{-6}C$); *nano C* ($1nC = 10^{-9}C$); *pico C* ($1pC = 10^{-12}C$)

1.3.1 Ordres de Grandeur des forces électrostatiques

Au niveau microscopique

- Envisageons le cas d'un proton et d'un électron qui dans un atome d'Hydrogène s'attirent selon une force coulombienne: $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}C, r = 5 \cdot 10^{-11} m = 0,5 \text{ \AA}$ alors $F = 10^{-7} N$

- Comparons avec la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre cesdeux particules

$$\vec{F} = \frac{K m_e M_p}{r^2} \vec{u}$$

$m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}, M_p = 1850 m_e$ alors $F = 4 \cdot 10^{-47} N$

- Considérons enfin le poids de ces particules (c. a. d. la force de gravitation que la terre exerce sur elles

Electron: $m_e \cdot g = 9 \cdot 10^{-30} N$; Proton: $M_p \cdot g = 1.6 \cdot 10^{-26} N$

De ces exemples, on peut immédiatement conclure que dans les problèmes d'interaction entre particules, on pourra systématiquement négliger leur poids et leur interaction gravitationnelle, ceci au moins en première approximation.[2]

Règle :

Deux charges de même signe se repoussent et deux charges de signe contraire s'attirent.

Exemple :

Quelle est la force de répulsion coulombienne entre deux charges de 1c séparées par la distance de 1km ?

Réponse :

$$F = \frac{Kq^2}{r^2} \rightarrow F=9.10^3N$$

1.3.2 Principe de superposition des forces :

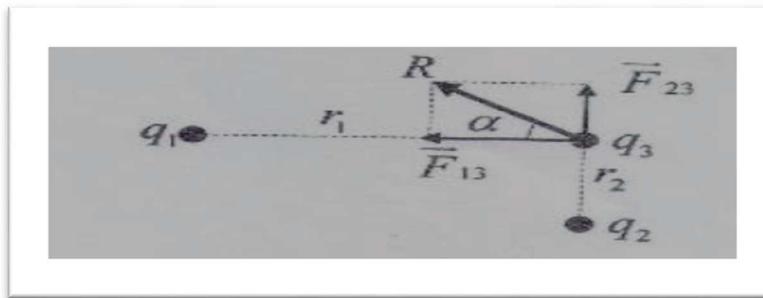


Figure -1.6-

A partir de la figure :

$$\vec{F}_3 = \vec{R} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

Exemple :

Calculer l'intensité de résultante agissant sur la charge q3 :

Avec : $q_1 = -2.5 \cdot 10^{-3} C$; $q_2 = 1.5 \cdot 10^{-3} C$; $q_3 = 0.8 \cdot 10^{-3} C$; $r_1 = AC = 1.2m$;
 $r_2 = BC = 0.8m$

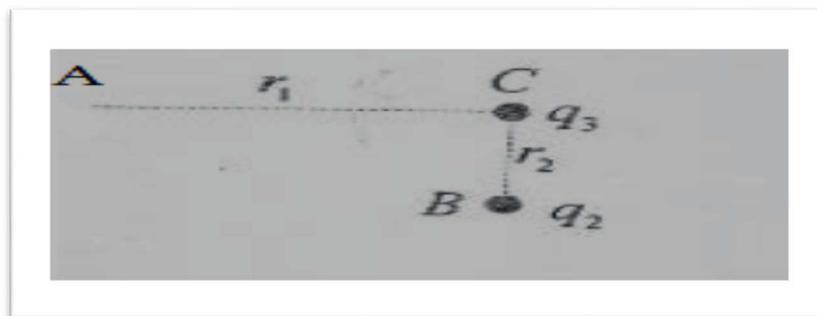


Figure -1.7-

Réponse :

Raisonnant à partir de la figure -1.7-. Puisque Avec $q_1 \cdot q_3 < 0$, donc $F_{13} < 0$ est une force d'attraction, et puisque avec $q_2 \cdot q_3 > 0$, donc $F_{13} > 0$ est une force de répulsion

D'où :

$$\vec{F}_{13} = \frac{Kq_1q_3}{r_1^2} \vec{u}_1 ; \vec{F}_{13} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 \cdot 10^{-3}}{(1.2)^2} = 12,5 \cdot 10^3 N$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{Kq_2q_3}{r_2^2} \vec{u}_1 ; \vec{F}_{23} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 \cdot 10^{-3}}{(0.8)^2} = 16.87 \cdot 10^1 N$$

$$\text{Alors: } R = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = 2,5 \cdot 10^3 N [1]$$

1.4 Champ et Potentiel électrique :

1.4.1 Champ électrique crée par une charge ponctuelle :

Par analogie avec de la force et le champ de gravitation entre deux masses, on a défini le champ électrique qui est lié à la force électrique par la relation:

$$\vec{F} = \frac{KQq}{r^2} \vec{u} = q\vec{E} \quad (1.3)$$

On dit alors que la charge Q crée en tout point de l'espace un champ électrique \vec{E} tel que :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{KQ}{r^2} \vec{u} \quad (1.4)$$

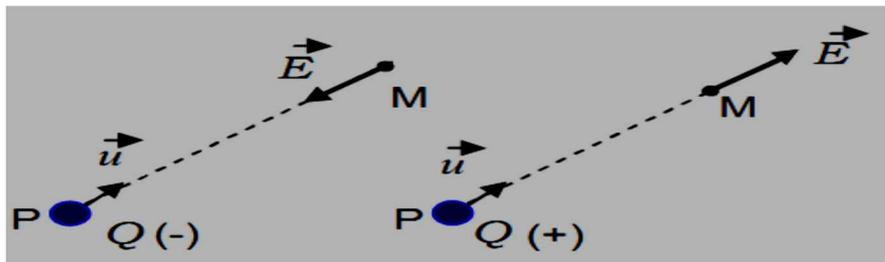


Figure -1.8-

1.4.2 Potentiel électrique crée par une charge ponctuelle :

De la même façon on définit le potentiel électrique qui est relié à l'énergie potentielle par la relation :

$$V = \frac{E_p}{q} = \frac{F \cdot r}{q} = K \frac{Q}{r} \quad (1.5)$$

1.4.3 Théorème de superposition :

Si maintenant on dispose de plusieurs charges ponctuelles le champ et le potentiel créés par ces charges en un point M de l'espace s'écrivent [6] :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{E}_i \quad (1.6a)$$

$$V_M = V_1 + V_2 + \dots + V_N = \sum_{i=1}^{i=N} V_i \quad (1.6b)$$

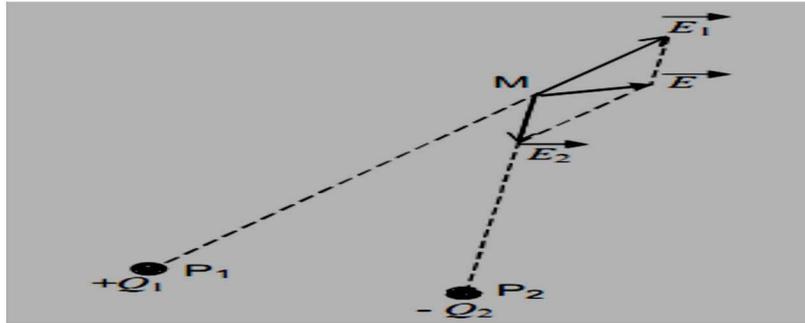


Figure -1.9-

1.4.4 Energie interne d'un système de charges ponctuelles :

L'énergie interne d'un ensemble de N charges ponctuelles est définie par :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Kq_i q_j}{r_{ij}} \quad (1.7)$$

1.4.5 Relation entre le champ et Potentiel électrique:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ et } \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \quad (1.8)$$

1.4.6 Lignes de champ et équipotentiels :

a. lignes de champ :

Ce sont des surfaces sur lesquelles le champ \$\vec{E}\$ est tangent

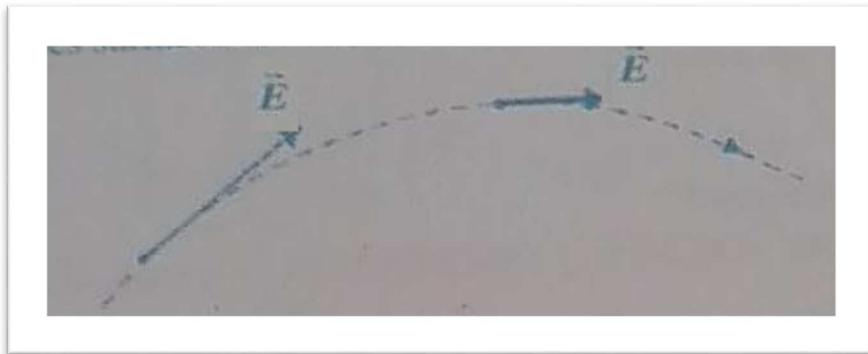


Figure -1.10-

- b. Équipotentiels: Ce sont des surfaces sur lesquelles le potentiel V est constant.
- c. Lignes de champ et les équipotentiels sont perpendiculaires entre elles.
- d. Lignes de champ vont du potentiel le plus grand vers le plus petit.

1.4.7 Dipôle électrique :

a. Définition :

C'est un système constitué de deux charges ponctuelles q identiques et de signes contraires distant d'une longueur d .Ce système donne naissance une grandeur appelée moment dipolaire électrique :

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (1.9)$$

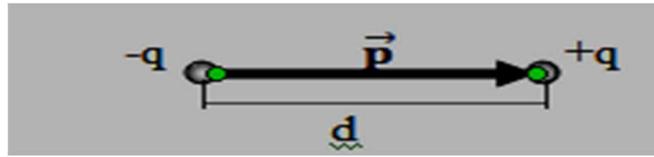


Figure -1.11-

b. Potentiel crée par un dipôle électrique :

Le dipôle crée en un point M, repéré en coordonnées polaires par r et θ. Le potentiel s'exprime :

$$V = \frac{Kp \cos \theta}{r^2}$$

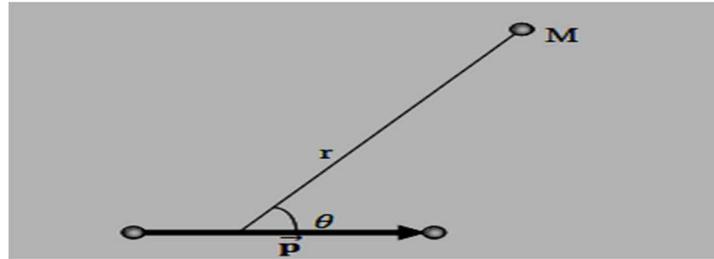


Figure -1.12-

c. Champ électrique crée par un dipôle électrique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Kp \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp \sin \theta}{r^3} \end{cases}$$

d. Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle :

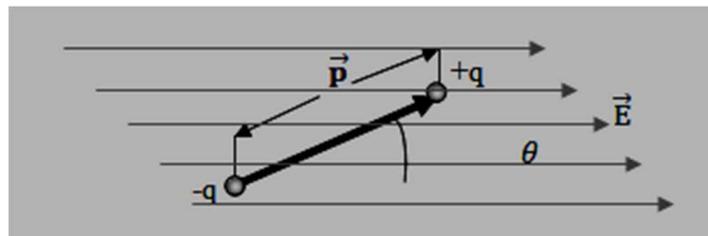


Figure -1.13-

▪ Energie potentielle :

$$E_p = -\vec{E} \cdot \vec{p} \Rightarrow E_p = -E \cdot p \cdot \cos \theta \tag{1.10}$$

▪ Moment du couple : \vec{p}

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \Rightarrow |\vec{\tau}| = |\vec{p}| |\vec{E}| \cos \theta \tag{1.11}$$

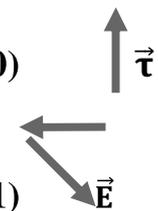


Figure -1.14-

▪ Position d'équilibre :

a) $\theta = 0$: équilibre stable

b) $\theta = \pi$: équilibre instable

1.5 Champ et potentiel électriques crées par des distributions continues :

1.5.1 Densité de charges :

a) Densité de charge linéaire :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} (C/m) \Rightarrow Q = \int dq = \lambda \int dl \quad (1.12a)$$

b) Densité de charge surfacique :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} (C/m^2) \Rightarrow Q = \iint dq = \sigma \iint dS \quad (1.12b)$$

c) Densité de charge volumique :

$$\rho = \frac{dq}{dV} (C/m^3) \Rightarrow Q = \iiint dq = \rho \iiint dV \quad (1.12c)$$

1.5.2 Champ et potentiel électriques crées par un fil rectiligne uniformément chargé :

Chaque élément dl du fil crée un champ :

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2} \vec{u} = \frac{K\lambda dy}{r^2} \vec{u} \Rightarrow d\vec{E} = \begin{cases} dE_x = dE \cos \alpha \\ dE_y = -dE \sin \alpha \end{cases}$$

En intégrant entre les deux extrémités du fil repérées par les angles α_1 et α_2 on a :

$$\begin{cases} E_x = \frac{K\lambda}{x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \\ E_y = \frac{K\lambda}{x} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{cases}$$

Si le fil est infini on pose : $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

On trouve alors :

$$E_x = \frac{2K\lambda}{x} = \frac{\lambda}{2\pi x \epsilon_0} \text{ et } E_y = 0$$

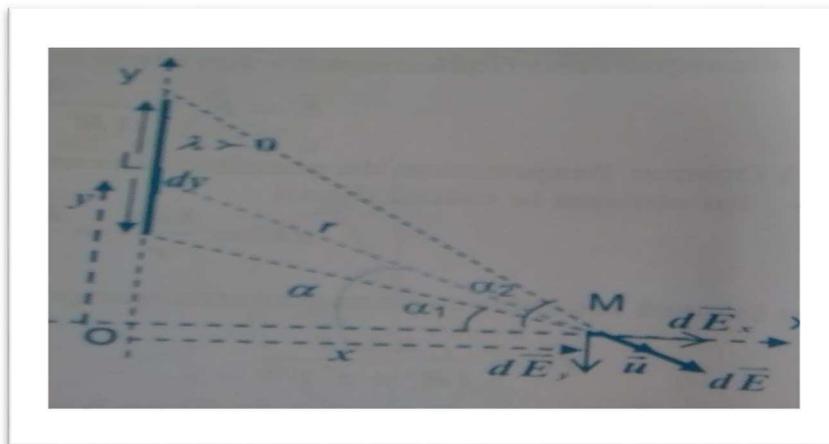


Figure -1.15-

Potentiel pour un fil infini :

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int E_x dx = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{x} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln x + Cte$$

1.5.3 Champ et potentiel électriques créés par un disque chargé en surface :

L'élément de champ crée par une charge surfacique $dq = \sigma dS$ est :

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2} \vec{u} = \frac{K\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

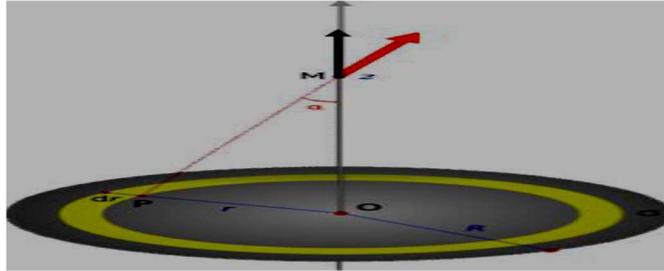


Figure -1.16-

on prend comme élément de surface dS , une couronne telle que :

$$dS = 2\pi x dx$$

On obtient alors :

$$dE = \frac{K\sigma 2\pi x dx}{r^2}$$

De plus, par raison de symétrie, la composante du champ total est suivant Oy :

$$dE_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{y x dx}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

En intégrant cette expression après avoir fait un changement de variables, on obtient l'expression suivante :

$$E = \int_0^R dE_y = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{x dx}{(y^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right]$$

Si y est positif on a : $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right]$

Si y est négatif on a : $E = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right]$

Potentiel électrique :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dy$$

En intégrant cette expression, dans le cas où $y > 0$, on a (avec la référence $V(\infty) = 0$)

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + R^2} - y \right]$$

1.6 Théorème de Gauss :

1.6.1 Définition :

Le flux du champ à travers la surface S fermé est :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

1.6.2 Applications du théorème de Gauss :

1.6.2.1 Champ crée par un plan infini uniformément chargé :

On prend comme surface de Gauss un cylindre qui traverse le plan.

Le flux total est :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2ES$$

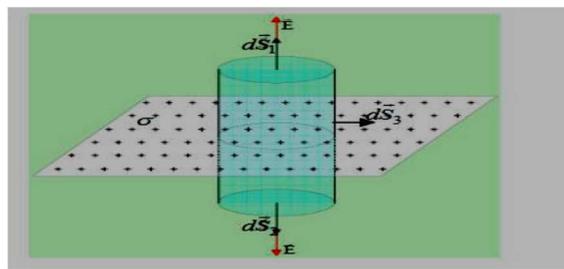


Figure -1.17-

La somme des charges à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$\sum q_{int} = \iint \sigma \cdot dS = \sigma \cdot S$$

Et enfin :

$$\Phi = 2ES = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Potentiel électrique :

$$V = - \int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dy = - \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} + Cte$$

1.6.2.2 Champ crée par sphère de rayon R, uniformément chargée :

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

Comme les équipotentielles sont des sphères donc le champ est radial et est parallèle au vecteur élément de surface \vec{dS}

On choisi une sphère comme surface de Gauss. Le flux du champ électrique à travers toute la sphère de Gauss est :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = ES = E4\pi r^2$$

On rencontre deux situations de charges pour la sphère soit elle est en surface, soit elle est en volume.

a- Cas d'une sphère chargée en surface :

Si la surface de Gauss est telle que $r < R$:

$$\sum q_{int} = \iint \sigma \cdot dS = 0 \Rightarrow E=0$$

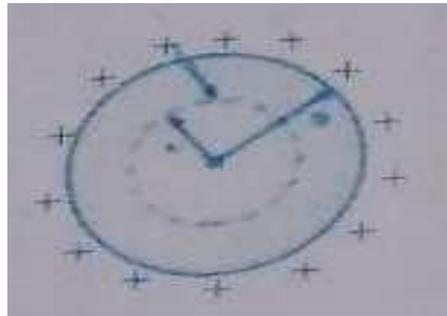


Figure -1.18-

Si la surface de Gauss est telle que $r > R$:

$$\sum q_{int} = \iint \sigma \cdot dS = \sigma \cdot S \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Potentiel électrique :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = E dr$$

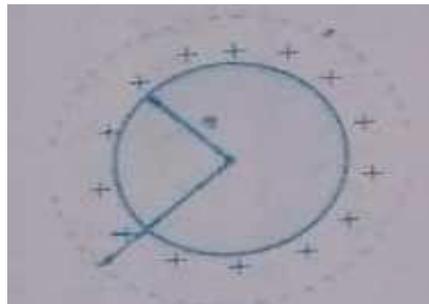


Figure -1.19-

$$r < R : V_1 = C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$r > R : V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration.

b- Cas d'une sphère chargée en volume :

$r < R$:

$$\sum q_{int} = \iiint \rho dV = \rho \int_0^r dV$$

$$\Rightarrow \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

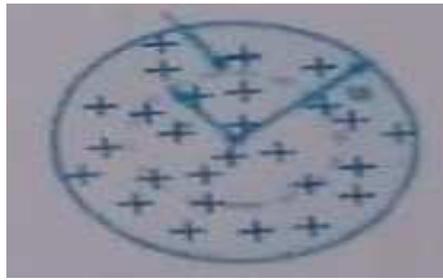


Figure -1.20-

$r > R :$

$$\begin{aligned} \sum q_{int} &= \iiint \rho dV = \rho \int_0^R dV \\ \Rightarrow \sum q_{int} &= \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = Q \\ \Rightarrow E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

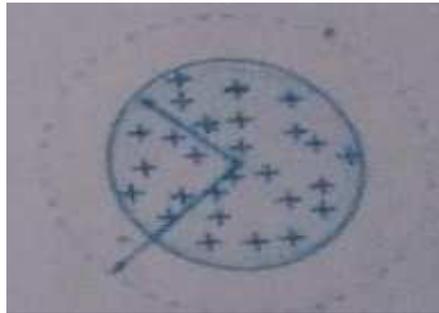


Figure -1.21-

Potentiel électrique :

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{E} \cdot \vec{dl} = E dr \\ r < R : V_1 &= -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_1 \\ r > R : V_2 &= \frac{\rho}{3\epsilon_0 r} R^3 + C_2 \end{aligned}$$

En écrivant les conditions aux limites on à :

$$\begin{aligned} V_1(\infty) &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ V_1(R) &= V_2(R) \Rightarrow C_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \end{aligned}$$

1.6.2.3 Fil uniformément chargé :

Le champ électrique est radial donc parallèle à la surface latérale du cylindre.

