



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Centre universitaire – BELHADJ Bouchaib - Ain Témouchent  
Institut des Sciences et de la Technologie

---

# **Cours de Mécanique des Fluides et Technologie des Conduites**

*Présenté par*

***BENZENINE HAMIDOU***

**Filière : Génie Mécanique ;**

**Spécialité : Mécanique & Energétique**

<b>Tables des Matières</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Introduction</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>Chapitre 2 : Cinématique des fluides</b>	<b>10</b>
2.1. <b>Introduction</b>	<b>11</b>
2.2. Variables de Lagrange	11
2.3. Variables d'Euler	11
2.4. Lignes de courant, tube de courant, trajectoire.	12
2.5. Débit en masse –débit en volume	14
2.6. Accélération d'un élément de fluide-Dérivée particulaire	14
2.7. Equation de continuité	14
2.8. Fonction de courant	16
2.9. Description et classification des écoulements	16
2.9. 1 Fluide parfait – réel	16
2.9. 2. Ecoulement permanent :	16
2.9. 3. Ecoulement incompressible- compressible :	17
2.9. 5. Ecoulement irrotationnel	17
2.9. 6. Ecoulement unidimensionnel ou monodimensionnel	18
2.9. 7.Ecoulement bidimensionnel	18
2.9. 8. Ecoulement uniforme et non-uniforme	18
2.9. 9. Ecoulement laminaire	18
2.9. 10. Ecoulement turbulent	18
2.10. Exemple :	19
2.11. Solution de l'exemple	19

<b>Chapitre 3 : Equations générales du mouvement de fluide</b>	<b>21</b>
3.1.Introduction	22
3.2. Principe de la conservation de la masse	22
3.2.1. Applications	23
3.2.2. Exemple	24
3.2.3. Solution de l'exemple	25
3.3. Principe de la conservation de la quantité de mouvement : théorème d'Euler	26
3.3.1. Applications	27
3.3.1.1. Cas d'un tube de courant	27
3.3.2. Exemple	28
3.3.3. Solution de l'exemple	29
<b>Chapitre 4 Dynamique des fluides parfaits incompressibles (non-visqueux)</b>	<b>31</b>
4.1. Rappels des équations fondamentales de la statique	32
4.1.1. Equilibre dans le cas général	32
4.2. Equation générale de la dynamique des fluides parfait incompressibles.	32
4.2.1. Equation d'Euler	32
4.2.2.1. Expression de la différentielle totale de la pression	35
4.2.2. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli	35
4.2.2.2. Le théorème de Bernoulli	36
4.2.2.2.1. Applications du théorème de Bernoulli	38
a) Première application : la sonde de Pitot	38
b) Etude de la vidange d'un réservoir.	39
4.2.2.2. 2.Exemple	41
4.2.2.2. 3. Solution de l'exemple	41
4.2.2.2. 4.Exemple2	42

4.2.2.2. 5. Solution de l'exemple 2	43
<b>Chapitre 5 Dynamique des fluides réels incompressibles (visqueux)</b>	<b>44</b>
5.1.Introduction	45
5.2. Définition élémentaire de la viscosité dynamique	45
5.2.1. Formule de Newton	45
5.3. Etude directe de l'écoulement laminaire dans un tube cylindrique horizontale de section circulaire constante	45
5.3.1. Equilibre d'un cylindre élémentaire	46
5.3.2. Répartition des vitesses	47
5.3.3. Calcul du débit .formule de POISEUILLE	48
5.3.4. Exemples	48
5.3.4.2. Solution de l'exemple 1	49
5.3.4.3. Exemple 2	50
5.3.4.4. Solution de l'exemple 2	50
5.3.4.5. Exemple 3	50
5.3.4.6. Solution de l'exemple 3	50
5.3.4.7. Exemple 4	51
5.3.4.8. Solution de l'exemple 4	51
<b>Chapitre6 : Perte de charge et calcul des conduites</b>	<b>52</b>
<b>6.1.Introduction</b>	<b>53</b>
6.2. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel	53
6.2.1. Les pertes de charge	53
1. Pertes de charge linéaires	53
2. Pertes de charge singulières	54
6.2.2. Exemple	55
6.2.3. Solution de l'exemple	55

## Références Bibliographiques 57

### Listes des Figures

Figure 1 : les positions d'une particule fluide en fonction du temps	11
Figure 2 : Lignes de courant	12
Figure 3: Trajectoires et lignes d'émission	12
Figure4 : la projection de parallélépipède fixe élémentaire sur le plan x, y.	14
Figure 5 : Ecoulement rotationnel	17
Figure 6 : Ecoulement irrotationnel	17
Figure 7 : Allure de la vitesse pour un écoulement laminaire	18
Figure 8 : Allure de la vitesse pour un écoulement turbulent	19
Figure 9 : Volume matériel	22
Figure 10 : la projection des vecteurs de vitesse et de normale sur les sections du domaine étudié	23
Figure 11: l'image de réservoir étudié	25
Figure 12: domaine de contrôle V	26
Figure 13: la représentation des vecteurs vitesses et vecteurs unitaires des normales pour les surfaces de domaine de contrôle V	27
Figure 14: représentation des jets bidimensionnels de fluide dans le problème étudié	29
Figure15 : les forces de pression sur un parallélépipède élémentaire de cote dx dy dz	32
Figure 16: ligne piézométrique et plan de charge d'un écoulement.	37
Figure 17: les lignes de courant autour d'un obstacle	38
Figure 18: deux tubes de prise pression dans la canalisation de l'écoulement	39
Figure 19: Vidange d'un réservoir	39
Figure 20: la configuration géométrique de la tuyère de l'exemple 1	41
Figure 21 : la configuration géométrique des deux réservoirs l'exemple 2	42

Figure 22:les forces de pression exercées sur un élément cylindrique centré sur un axe	46
Figure 23:les profils de vitesse et de contrainte tangentielle dans une conduite cylindrique	47
Figure 24:les données de l'exemple 1	49
Figure 25:les données géométriques du circuit hydraulique	55
Figure 26:les lignes de charge et piézométrique de l'écoulement	56

### **Listes des Tables**

Table 1 : théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible sous forme de bilan énergétique	36
Table 2 : théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible sous forme de bilan des pressions	37
Table 3 : théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible sous forme de bilan des hauteurs	37

## Avant propos

Ce document photocopie correspond au support de cours de Mécanique des Fluides et technologie des conduites enseigné en première année Master au centre universitaire -Belhadj Bouchaib- à Ainetouchent, il est structuré de la façon suivante.