Le flux à travers la surface latérale est donc :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = ES = E2\pi rl$$

Charge intérieure à la surface de Gauss

$$\sum q_{int} = \int \lambda dl = \lambda l = Q$$

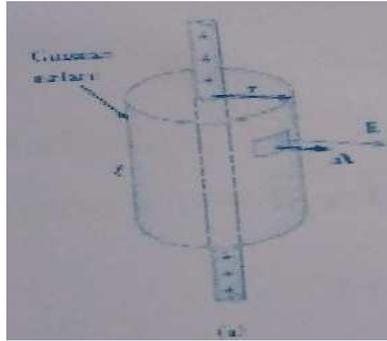


Figure -21.a-

Finalement :

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Potentiel électrique [6]:

$$V = - \int \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r + Cte$$

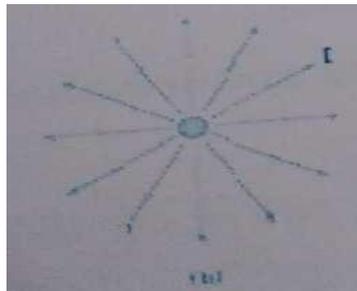


Figure -21.b-

Chapitre II
CONDUCTEURS
ELECTRIQUES

2.1 Conducteur à l'équilibre électrostatique :

2.1.1 Définition :

On dit qu'un conducteur est à l'équilibre électrostatique si toutes ses charges sont immobiles et ne sont soumises à aucune force.

2.1.2 Propriétés :

- Le champ électrique à l'intérieur est nul
- Le potentiel électrique à l'intérieur est constant
- La somme des charges à l'intérieur est nulle
- La surface extérieure du conducteur est une équipotentielle donc le champ est perpendiculaire à cette surface
- Ces propriétés sont valables si le conducteur est creux.
- Si on relie deux conducteurs A et B, il y a un échange de charge et à la fin. Ils forment un seul conducteur ($V_A=V_B$).

2.1.3 Champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur :

En appliquant le théorème de Gauss on à :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} ES = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

Par extrapolation on déduit le champ à la surface du conducteur

$$E_S = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.1)$$

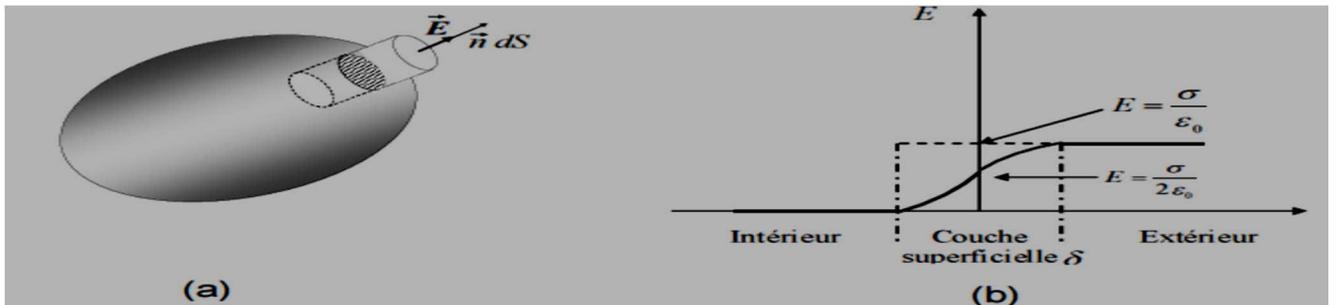


Figure -2.1-

2.1.4 Pression électrostatique :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (2.2)$$

2.1.5 Capacité d'un condensateur :

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.3)$$

2.1.6 Energie interne d'un conducteur :

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (2.4)$$

2.2 Phénomènes d'influence

2.2.1 Influence partielle :

Considérons un conducteur A électriquement neutre (figure 2.2a).

Approchons de ce dernier, un conducteur B chargé positivement, tel que représenté sur la (figure 2.2b).

Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique \vec{E}_B .

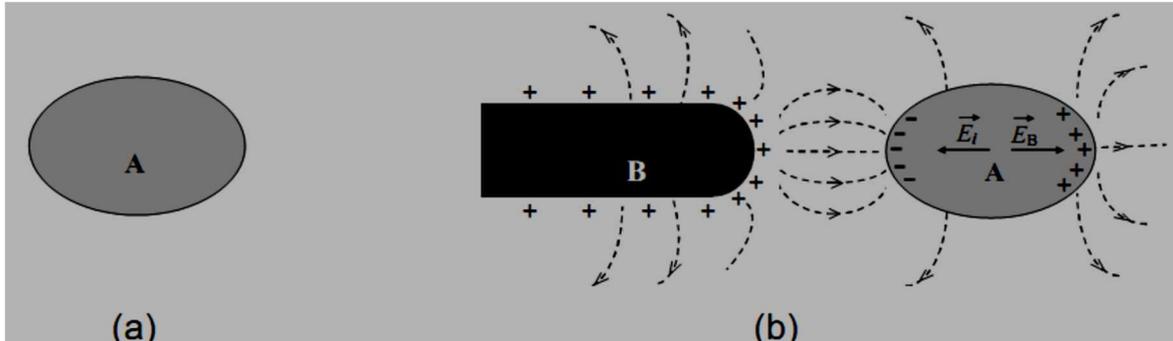


Figure -2.2-

Explications:

Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de \vec{E}_B . Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est $-Q$. A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est $+Q$, vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons comme le montre la (figure 2.2b). Ces charges, qui résultent d'une électrisation par influence, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Elles créent un champ induit \vec{E}_i qui vient s'opposer au champ inducteur \vec{E}_B et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A, les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

Remarque:

- Lors de l'évolution de ce phénomène, les charges $+Q$ et $-Q$, induites ou créées par influence, interviennent en ajoutant leur action à celle des charges inductrices. Il se produit une influence retour de A sur B. On dit qu'il y'a influence mutuelle.
- Dans cette expérience, le conducteur A à été électrisé par influence. Le système étant isolé, le principe de la conservation de la charge implique que la somme des charges induites est nulle. Ainsi, lors d'une électrisation par influence, il n'y aucune création, mais simplement un déplacement de charges.

Lignes de champ: La topographie de l'espace électrique, représentée sur la figure 2. 2b, montre que seules certaines lignes de champ, qui émanent du corps inducteur B, aboutissent au conducteur A. Il en résulte, en vertu du théorème des éléments Correspondants, que la charge Q créée par influence, est inférieure à la charge inductrice du conducteur B.

On relie, le conducteur A à la terre, au moyen d'un fil conducteur (figure 2.3). La terre et le conducteur forment ainsi un seul conducteur; les charges positives sont alors repoussées vers la terre. Le potentiel de ce conducteur est nul et plus aucune ligne de champ ne le quitte.

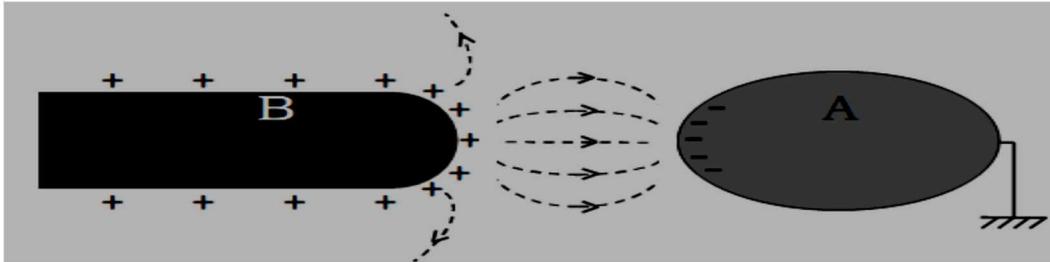


Figure -2.3-

Dans ces exemples, l'influence est dite **partielle**, car toutes les lignes de champ issues du conducteur B n'aboutissent pas sur A. Nous pouvons créer des conditions d'influence totale en plaçant le conducteur B à l'intérieur d'un conducteur creux A.

2.2.2 Influence totale :

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de B aboutissent sur A. Ceci est obtenu lorsque A entoure complètement B (figure 2.4). L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B. [3]

$$Q_B = -Q_{A \text{ int}} \quad (2.5)$$

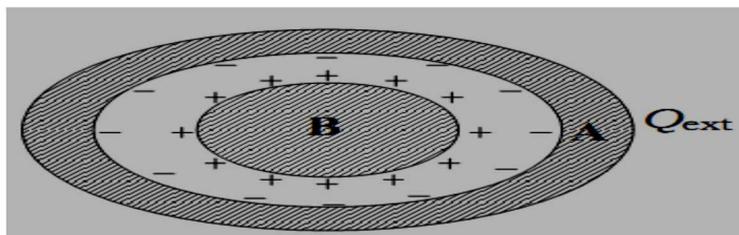


Figure -2.4-

2.2.3 Relation entre la charge de B et les charges intérieures et extérieures de A :

A l'intérieur des conducteurs le champ est nul .on prend une sphère comme surface de Gauss de rayon $R_i < r < R_e$:

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \sum Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow Q_B + Q_{A \text{ int}} = 0 \Rightarrow Q_B = -Q_{A \text{ int}}$$

Si A est initialement neutre, il y a conservation de la charge :

$$Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{int}} = -Q_{\text{ext}} \quad (2.6)$$

2.2.4 Condensateurs :

Un condensateur est constitué par deux conducteurs en influence. Le premier est relié à un générateur et le sol.

2.2.5 Capacité d'un conducteur :

Le concept de capacité électrique, introduit dans le cas d'un seul conducteur, peut être étendu à un condensateur. On définit la capacité d'un condensateur par:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = (V_A - V_B) \quad (2.7)$$

2.2.6 Exemples de calcul de capacité d'un condensateur :

a. Capacité d'un condensateur plan :

Le condensateur plan est constitué de deux plans conducteurs parallèles distants de d et de Surface S (figure 2.5) :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (2.7a)$$

Avec d : épaisseur, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$

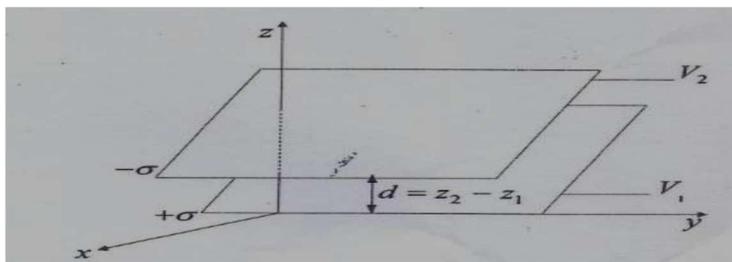


Figure -2.5-

b. Capacité d'un condensateur Sphérique :

Considérons le condensateur formé par deux sphères concentriques minces, de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ (figure 2.6).

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{[R_1 - R_2]} \quad (2.7b)$$

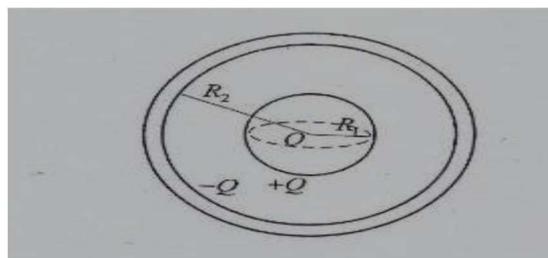


Figure -2.6-

c. Capacité d'un condensateur cylindrique :

On considère deux cylindres illimités et coaxiaux, de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$.

On cherche la capacité d'un tronçon de hauteur h . On désigne par Q la charge portée par l'armature interne sur la longueur h (figure 2.7).

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left[\frac{R_2}{R_1}\right]} \quad (2.7c)$$

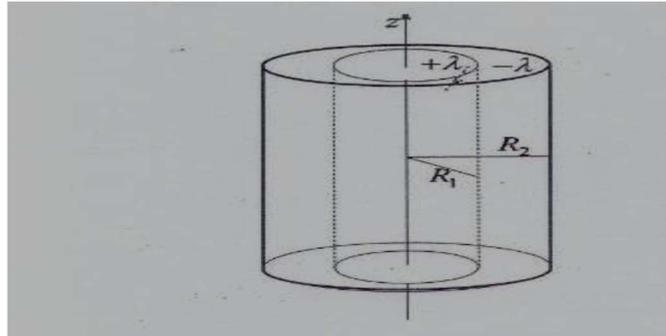


Figure -2.7-

2.2.7 Groupement de condensateurs :

Les condensateurs peuvent être groupés soit en série, soit en parallèle.

a- Groupement en série :

Reportons-nous à la (figure 2.8) où les notations sont précises ; A cause du phénomène l'influence totale tous les condensateurs emmagasinent la même charge Q . La tension entre les extrémités de tout l'ensemble est égale à la somme des tensions :

$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots \dots \dots (V_{n-1} - V_n)$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots \frac{Q}{C_n}$$

Résultat: L'inverse de la capacité équivalente est égal à la somme des inverses des capacités des condensateurs montés en série:

$$\frac{1}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots \frac{Q}{C_n}$$

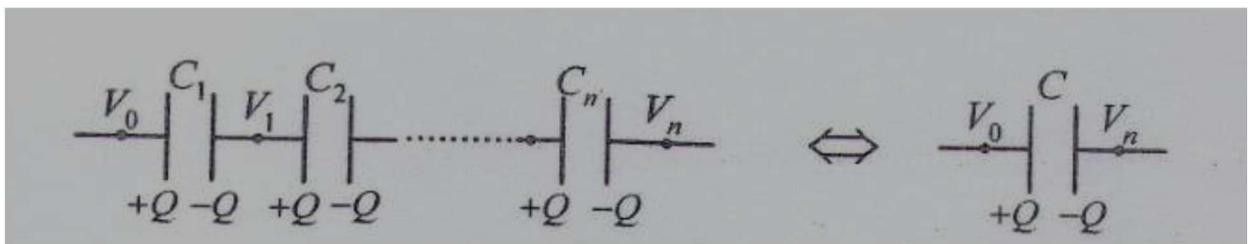


Figure -2.8-

Donc $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ (2.8)

b- Groupement en parallèle :

Reportons-nous cette fois à la (figure 2-9) Tous les condensateurs sont soumis à la même tension. La charge totale est égale à la somme des charges, et comme la charge Q_i de chaque condensateur est proportionnelle à sa capacité C_i , nous pouvons écrire

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$Q = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots + C_n U$$

$$Q = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) U$$

$$C \cdot U = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) U$$

Résultat: la capacité équivalente est égale à la somme des capacités des condensateurs montés enparallèle:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

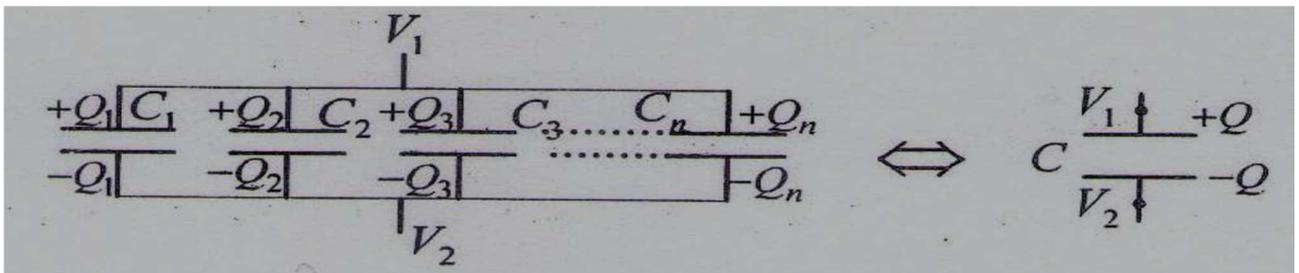


Figure -2.9-

$$\text{Donc } C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.9)$$

c- Energie emmagasinée dans un condensateur [1] :

L'étude théorique a démontré, comme le prouvent les expériences que l'énergie emmagasinée par un condensateur, chargé de charge Q , est proportionnelle au carré de la tension appliquée entre ses armatures. Son expression est :

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (2.10)$$

Sachant que

$$Q = C \cdot U,$$

On peut écrire :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2.11)$$

Chapitre III
ELECTROCINETIQUE

3.1 Conduction électrique :

3.1.1 Conducteur électrique :

En électricité, un conducteur est un matériau qui contient des porteurs de charge électrique pouvant se déplacer facilement. Lorsque ce conducteur est soumis à un champ électrique le mouvement de porteurs de charge devient globalement ordonné, ce qui fait qu'on observe un courant électrique.

Par extension, un conducteur est un composant électrique ou électronique de faible résistance, servant à véhiculer le courant d'un point à un autre.

Parmi les matériaux conducteurs, on peut citer les métaux, les électrolytes (ou solution ioniques) et les plasmas.

Les conducteurs parfaits n'existant pas, on utilise des conducteurs ohmiques, dont les meilleurs sont l'argent, l'or et l'aluminium. [1]

a. Origine du courant :

Le courant électrique est le déplacement des charges libres dans un matériau. Pour les conducteurs métalliques, les porteurs de charge libres sont les électrons.

b. Sens conventionnel du courant

Le sens conventionnel du courant, choisi par Ampère au début du dix-neuvième siècle, est opposé à celui des électrons. Cette convention est toujours en vigueur. Par conséquent, le courant électrique circule du pôle positif au pôle négatif à l'extérieur du générateur et du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur du générateur (figure 3.1).[3]

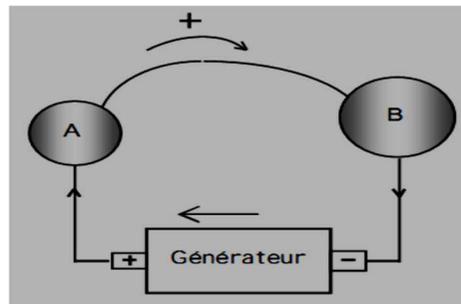


Figure -3.1-

c. Intensité du courant

Soit un conducteur métallique de section S . L'intensité I du courant électrique est, par définition, la quantité d'électricité dQ qui traverse la section S pendant un intervalle de temps dt .

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (3.1)$$

L'intensité I est exprimée en ampères (A).

NB: Un courant électrique est continu si son intensité I reste constante au cours du temps.

d. Vecteur densité de courant :

La densité de courant est un vecteur décrivant le courant électrique à l'échelle locale. Sa direction indique celle du déplacement des porteurs de charge (mais son sens peut être opposé pour des porteurs négatifs) et sa norme correspond à l'intensité du courant par unité de surface. Elle est relié au courant électrique par :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (3.2)$$

où : I est l'intensité du courant ; S une surface, j la densité de courant; dS le vecteur surface élémentaire.

Dans le système international d'unités, la densité de courant \vec{j} se mesure en ampères par mètre carré (A/m^2).

Pour un conducteur traversé par un courant constant et ayant un nombre n de charges libres par unité de volume, la densité de courant est donnée par :

$$\vec{j} = \frac{I}{S} = nqv \quad (3.3)$$

3.1.2 Loi d'Ohm :

L'expérience montre que : Le rapport, entre la différence de potentiel V entre deux points d'un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant,

$$U = R.I \quad (3.4)$$

C'est la loi d'Ohm. La constante R est la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohm (Ω).

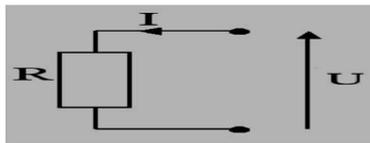


Figure -3.2-

3.1.3 Notions de conductivité, Résistivité et Mobilité :**a. Conductivité γ ($\Omega^{-1}m^{-1}$) :**

C'est une grandeur qui lie la densité de courant au champ électrique par l'intermédiaire de la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \gamma = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} \quad (3.5a)$$

En fonction des grandeurs microscopiques on a :

$$\gamma = \frac{ne^2}{k}$$

b. Résistivité ρ ($\Omega.m$):

C'est l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{R.S}{l} \quad (3.5b)$$

c. Mobilité $\mu(\text{m}^2/\text{V.s})$:

Elle lie la vitesse au champ électrique :

$$v = \mu E = \frac{eE}{k} \Rightarrow \mu = \frac{e}{k} \quad (3.5c)$$

3.1.4 Effet Joule : [1]

L'effet Joule est un effet de production de chaleur qui se produit lors de passage du courant électrique dans un conducteur présentant une résistance. Il se manifeste par une augmentation de l'énergie thermique du conducteur et de sa température. En effet ce type de conducteur transforme l'énergie électrique en énergie calorifique (énergie dissipée sous forme de chaleur). La puissance dissipé par ce conducteur est égale à :

$$P = RI^2 \quad (3.6)$$

L'unité de la puissance est le watt (W).