Le chapitre 1 constitue quelques rappels sur les opérateurs géométriques à savoir : le produit scalaire et vectoriel de deux vecteurs, le gradient d'un champ scalaire ainsi que la divergence, le rotationnel et le tenseur gradient de vecteur.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la cinématique des fluides, une présentation des deux approches « lagrangienne et eulérienne » qui peuvent être fondées sur la description du mouvement d'un fluide, suivies par quelques descriptions et classifications des écoulements à savoir, les fluides parfaits et réels, les fluides compressibles et incompressibles, Ecoulement permanent, Ecoulement rotationnel et irrotationnel, Ecoulement unidimensionnel et bidimensionnel, Ecoulement uniforme et non-uniforme, Ecoulement laminaire et turbulent.

Dans le chapitre 3 les équations fondamentales de la mécanique des fluides qui peuvent être obtenues par les principes de la conservation de la masse et de quantité de mouvement sont traitées en détail, suivies par des applications et des exemples corrigés.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse aux mouvements des fluides parfaits, c'est-à-dire sans frottement (fluides non visqueux) et sans échange de chaleur, donc la connaissance des distributions de pression et de vitesses au voisinage des parois est particulièrement utile, ensuite une démonstration du théorème de Bernoulli et quelques applications de ce théorème seront présentées, le problème de vidange et quelques exemples ont été également faits à la fin de ce chapitre.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude de la dynamique des fluides réels incompressibles (visqueux), une étude directe d'un écoulement laminaire dans un tube cylindrique horizontale de section circulaire constante sera faite, enchaînée par quelques exemples et leurs corrections.

Dans le chapitre 6 sont présentés le théorème relatif à la dynamique des fluides incompressibles réels. Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces équations est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (problèmes de pompage, de turbines, de machines hydrauliques, et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide etc.)

Pour la rédaction de ce photocopie, on a utilisé de nombreux ouvrages classiques et quelques documents de certains collègues. Il constitue ma première version. Il sera certainement révisé. Les critiques, les remarques et les conseils des examinateurs seront accueillis avec beaucoup de respect et remerciement.

# **Chapitre 1**

## **Introduction**

## Introduction

Avant d'aborder les cours de la mécanique des fluides, il est intéressant de présenter quelques petits rappels sur les opérateurs géométriques à savoir : le produit scalaire et vectoriel de deux vecteurs, le gradient d'un champ scalaire ainsi que la divergence, le rotationnel et le tenseur gradient de vecteur  $\vec{F}$ .

Le scalaire de deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$  est calculé de la manière suivante :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{X} \cdot \vec{X}' = xx' + yy' + zz' = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{X}'\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{Avec } \|\vec{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ et } \cos(\alpha) = \cos(\angle(\vec{X}, \vec{X}'))$$

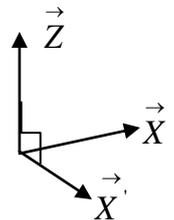
$\alpha$  est l'angle formé par les deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$ .

**Le produit scalaire** de deux vecteurs est un nombre réel, les deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$  sont colinéaires si et seulement si l'angle  $\alpha$  est nul.

Le vectoriel de deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$  est calculé de la manière suivante :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ donc } \|\vec{X} \wedge \vec{X}'\| = \|\vec{z}\| = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{X}'\| \cdot \sin(\alpha) \text{ et}$$

$$\vec{X} \wedge \vec{X}' = \vec{z} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k} = -\vec{X}' \wedge \vec{X}$$



**Le produit vectoriel** de deux vecteurs est un vecteur. Le vecteur  $\vec{z}$  est orthogonal au plan formé par ces deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$ .

Les deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$  sont colinéaires si (et seulement si) leur produit vectoriel est nul.

Les deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$  sont orthogonaux si et seulement si la norme de leur produit vectoriel est égale au produit de leurs normes, dans ce cas  $\|\vec{z}\|$  égal à la surface rectangulaire formée par les 2 vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$ .

$V = V(x, y, z)$  avec  $x, y, z$  sont des variables, **le gradient de  $V$**  est un vecteur et il est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{\nabla} \cdot V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{Avec } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{F}$  est un vecteur tel que :  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

**La divergence de vecteur  $\vec{F}$**  notée *div* est un scalaire et elle est donnée par la relation suivante :

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

**Le rotationnel de vecteur  $\vec{F}$**  noté *rot* est un vecteur et il est calculé par la relation suivante :

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

**Le tenseur gradient de  $\vec{F}$**  est calculé par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{div.} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot V) = \nabla^2 V = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\text{div.} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{F} = \nabla^2 \vec{F} = \Delta \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

## **Chapitre 2**

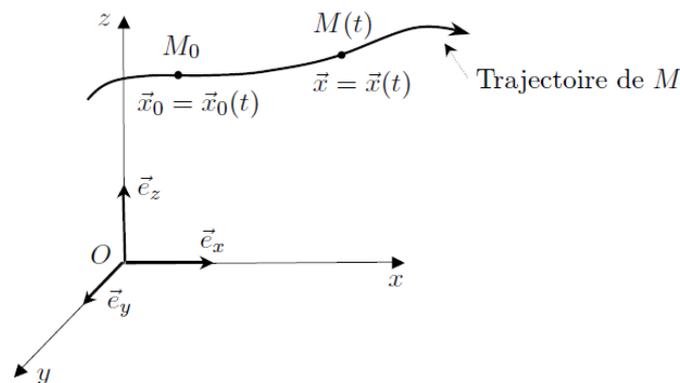
# **Cinématique des fluides**

## 2.1. Introduction

La cinématique des fluides a pour but principal l'étude des mouvements des fluides sans considérer les forces qui produisent ce mouvement. La description du mouvement d'un fluide peut être fondée sur deux approches : une représentation lagrangienne et une représentation eulérienne. La représentation lagrangienne consiste à étudier les trajectoires des particules de fluides en fonction de l'espace et du temps. Tandis que la représentation eulérienne s'intéresse à l'étude des variations dans le temps des caractéristiques de l'écoulement (vitesse, pression, etc.) en des points fixes de l'espace.

## 2.2. Variable de Lagrange[1]

Elle consiste à caractériser le mouvement de chaque particule par ses coordonnées  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  en fonction du temps.



**Figure 1** : les positions d'une particule fluide en fonction du temps[1]

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \text{ Se sont les variables de Lagrange}$$

## 2.3. Variable d'Euler

La description eulérienne consiste en la connaissance du champ de vitesses à chaque instant  $t$ . La vitesse  $\vec{U}$  est celle de la particule qui passe à l'instant  $t$  par la position  $\vec{x}$ . Si la vitesse ne dépend pas du temps, le mouvement est dit stationnaire ou permanent.

On déduit la vitesse d'une particule qui se trouve dans la position  $\vec{x}$  à l'instant  $t$  par :

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = \frac{\partial(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\vec{X}, t)}{\partial t}$$

## 2.4. Lignes de courant, tube de courant, trajectoire

Une ligne de courant est une courbe qui est tangente en chacun de ses points au champ de vitesse. La figure 2 présente un ensemble de lignes de courant d'un ensemble de particules.



**Figure 2 :** Lignes de courant

On déduit l'équation différentielle des lignes de courant à un temps  $t$  fixe par :

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial z}{w}$$

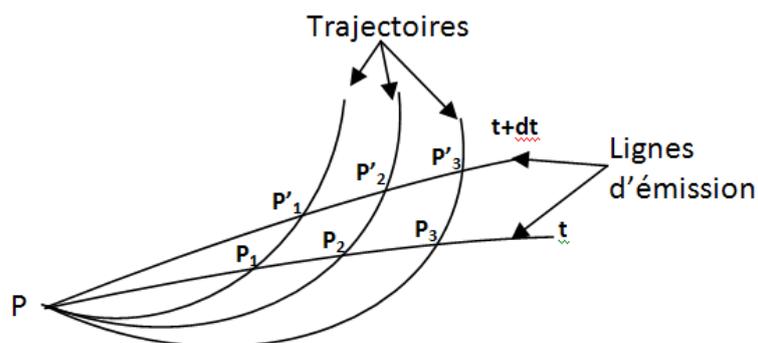
$u, v, w$  sont les composantes du vecteur vitesse  $\vec{U}$ , elles s'appellent aussi les variables d'Euler.

Si l'écoulement est stationnaire, alors la trajectoire est confondue avec la ligne de courant.

L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé, forme un tube de courant (ou filet de courant).

La trajectoire est le lieu géométrique des positions successives d'une même particule fluide. Ces équations sont les fonctions :  $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ .

Une ligne d'émission (de courant) est le lieu, à l'instant  $t$ , des particules fluides ayant passé par le point  $M$  à un instant quelconque (voir figure 3).



**Figure 3:** Trajectoires et lignes d'émission[2]

## 2.5. Débit en masse –débit en volume[2]

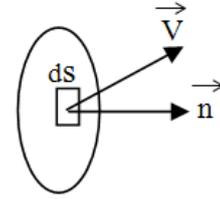
### a) Débit massique :

$$q_m = \iint_S \rho V_n ds = \iint_S \rho u dy dz + \rho v dz dx + \rho w dx dy$$

$\rho$  : Masse volumique du fluide

$ds$  : Élément de surface

$V_n$ : Projection de la vitesse  $V$  au centre de l'élément de surface sur la normale à l'élément  $ds$



### b) Débit volumique :

$$q_v = \iint_S V_n ds = \iint_S u dy dz + v dz dx + w dx dy$$

## 2.6. Accélération d'un élément de fluide-Dérivée particulaire

La dérivée particulaire de la vitesse (description eulérienne) est définie en suivant le mouvement de la particule de fluide le long de sa trajectoire (description lagrangienne).

D'une manière générale la dérivée particulaire d'une variable  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  est donnée par :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad. } \vec{B}). \vec{u} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad.}) \cdot \vec{B}$$

La dérivée particulaire d'un champ des vitesses est l'accélération  $\vec{\gamma}$  :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad.}) \cdot \vec{u}$$

Avec  $\vec{u} \cdot \text{grad} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$  ; il s'applique au champ scalaire ou vectoriel.

$$\vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Notons que :

$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ : est l'accélération locale, elle prend en compte l'influence explicite du temps et elle est nulle pour un écoulement permanent ou stationnaire.

$(\vec{U} \cdot \text{grad}) \cdot \vec{U}$ : est l'accélération convective, elle peut être due par exemple à la variation de la section dans un tuyau, elle n'est généralement pas nulle pour un écoulement permanent.

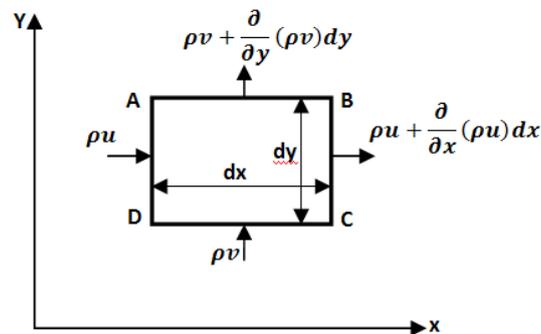
L'accélération d'une particule de fluide peut être mise sous la forme :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \vec{U}^2) + \text{rot } \vec{U} \wedge \vec{U}$$

## 2.7. Equation de continuité [4]

Soit un milieu fluide continu (ne comportant pas de trous d'air) sans sources ni puits. Considérons un parallélépipède fixe élémentaire  $dx \, dy \, dz$ .

La figure 4 représente la projection sur le plan  $x, y$ .



**Figure 4** : la projection de parallélépipède fixe élémentaire sur le plan  $x, y$ .

La masse de liquide qui entre par la face AD dans le temps  $dt$  est :

$$\rho u \, dy \, dz \, dt \quad (\text{puisque } q_m = \rho s v = m/t)$$

De même la masse de liquide qui sort par la face BC est :

$$\left[ \rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right] dy \, dz \, dt$$

Le parallélépipède perd, pour ces deux faces, la différence entre la masse sortante et la masse entrante, c'est-à-dire :

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right] dy \, dz \, dt$$

Le même calcul peut se faire pour l'ensemble des six faces, la masse perdue est donc :

$$dm = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dx dy dz dt$$

La masse peut s'exprimer comme :  $\rho dx dy dz = \rho dV$

La variation de cette masse pendant  $dt$  s'écrit :

$$dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$$

La conservation de la masse du volume  $dV$  s'écrit donc :

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dV dt$$

Soit l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Que l'on peut écrire :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \vec{v})$  ou  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0$

- **Cas d'un écoulement permanent :**

Dans ce cas la masse volumique en un point est indépendante du temps. L'équation devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0$$

- **Cas d'un fluide incompressible homogène :**

La masse volumique est constante en tous points. L'équation devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) + \frac{\partial}{\partial z}(w) = 0$$

Si le champ de vitesse dérive un potentiel  $\Phi$  c.-à-d. ( $\vec{V} = \overrightarrow{grad} \Phi$ ), cette condition  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  s'écrit en remplaçant  $u$ ,  $v$  et  $w$  par leurs valeurs  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$  on trouve :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi = 0 \text{ Laplacien de } \Phi$$

Dans ce cas, la fonction potentielle des vitesses est harmonique

## 2.8. Fonction de courant [11]

- *cas d'un Ecoulement plan, irrotationnel, permanent d'un fluide parfait incompressible*

L'équation différentielle des lignes de courant à un temps  $t$  fixe est définis par :

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial z}{w}$$

Les lignes de courant s'écrivent dont :

$$\frac{\partial x}{\partial \Phi} = \frac{\partial y}{\partial \Phi}$$

Par ailleurs nous considérons

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \text{ avec } \Psi = \Psi(x, y)$$

$udy-vdx$  peut représenter une équation différentielle totale  $d\Psi = udy - vdx$

Et par analogie :  $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  et  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

D'après l'équation de continuité pour un écoulement plan, irrotationnel, permanent

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \text{ d'ou } \Psi = Cst = K \text{ Famille de champ de courant}$$

La fonction  $\Psi$  est appelée fonction de courant, sa valeur est constante le long d'une ligne de courant et cette constante indique le cote de la ligne de courant.