R : la résistance du conducteur.

I : l'intensité du courant qui traverse le conducteur.

D'après la définition de l'énergie, on en déduit que, l'énergie consommée par une résistance pendant le temps t est égale à :

$$E = U.I.t = R.I^2t = \frac{U^2}{R} t$$

L'unité de l'énergie est le joule (J).

3.1.5 Calcul de Résistance de conducteurs de formes différentes :

a. Conducteur cylindrique homogène de section S et Longueur l :

$$R = \frac{l}{\gamma S} = \rho \frac{l}{S} \quad (3.7a)$$

l : longueur du fil

R : Resistance du fil.

S : Section du fil

b. Conducteur sphérique concentriques :

$$R = \frac{1}{4\pi\gamma} \left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right] \quad (3.7b)$$

c. Conducteur cylindriques concentriques :

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \quad (3.7c)$$

3.1.6 Associations de Résistances [3] :

a. En série :

Le même courant I traverse toutes les résistances, montées en série.

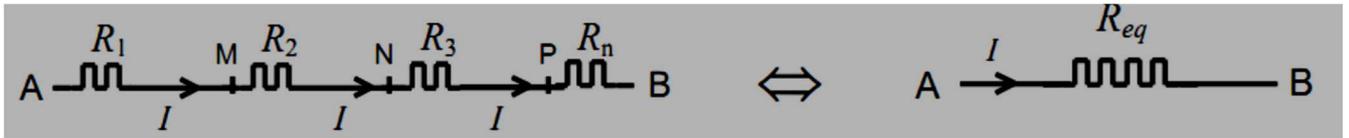


Figure -3.3-

$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_N) + (V_N - V_P) + \dots$$

$$\text{Soit : } V_A - V_B = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = R_{eq} I$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.8a)$$

La résistance équivalente est égale à la somme des résistances.

b. En parallèle:

A présent la même différence de potentiel $V = V_A - V_B$ est appliquée aux bornes des résistances, par conséquent :

$$V = V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = \dots = R_n I_n$$

$$\text{Et } I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$\text{Donc } \frac{V_A - V_B}{R_{eq}} = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + \dots + \frac{V_A - V_B}{R_n} = I$$

D'où la résistance équivalente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (3.8a)$$

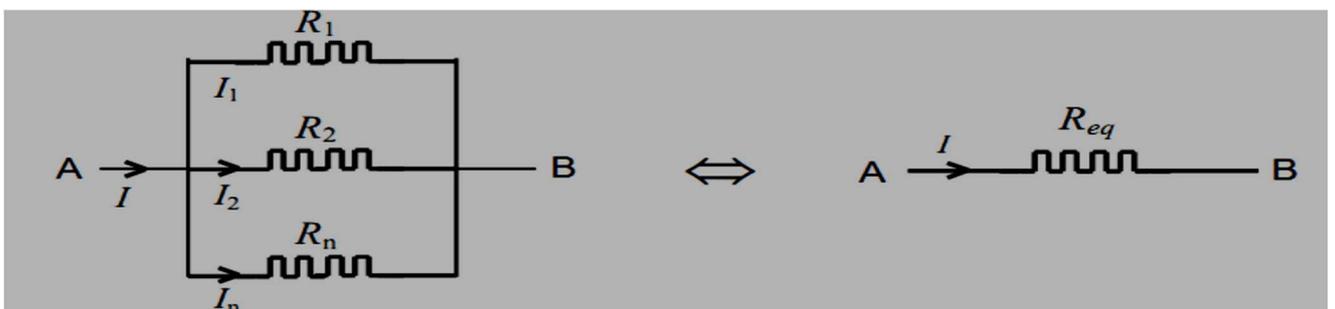


Figure -3.4-

3.2 Réseaux Electriques :

3.2.1 Eléments du circuit électrique :

Réseau: est un circuit complexe constitué d'un ensemble de dipôles (résistances, générateurs, récepteurs...) reliés entre eux (figure 3.5)

Nœud: on appelle nœud, un point tel que (A), où aboutissent au moins trois dipôles du réseau.

Branche: une branche est une portion du réseau telle que (AB), comprise entre deux nœuds.

Maille: une maille du réseau est constituée par un ensemble de branches, formant un circuit fermé tel que (ABC).

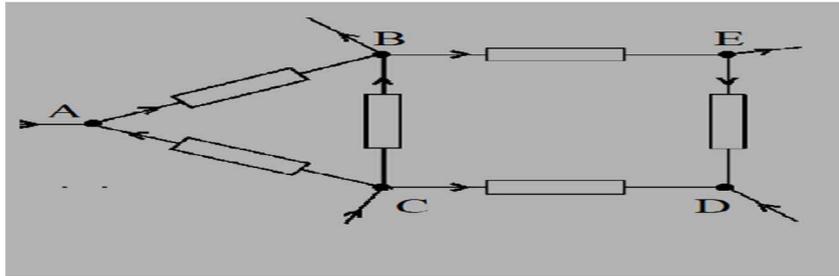


Figure -3.5-

3.2.2 Générateurs électriques :

a. Définition

Un générateur électrique est un dispositif qui, placé dans un circuit électrique, est capable de maintenir un champ électrique. Ce dernier, en déplaçant les charges mobiles, assure la circulation du courant électrique et le transport de l'énergie à travers le circuit.

Remarque: Notons que cette énergie n'est pas créée par le générateur, ce dernier ne fait que transformer une forme d'énergie, mécanique, chimique, lumineuse etc.. en une énergie électrique. Exemple : La pile transforme de l'énergie chimique en une énergie électrique, le dynamo transforme de l'énergie mécanique en une énergie électrique [3]

b. Générateurs ou sources de tension :

La source de tension, ou générateur de tension, est un dipôle caractérisé par une tension constante entre ses bornes, quelque soit l'intensité variable qu'il débite. Dans tout ce qui suit, nous allons nous intéresser particulièrement aux générateurs de tension continue. Ce type de générateur est caractérisé par une force électromotrice (e), et une faible résistance intérieure (r). La figure 3.6 représente le schéma de ce type de générateurs. Il est possible de remplacer un générateur de tension, dont les caractéristiques sont (e, r), par une source idéale, de force électromotrice e , montée en série avec le conducteur ohmique, de résistance r , comme indiqué sur la figure 3.6 La force électromotrice d'un générateur de tension est égale à la différence de potentiel entre ses bornes quand il ne débite aucun courant :

$$I = 0 \Leftrightarrow e = U_{AB}$$

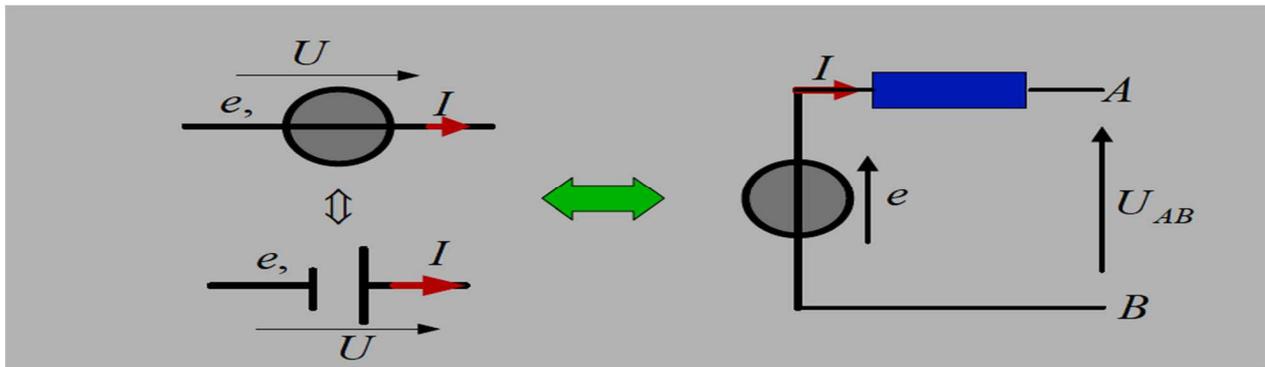


Figure -3.6-

c. Générateurs ou sources de courant [4] :

La source de courant, ou générateur de courant, est un dipôle caractérisé par le débit d'un courant constant, quelque soit la différence de potentiel variable entre ses bornes. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser essentiellement aux générateurs de courant continu. On peut réaliser ce type de sources à l'aide de systèmes électroniques, la tension entre les bornes de chacune d'elles étant limitée par une valeur maximale. On représente ce type de générateurs par le schéma de la figure 3.7. On peut remplacer un générateur de courant par une source de courant idéale, qui débite un courant constant, et montée en parallèle avec un conducteur ohmique, de résistance, comme indiqué sur la figure 3.7.

$$I = I_0 - \frac{U}{r}$$

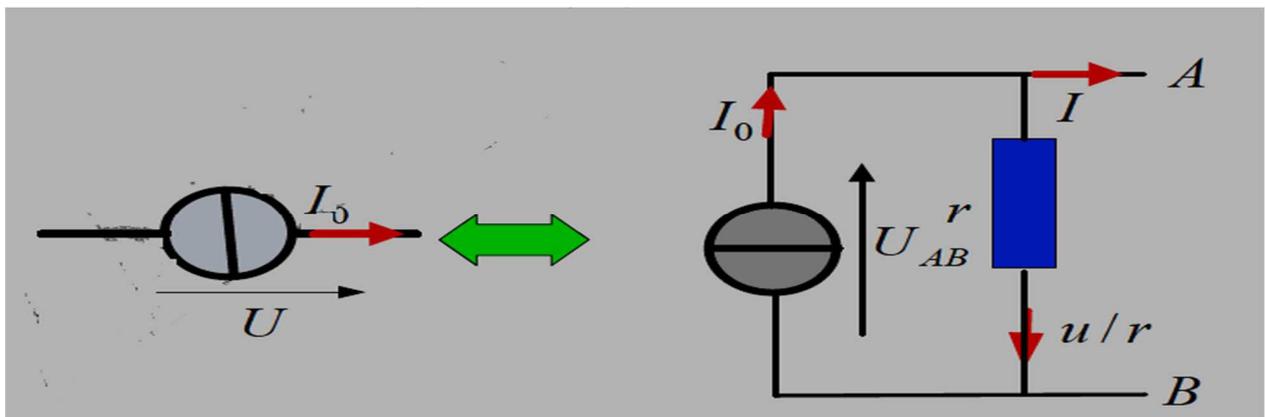


Figure -3.7-

d. Force électromotrice (f.é.m) :

Une quantité de charge élémentaire dq est soumise à l'action:

- d'une force électrostatique: $d\vec{F}_S = dq\vec{E}_S$

- d'une force produite par le générateur: $d\vec{F}_m$ appelée force motrice.

\vec{E}_S désigne ici le champ électrostatique.

Comme les charges sont immobiles, on a:

$$d\vec{F}_S + d\vec{F}_m = \vec{0} \Rightarrow d\vec{F}_m = -dq\vec{E}_S$$

Cette condition, n'est satisfaite que si la force motrice est, elle aussi, proportionnelle à dq .

On écrit alors:

$$d\vec{F}_m = dq\vec{E}_m$$

Le vecteur \vec{E}_m est appelé champ électromoteur.

A vide : $\vec{E}_S = -\vec{E}_m$

La différence de potentiel aux bornes du générateur est:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_S \cdot d\vec{l} \text{ soit } V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Cette quantité :

$$e = V_A - V_B$$

est une caractéristique du générateur; c'est sa **force électromotrice (f.é.m.)**, elle est mesurée en volts:

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

3.2.3 Récepteurs :

Les récepteurs sont des systèmes qui, parcoururent par un courant électrique, transforment l'énergie électrique sous une autre forme d'énergie. Les récepteurs actifs fournissent de l'énergie mécanique, chimique, lumineuse etc... Par contre, les récepteurs passifs, comme les résistances, dissipent l'énergie absorbée sous forme de chaleur.

a. Force contre électromotrice "f.c.é.m" d'un récepteur :

Un récepteur exerce sur les charges électriques qui le traversent, une force résistante. Celle-ci est due à un champ contre électromoteur C E.

Le travail de ce champ donne naissance à une force contre électromotrice e' , exprimée par le rapport entre l'énergie électrique transformée par le récepteur et la quantité de charge Q qui le traverse pendant un temps t .

Comme pour les générateurs, un récepteur peut être modélisé comme suit :

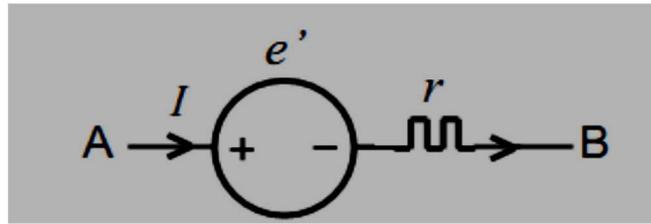


Figure -3.8-

Dans un récepteur, le courant entre par la borne positive de ce dernier et sort par sa borne négative.

- e' représente la f.c.é.m du récepteur.

- r est sa résistance interne.

b. Différence de potentiel "d.d.p" aux bornes d'un récepteur [3]:

Un récepteur placé dans un circuit parcouru par un courant I , reçoit du reste du circuit une puissance totale s'écrit : $P = (V_A - V_B) I$.

Une partie de cette puissance est dissipée par effet Joule à l'intérieur du récepteur et a pour expression: rI^2 .

L'autre partie est transformée sous une autre forme, elle s'écrit: $e'I$. Le principe de conservation de l'énergie nous permet d'écrire:

$$(V_A - V_B) I = e'I + rI^2$$

Soit :

$$(V_A - V_B) = e' + rI$$

c. Rendement du récepteur :

Son rendement est le rapport entre la puissance consommée ou utile (P_u) par cet élément sur celle qui lui est fournie (P_f) .il s'écrit alors :

$$R = \frac{P_u}{P_f} = \frac{e}{e + rI}$$

3.2.4 Les lois de Kirchhoff:

a. Conservation de la charge ou loi des nœuds :

En un nœud d'un circuit, la somme des intensités entrant est égale à la somme des intensités sortant :

$$\sum I_s = \sum I_e \quad (3.9a)$$

Cela signifie que les charges ne s'accumulent pas, elles s'écoulent en un nœud du réseau, elles obéissent à la règle de la conservation de la charge.

b. Conservation de l'énergie ou loi des mailles :

En une maille k d'un circuit électrique, la somme algébrique des produits de résistance par l'intensité du courant ($\sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k$) est égale à la somme algébrique des forces électromotrices ($\sum_{k=1}^n e_k$).

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k \quad (3.9b)$$

Cette règle est une traduction de la loi de conservation de l'énergie, elle est en accord avec la relation précédente.

✓ **Conseil utile :** Lorsqu'on applique les lois de Kirchhoff, il est conseillé d'observer les règles suivantes :

- Quand on applique la première loi, veiller à ce que la somme des courants entrant soit égale à la somme du courant sortant.
- Quand on applique la deuxième loi, on doit choisir un sens positif autour de la maille : toutes les forces électromotrices et les courants qui ont ce même sens seront comptés positivement, ceux qui sont de sens contraires seront comptés négativement.

On considère le sens de e positif quand on entre, d'après le sens positif choisi, par le pôle négatif et qu'on sort par le pôle positif, et l'inverse dans le cas contraire. Dans le cas des réseaux complexes, il est difficile de connaître le nombre d'équations indépendantes, pour en déduire toutes les inconnues. A cette fin, il est conseillé d'utiliser les deux règles suivantes :

- Si le nombre de nœuds dans le réseau électrique est m , la loi des nœuds s'applique à $m-1$ nœuds. Le choix des nœuds se fait en toute liberté.
- Séparer le réseau en ses composantes de mailles indépendantes (une maille est dite indépendante si elle a au moins une branche non commune avec une autre maille), considérer chaque maille comme étant seule et lui appliquer la deuxième loi de Kirchhoff.

Nous allons montrer comment appliquer ces règles et lois dans les exemples suivants :

✓ **Exemple :**

La figure 3.9a représente un circuit électrique fermé. On se propose d'appliquer les deux lois de Kirchhoff en écrivant toutes les équations correspondantes. Les résistances internes des générateurs et du moteur sont négligeables.

✓ **Réponse :**

- **Application de la première loi :** Il y a quatre nœuds auxquels correspondent quatre équations :

$$\text{Au nœud A: } I_1 = I_2 + I_3$$

$$\text{Au nœud B : } I_1 = I_5 + I_6$$

$$\text{Au nœud C: } I_2 = I_5 + I_4$$

$$\text{Au nœud D : } I_6 = I_4 + I_3$$

- **Application de la deuxième loi** : Il y a trois mailles indépendantes. Après le choix des sens comme indiqué sur la figure 3.9b, on peut écrire les différentes équations :

$$\text{Mailles 1: } e_1 - e_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5$$

$$\text{Mailles 2: } e_2 = R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_2 I_2$$

$$\text{Mailles 3: } -e_6 = R_6 I_6 + R_4 I_4 - R_5 I_5$$

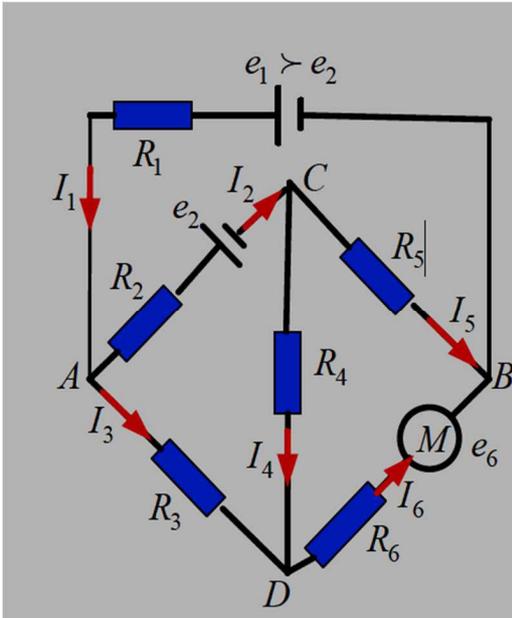


Figure -3.9a-

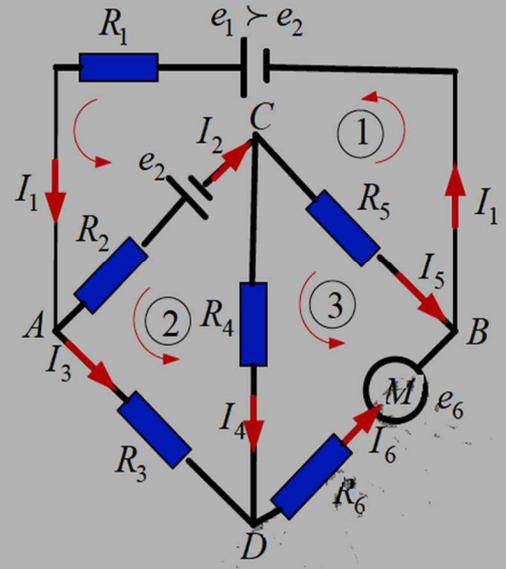


Figure -3.9b-

Remarque : Les mailles $(e_1 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow e_1)$ et $(A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A)$ ne présentent aucun intérêt puisqu'elles ne sont pas indépendantes.[4]

3.2.5 Charge et décharge d'un condensateur :

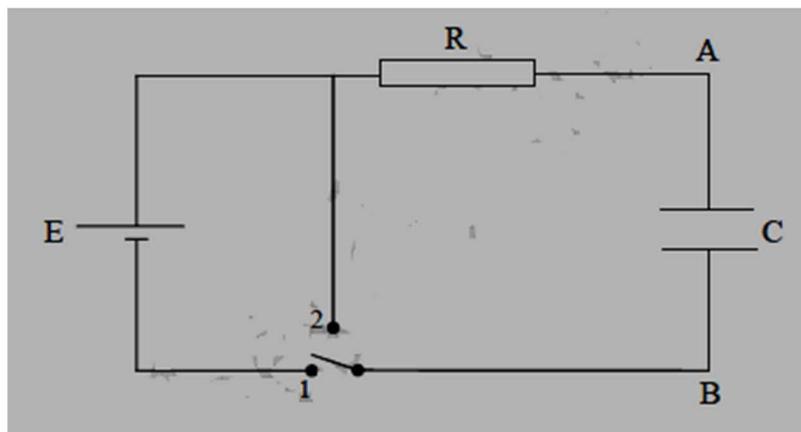


Figure -3.10-

a. Charge d'un condensateur :