## 2.9. Description et classification des écoulements

### 2.9. 1 Fluide parfait - réel

- Le fluide est supposé parfait si sa viscosité est nulle.
- Le fluide est supposé réel si sa viscosité n'est pas nulle et qui peut donner naissance à des contraintes de cisaillement provoquées par le frottement du fluide avec la paroi de la conduite, il offre aussi une résistance au mouvement.

### 2.9. 2. Ecoulement permanent

Un écoulement est permanent ou stationnaire si toutes les variables qui décrivent le mouvement du fluide ( $\rho, U, P \dots$ ) ne dépendent pas du temps. Dans le cas contraire l'écoulement est instationnaire ou transitoire.

### 2.9. 3. Ecoulement incompressible- compressible

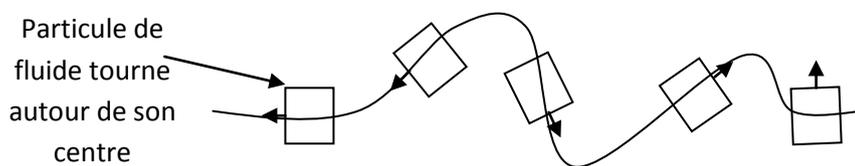
Un fluide est incompressible si sa masse volumique  $\rho$  est constante. Dans le cas contraire l'écoulement est compressible (exemple : Un gaz qui occupent tout le volume qui l'entour). La majorité des fluides sont incompressibles. Dans ce cas la variation de volume est nulle :

En coordonnées cartésiennes nous avons :

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{div } \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

### 2.9. 4. Ecoulement rotationnel

L'écoulement est rotationnel si les particules tournent autour de leur centre lorsqu'elles sont en mouvement.

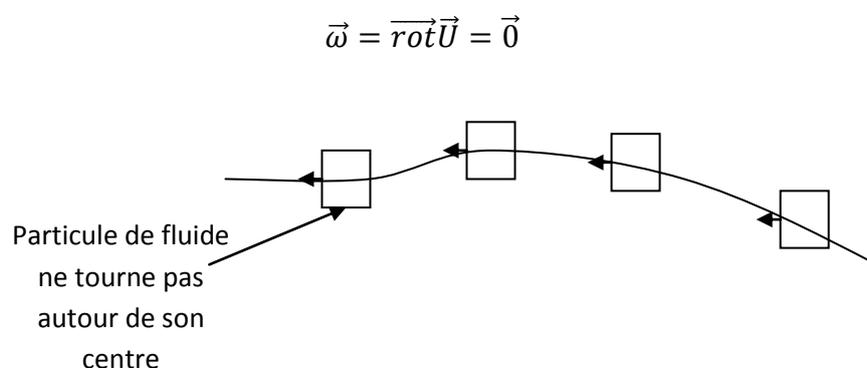


**Figure 5 :** Ecoulement rotationnel

### 2.9. 5. Ecoulement irrotationnel

La vorticité est définie par :  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{U}$

L'écoulement est dit irrotationnel si les particules ne tournent pas autour de leur centre lorsqu'elles sont en mouvement (Figure 6) et si à chaque instant le rotationnel de champ de vitesse est nul :



**Figure 6 :** Ecoulement irrotationnel

### 2.9.6. Écoulement unidimensionnel ou monodimensionnel

On dit qu'un écoulement est unidimensionnel si dans chaque section de l'écoulement, toutes les variables sont des constantes. En d'autres termes, dans un écoulement unidimensionnel, toutes les variables dépendent d'une coordonnée d'espace unique.

### 2.9.7. Écoulement bidimensionnel

L'écoulement est bidimensionnel si ses variables dépendent de deux coordonnées.

### 2.9.8. Écoulement uniforme et non-uniforme

La vitesse  $U$  dépend de la section de la conduite et du débit volumique  $Q_v$ . En effet, ce débit est égal :

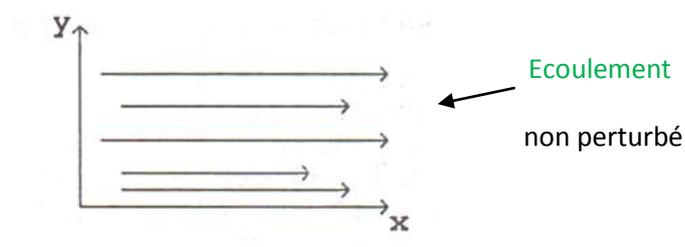
$$Q_v = U \cdot S$$

Si la section et le débit sont constants alors la vitesse dans toute la conduite sera constante et l'écoulement est dit uniforme. Si la section n'est pas constante, la vitesse  $U$  sera variable le long de la conduite et l'écoulement est non-uniforme.

### 2.9.9. Écoulement laminaire

On dit qu'un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée.

L'écoulement laminaire est un écoulement visqueux qui est caractérisé par des couches de fluides qui ont la même vitesse (Figure 7), il est obtenu à de faibles vitesses et pour lesquels le nombre de Reynolds  $Re$  est inférieur à 2000.

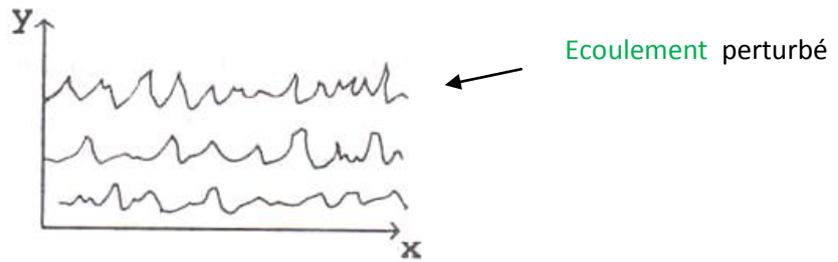


**Figure 7 :** Allure de la vitesse pour un écoulement laminaire

### 2.9.10. Écoulement turbulent

C'est un écoulement visqueux et il est turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide (Figure

8). Ces types d'écoulement sont obtenus à de grandes vitesses avec un nombre de Reynolds supérieur à 2000.