Initialement, on suppose que la DDP aux bornes du condensateur est nulle de même que sa charge

- A $t = 0$, on ferme l'interrupteur (position 1)

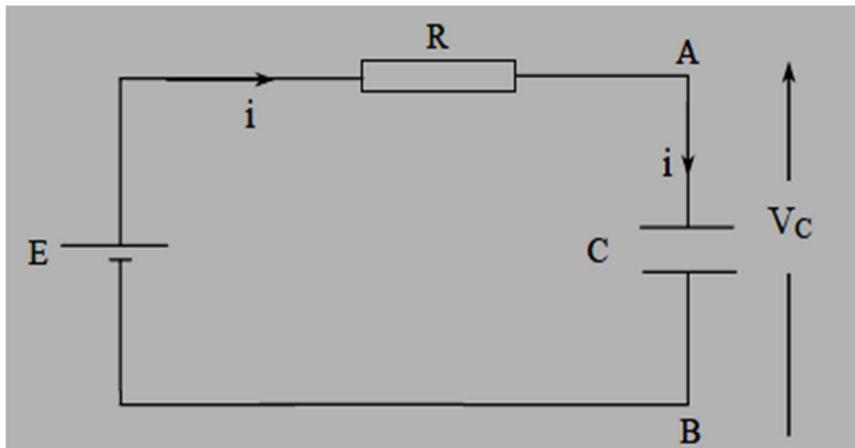


Figure -3.11-

Appliquons au circuit la loi d'ohm à un instant quelconque :

$$E = R i + V_C$$

Avec $i = \frac{dq}{dt}$ et $V_C = \frac{q}{c}$

Donc

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparées qu'on peut résoudre en tenant compte des conditions initiales :

$$t = 0 \quad q = 0$$

$$t = \infty \quad q = Q_0 = CE$$

Solution :

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} \Rightarrow \frac{1}{R} (E - \frac{q}{c}) = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{CE - q}{Rc} = \frac{dq}{dt}$$

Il vient : $\frac{dq}{CE - q} = \frac{dt}{Rc} \Rightarrow \frac{dq}{q - CE} = - \frac{dt}{Rc}$

Donc

$$\ln(q - CE) = - \frac{t}{Rc} + k$$

Ou à $t = 0, q = 0$

$$\ln(-CE) = k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln(q - CE) &= -\frac{t}{Rc} + \ln(-CE) \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{q-CE}{-CE}\right) &= -\frac{t}{Rc} \\ \Rightarrow \frac{CE-q}{CE} &= e^{-\frac{t}{Rc}} \\ \Rightarrow q &= CE(1 - e^{-\frac{t}{Rc}}) \quad (3.10a) \end{aligned}$$

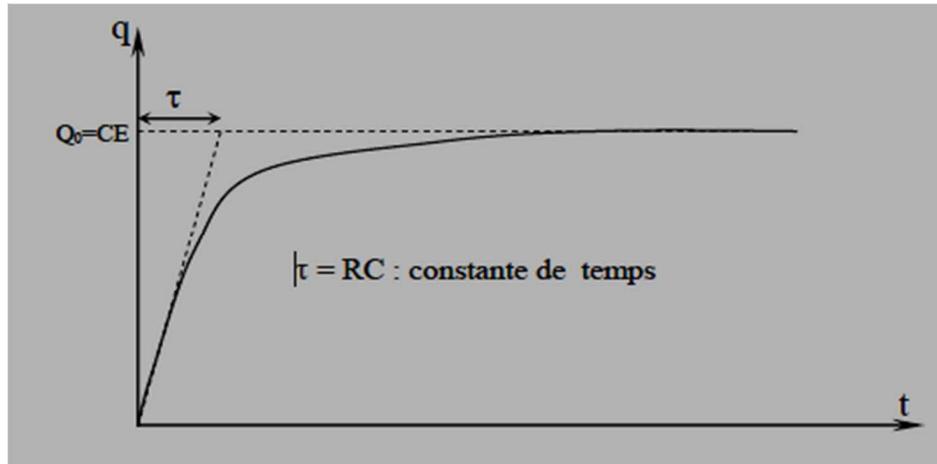


Figure -3.12-

b. Décharge d'un condensateur [1]:

Interrupteur en (position 2)

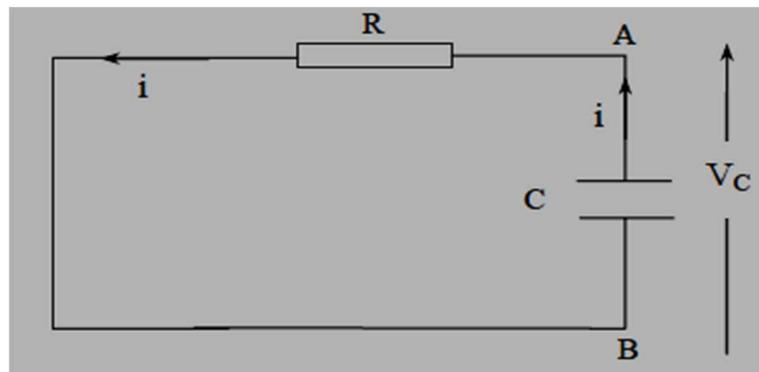


Figure -3.13-

On considère qu'à $t = 0, Vc = V_0 = E$ et $Q_0 = CV_0 = CE$

$$\begin{aligned} Ri + Vc &= 0 \\ \Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dq}{q} &= -\frac{dt}{Rc} \\ \Rightarrow \ln q &= -\frac{t}{Rc} + Cte \end{aligned}$$

Il vient :

$$q = ke^{-\frac{t}{Rc}} \quad k : \text{constante}$$

Ou à $t = 0, q = Q_0 = CV_0 = CE$

On obtient donc :

$$q = CV_0 e^{-\frac{t}{Rc}} = CE e^{-\frac{t}{Rc}} \quad (3.10b)$$

$$\text{d'ou : } i = \frac{dq}{dt} = \frac{CV_0}{Rc} e^{-\frac{t}{Rc}}$$

$$\Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{Rc}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{Rc}}$$

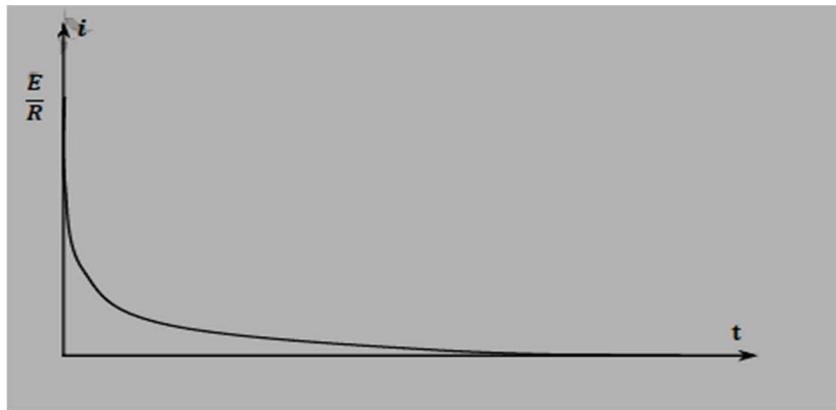


Figure -3.14-

3.2.6 Energies mises en jeu [6] :

- Energie fournie par le générateur :

$$W_g = \int_0^{Q_f} E dq = EQ_f = CE^2 \quad (3.11a)$$

- Energie emmagasinée dans la capacité :

$$W_c = \int_0^{Q_f} V dq = \frac{1}{2} CE^2 \quad (3.11b)$$

- Energie perdue par effet joule :

$$W_R = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} CE^2 \quad (3.11c)$$

Chapitre VI
INTERACTION ET
INDUCTION MAGNETIQUE

4 L'interaction magnétique :

4.1 Définition:

- L'interaction magnétique est la propriété que possèdent certains corps pour attirer des morceaux de fer .ces corps sont appelés : corps magnétique ou aimant.
- L'aimant possède deux point ou l'interaction magnétique est la plus intense : ce sont les pôles
- Les pôles d'un même aimant sont donc différents : l'un est le pole Nord, l'autre le pôle Sud.
- Nous caractérisons l'espace autour d'un aimant par un champ magnétique (comme pour le champ de gravitation et électrique). Il y a donc des lignes de champ magnétique. les lignes de champ magnétique quittent l'aimant par un pôle Nord et se referment sur le pôle Sud.

On caractérise cet état par un vecteur \vec{B} tangent aux lignes de champ appelé : vecteur induction magnétique.

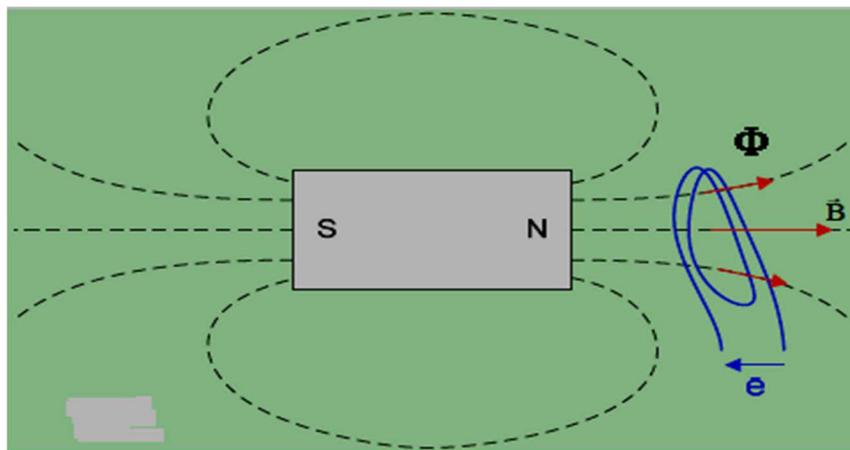


Figure -4.1-

4.2 Action d'un champ magnétique sur une charge en mouvement :

4.2.1 Force de Lorentz :

Le physicien hollandais Hendrik Lorentz donne l'expression de la force \vec{F} qui s'exerce sur une charge ponctuelle q , se déplaçant à la vitesse \vec{V} dans des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} et :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (4.1)$$

En présence du seul champ magnétique \vec{B} ($\vec{E} = 0$), la force de Lorentz devient:

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (4.2)$$

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en l'absence du champ électrique \vec{E} , une charge q animée d'une vitesse \vec{V} , est soumise à l'action d'une force :

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$$

Cette nouvelle définition du champ magnétique est obtenue à partir de la force de Lorentz. Cette force :

- a pour module: $F = qVB|\sin(\vec{V}, \vec{B})|$.
- sa direction est la perpendiculaire au plan formé par \vec{V} et \vec{B} .
- Son sens est tel que, dans le cas d'une charge positive, les vecteurs \vec{V} , \vec{B} et \vec{F} forment un trièdre direct (règle de la main droite). Lorsque la charge est négative la force change de sens.

Le sens de cette force est également donné par la règle du bonhomme d'Ampère:

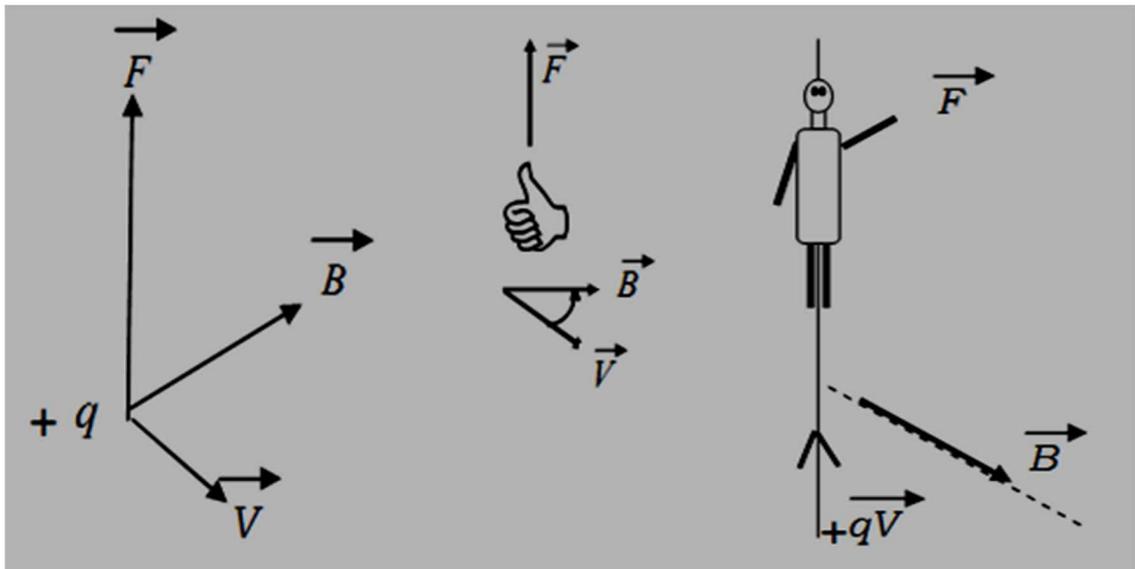


Figure -4.2-

Le bonhomme d'Ampère, traversé des pieds vers la tête par la charge (+q) animée d'une vitesse V, voit fuir les lignes de champ, et à la force à sa gauche.

4.2.2 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique

Une particule, de masse m portant une charge électrique q, se déplace dans un champ magnétique uniforme B avec une vitesse constante V perpendiculaire à B. Elle est donc soumise à une force dont l'expression est:

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$$

Cette force est perpendiculaire à \vec{V} et \vec{B} et son module est:

$$F = qVB \quad (4.2.1)$$

Elle reste perpendiculaire à \vec{V} au cours du mouvement. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle.

L'accélération étant centripète ($a = a_N$).

La relation fondamentale de la dynamique permet d'exprimer le module de la force sous la forme:

$$F = m \frac{V^2}{R} \quad (4.2.2)$$

R est le rayon de la trajectoire circulaire. Avec (4.2.1) et (4.2.2), il vient:

$$m \frac{V^2}{R} = qVB \quad (4.3)$$

A partir de cette expression, on obtient :

- Le rayon du cercle décrit par la particule: $R = \frac{mV}{qB}$

On note que plus le champ magnétique n'est intense, plus le rayon de la trajectoire n'est petit.

- Le module de la vitesse angulaire du mouvement $\omega = \frac{V}{R}$ qui s'écrit: $\omega = \frac{q}{m} B$

ne dépend que du rapport q/m et de l'intensité du champ magnétique B .

Sens de la vitesse angulaire :

Dans un mouvement circulaire uniforme, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{\omega} \wedge \vec{V})$$

$$\text{On a : } m(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \text{ soit } \vec{\omega} \wedge \vec{V} = -\frac{q}{m}(\vec{B} \wedge \vec{V})$$

$$\text{D'où } \vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}$$

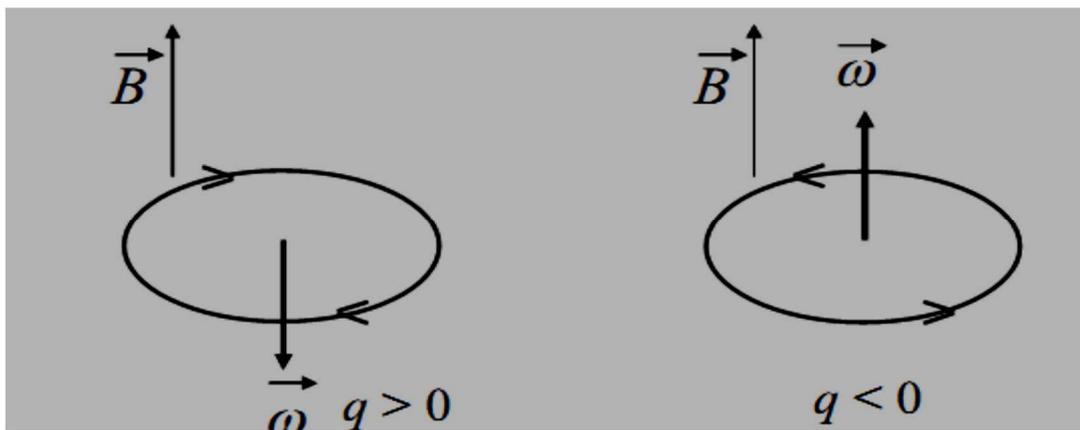


Figure -4.3-

- Si la charge de la particule est positive ($q > 0$) ω et B sont de sens contraires.
- Sinon ($q < 0$) ω et B ont le même sens.

✓ Cas où la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au champ:

Dans ce cas, on décompose la vitesse en deux composantes:

$$\vec{V} = \vec{V}_{//} + \vec{V}_{\perp}$$

$\vec{V}_{//}$ Est parallèle à \vec{B} : cette composante n'est pas

affectée par \vec{B} , la particule prend un mouvement rectiligne et uniforme.

\vec{V}_{\perp} est perpendiculaire à \vec{B} : le mouvement de la particule est circulaire et uniforme.

Le mouvement résultant est un mouvement hélicoïdal. La trajectoire est une hélice [1]

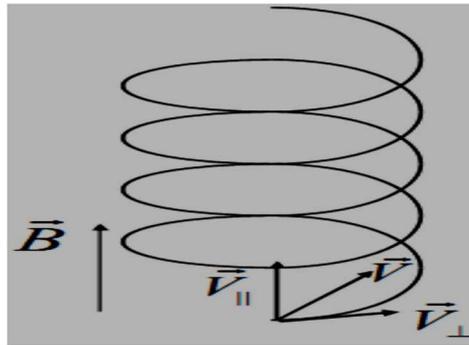


Figure -4.4-

4.3 Effet Hall (1880):

Considérons une plaquette conductrice de longueur L , de largeur a et de faible épaisseur b .

La plaquette est parcourue par un courant d'intensité I et placée dans un champ magnétostatique uniforme et perpendiculaire à sa plus grande face. On observe l'apparition d'une d.d.p. U_H entre les bords de la plaquette. Cette tension est dite tension de Hall en hommage a EDWIN HALL qui découvrit le phénomène en 1880.

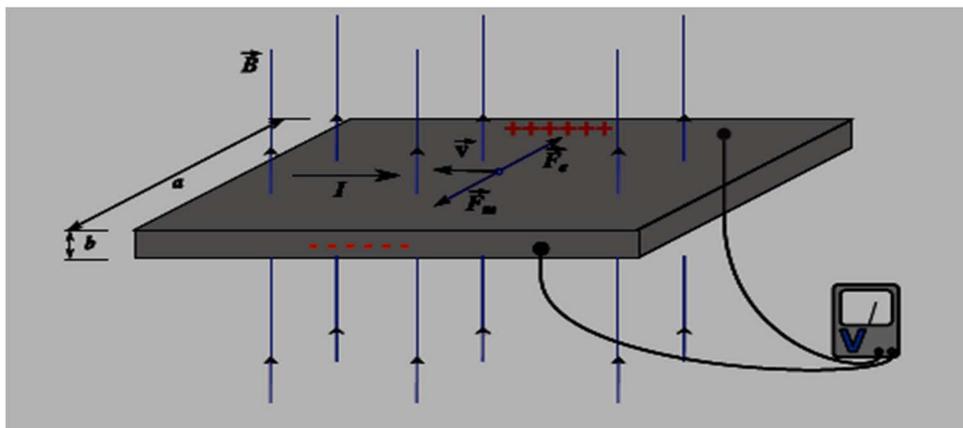


Figure -4.5-

Interprétation : Rigoureusement, il faut une description quantique de la conduction électrique (théorie des bandes) pour décrire correctement l'effet Hall. Cependant, pour une description qualitative, un modèle classique suffit. La force magnétique concentre les charges mobiles sur un bord ce qui produit une force électrique s'opposant à la force magnétique. Une situation d'équilibre apparaît très vite quand :

$$q_- \vec{E} + q_- \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow E = vB$$

Le champ électrique est tel que le trièdre $(\vec{B}, \vec{v}, \vec{E})$ est direct. La tension de Hall est la circulation du champ électrique entre les bords. Le champ électrique étant constant on a tout simplement :

$$U_H = E \times a = vBa \quad (4.4)$$

Or le courant électrique vaut $I = n_- |q_-| vab$

$$D'où \begin{cases} U_H = R_H I \\ R_H = \frac{B}{|q_-| n_- b} \end{cases}$$

Avec R_H une grandeur homogène à une résistance appelée résistance de Hall.

Commentaires :

- Le modèle prévoit donc que la tension de Hall est proportionnelle au champ magnétique. Cet effet est utilisé pour la mesure du champ magnétique dans les *Tesla mètres à effet Hall*.
- Pour un champ magnétique de 1T, une intensité électrique de 1A et une épaisseur $b = 100\mu\text{m}$

On obtient :

$$U_H \approx \frac{1}{10^{-19} 10^{-4} 10^{29}} = 1\mu\text{V}$$

dans un métal. Cette tension est donc difficilement mesurable. Par contre, dans un semi-conducteur l'effet est multiplié par 10^6 car la densité des porteurs de charge est beaucoup plus faible ce qui explique leur utilisation dans les Tesla mètres.

- En réalité ce modèle décrit correctement ce qui se passe dans les métaux alcalins en champ fort. Dans les autres cas il faut une description plus complète (théorie quantique de la conduction) pour expliquer les résultats.

4.4 Magnétisme dans les conducteurs :

4.4.1 Force de Laplace :

La force de LAPLACE est la force magnétique qui s'exerce sur un conducteur traversé par un courant électrique.

Considérons un conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité I en présence d'un champ magnétostatique \vec{B} . Admettons que ce conducteur soit en mouvement dans le champ magnétique et analysons les forces qui s'exercent sur une portion orientée \vec{dl} de conducteur.

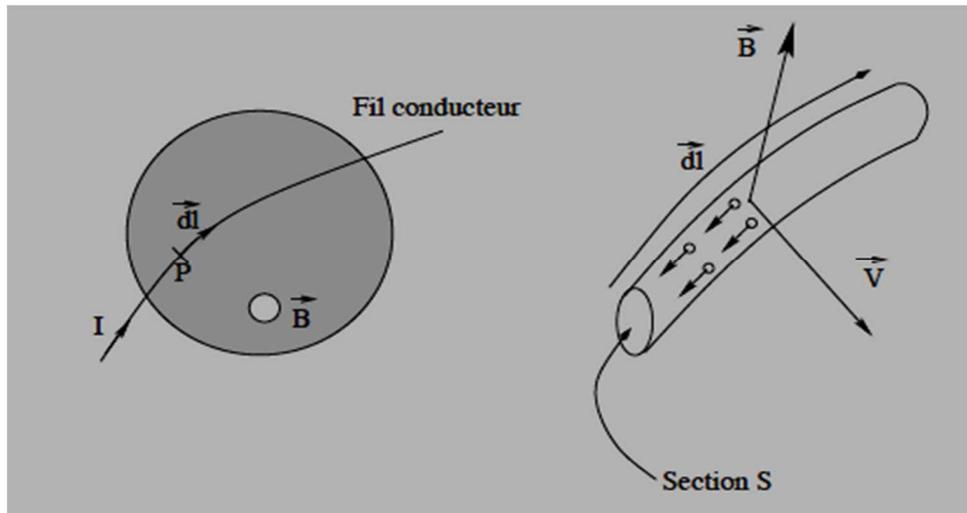


Figure -4.6-

Adoptons la notation suivante :

S : section du fil conducteur

n_- : nombre de porteurs de charges mobiles (charges q_-) par unité de volume

n_+ : nombre de cations fixes (charges q_+) constituant le réseau par unité de volume.

\vec{V} : vitesse du conducteur *par rapport au laboratoire*.

\vec{v} : vitesse moyenne des porteurs de charge *par rapport au conducteur*.

L'électro neutralité du conducteur impose

$$n_-q_- + n_+q_+ = 0$$

La force magnétique s'exerçant sur une portion de conducteur $d\vec{l}$ s'écrit :

$$d\vec{F} = n_-Sdlq_-(\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B} + n_+Sdlq_+\vec{V} \wedge \vec{B} = n_-Sdlq_-\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or l'intensité électrique vaut :

$$I = jS = |q_-|n_-Sv$$

Ainsi la force magnétique qui s'exerce sur une portion de longueur orienté d'un conducteur & vaut :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

où I est l'intensité algébrique du courant électrique.

La résultante des forces s'écrit alors :

$$d\vec{F} = \oint_{\&} I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Notez que si le champ magnétique est uniforme, la force de Laplace se simplifie en :

$$\vec{F} = I \vec{L} \wedge \vec{B} \quad (4.5)$$

Avec \vec{L} le vecteur qui joint les extrémités de la portion de circuit qui plonge dans le champ magnétique.

La conséquence immédiate de cette formule est que si un circuit fermé plonge complètement dans un champ magnétique, la résultante des forces de Laplace est nulle car $\vec{L} = \vec{0}$.

La force de Laplace possède de nombreuses applications dans le domaine électrotechnique :

- Le moteur électrique continu qui produit un mouvement rotatif à l'aide d'un courant continu dans un champ magnétique radial,
- Le haut-parleur électrodynamique Figure 4.7 qui produit un déplacement alternatif d'une membrane avec un courant alternatif ; il y a alors transformation d'une énergie électrique en énergie sonore (et en chaleur par effet joule),
- L'ampèremètre à aiguille qui relie la mesure d'une intensité électrique à un angle de torsion d'un circuit électrique dans un champ magnétique [5]

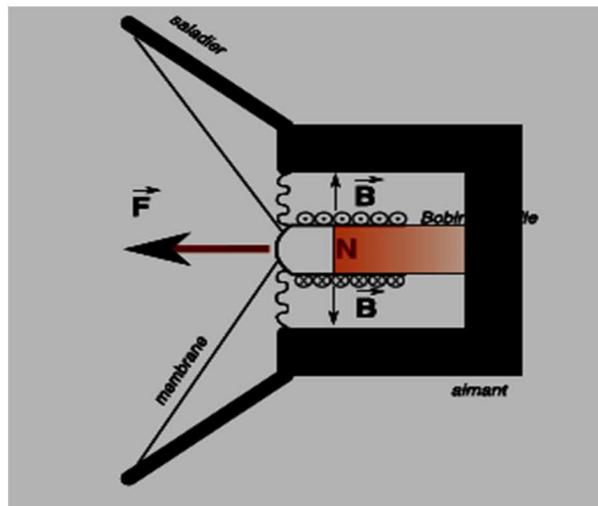


Figure -4.7-

4.5 Champ magnétique créé par un courant:

4.5.1 Loi de Biot et Savart

Les physiciens français Biot et Savart ont trouvé l'expression du champ magnétique obtenu lors de l'expérience d'Oersted.

Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie, parcouru par un courant I , crée, en un point M de l'espace situé à une distance r du fil, un champ magnétique dont:

- la direction est telle que les lignes de champ soient des cercles axés sur le fil.

- le sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère: celui-ci, lorsqu'il est parcouru par I, des pieds vers la tête, voit en M le champ à sa gauche Figure 4.8

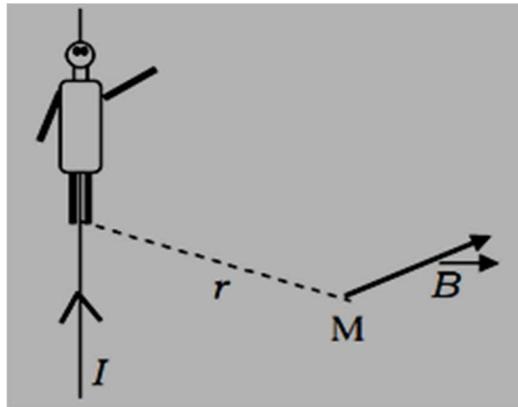


Figure -4.8-

- le module est:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

Dans le système MKSA, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ henry par mètre: H/m.

Dans le cas d'un circuit fermé de forme quelconque, chaque élément de courant.

$I dl$, crée en M un champ élémentaire:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{\mu}}{4\pi r^2} \quad (4.6)$$

C'est l'expression de la loi de Biot & Savart dans le cas général. Le vecteur $\vec{\mu}$ est orienté, Comme le montre la figure, de la source vers le point M.

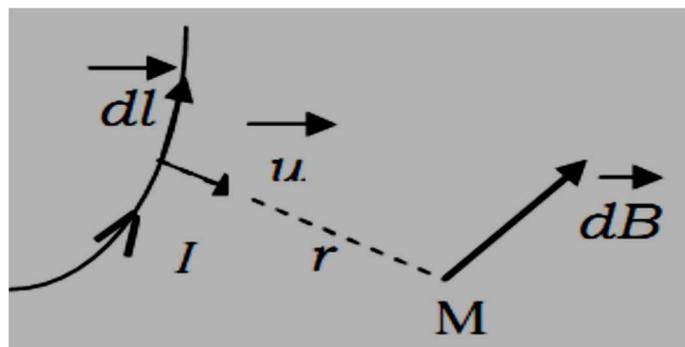


Figure -4.9-

Remarque: Il existe une différence notable entre la nature vectorielle du champ électrique \vec{E} et celle du champ magnétique \vec{B} , \vec{E} est un vecteur polaire (un vrai vecteur), il est dirigé suivant la droite qui joint la charge source au point M origine du champ. Par contre \vec{B} est un vecteur axial ou pseudo vecteur, qui est défini à partir d'un produit vectoriel (loi de Biot).

4.5.2 Champ créé par une spire circulaire en un point de son axe :

Un élément dl d'une spire, parcourue par un courant I , produit en un point M de l'axe de la spire, un champ magnétique \vec{dB} . Il est perpendiculaire à \vec{dl} et \vec{u} , son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère et son module est :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

En raison de la symétrie du problème, toutes les composantes perpendiculaires à l'axe s'éliminent, et les composantes suivant oz

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin\theta$$

S'ajoutent. Le champ résultant est porté par l'axe de la spire et a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r^2} I \int_0^{2\pi R} dl$$

Soit :

$$B = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r^2} IR$$

R étant le rayon de la spire et sachant que $\sin\theta = \frac{R}{r}$ on a :

$$B = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi r^2} I$$

Soit :

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} I \quad (4.7)$$

Au centre de la spire, le champ a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0}{2R} I$$

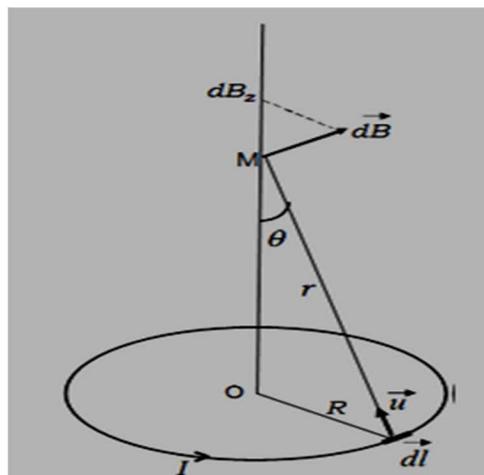


Figure -4.9-

4.6 Dipôle magnétique :

On peut écrire l'expression (4.7) du champ sur l'axe de la spire sous la forme :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} I \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Où $M = \pi R^2 I$ est le module du moment magnétique de la spire .

Si le rayon R de la spire est très petit .il peut être négligé devant z, on à alors :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{z^3}$$

On retrouve une expression analogue à celle du champ électrique crée par un dipôle sur son axe :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{z^3}$$

C'est la raison pour laquelle on dit qu'une spire, de très faible rayon, parcourue par un courant, constitue un dipôle magnétique.

Si on calcule le champ magnétique créé par un tel dipôle, on trouve un vecteur B dont les composantes radiale et tangentielle sont:

$$B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{z^3} \cos\theta \quad (4.8.1)$$

Et

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{r^3} \sin\theta \quad (4.8.2)$$

**TRAVAUX
DIRIGÉES**

TDN°01 (Electrostatique)**EX01 :**

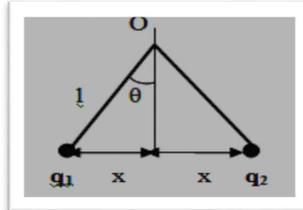
Deux sphères conductrices identiques de masse $m = 10 \text{ g}$ portent des charges q_1 et q_2 . On les met en contact, puis on les sépare.

1. Calculer les charges q'_1 et q'_2 qu'elles prennent dans les cas suivants :

- $q_1 = +4 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = 0 \text{ C}$.
- $q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = +8 \times 10^{-8} \text{ C}$.
- $q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = -8 \times 10^{-8} \text{ C}$.

Préciser chaque fois le sens du transfert d'électrons.

2. Les deux masses sont suspendues au même point O par deux fils identiques de Nylon de longueur $l = 80 \text{ cm}$ (figure ci-dessous). En négligeant la masse des fils, calculer la distance $2x$ séparant les deux sphères pour les 3 cas précédents (on supposera que l'angle θ est suffisamment petit et $g = 10 \text{ m/s}^2$).

*fig1***EX02:**

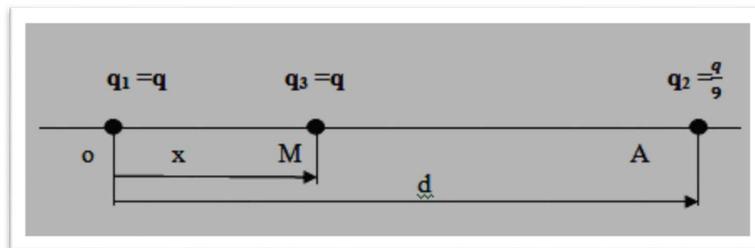
Deux sphères conductrices identiques portant des charges de signes opposés s'attirent avec une force de 0.108 N , quand la distance qui les sépare est $d = 0.5 \text{ m}$. On les relie à l'aide d'un fil conducteur.

Après avoir enlevé le fil, elles se repoussent avec une force de 0.036 N , pour la même distance. Quelle était la charge initiale de chaque sphère ? (Les rayons des sphères sont très négligeables devant la distance d).

EX03 :

On considère le système de charges ponctuelles, représenté sur la figure ci-dessous. Les charges positives q_1 et q_2 sont fixées respectivement aux points O et A distants de d . Soit une charge q_3 , assujettie à se déplacer le long du segment OA :

- Donner l'expression de la force qui s'exerce sur q_3 au point M.
- A quelle abscisse x_0 , la charge q_3 est dans une position d'équilibre ? A.N : $d = 4 \text{ cm}$.

*fig2***EX04:**

Deux charges électriques ponctuelles ($+q$) sont séparées par une distance $2a$. On place une autre charge ponctuelle mobile dans le plan médiateur du segment $2a$.

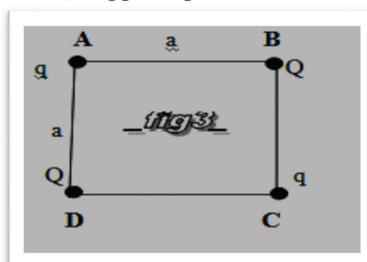
-Montrer qu'il existe, dans ce plan, un cercle pour lequel la charge mobile est soumise à une force maximale. Déterminer son rayon.

EX05:

Deux charges ponctuelles Q sont placées aux deux coins opposés d'un carré de côté a .

Deux autres charges q sont placées aux autres coins du même carré (voir la fig3).

- Déterminer l'expression de la force électrique qui s'exerce sur la charge Q du point B.
- Quelle doit être la relation entre Q et q pour que cette force soit nulle.



Solution TDN°01 (Electrostatique)**Solution EX01 :**

1) Calculer les charges q'_1 et q'_2 qu'elles prennent dans les cas suivants :

Comme les deux sphères sont identiques elles porteront donc la même charge finale.

Le système constitué par les deux sphères est isolé, il y a donc conservation de la charge totale :

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 = 2q'_1 \rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

a) $q_1 = +4 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = 0 \text{ C} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = 2 \times 10^{-8} \text{ C}$

(Le transfert d'électron s'est fait de q_1 vers q_2)

b) $q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = +8 \times 10^{-8} \text{ C} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = 5,5 \times 10^{-8} \text{ C}$

(Le transfert d'électron s'est fait de q_2 vers q_1)

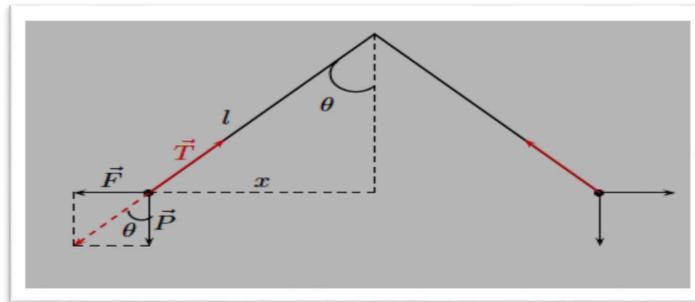
c) $q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = -8 \times 10^{-8} \text{ C}$.

(Le transfert d'électron s'est fait de q_2 vers q_1)

2) Calculer la distance $2x$ séparant les deux sphères pour les 3 cas précédents (on supposera que l'angle θ est suffisamment petit)

Après le contact, les deux sphères portent la même charge et se repoussent donc par une force électrique :

$$\vec{F} = \frac{Kq'^2}{(2x)^2}$$



En écrivant la relation fondamentale de la dynamique pour une des masses on a :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$

En utilisant la représentation des forces pour de petites elongations (l'angle θ est suffisamment petit)

on a :

$$\sin\theta = \tan\theta = \theta = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{P}|} = \frac{x}{l} = \frac{Kq'^2}{mg(2x)^2} \Rightarrow x^3 = \frac{Klq'^2}{4mg}$$

a) $x = 1,93 \text{ cm}$; b) $x = 3,79 \text{ cm}$; c) $x = 2,24 \text{ cm}$

Solution EX02 :

1) Quelle était la charge initiale de chaque sphère ? (Les rayons des sphères sont très négligeables devant la distance d).

Les charges initiales sont q_1 et q_2 Les charges finales q'_1 et q'_2 (les deux sphères sont identiques)

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 = 2q'_1 \rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

Avant le contact, les charges sont de signe opposé et s'attirent avec une force électrique F_1 telle que :

$$|\vec{F}_1| = \frac{Kq_1q_2}{d^2} \Rightarrow q_1q_2 = \frac{F_1d^2}{K} \Rightarrow q_2 = \frac{F_1d^2}{q_1K} = \frac{3 \cdot 10^{-12}}{q_1}$$

(Il faut souligner que la force est donnée en valeur absolue, le signe (-) est du au signe contraire des charges)

Après qu'elles se touchent, elles se repoussent avec une force électrique F_2 telle que :

$$|\vec{F}_2| = \frac{Kq'_1q'_2}{d^2} \Rightarrow q'_1q'_2 = \frac{F_2d^2}{K} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = \sqrt{\frac{F_2d^2}{K}} = 10^{-6}C$$

En remplaçant dans l'équation de conservation de la charge on obtient une équation de second degré en q_1 ou en q_2 :

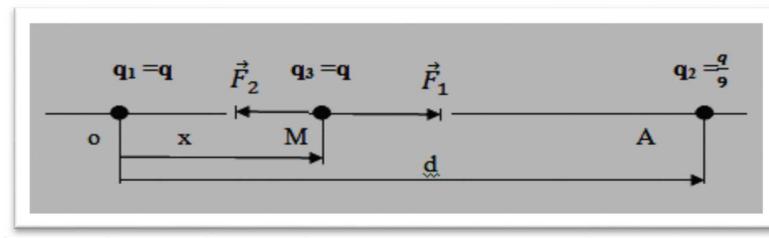
$$q_1^2 - 2 \cdot 10^{-6}q_1 - 3 \cdot 10^{-12} = 0$$

On a donc deux paires de solution :

- 1° système : $q_1 = -3 \cdot 10^{-6}C$ et $q_2 = 10^{-6}C$ ou $q_2 = -3 \cdot 10^{-6}C$ et $q_1 = -10^{-6}C$
- 2° système : $q_1 = 3 \cdot 10^{-6}C$ et $q_2 = -10^{-6}C$ ou $q_2 = 3 \cdot 10^{-6}C$ et $q_1 = -10^{-6}C$

Solution EX03 :

1. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur q_3 au point M.



$$\vec{F}_M = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow F_M = F_1 - F_2 = Kq^2 \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9(d-x)^2} \right]$$

2. A quelle abscisse x_0 , la charge q_3 est dans une position d'équilibre ? A.N : $d = 4$ cm.

$$\text{Position d'équilibre : } F_M = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{3d}{4} = 3cm$$

Solution EX04 :

Montrer qu'il existe, dans ce plan, un cercle pour lequel la charge mobile est soumise à une force maximale. Déterminer son rayon. On pose y la position de la troisième charge Q, par exemple de signe opposé à q.

les forces appliquées par q sur Q sont :

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = K \frac{qQ}{r^2}$$

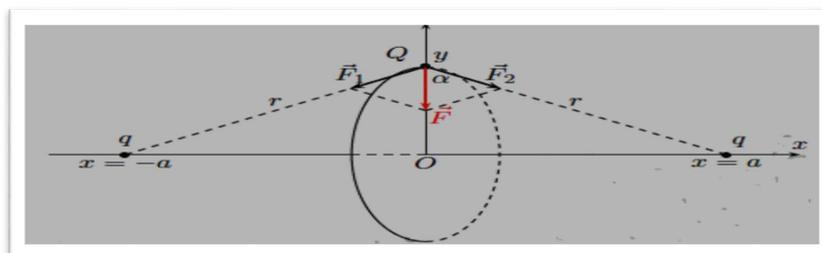
Par symétrie la force totale est suivant Oy d'où :

$$|\vec{F}| = 2K \frac{qQ}{r^2} \cos \alpha = 2K \frac{qQy}{r^2 r} = 2K \frac{qQy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La force est maximale si sa dérivée par rapport à y est nulle :

$$|\vec{F}|_{max} \Rightarrow \frac{dF}{dy} = 2KqQ \frac{(a^2 - 2y^2)}{(y^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow y_0 = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Si l'on place Q à cette même distance y_0 sur le plan médiateur du segment $2a$, elle sera soumise à une force maximale dirigée vers le point O. L'ensemble de ces points forme donc un cercle perpendiculaire à $x'ox$, de centre O et de rayon $R=y_0$ (voire figure ci-dessous).