**Figure 8 :** Allure de la vitesse pour un écoulement turbulent

### 2.10. Exemple :

La distribution de vitesses pour un écoulement permanent incompressible bidimensionnel est donnée par :

$$\vec{V} = \begin{cases} u = x - 4y \\ v = -y - 4x \end{cases}$$

1. Montrer que cette distribution satisfait l'équation de continuité ?
2. Déterminer la fonction de courant  $\Psi$
3. Si l'écoulement est irrotationnel, déterminer la fonction potentiel  $\phi$

### 2.11. Solution de l'exemple

- a) L'équation de continuité pour un écoulement plan incompressible bidimensionnel est donnée par :

$$\vec{V} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) = 0$$

Et nous avons :

$\frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 4y) + \frac{\partial}{\partial y}(-y - 4x) = 1 - 1 = 0$  Donc le critère de continuité est bien vérifié.

- b) La fonction de courant  $\Psi$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -y - 4x \Rightarrow \Psi_x = yx + 2x^2 + Cte(y) \quad (1)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x - 4y \Rightarrow \Psi_y = xy - 2y^2 + Cte(x) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} = x + \frac{\partial Cte(y)}{\partial y} = u = x - 4y \Rightarrow Cte(y) = -2y^2$$

$$\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} = y + \frac{\partial Cte(x)}{\partial x} = -v = y + 4x \Rightarrow Cte(x) = 2x^2$$

On remplace une des constantes trouvées (soit de y ou celle de x) dans l'équation 1 ou 2, on trouve finalement la fonction de courant suivante :

$$\Psi = xy + 2x^2 - 2y^2$$

c) L'écoulement est irrotationnel si  $\overrightarrow{rot} \vec{V} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot} \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{V} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = (-4 + 4) \vec{k} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc l'écoulement est irrotationnel et nous pouvons déterminer la fonction potentielle  $\phi$

d) La fonction potentielle  $\phi$

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = x - 4y &\Rightarrow \phi_x = \int (x - 4y) dx \\ \Rightarrow \phi_x = \frac{x^2}{2} - 4xy + Cte(y) &\quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -y - 4x &\Rightarrow \phi_y = \int (-y - 4x) dy \\ \Rightarrow \phi_y = \frac{-y^2}{2} - 4xy + Cte(x) &\quad (4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial y} = -4x + \frac{\partial Cte(y)}{\partial y} = v = -y - 4x \Rightarrow \frac{\partial Cte(y)}{\partial y} = -y \text{ et donc } Cte(y) = \frac{-y^2}{2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial x} = -4y + \frac{\partial Cte(x)}{\partial x} = u = x - 4y \Rightarrow \frac{\partial Cte(x)}{\partial x} = x \text{ et donc } Cte(x) = \frac{x^2}{2} \quad (6)$$

En remplaçant soit l'équation (5) ou (6) dans l'une des équations (3) ou (4), on obtient la fonction potentielle  $\phi$  finale suivante :  $\phi = \frac{x^2}{2} - 4xy - \frac{y^2}{2}$

# **Chapitre 3**

## **Equations générales du mouvement de fluide**

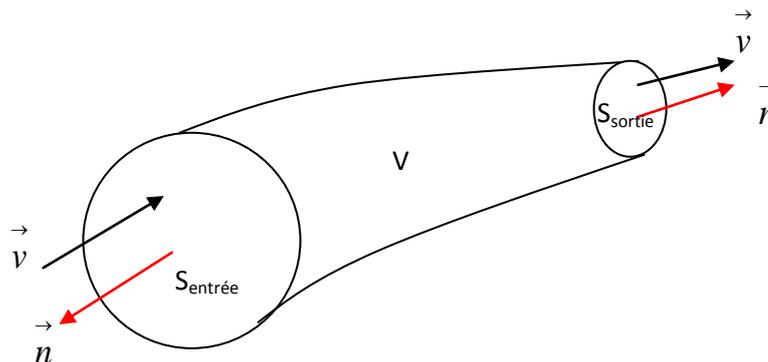
### 3.1.Introduction

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides peuvent être obtenues par les principes de la conservation de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie, les deux premiers principes seront abordés en détail avec des applications et exemples dans ce chapitre.

### 3.2. Principe de la conservation de la masse

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse : la variation de masse pendant un temps  $dt$  d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle du fluide sortant.

L'équation de continuité peut également s'établir à partir d'un bilan global. Lorsqu'on effectue un bilan non plus sur un volume élémentaire mais sur volume fini de fluide, les quantités étudiées apparaissent sous forme d'intégrales de volume.



**Figure 9 :** Volume matériel

Soit l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (7)$$

Que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v}) \text{ ou } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (8)$$

Et sous forme d'intégrale de volume, l'équation précédente (8) devient alors :

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_V (\rho \text{div}(\vec{v})) dV = 0 \quad (9)$$

D'après la formule de divergence d'Ostrogradsky :

$$\int_V \text{div}(\vec{v}) dV = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (10)$$

En remplaçant (10) dans (9) nous obtenons alors l'équation de continuité :

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (11)$$

L'équation (11) s'appelle équation de la conservation de la masse ou l'équation de continuité **écrite sous forme intégrale**. Ceci peut se traduire par l'égalité entre le débit rentrant dans la conduite et le débit sortant de celle-ci.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \cdot \vec{v} + \rho \text{div}(\vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v})$$

Nous remplaçons l'équation précédente dans l'équation (9), nous obtenons alors :

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = \int_V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) \right) dV = 0 \quad (12)$$

D'après l'équation (12), l'intégrant est nul et l'équation de continuité s'écrit alors sous forme vectorielle :

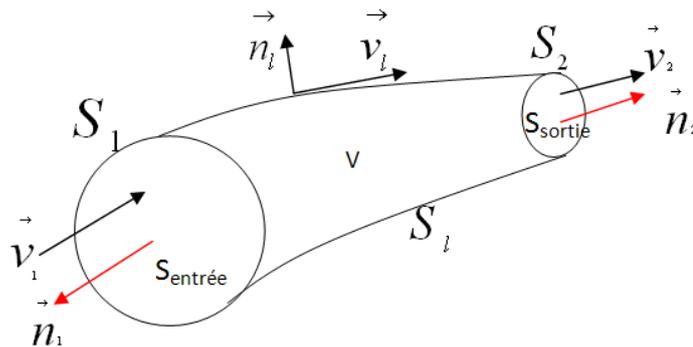
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (13)$$

Pour un fluide incompressible ( $\rho$  est constante) et l'équation (13) devient :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

### 3.2.1. Applications

Etablir l'équation de continuité pour un écoulement permanent d'un fluide compressible et d'un fluide incompressible, à l'intérieur d'un tube de sections droites à l'entrée et à la sortie



**Figure 10** : la projection des vecteurs de vitesse et de normale sur les sections du domaine étudié

L'équation de continuité peut s'écrire :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0$  (14)