Solution EX05 :

1- Déterminer l'expression de la force électrique qui s'exerce sur la charge Q du point B.

(On suppose que les charges Q et q sont positives)

$$\vec{F}_B = \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

Les forces exercées par les charges q sur Q sont :

$$\vec{F}_{AC} = \vec{F}_A + \vec{F}_C \text{ avec } |\vec{F}_A| = |\vec{F}_C| = K \frac{qQ}{a^2}$$

Donc :

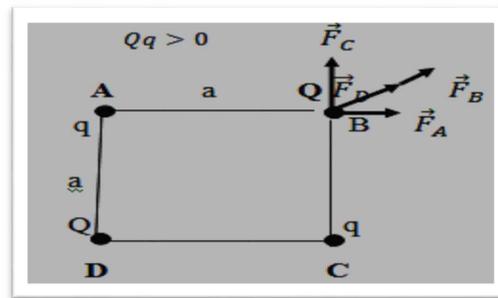
$$|\vec{F}_{AC}| = \sqrt{F_A^2 + F_C^2} = K \frac{2qQ}{a^2\sqrt{2}}$$

La force appliquée par la charge Q sur Q est :

$$|\vec{F}_D| = K \frac{Q^2}{2a^2}$$

La force totale est donc :

$$|\vec{F}_B| = K \frac{Q}{a^2} \left(\frac{Q}{2} + q\sqrt{2} \right)$$



2- Quelle doit être la relation entre Q et q pour que cette force soit nulle.

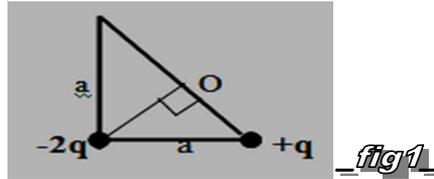
$$|\vec{F}_B| = K \frac{Q}{a^2} \left(\frac{Q}{2} + q\sqrt{2} \right) = 0 \Rightarrow Q = -2\sqrt{2}q$$

Les charges doivent donc être de signe contraire.

TDN°02 (Champs et Potentiel Electrique)**EX01 :**

- Déterminer le vecteur champ électrique \vec{E}_0 et le potentiel V_0 au point O (voir figure1).

A.N. : $a = 6 \text{ cm}$ et $q = -2 \cdot 10^{-11} \text{ C}$.

**EX02:**

Aux sommets d'un carré ABCD de côté $a=2 \text{ cm}$, sont placées les charges suivantes :

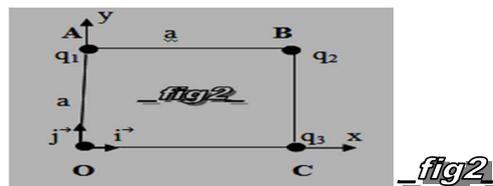
$q_A=q$; $q_B=-4q$; $q_C=q$; $q_D=2q$ avec $q=+2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

- 1- Calculer le champ et le potentiel électrique au centre O du carré, dans le repère (o, x, y).
- 2- Calculez le potentiel au point E milieu de AB .

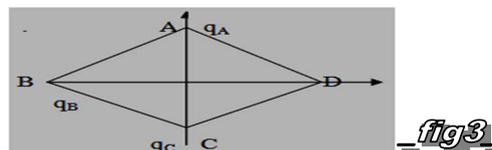
EX03 :

Soient trois charges q_1 , q_2 et q_3 placées respectivement aux points A (0, a), B (a, a) et C (a, 0) du plan xOy (fig2) : $q_1 = q_3 = +q = 10^{-9} \text{ C}$, $q_2 = -q$, $a = 10 \text{ cm}$.

- 1) Calculer le potentiel électrique total au point O (0, 0).
- 2) Calculer les composantes E_x et E_y du champ électrique \vec{E} au point O.
- 3) En déduire le champ électrique total \vec{E}_0 au point O. Représenter le vecteur \vec{E}_0 . Échelle : $1 \text{ cm} \rightarrow 290 \text{ V/m}$.
- 4) On place au point O un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{P} = 10^{-10}(-\vec{i} + \vec{j}) \text{ Cm}$.
 - a) Déterminer le moment $\vec{\Gamma}$ du couple appliqué au dipôle.
 - b) Représenter le dipôle dans sa position d'équilibre stable finale. Justifier cet état.
 - c) Calculer la variation d'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il passe de sa position initiale à sa position finale.

**EX04 :**

Deux charges ponctuelles q_A et q_C sont placées aux sommets A et C d'un triangle équilatéral ABC de côté $2a$ (fig3).



- 1) Une troisième charge ponctuelle q_B est placée au sommet B du triangle.
 - a- Calculer l'énergie potentielle de q_B au point B.
 - b- Calculer l'énergie interne du système constitué par ces 3 charges.
- 2) Déterminer le potentiel électrique créé par les 3 charges au point D symétrique du point B par rapport à AC.
- 3) Une quatrième charge ponctuelle Q est ramenée de l'infini au point D.
 - a- Déterminer l'énergie potentielle de cette charge au point D.
 - b- Calculer le travail de la force électrostatique durant le déplacement de Q. Comparer au résultat de (3-a) et Commenter.

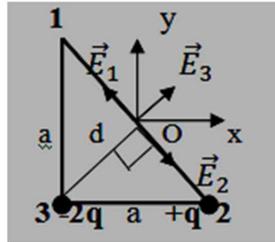
A.N. : $a = 2 \text{ mm}$, $q_A = q_C = q$, $q_B = 2q$, $q = 1 \text{ pC}$, $Q = 1 \text{ nC}$, $AB=BC=AD=CD=2a$.

Solution TDN°02 (Champs et Potentiel Electrique)

Solution EX01 :

- Déterminer le vecteur champ électrique \vec{E}_0 et le potentiel V_0 au point O

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$



Les champs créés par chaque charge sont :

$$|\vec{E}_1| = \frac{k|q|}{d^2}$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{k|q|}{d^2}$$

$$|\vec{E}_3| = \frac{2k|q|}{d^2}$$

On constate que les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont égaux et opposés leur somme est nulle, donc :

$$\vec{E}_0 = \frac{2k|q|\sqrt{2}}{a^2}(\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow |\vec{E}_0| = \frac{4k|q|}{a^2} = 200 \text{ V/m}$$

- Calculer le potentiel V_0 au point O :

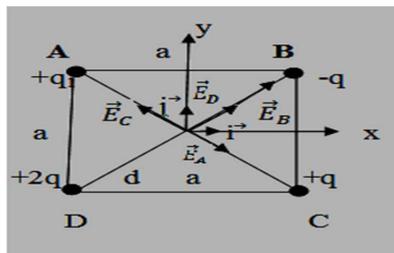
$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_0 = \frac{kq}{d} + \frac{k(-2q)}{d} + \frac{k(q)}{d} = \frac{k}{d}(q - 2q + q) = 0 \text{ Volts}$$

Solution EX02 :

- 1- Calculer le champ et le potentiel électrique au centre O du carré, dans le repère (o, x, y).

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$



Les champs individuels créés par chacune des charge sont :

$$\vec{E}_A = \frac{kq\sqrt{2}}{d^2 2}(\vec{i} - \vec{j}) \quad \vec{E}_B = \frac{kq\sqrt{2}}{d^2 2}(4\vec{i} + 4\vec{j})$$

$$\vec{E}_C = \frac{kq\sqrt{2}}{d^2 2}(-\vec{i} + \vec{j}) \quad \vec{E}_D = \frac{kq\sqrt{2}}{d^2 2}(2\vec{i} + 2\vec{j})$$

Donc :

$$\vec{E}_0 = \frac{kq\sqrt{2}}{d^2 2}(\vec{6i} + 6\vec{j})$$

En module le champ est :

$$\Rightarrow |\vec{E}_0| = \frac{kq\sqrt{2}}{a^2 \cdot 2} 6\sqrt{2} \quad \text{Comme : } d = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |\vec{E}_0| = \frac{12kq}{a^2} = 54 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

Potentiel V_0 au point O :

$$V_0 = V_A + V_B + V_C + V_D$$

$$V_0 = \frac{kq}{d} + \frac{k(2q)}{d} + \frac{k(q)}{d} + \frac{k(-4q)}{d} = \frac{k}{d}(q + 2q + q - 4q) = 0 \text{ Volts}$$

2- Calculez le potentiel au point E milieu de AB.

Calcul de la distance entre le point E et les charges se trouvant en C et en D :

$$DE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{2} = CE$$

Potentiel V_E au point E est donc :

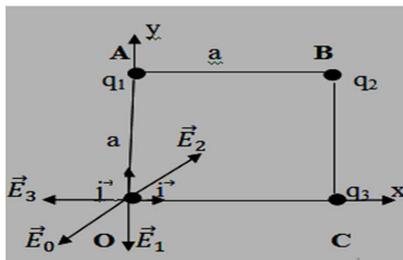
$$V_E = \frac{kq}{AE} + \frac{k(2q)}{DE} + \frac{k(q)}{CE} + \frac{k(-4q)}{BE} = \frac{2k}{\sqrt{5}a}(q + 2q) + \frac{2k}{a}(q - 4q)$$

$$V_E = \frac{6kq}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right) = -29850 \text{ Volts}$$

Solution EX03:

1) Calculer le potentiel électrique total au point O (0, 0).

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2kq}{a} - \frac{kq}{\sqrt{2}a} = \frac{kq}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



2) Calculer les composantes E_x et E_y du champ électrique \vec{E} au point O.

$$\vec{E}_1 = -\frac{kq}{a^2} \vec{j} \quad \|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_3\| = 900 \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{kq\sqrt{2}}{4a^2} (\vec{i} + \vec{j}) \quad \|\vec{E}_2\| = 450 \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_3 = -\frac{kq}{a^2} \vec{i}$$

$$\vec{E}_0 = -581,4(\vec{i} + \vec{j})(\text{V/m}) \Rightarrow \|\vec{E}_0\| = 822 \text{ V/m}$$

3) En déduire le champ électrique total \vec{E}_0 au point O. Représenter le vecteur \vec{E}_0
(Voir la figure du haut)

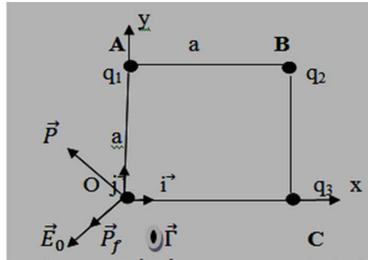
- 4) On place au point O un dipôle électrique de moment dipolaire

$$\vec{P} = 10^{-10}(-\vec{i} + \vec{j}) \text{ Cm.}$$

- a) Déterminer le moment $\vec{\Gamma}$ du couple appliqué au dipôle.

$$\|\vec{\Gamma}\| = \|\vec{P}\| \|\vec{E}_0\| \sin \frac{\pi}{2} = 581,4\sqrt{2}\sqrt{2}10^{-10}$$

$$\|\vec{\Gamma}\| = 11,6 \cdot 10^{-8} \text{ (CV/m}^2\text{)}$$



- b) Représenter le dipôle dans sa position d'équilibre stable finale. Justifier cet état.

La position finale d'équilibre stable est celle dans laquelle le dipôle \vec{P} est parallèle au champ électrique \vec{E}_0 et dans même sens.

- c) Calculer la variation d'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il passe de sa position initiale à sa position finale.

$$\vec{E}_0 \perp \vec{P} \Rightarrow E_{pi} = \vec{P} \cdot \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = 11,6 \cdot 10^{-8} \text{ (J)}$$

$$E_{pf} = \|\vec{P}\| \|\vec{E}_0\| = 11,6 \cdot 10^{-8} \text{ (J)}$$

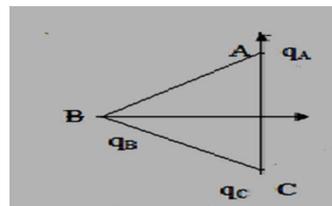
Solution EX04:

- 1) Une troisième charge ponctuelle q_B est placée au sommet B du triangle.

- a) Calculer l'énergie potentielle de q_B au point B.

$$E_{pB} = q_B V_B = q_B \frac{k}{2a} (q_A + q_C) = \frac{2kq^2}{a}$$

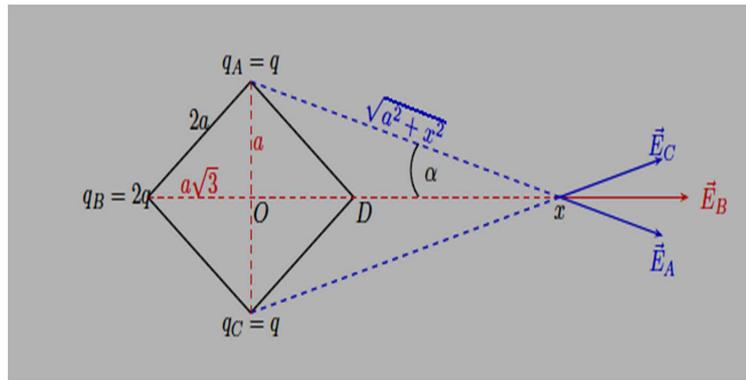
$$\Rightarrow E_{pB} = \frac{2kq^2}{a}$$



- b) Calculer l'énergie interne du système constitué par ces 3 charges.

$$U = \frac{kq_A q_B}{2a} + \frac{kq_A q_C}{2a} + \frac{kq_B q_C}{2a} = 5 \frac{kq^2}{2a}$$

- 2) Déterminer le potentiel électrique créé par les 3 charges au point D symétrique du point B par rapport à AC.



$$V_D = \frac{k(q_A + q_B)}{2a} + \frac{kq_B}{2\sqrt{3}a} = \frac{kq}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow V_D = \frac{kq}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Une 4^{ème} charge ponctuelle Q est ramenée de l'infini au point D.

- a- Déterminer l'énergie potentielle de cette charge au point D.

$$E_{pD} = QV_D = Q \left[\frac{k(q_A + q_B)}{2a} + \frac{kq_B}{2\sqrt{3}a} \right] = \frac{kqQ}{a} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\Rightarrow E_{pD} = \frac{kqQ}{a} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

- b- Calculer le travail de la force électrostatique durant le déplacement de Q. Comparer au résultat de (3-a) et Commenter.

$$W_{\infty}^D = \int_{\infty}^D \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^D Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{\infty}^D -dV$$

$$\Rightarrow W_{\infty}^D = -E_{pD}$$

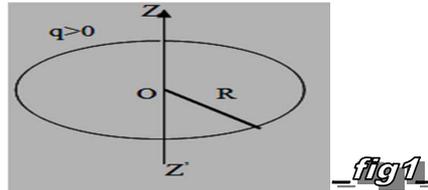
$$W_{\infty}^D = Q(V_D - V_{\infty}) = -QV_D = -E_{pD}$$

TDN°03 (Champs et Potentiel Electrique créés par des distributions continues)

EX01 :

-Une boucle circulaire de rayon R et de centre O porte une charge Q positive répartie uniformément et de densité linéique λ .

- 1) Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(z)$ le long de l'axe z'oz perpendiculaire au plan de la boucle (fig1)
- 2) Donner l'expression du potentiel électrique V(z) , en utilisant :
 - a- Le calcul direct
 - b- l'expression du champ $\vec{E}(z)$.on supposera le potentiel nul à l'infini.



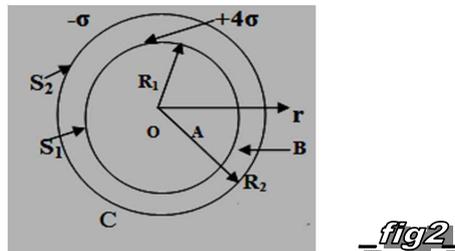
EX02:

Un cylindre conducteur de rayon R et de longueur infini porte une densité superficielle σ .

- a) Par application du théorème de Gauss calculer le champ crée par cette répartition à l'intérieur à l'extérieure du cylindre.
- b) En déduire le potentiel électrique dans tout l'espace, sachant que le potentiel auquel est porté le cylindre est V_0 .

EX03 :

- 1) Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ crée par une sphère uniformément chargée en surface, en utilisant le théorème de Gauss.
- 2) Deux sphères S_1 et S_2 concentriques, creuses, d'épaisseurs négligeables et de rayons respectifs R_1 et R_2 , sont chargées uniformément en surface avec des densités respectives $(+4\sigma)$ et (σ) (fig2)



Calculer la charge Q_1 et Q_2 portée par chacune des 2 sphères. En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$ dans Les régions A,B et C ($A : r \leq R_1 ; B : R_1 \leq r \leq R_2 ; C : r \geq R_2$).

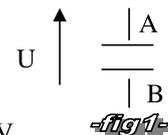
- 3) Soit un point M situé à 15cm du centre O des 2 sphères .le potentiel électrique crée en M par ces 2 sphères est de 12 volts. Déterminer les expressions du potentiel électrique dans les régions A, B et C.
 - a- Quelle est la forme des surfaces équipotentielles dans les régions A, B et C.
 - b- En déduire les positions r_1, r_2 des équipotentielles $V_1=24$ volts et $V_2=6$ volts
- On donne : $R_2=2 R_1=20$ cm et $\sigma=10^{-8}/4\pi$ C /m²)

EX04 :

Considérons un condensateur constitué de deux armatures planes et parallèles.

La distance entre les deux armatures est $d = 2$ mm.

L'aire de la surface de chacune des armatures est $S = 100$ cm².



1- Calculer la capacité électrique C du condensateur.

2- On charge le condensateur avec un générateur de tension continue : $U = +6$ V.

Calculer la charge des armatures Q_A et Q_B .

3- On suppose que le champ électrostatique entre les deux armatures est uniforme.

Calculer son intensité E.

4- Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur W.

5- On déconnecte le condensateur du générateur de tension puis on écarte les deux armatures (distance d').