Et sous forme d'intégrale de volume, l'équation précédente (14) devient:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV = 0 \quad (15)$$

D'après la formule de divergence d'Ostrogradsky :

$$\int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (16)$$

En remplaçant (16) dans (15) nous obtenons alors l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (17)$$

Cas d'un fluide permanent :  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0$  et donc l'équation (17) donne :  $\int_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$

$$\int_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \rho_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \rho_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{S_l} \rho_l \cdot \vec{v}_l \cdot \vec{n}_l dS_l = 0 \quad (18)$$

Or on a  $\int_{S_l} \rho_l \cdot \vec{v}_l \cdot \vec{n}_l dS_l = 0$

$$\text{Et par conséquent : } \int_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \rho_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \rho_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = 0 \quad (19)$$

La projection sur l'axe des abscisses x donne :

$$V_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}, n_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) = (V_1 \cdot (-1) + (0) \cdot (0)) = -V_1 \quad (20)$$

$$\vec{V}_2 \begin{pmatrix} V_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) = (V_2 \cdot (1) + (0) \cdot (0)) = V_2 \quad (21)$$

Pour un fluide compressible la densité n'est pas constante :

En substituant (20) et (21) dans (19) on trouve :

$$-\rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2 \text{ et donc } \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

Pour le cas d'un fluide incompressible, on fait la même chose, en tenant compte que la densité est constante dans le système :

*puisque  $\rho_1 = \rho_2$  et donc*

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2 \Leftrightarrow S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2$$

### 3.2.2. Exemple

Le réservoir a deux entrées et une sortie avec une section transversale circulaire. L'écoulement est considéré permanent avec une densité constante. Aux points A et C les vitesses sont supposées constantes sur la section transversale, tandis que la vitesse au point B a une distribution parabolique. Les rayons des entrées et de sorties sont donnés par  $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$  et les vitesses par  $u_A$  et  $u_B = u_{Bmax} \left(1 - \left(\frac{r}{R_B}\right)^2\right)$ . trouver la vitesse  $u_C$  au point C

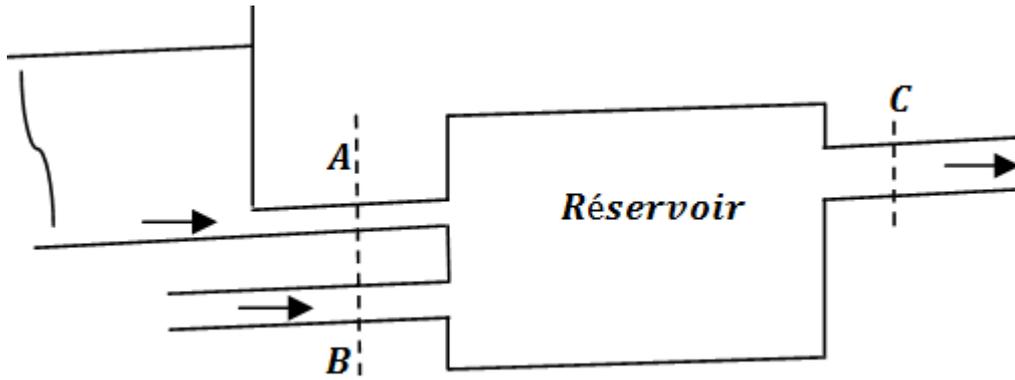


Figure 11: l'image de réservoir étudié

### 3.2.3. Solution de l'exemple

L'équation de continuité sous la forme d'intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (22)$$

L'écoulement est considéré permanent :  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0$

Et donc l'équation (22) donne :  $\int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$

Avec une densité constante c-a d :  $\int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \rho \cdot \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$

Et donc l'équation (22) devient:  $\int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (23)$

Appliquons l'équation (23) sur les différentes sections, on obtient :

$$\int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_A} \vec{u}_A \cdot \vec{n}_A dS_A + \int_{S_B} \vec{u}_B \cdot \vec{n}_B dS_B + \int_{S_C} \vec{u}_C \cdot \vec{n}_C dS_C + \int_{S_l} \vec{u}_l \cdot \vec{n}_l dS_l = 0 \quad (24)$$

Par symétrie on trouve :  $\int_{S_l} \vec{u}_l \cdot \vec{n}_l dS_l = 0$ , sachant que  $u_A$  et  $u_C$  sont constantes sur la section de passage de fluide .

Donc (24) devient :

$$-u_A \int_{S_A} dS_A - \int_{S_B} u_B dS_B + u_C \int_{S_C} dS_C = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_B} u_B(r) dS_B &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} u_{Bmax} \left(1 - \left(\frac{r}{R_B}\right)^2\right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} u_{Bmax} \left[ \int_0^{R_B} r dr + \frac{1}{R_B^2} \int_0^{R_B} r^3 dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ u_{Bmax} \frac{1}{4} R_B^2 \right] d\theta = u_{Bmax} \frac{1}{4} R_B^2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} u_{Bmax} R_B^2 \end{aligned}$$

L'équation (25) devient alors

$$-u_A \pi R_A^2 - \frac{\pi}{2} u_{Bmax} R_B^2 + u_C \pi R_C^2 = 0$$

$$u_C = u_A \left(\frac{R_A}{R_C}\right)^2 + \frac{1}{2} u_{Bmax} \left(\frac{R_B}{R_C}\right)^2$$

### 3.3. Principe de la conservation de la quantité de mouvement : théorème d'Euler

L'équation fondamentale de la dynamique qui traduit le bilan de quantité de mouvement a été établi en adoptant une approche Lagrangienne, c'est-à-dire liée à un domaine matériel que l'on suit dans son mouvement, ce qui nous a conduits à une loi locale exprimée en fonction de la dérivée particulaire de la vitesse, l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{grad} p + \rho \vec{g}$$

Dans laquelle la dérivée particulaire de la vitesse  $\frac{dV}{dt}$  s'écrit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{V}$$

Ou en notation indicielle :

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j}$$

Comme déjà définie en chapitre précédent, le premier terme du membre de droite correspond à la dérivée par rapport au temps au point considéré. Le deuxième terme apparaît comme le taux de variation de la vitesse dû au mouvement (au fait que la particule traverse un champ de vitesse variable dans l'espace).

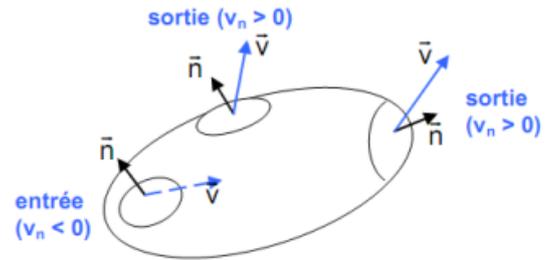


Figure 12: domaine de contrôle V[7]

En régime instationnaire, l'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v} = -\overrightarrow{grad} p + \rho \vec{g}$$

Prenons l'intégrale sur un domaine de contrôle quelconque V de l'écoulement délimité par la surface fermée S de normale extérieure  $\vec{n}$ ; la surface S comprend une surface solide imperméable au fluide ( $V_n = \vec{V} \cdot \vec{n}$  est nul en tous ses points) et des surfaces traversées par le fluide : aux entrées  $v_n$  est négatif tandis qu'aux sorties  $v_n$  est positif.