Montrer que la tension aux bornes du condensateur est maintenant : $U' = U \frac{d'}{d}$

Montrer que l'énergie emmagasinée est maintenant : $W' = W \frac{d'}{d}$

6- D'où provient l'énergie $W' - W$

Solution TDN°03 (Champs et Potentiel Electrique créés par des distributions continues)**Solution EX01:**

- 1) Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(z)$ le long de l'axe $Z'OZ$ perpendiculaire au plan de la boucle

Un élément de la boucle de longueur dl porte un élément de charge

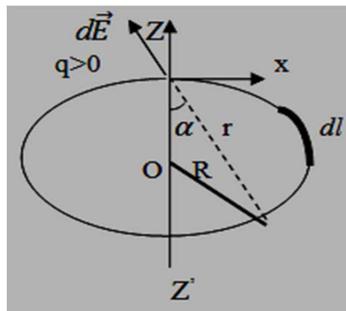
$$dq = \lambda dl$$

Cette charge crée un élément de champ $d\vec{E}$ au point M tel que :

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2} \vec{u}$$

par raison de symétrie, les composantes de ce champ dans le plan de la boucle s'annulent deux à deux et le champ résultant est uniquement suivant $Z'OZ$.

$$d\vec{E}_z = \frac{Kdq}{r^2} \cos\alpha \vec{k}$$



On voit que :

$$r = (R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cos\alpha = \frac{Z}{r} = \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

D'où

$$d\vec{E}_z = \frac{KZdq}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} = \frac{KZ\lambda dl}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

Pour obtenir le champ total on intègre sur tout le fil :

$$E = E_z = \frac{KZ\lambda}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{KZ\lambda 2\pi R}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sachant que la charge totale du fil s'obtient par :

$$Q = \int_0^{2\pi R} \lambda dl = 2\pi\lambda R$$

Le champ s'écrit finalement :

$$\vec{E} = \vec{E}_z = \frac{KZQ}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

- 2) Donner l'expression du potentiel électrique $V(z)$, en utilisant :

a- Le calcul direct :

$$dV = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\lambda dl}{r}$$

En faisant les mêmes changements que pour le champ électrique on obtient :

$$dV = \frac{K\lambda dl}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En intégrant sur la longueur du fil on à :

$$V = \int_0^{2\pi R} \frac{K\lambda dl}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{K\lambda 2\pi R}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En prenant comme référence des potentiels $V(\infty)=0$ et en introduisant la charge Q

On à :

$$V = \frac{KQ}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

b- En utilisant l'expression du champ $\vec{E}(z)$:

La relation entre le champ et le potentiel est (circulation du champ électrique) :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_z dZ$$

En intégrant on obtient :

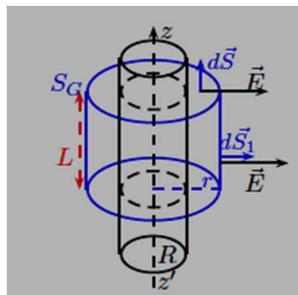
$$V = KQ \int_0^{2\pi R} \frac{-Z dZ}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{KQ}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

On supposera que la référence des potentiels est que le potentiel est nul à l'infini :

$$V(\infty) = 0 \quad \Rightarrow V(Z) = \frac{KQ}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Solution EX02:

a) Par application du théorème de Gauss calculer le champ créée par cette répartition à l'intérieur à l'extérieure du cylindre..



Soit $Z'OZ$ l'axe de révolution du cylindre. A cause de la symétrie,

le champ électrique est perpendiculaire à cet axe et son module est constant sur tout cylindre coaxial de rayon r (coordonnées polaires du plan normal à $Z'OZ$). Par conséquent, la surface de Gauss S_G sera choisie comme un cylindre de rayon r et de longueur L . Le champ étant perpendiculaire au vecteurs surface des deux bases du cylindre de Gauss, le flux à travers S_G sera égal au flux à travers la surface latérale S_1 :

$$\Phi = \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} E \cdot dS_1 = ES_1 = E2\pi rL = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$r < R \Rightarrow \sum Q_{int} = 0 \quad \Rightarrow E = 0$$

$$r > R \Rightarrow \sum Q_{int} = \sigma 2\pi RL \quad \Rightarrow E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

- b) En déduire le potentiel électrique dans tout l'espace, sachant que le potentiel auquel est porté le cylindre est V_0 .

Le potentiel $V(r)$ s'obtient en utilisant la circulation du champ électrique :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}, \quad \vec{E} = -E_r \vec{u}_r, \quad \vec{dl} = dr \vec{u}_r$$

$$dV = -E dr \Rightarrow V(r) = - \int E dr$$

On obtient :

$$\Rightarrow \begin{cases} r \leq R & V_1(r) = C_1 \\ r \geq R & V_2(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + C_2 \end{cases}$$

En utilisant les conditions aux limites :

$$V_1(R) = C_1 = V_0$$

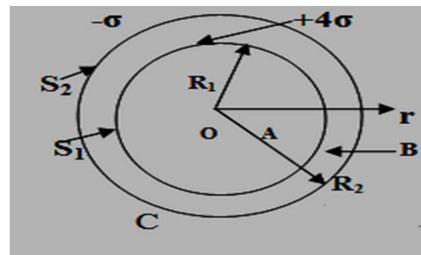
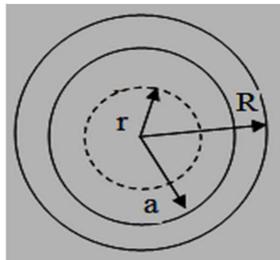
$$V_2(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln R + C_2 = V_0$$

Ce qui donne :

$$\Rightarrow \begin{cases} V_0 & r \leq R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0 & r \geq R \end{cases}$$

Solution EX03:

- 1) Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ créée par une sphère uniformément chargée en surface, en utilisant le théorème de Gauss.



Soit une sphère de rayon a uniformément chargée en surface, et de densité σ

Soit une surface de Gauss de rayon r . le flux à travers cette surface de Gauss est :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Sur cette surface de Gauss, le champ électrique est constant et en intégrant sur toute la sphère on à :

$$\Phi = E \iint \vec{dS} = ES = E4\pi r^2$$

On a donc deux cas :

$$\text{Si } r < a \Rightarrow \sum Q_{int} = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = 0$$

$$\text{Si } r > a \Rightarrow \sum Q_{int} = \sigma 4\pi a^2 \Rightarrow \Phi = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E \rightarrow E(r) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Comme : } Q = \sigma 4\pi a^2 \Rightarrow E(r) = K \frac{Q}{r^2}$$

- 2) Calculer la charge Q_1 et Q_2 portée par chacune des 2 sphères.

$$dq = \sigma dS \Rightarrow Q = \iint \sigma dS = \sigma \iint dS = \sigma S = \sigma 4\pi r^2$$

Donc :

$$Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2 = 4\pi R_1^2 (4\sigma) = 16\pi\sigma R_1^2$$

Et :

$$Q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2 = 4\pi R_2^2 (-\sigma) = 4\pi (4R_1^2) (-\sigma) = -16\pi\sigma R_1^2$$

$$Q_1 = -Q_2 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$ dans Les régions A,B et C

Pour cela on prend trois surfaces de Gauss de rayon r, dans chacune des régions :

A : Pour $r < R_1$

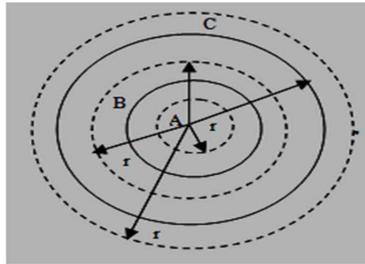
$$\sum q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}_A(r) = \vec{0}$$

B : Pour $R_1 < r < R_2$

$$\frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E_B(r) = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{kQ_1}{r^2}$$

C : Pour $r > R_2$

$$\sum q_{int} = Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow \vec{E}_C(r) = \vec{0}$$



- 3) Soit un point M situé à 15cm du centre O des 2 sphères .le potentiel électrique crée en M par ces 2 sphères est de 12 volts. Déterminer les expressions du potentiel électrique dans les régions A, B et C.

La relation entre le champ et le potentiel est donnée par :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr} = -E dr \Rightarrow V(r) = - \int E dr$$

A : Pour $r < R_1 \Rightarrow V_A(r) = C_A = V_A$

B : Pour $R_1 < r < R_2 \Rightarrow V_B(r) = kQ_1 \int -\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_B(r) = \frac{kQ_1}{r} + C_2$

C : Pour $r > R_2 \Rightarrow V_C(r) = C_3 = V_C$

Pour déterminer les constantes on tient compte des conditions aux limites qui sont :

$$V_A(R_1) = V_B(R_1) = 24 \text{ V}$$

$$V_B(R_1) = \frac{kQ_1}{R_1} + C_2 = 12 \Rightarrow C_2 = 12 - \frac{kQ_1}{R_1} = -12 \text{ V} \Rightarrow V_B(r) = \frac{kQ_1}{r} - 12$$

$$V_C(R_2) = V_B(R_2) = 6 \text{ V}$$

- a- Quelle est la forme des surfaces équipotentiels dans les régions A, B et C.

On dit que les équipotentiels prennent la forme du conducteur qui leur donne naissance donc dans les régions A, B et C les surfaces équipotentiels sont des sphères concentriques qui ont la même forme que les conducteurs de rayons R_1 et R_2

b- En déduire les positions r_1, r_2 des équipotentielle $V_1=24\text{volts}$ et $V_2=6\text{volts}$

$$V_B(r_1) = \frac{kQ_1}{r_1} - 12 = 24 \text{ V}$$

$$V_B(r_2) = \frac{kQ_1}{r_2} - 12 = 6 \text{ V}$$

Conclusion :

Les conducteurs forment deux équipotentielles portées aux potentiels 6 et 24 V respectivement.

Solution EX04:

- 1) Calculer la capacité électrique C du condensateur/

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 44,25 \text{ pF}$$

- 2) On charge le condensateur avec un générateur de tension continue : $U = +6 \text{ V}$.

Calculer la charge des armatures Q_A et Q_B .

$$Q_A = C \cdot U = +265 \text{ pC}$$

$$Q_B = -Q_A = -265 \text{ pC}$$

- 3) On suppose que le champ électrostatique entre les deux armatures est uniforme. Calculer son intensité E.

$$E = \frac{U}{d} = 300 \text{ V/m}$$

- 4) Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur W.

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = 7,965 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

- 5) On déconnecte le condensateur du générateur de tension puis on écarte les deux armatures (distance d').

a- Montrer que la tension aux bornes du condensateur est maintenant : $U' = U \frac{d'}{d}$

La charge du condensateur est inchangée :

$$Q = C \cdot U = C' \cdot U'$$

$$U' = U \frac{C}{C'} = U \frac{\epsilon_0 \frac{S}{d}}{\epsilon_0 \frac{S}{d'}} = U \frac{d'}{d}$$

b- Montrer que l'énergie emmagasinée est maintenant : $W' = W \frac{d'}{d}$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

$$W' = \frac{1}{2} C' U'^2 = \frac{1}{2} Q U'$$

D'où

$$W' = W \frac{U'}{U} = W \frac{d'}{d}$$

- 6) D'où provient l'énergie $W' - W$

C'est l'énergie mécanique qu'il a fallu fournir pour écarter les deux armatures.

TDN°04 (Electrocinétique)**EX01 :**

Un conducteur cylindrique de cuivre, de section $S=1\text{mm}^2$ et de longueur $L=10\text{m}$, est parcouru par un courant constant de 5 A , lorsque la d.d.p entre ses deux bases vaut $0,85\text{V}$.

- 1) Calculer le module du vecteur densité de courant.
- 2) Calculer le nombre d'électron libres par unité de volume sachant qu'un atome de cuivre libère un électron

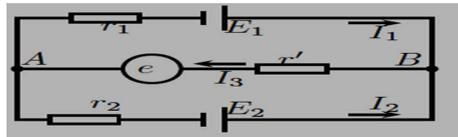
On donne : la masse atomique du cuivre $M=64\text{ g}$, sa masse volumique $\rho_{\text{Cu}}=8900\text{Kg/m}^3$ et le nombre d'Avogadro $N=6,023\times 10^{23}$.

- 3) Calculer la valeur de la vitesse de dérive des électron libres .
- 4) Calculer la résistivité du conducteur .

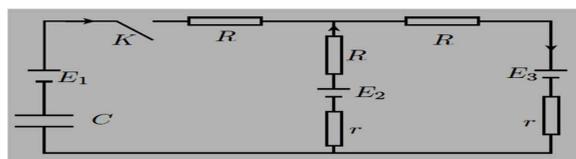
EX02:

On considère le circuit de la figure ci-contre comportant un générateur de f.e.m $E_1 = 100\text{V}$ et un générateur réversible de f.e.m $E_2 = 50\text{V}$, de résistances internes respectives $r_1 = 1\text{ k}$, $r_2 = 2\text{ k}$ et un récepteur de f.c.e.m e et de résistance interne $r' = 100$.

1. Établir les expressions des intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 circulant dans les différentes branches du circuit.
2. Quelle condition doit vérifier la f.c.e.m e du récepteur pour que le dispositif puisse fonctionner ?
3. Calculer I_1 , I_2 et I_3 pour $e = 60\text{V}$.
4. L'élément de f.e.m E_2 fonctionne-t-il comme générateur ou comme récepteur ? Justifier votre réponse.

**EX03:**

Soit le circuit électrique de la figure ci-dessous comportant trois générateurs réversibles de résistances internes r . On donne : $E_1 = 2E_2 = 3E_3 = 12\text{V}$, $r = 15$, $R = 3r$ et $C = 10\ \mu\text{F}$. A l'instant $t = 0\text{ s}$, on ferme l'interrupteur K .

**Partie I** — Le condensateur C étant entièrement chargé

1. Calculer les intensités des courants électriques débités par les générateurs en respectant les sens donnés sur le schéma du circuit.
2. Quelle est la charge Q_0 du condensateur ? Déduire alors la d.d.p aux bornes du condensateur.
3. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur ?
4. Quels sont les générateurs qui fonctionnent comme des récepteurs ?
5. Établir le bilan d'énergie du circuit.

Partie II — Étude du régime transitoire

Le condensateur étant initialement entièrement déchargé, on ferme alors l'interrupteur K à $t = 0\text{ s}$.

1. Donner l'équation différentielle qui régit l'évolution de la charge $q(t)$ au cours du temps.
2. Déterminer l'expression de $q(t)$.
3. Au bout de combien de temps le condensateur est-il chargé à 99.9% ?
4. faire le bilan d'énergie du circuit.

Solution TDN°04 (Electrocinétique)**Solution EX01:**

- 1) Calculer le module du vecteur densité de courant .

$$|\vec{J}| = \frac{I}{S} = 5 \cdot 10^6 \text{ (A/m}^2\text{)}$$

- 2) Calculer le nombre d'électron libres par unité de volume sachant qu'un atome de cuivre libère un électron

On donne : la masse atomique du cuivre $M = 64 \text{ g}$, sa masse volumique

$\rho_{Cu} = 8900 \text{ Kg/m}^3$ et le nombre d'Avogadro $N = 6,023 \cdot 10^{23}$.

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow \mathcal{N} \\ m \rightarrow N \end{array} \right\} \rightarrow N = \frac{m}{M} \mathcal{N}$$

Et comme n est le nombre d'électron par unité de volume alors :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho}{M} \mathcal{N}$$

$$n = \frac{6,023 \cdot 10^{23} \cdot 8,9 \cdot 10^2}{64 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow n = 8,37 \cdot 10^{28} \text{ (e}^-/\text{m}^3\text{)}$$

- 3) Calculer la valeur de la vitesse de dérive des électron libres.

La loi d'Ohm $V = RI$ peut s'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{J} = \frac{L}{RS} \vec{E} \\ \vec{J} = -ne\vec{v} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{v} = - \left[\frac{\sigma}{ne} \right] \vec{E} = - \left[\frac{L}{RSne} \right] \vec{E}$$

$$v = \frac{J}{ne} = 3,73 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

- 4) Calculer la résistivité du conducteur.

$$J = \gamma E = \gamma \frac{V}{l} = \frac{V}{\rho l} = \frac{I}{S}$$

$$\rho = \frac{VS}{Il} = 17 \cdot 10^{-9} \text{ (}\Omega\text{m)}$$

Solution EX02:

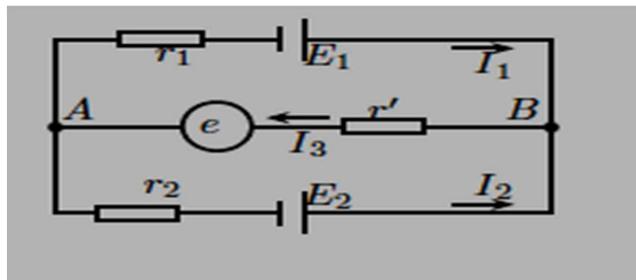
- 1) Établir les expressions des intensités des courants
- I_1, I_2
- et
- I_3
- circulant dans les différentes branches du circuit.

Utilisons le fait que $(V_A - V_B)$ soit la même pour chacune des trois branches entre les nœuds A et B.

$$\text{Branches 1 et 2 : } r_1 I_1 - E_1 = r_2 I_2 - E_2$$

$$\text{Branches 1 et 3 : } r_1 I_1 - E_1 = -e - r' I_3$$

$$\text{Loi des noeuds : } I_1 + I_2 = I_3$$



Récrivons les deux premières équations en remplaçant I_3 par $I_1 + I_2$

$$\begin{aligned} r_1 I_1 - r_2 I_2 &= r_1 - E_2 \\ (r_1 + r') I_1 + r' I_2 &= E_1 - e \end{aligned}$$

Par élimination, on trouve

$$\begin{aligned} I_1 &= (E_1 - E_2) r' + (E_1 - e) r_2 / (r_1 r' + r_1 r_2 + r' r_2) \\ I_2 &= -(E_1 - E_2) (r_1 + r') + (E_1 - e) r_1 / (r_2 r_1 + r_2 r' + r_1 r') \end{aligned}$$

En simplifiant, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= (r_2 + r') E_1 - r' E_2 - e r_2 \\ &\quad r_1 r_2 + r_1 r' + r_2 r' \\ I_2 &= -r' E_1 + (r_1 + r') E_2 - e r_1 r_2 + r_1 r' + r_2 r' \\ I_3 &= r_2 E_1 + r_1 E_2 - e (r_1 + r_2) r_1 r_2 + r_1 r' + r_2 r' \end{aligned}$$

2) Il faut que le courant qui traverse le récepteur soit positif : $I_3 > 0 \Rightarrow e < 83V$.

3) $e = 60V > e_2 \Rightarrow I_2 < 0$.

Le calcul donne $I_1 = 0.83mA, I_2 = -0.15mA, I_3 = 0.68mA$.

5) E_2 fonctionne comme récepteur car le courant réel entre par la borne positive de ce générateur ($I_2 < 0$).

Remarque supplémentaire :

Expliquons plus en détail la question 2 en considérant les cas suivants :

$$I_1 > 0 \Rightarrow e < \left(1 + \frac{r'}{r_2}\right) E_1 - \frac{r'}{r_2} E_2 \Rightarrow e < e_1$$

$$\text{Avec } e_1 = E_1 + (E_1 - E_2) r' / r_2 = 102.5V$$

$$I_2 > 0 \Rightarrow e < -\frac{r'}{r_1} E_1 + \left(1 + \frac{r'}{r_1}\right) E_2 \Rightarrow e < e_2$$

$$\text{Avec } e_2 = E_2 - (E_1 - E_2) r' / r_1 = 45V$$

$$I_3 > 0 \Rightarrow e < \frac{(r_2 E_1 + r_1 E_2)}{(r_1 + r_2)} \Rightarrow e < e_3$$

$$\text{Avec } e_3 = E_1 - (E_1 - E_2) r_1 / (r_1 + r_2) = 83V$$

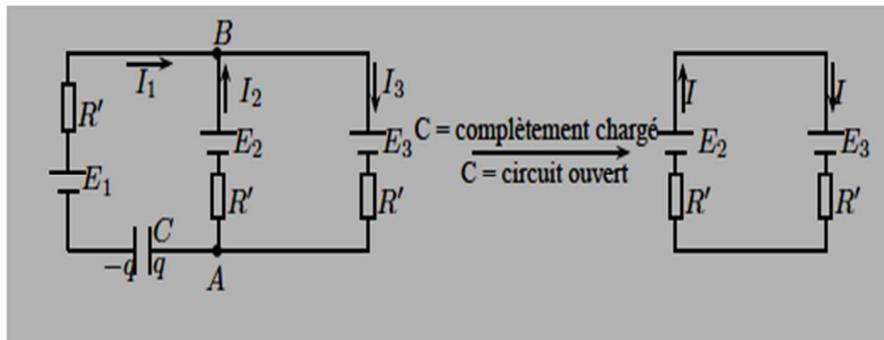
Le tableau suivant considère tous les cas :

	$e > 102.5$	$102.5 > e > 83$	$83 > e > 45$	$45 > e$
I_1	< 0	> 0	> 0	> 0
I_2	< 0	< 0	< 0	> 0
I_3	< 0	< 0	> 0	> 0

Le cas $e > 102.5$ est impossible car les deux générateurs fonctionnent en récepteur (pas de générateur dans le circuit). Le cas $102.5 > e > 83$ est impossible car $E_1 > E_2, r_1 < r_2$ et la d.d.p V aux bornes des deux générateurs est la même. Par conséquent, $|I_1| > |I_2| \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 > 0$ contrairement au résultat du tableau.

Solution EX03:

Remplaçons R et r par $R' = R + r = 4r$ dans chaque branche. Les équations se simplifient énormément en y écrivant directement $3E$ au lieu de E_1 et $\frac{3}{2}E$ au lieu de E_2 ($E = E_3$). Nous ne l'avons pas fait en préférant une présentation générale.

**Partie I** — Le condensateur C étant entièrement chargé

1) Le condensateur étant complètement chargé, le courant I_1 est nul et le circuit correspondant devient ouvert. Le circuit global se réduit à une seule maille comme représentée dans le schéma.

Donc

$$I_2 = I_3 = I.$$

Calculons $(V_A - V_B)$ dans les branches 2 et 3 :

$R'I - E_2 = -R'I - E_3$, ce qui donne un courant positif (réel)

$$I = (E_2 - E_3) / 2R' = E_3 / 4R' = E_3 / 16r. \text{ A.N. } I = 0.05A.$$

2) Calculons $(V_A - V_B)$ dans les branches (1) et (2) :

$$Q_0/C - E_1 + R'I_1 = R'I_1 - E_2$$

Avec $I_1 = 0$ et $I_2 = I$.

$$\text{Donc } Q_0 = C (E_1 - 1/2 E_2 - 1/2) = (7/4)E_3C = 7 \cdot 10^{-5} C.$$

La d.d.p aux bornes du condensateur est $V_0 = Q_0/C = (7/4)E_3 = 7V$.

$$3) U_0 = (1/2) V_0^2 C = 24,5 \cdot 10^{-5} J$$

4) E_3 fonctionne en récepteur car le courant réel I entre par sa borne positive.

5) Bilan d'énergie :

$$\text{Puissance fournie par } E_2: P_2 = E_2 I = 0.3W$$

$$\text{Puissance reçue par } E_3: P_3 = E_3 I = 0.2W$$

$$\text{Puissance dissipée par effet Joule: } P_J = P_2 - P_3 = 2R'I^2 = 0.1 W$$

Partie II — Étude du régime transitoire

1) Équation différentielle : Calculons $(V_A - V_B)$

$$\text{Branches 1 et 2: } q/C - E_1 + R'i_1 = R'i_2 - E_2 \quad (1)$$

$$\text{Branches 2 et 3: } R'i_2 - E_2 = -R'i_3 - E_3 \quad (2)$$

$$\text{Loi des nœuds: } i_1 + i_2 = i_3 \quad (3)$$

On doit chercher le courant dans la branche du condensateur : $i_C = i_1 = dq/dt$ (4)

Remplaçons i_3 dans (2) pour obtenir :

$$\text{Branches 1 et 2: } q/C + R'i_1 - R'i_2 = E_1 - E_2 \quad (1')$$

$$\text{Branches 2 et 3: } R'i_1 + 2R'i_2 = E_2 - E_3 \quad (2')$$

Éliminons i_2 en calculant $2 \times (1') + (2')$. On obtient

$$\left(\frac{3}{2}\right)R'i_1 + q/C = E_2 - \left(\frac{1}{2}\right)(E_2 + E_3)$$

En utilisant l'équation (4), on arrive à $dq/dt + q/\tau = E/R_1$

$$\text{Où } \tau = (3/2)R'C = 6rC, R_1 = (3/2)R' = 6r$$

$$\text{Et } E = E_1 - 12(E_2 + E_3) = (7/4)E_3$$

2) L'équation sans second membre ($dq/dt + q/\tau = 0$) a pour solution $q_S = Ae^{-t/\tau}$

La solution particulière q_P correspond à la charge finale atteinte quand $i_1 = dq/dt = 0$.

Cette charge a déjà été calculée dans (I-2). On peut la retrouver aussi à partir de l'équation différentielle $q_P/\tau = E/R_1 \Rightarrow q_P = CE = Q_0$.

La solution générale est $q(t) = q_S + q_P = Ae^{-t/\tau} + CE$. La charge initiale étant nulle $q(0) = 0 \Rightarrow A = -CE$.

On a :

$$q(t) = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \tau = 6rC, \quad E = (7/4)E_3$$

3) L'équation $q(t) = \alpha EC$ où $\alpha = 0.999$ devient $1 - \alpha = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow$

$$t = -\tau \ln(1 - \alpha)$$

$$\text{A.N. } \tau = 0.3ms \Rightarrow t = 2.3\tau = 0.69ms$$

4) Bilan : Énergie fournie par E_1 : $W_1 = Q_0E_1 = 3Q_0E_3, W_1 = 0.84mJ$

Énergie emmagasinée dans le condensateur : $U_C = \left(\frac{1}{2}\right)Q_0V_0 = \left(\frac{7}{8}\right)Q_0E_3 = 0.245mJ$

Énergie $W_{2,3}$ utilisée dans E_2 et E_3 : Comme la charge Q_0 est transportée par i_1 , les courants

$$i_2 = \frac{(E_2 - E_3)}{2R'} - \left(\frac{i_1}{2}\right) \text{ et } i_3 = i_1 + i_2 = \frac{(E_2 - E_3)}{2R'} + \left(\frac{i_1}{2}\right) \text{ Montrent que la moitié de la charge}$$

Q_0 a traversé E_2 et l'autre moitié a traversé E_3 . Par conséquent.

$$W_{2,3} = (1/2)Q_0E_2 + (1/2)Q_0E_3 = (5/4)Q_0E_3, \quad W_{2,3} = 0.35mJ$$

Énergie dissipée par effet Joule : $W_J = W_1 - U_C - W_{2,3} = \frac{7}{8}Q_0E_3 = U_C,$

$$W_J = 0.245mJ.$$

Vérification :

Le courant $i_1(t) = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{Q_0}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$ traverse la résistance R' de la branche 1, sa moitié ($i_1/2$)

traverse R' dans la branche 2 et l'autre moitié traverse R' dans la branche 3. On ne prend pas en considération le bilan du courant permanent $(E_2 - E_3)/2R' = I$ car il a déjà été établi dans la première partie (I.5). Donc,

$$W_J = \int_0^\infty R'i_1^2 dt + \int_0^\infty R'\left(\frac{i_1}{2}\right)^2 dt + \int_0^\infty R'\left(\frac{i_1}{2}\right)^2 dt = \frac{3R'}{2} \int_0^\infty i_1^2 dt$$

$$W_J = \frac{3R'}{2} \left(\frac{Q_0}{\tau}\right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{3R'}{2} \left(\frac{Q_0}{\tau}\right)^2 \frac{1}{2} \tau = \frac{Q_0^2}{2C}$$

On retrouve bien

$$W_J = U_C = \frac{1}{2}Q_0V_0$$

TDN°05 (Magnétique)**EX01 :**

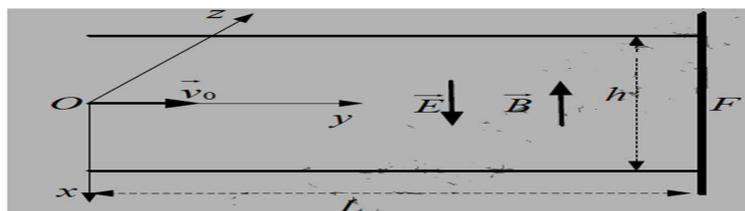
Une particule de masse $5 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$ porte une charge de $2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. On communique à la particule une vitesse initiale horizontale de $6 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$.

Quelles sont la grandeur et la direction du champ magnétique minimum qui maintiendra la particule sur une trajectoire horizontale en compensant l'effet de la pesanteur ?

EX02:

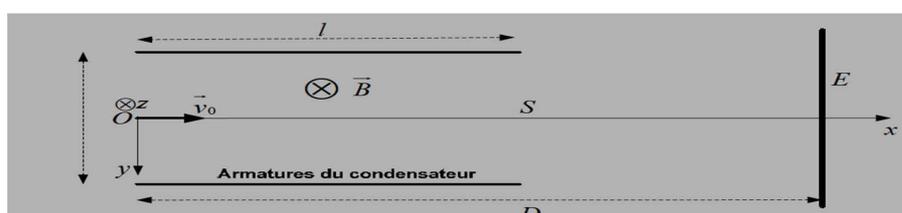
Dans un dispositif expérimental un faisceau homocinétique d'ions pénètre en O , pris comme origine des espaces, entre les armatures d'un condensateur plan avec une vitesse initiale horizontale v_0 suivant la longueur. Un écran fluorescent (F) est positionné immédiatement à la sortie du condensateur. Ce condensateur plan est formé de deux plaques carrées de côté L et distantes de h . Le faisceau est soumis à une différence de potentiel U . Un champ magnétique \vec{B} uniforme parallèle au champ électrique \vec{E} et de direction opposée, de module B règne dans cet espace. Nous ferons l'hypothèse que la vitesse initiale v_0 est grande par rapport aux vitesses acquises à cause des champs électrique et magnétique.

- 1) En supposant que le champ électrique agit seul ($B = 0$), trouver la trajectoire des ions dans le condensateur et la position des marques qu'ils laissent sur l'écran fluorescent.
- 2) En supposant que le champ magnétique agit seul ($E = 0$), trouver la trajectoire des ions dans le condensateur et la position des marques qu'ils laissent sur l'écran fluorescent.
- 3) Sous l'action simultanée des deux champs, montrer que l'équation de la trajectoire du faisceau est indépendante de la vitesse initiale du faisceau.
- 4) Quelle est la grandeur qu'on peut déduire de cette expérience ?

**EX03 :**

On utilise le dispositif représenté ci-dessous pour dévier un faisceau d'électrons qui ont une vitesse \vec{v}_0 . Ce faisceau traverse, dans le vide, un champ magnétique uniforme d'induction \vec{B} perpendiculaire à \vec{v}_0 . Le poids de l'électron est négligeable devant la force électromagnétique.

- 1) Quelle est la trajectoire des électrons dans le champ ?
- 2) Calculer la déviation α infligée par ce champ au faisceau à sa sortie du champ.
- 3) Établir l'expression mathématique de la période du mouvement de l'électron.
- 4) Comment varient le rayon de la trajectoire, la période et la vitesse angulaire si la vitesse d'injection des électrons est doublée ?
- 5) Quelle serait la trajectoire si le faisceau d'électrons entrait dans le champ magnétique avec un vecteur vitesse parallèle au vecteur champ ? Justifier.
- 6) Décrire la trajectoire si l'angle en O entre \vec{v}_0 et \vec{B} est différent de 0° et 90°



Solution TDN°05 (Magnétique)**Solution EX01:**

On sait qu'une charge qui se déplace dans un champ magnétique est soumise à une force magnétique $\vec{F} = q(\vec{v}_0 \wedge \vec{B})$, telle que son intensité soit égale à $F = qv_0 B \sin \alpha$, avec $\alpha = (\vec{v}_0, \vec{B})$.

La particule chargée est soumise à deux forces : la force magnétique charge qui se déplace dans un champ magnétique est soumise à une force magnétique \vec{F} et son poids charge qui se déplace dans un champ magnétique est soumise à une force magnétique $\vec{P} = m\vec{g}$. Pour que sa trajectoire reste horizontale, il faut que les deux forces soient directement opposées $\vec{F} = -\vec{P}$.

$$\begin{array}{l} \vec{B} \perp \vec{v}_0 \Rightarrow \sin \alpha = 1 \Rightarrow F = qv_0 B \\ P = mg \end{array} \quad \left| \Rightarrow B = \frac{mg}{qv_0} \right.$$

Application numérique :

$$B = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 9,8}{2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^4} \rightarrow B \approx 3,27 \text{ T}$$

Quant à la direction de \vec{B} , elle est horizontale et perpendiculaire au plan vertical formé par la vitesse \vec{v}_0 et la force \vec{F} .

\vec{v}_0 est horizontale, et a pour direction l'axe $x'x$,

\vec{F} est verticale et a pour direction l'axe $z'z$,

\vec{B} est horizontale et a pour direction l'axe $y'y$.

Solution EX02:

On néglige dans cette solution le poids des particules devant les autres forces.

1) Déviation produite par le champ électrique seul :

Equation de la trajectoire :

Suivant l'axe Ox , la seule force qui agit sur le faisceau d'ions est la force électrique

$\vec{F} = qE \cdot \vec{u}_x$. Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}_x = qE \cdot \vec{u}_x \Rightarrow a_x = \frac{q}{m} E$$

Le condensateur étant plan, donc $E = \frac{U}{h}$, d'où :

$$a_x = \frac{qU}{mh}$$

L'accélération suivant l'axe Ox étant constante, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré dont l'équation horaire est :

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{qU}{mh} t^2$$

Suivant l'axe Oy , aucune force n'agit sur le faisceau qui se déplace à vitesse constante

$\vec{v} = \vec{v}_y = v_y \vec{u}_y$. Le mouvement est donc rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$$

La déviation finale marquée sur l'écran, à la sortie du faisceau du condensateur (où $y = L$

), après la durée $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ est :

$$x = \frac{1}{2} \frac{qU}{mh} \left[\frac{L}{v_0} \right]^2 = \Delta x \rightarrow (1)$$

2) Déviation produite par le champ magnétique seul :

Equation de la trajectoire : Suivant l'axe Oz , la seule force agissant sur le faisceau d'ions est la force magnétique perpendiculaire à l'axe Ox qui porte le vecteur du champ magnétique :

$$\vec{F} = q(\vec{v}_0 \wedge \vec{B})$$

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire :

$$m\vec{a}_z = \frac{q}{m} v_0 \cdot \vec{u}_y \wedge (-B \cdot \vec{u}_x) \Rightarrow \vec{a}_z = \frac{q}{m} v_0 B \cdot \vec{u}_z$$

$$a_z = \frac{q}{m} v_0 B$$

L'accélération est constante suivant l'axe Oz . Le mouvement est donc rectiligne uniformément varié d'équation horaire :

$$z = \frac{1}{2} a_z t^2 \rightarrow z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} v_0 B t^2$$

Suivant l'axe Oy , aucune force n'agit sur le faisceau qui se déplace à vitesse constante

$\vec{v} = \vec{v}_y = v_y \vec{u}_y$. Le mouvement est donc rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$$

La déviation finale indiquée sur l'écran, à la sortie du faisceau du condensateur (où $y = L$),

après la durée $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ est :

$$\Delta z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} v_0 B \left[\frac{L}{v_0} \right]^2 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B \frac{L^2}{v_0} = \Delta z \rightarrow (1)$$

3) La marque laissée par le faisceau sur l'écran est déviée suivant l'axe Oz (c'est-à-dire dans le plan du mouvement initial), tandis que dans le premier cas la marque est déviée perpendiculairement à ce plan.

La déviation totale produite est égale à la composition des deux déviations produites par les champs électrique et magnétique. En éliminant la vitesse entre les équations (1) et (2), on obtient la valeur de cette déviation :

$$v_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B \frac{L^2}{z} \Rightarrow x = 2 \frac{m U}{q h B^2 L^2} z^2$$

Remarquons que l'expression est indépendante de la vitesse initiale.

4) Cette expérience permet le calcul de la charge massique $\frac{q}{m}$ des ions qui constituent le faisceau dévié. En effet les grandeurs U, B, L, h sont connues d'avance et il ne reste plus qu'à déduire le rapport entre la masse de l'ion et sa charge.

Historiquement : Par sa célèbre expérience, R.A. Millikan a pu calculer la charge de l'électron grâce au résultat auquel est parvenu, bien avant lui, J.J Thomson qui a calculé justement la charge massique $\frac{q}{m}$. Il ne restait plus qu'à déduire la masse de l'électron.

Solution EX03:

- 1) Chaque électron du faisceau, à son entrée dans le champ magnétique, est soumis à une force magnétique :

$$\vec{F} = q(\vec{v}_0 \wedge \vec{B})$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = -ev_0 \cdot \vec{u}_y \wedge (B \cdot \vec{u}_z) \Rightarrow \vec{a} = a \cdot \vec{u}_y \leftrightarrow \vec{F} = F \cdot \vec{u}_y$$

La force magnétique à laquelle est soumis l'électron est perpendiculaire à \vec{v}_0 (c'est-à-dire à la trajectoire) et à \vec{B} . On va étudier le mouvement dans le repère de Frenet (O, \vec{N}, \vec{T}) l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

Puisque la vitesse est constante, la composante tangentielle de l'accélération est donc nulle, d'où :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{T} = \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{v}_0 = Cte \end{array} \right| \Rightarrow \text{le mouvement est uniforme}$$

L'accélération normale a pour expression :

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N} \rightarrow a_N = \frac{v_0^2}{R} = v_0 \frac{e}{m} B$$

Le rayon de courbure est constant, donc :

$$R = \frac{mv_0}{eB} = Cte \Rightarrow \text{le mouvement est circulaire}$$

En conclusion, dans le champ magnétique le mouvement du faisceau d'électrons est circulaire uniforme. La trajectoire dans le condensateur est un arc de cercle de rayon R . Voir figure ci-dessous.

- 2) L'angle de déviation α est égal à l'angle au centre de l'arc \widehat{OA} (voir figure ci-dessous), et par conséquent :

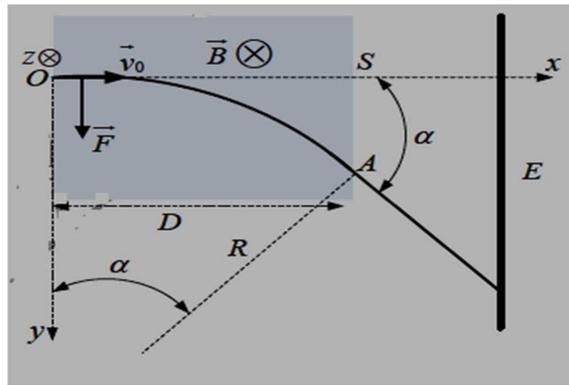
$$\alpha = \frac{\widehat{OA}}{R} \approx \frac{1}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{e}{mv_0} Bl$$

- 3) Le mouvement étant circulaire, la vitesse angulaire est :

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{v_0}{R} \\ R = \frac{mv_0}{eB} \end{array} \right| \Rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

La période est égale à :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot m}{eB}$$



- 4) Si on double la vitesse v_0 : Seul le rayon double, tandis que la période et la vitesse angulaire restent invariables puisqu'elles sont indépendantes de la vitesse initiale.
- 5) Si un faisceau d'électron pénètre avec une vitesse parallèle au champ magnétique, il ne sera soumis à aucune force, à condition de négliger son poids, de ce fait sa trajectoire reste rectiligne.

$$\vec{F} = m\vec{a} = -ev_0 \cdot \vec{u}_x \wedge B \cdot \vec{u}_x \Big|_{\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x = \vec{0}} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = Cte \Rightarrow \text{mouvement rectiligne uniforme}$$

- 6) Dans ce cas, décrit dans l'énoncé, la vitesse et l'accélération ont deux composantes chacune.

$\vec{v}_{//}$ et $\vec{a}_{//}$: projetées sur la direction de \vec{B} ,

\vec{v}_{\perp} et \vec{a}_{\perp} : projetées sur le plan perpendiculaire à \vec{B} ,

Par application de la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge B) \Rightarrow m(\vec{a}_{//} + \vec{a}_{\perp}) = q(\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}) \wedge \vec{B}$$

En développant, on remarque que le produit vectoriel $q \cdot \vec{v}_{//} \wedge \vec{B}$ est nul car $\vec{v}_{//}$ et \vec{B} sont parallèles, il en résulte :

$$m\vec{a}_{//} + m\vec{a}_{\perp} = q \cdot \vec{v}_{//} \wedge \vec{B} + q\vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} m\vec{a}_{//} = \vec{0} \\ q \cdot \vec{v}_{//} \wedge \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

Ces deux résultats nous montrent que le mouvement de la charge est la résultante d' :

- un mouvement rectiligne uniforme parallèle au champ : $m\vec{a}_{//} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{//} = Cte$
- un mouvement circulaire uniforme autour du vecteur \vec{B} de rayon $R = \frac{mv_{\perp}}{eB}$ et de

vitesse angulaire $\omega = \frac{eB}{m}$.

La trajectoire a la forme hélicoïdale. Le rayon de l'hélice que décrit le faisceau d'électron est

$$\text{égale à } R = \frac{mv_{\perp}}{eB}$$

Référence

Référence :

- [1] Polycopié de Cours physique 2 (Mr Abdeladim Mustapha 2015/2016)
- [2] Cours Physique 2 (1^{ÈRE} ANNÉE TRON COMMUN LMD): Electricité Et Magnétisme sidi bel abbés
- [3] Polycopié de cours de Physique II- Electricité (Dr. Samiha CHAGUETMI 2016/2017)
- [4] Cours et Exercices A.FIZAZI_UNIV_BECHAR OPU 2012 ;
- [5] ÉLECTROMAGNÉTISME 1ère année J. Roussel - E.N.S.C.R - Fev. 2010
- [6] Physique2 Electricité A.Chafa et A.Dib Edition Mars 2017
- [7] Physique Générale Nour Eddine Hakiki Edition 1.02.5055 Aout 2017