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} \right) dV + \iiint_V (\rho \vec{v} \cdot g \vec{r} \vec{a} d\vec{v}) dV = \iiint_V (-g \vec{r} \vec{a} d p) dV + \iiint_V (\rho \vec{g}) dV$$

Et appliquons le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} \right) dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S (-P \vec{n} + [\tau] \vec{n}) dS + \iiint_V \rho \vec{g} dV$$

C'est l'expression vectorielle du théorème d'Euler, encore appelé théorème des quantités de mouvement, qui stipule que :

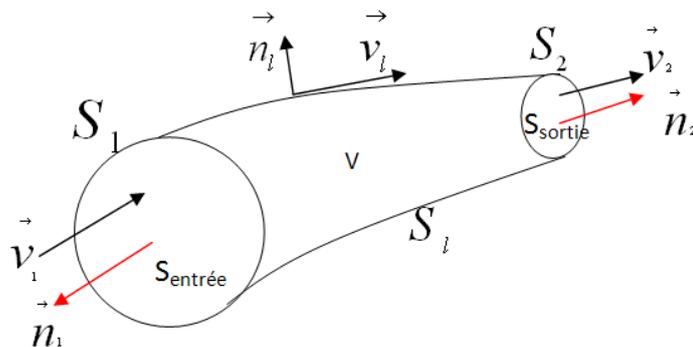
***Le flux de quantité de mouvement à travers une surface de contrôle fixe d'un écoulement permanent est égal à la résultante des forces extérieures appliquées au fluide dans le domaine limité par cette surface.***

En effet, le premier terme de l'équation est le flux des quantités de mouvement ( $\rho \vec{v}$  par unité de volume) sortant algébriquement de S par les ouvertures, le premier terme du membre de droite est la résultante des forces de pression qui sont appliquées au fluide et le dernier terme la résultante des forces de gravité (c'est-à-dire le poids du volume V :  $m \vec{g}$ )

### 3.3.1. Applications :

#### 3.3.1.1. Cas d'un tube de courant

Appliquons le théorème à une portion de tube de courant d'un fluide parfait pour lequel les vitesses sont constantes dans chacune des sections droites.



**Figure 13:** la représentation des vecteurs vitesses et vecteurs unitaires des normales pour les surfaces de domaine de contrôle V

le domaine de contrôle est limité par les surfaces  $S_1, S_1$  et  $S_2$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont les deux sections droites situées respectivement à l'entrée et à la sortie du tube et  $S_l$  la surface latérale formée des lignes de courant s'appuyant sur  $S_1$  et  $S_2$ . Les vecteurs unitaires des normales à ces surfaces, orientés positivement vers l'extérieur du domaine, sont désignés respectivement par  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  et  $\vec{n}_l$ .

Le théorème général de la conservation de la quantité de mouvement (théorème d'Euler) est :

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} \right) dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S (-P \vec{n} + [\tau] \vec{n}) dS + \iiint_V \rho \vec{g} dV \quad (26)$$

Nous considérons que l'écoulement est stationnaire  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , incompressible  $\rho$  est constante et non visqueux (viscosité nulle et donc  $\tau = 0$ ), donc l'équation (26) devient :

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S (-P \vec{n}) dS + \iiint_V \rho \vec{g} dV \quad (27)$$

Nous projetons l'équation (27) sur l'axe x, nous obtenons alors :

$$V_1 \binom{V_1}{0}, n_1 \binom{-1}{0} \dots (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) = -V_1 \qquad \vec{V}_2 \binom{V_2}{0}, \vec{n}_2 \binom{1}{0} \dots (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) = V_2$$

Sachant que  $\rho V_1 (-V_1) S_1 + \rho V_2 (V_2) S_2 = q_m (V_2 - V_1)$  puisque  $\rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2$

$$\underbrace{\frac{q_m (V_2 - V_1)}{\text{variation du débit}}}_{\text{de quantité de mouvement}} = \underbrace{\frac{-p_1 S_1 n_1 - p_2 S_2 n_2}{\text{forces de pression exercées par le fluide extérieur en contact avec lui au niveau des sections } S_1 \text{ et } S_2}}_{\text{forces de pression exercées}} + \underbrace{\int -p \vec{n}_i dS}_{\text{sur le fluide par les parois latérales du tube}} + \underbrace{m \vec{g}}_{\substack{\text{forces} \\ \text{extérieures} \\ \text{de pesanteur}}}$$

On retiendra:  $q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{F}_{ext}$

Qui est la traduction directe du théorème d'Euler pour un tube de courant que nous citons de nouveau

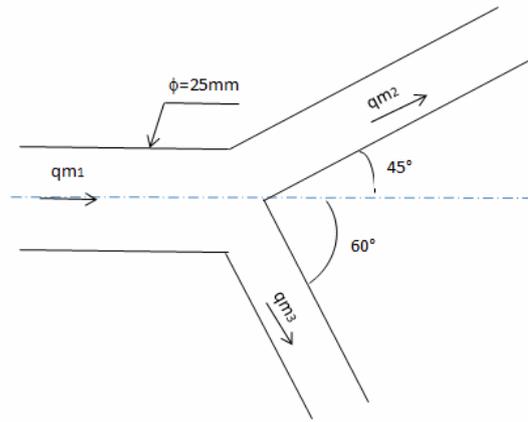
Le flux (= débit) de quantité de mouvement sortant d'un tube de courant d'un écoulement permanent,  $q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$ , est égal à la résultante des forces extérieures,  $\vec{F}_{ext}$ , appliquées au fluide dans le domaine limité par cette surface.

Remarque : cette équation nécessite l'hypothèse d'un écoulement permanent, le fluide pouvant être compressible ou incompressible.

### 3.2.2. Exemple

Nous ne considérons que des jets bidimensionnels de fluide incompressible, non visqueux (viscosité et la contrainte tangentielle  $\tau$  sont nulles), en mouvement stationnaire et dans lesquels la gravité n'a qu'un rôle négligeable.

En appliquant le théorème de la conservation de la quantité de mouvement, calculer  $F_x$  et  $F_y$  sachant que le débit d'eau à l'entrée est de  $30 \text{ Kg.s}^{-1}$ ,  $q_{m2} = \frac{2}{3} q_{m1}$  et  $q_{m3} = \frac{1}{3} q_{m1}$



**Figure 14:** représentation des jets bidimensionnels de fluide dans le problème étudié

### 3.2.3. Solution de l'exemple

La conservation de la quantité de mouvement (théorème d'Euler) est donnée par :

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} \right) dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S (-P \vec{n} + [\tau] \vec{n}) dS + \iiint_V \rho \vec{g} dV \quad (28)$$

En considérant qu'un écoulement stationnaire  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , incompressible  $\rho = \text{Cst}$  et non visqueux (viscosité nulle et donc  $\tau = 0$ ), la gravité n'a qu'un rôle négligeable  $\vec{g} = 0$ , l'équation (28) devient donc:

$$\iint_S \rho \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS - \iint_S (P \vec{n}) dS = 0 \quad (29)$$

Les normales et les vitesses ont pour les composantes suivantes :

$$\vec{U}_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_2 \begin{pmatrix} U_2 \cos 45 \\ U_2 \sin 45 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 \begin{pmatrix} \cos 45 \\ \sin 45 \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_3 \begin{pmatrix} U_3 \cos 60 \\ -U_3 \sin 60 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_3 \begin{pmatrix} \cos 60 \\ -\sin 60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho U_1 (-U_1) S_1 + \rho U_2 \cos 45 (U_2) S_2 + \rho U_3 \cos 60 (U_3) S_3 + F_x = 0 \\ 0 + \rho U_2 \sin 45 (U_2) S_2 - \rho U_3 \sin 60 (U_3) S_3 + F_y = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Il apparait clairement que les sections varient mais est ce que la vitesse reste constante dans les trois sections ou non :

Pour répondre à cette question, on doit appliquer le théorème de Bernoulli entre l'entrée et les deux sorties de la conduite :

$$P_1 + \frac{\rho}{2} U_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} U_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = P_3 + \frac{\rho}{2} U_3^2 + \rho \cdot g \cdot z_3$$

Sachant que :  $P_1 = P_2 = P_3 = P_{atm}$  , l'effet de pesanteur est négligé c.-à-d.  $g=0$  et par la suite  $\rho \cdot g \cdot z_1 = \rho \cdot g \cdot z_2 = \rho \cdot g \cdot z_3 = 0$  , plus l'incompressibilité du fluide c.-à-d.  $\rho=Cst$  , gage de dire que  $U_1 = U_2 = U_3$ .

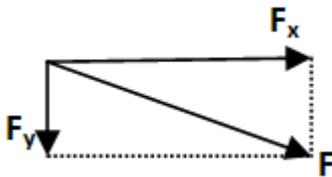
$$\text{On a } q_{m2} = \frac{2}{3} q_{m1} \text{ et } q_{m3} = \frac{1}{3} q_{m1}$$

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} F_x = q_{m1} U_1 - \frac{2}{3} q_{m1} U_1 \cos 45 - \frac{1}{3} q_{m1} U_1 \cos 60 \\ F_y = -\frac{2}{3} q_{m1} U_1 \sin 45 - \frac{1}{3} q_{m1} U_1 \sin 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = q_{m1} U_1 \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 45 - \frac{1}{3} \cos 60 \right) = \frac{q_{m1}^2}{\rho S_1} \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 45 - \frac{1}{3} \cos 60 \right) \\ F_y = q_{m1} U_1 \left( -\frac{2}{3} \sin 45 + \frac{1}{3} \sin 60 \right) = \frac{q_{m1}^2}{\rho S_1} \left( -\frac{2}{3} \sin 45 + \frac{1}{3} \sin 60 \right) \end{cases}$$

$$\text{Avec } \rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}, \quad q_{m1} = 30 \frac{kg}{s} \quad \text{et } s = \pi \frac{d^2}{4} = 25mm$$

$$\text{On trouve } \begin{cases} F_x = 664 N \\ F_y = -335 N \end{cases} \quad \text{et } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(664)^2 + (-335)^2} = 743.72N$$

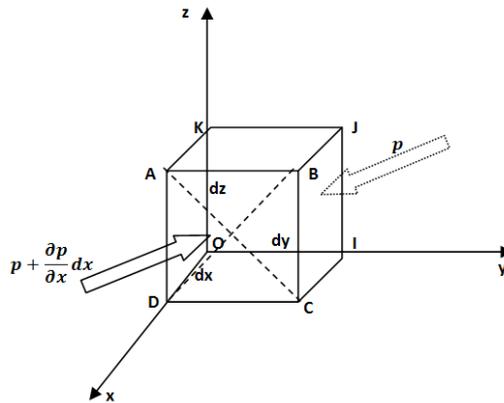


**Chapitre 4**  
**Dynamique des fluides parfaits incompressibles**  
**(non-visqueux)**

## 4.1. Rappels des équations fondamentales de la statique

### 4.1.1. Equilibre dans le cas général

Considérons l'équilibre d'un parallélépipède élémentaire de cote  $dx$   $dy$   $dz$ . Les pressions sur les faces OIJK et ABCD sont respectivement  $p$  et  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ , les forces de pression sont respectivement  $p dy dz$  et  $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$



**Figure 15** : les forces de pression sur un parallélépipède élémentaire de cote  $dx$   $dy$   $dz$

Soient  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  les composantes de la force active  $\vec{F}$  par unité de masse. La projection de l'équation d'équilibre sur les axes donne :

$$\begin{cases} p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz + \rho dx dy dz X = 0 \\ p dx dz - (p + \frac{\partial p}{\partial y} dy) dx dz + \rho dx dy dz Y = 0 \\ p dx dy - (p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dx dy + \rho dx dy dz Z = 0 \end{cases} \text{ d'où on tire après simplification les équations}$$

fondamentales de la statique des fluides qui sont donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \end{cases} \text{ ou } \overrightarrow{grad} p = \rho \vec{F} \text{ en notation vectorielle}$$

## 4.2. Equation générale de la dynamique des fluides parfait incompressibles.

### 4.2.1. Equation d'Euler

Dans ce qui suit, notre intérêt est porté à l'étude du mouvement de fluide parfait, c.-à-d. sans frottement (fluide non visqueux)

Reprenons l'étude d'un parallélépipède élémentaire faite précédemment, mais cette fois ci en présence d'un mouvement. Dans ce cas la résultante des forces n'est pas nulle mais elle est égale à la quantité d'accélération.

$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{c}}{Dt}$  par unité de masse

L'équation qui s'écrivait  $-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{F} = 0$  en statique des fluides devient  $-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{F} = \vec{\gamma}$  en dynamique des fluides parfaits.

$$\text{En la projetant sur les axes, on obtient } \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \gamma_x \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y = \gamma_y \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z = \gamma_z \end{cases} \quad (1*31)$$

Et sous forme vectorielle  $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} g \vec{r} \text{grad}p$

Ce sont les équations d'Euler ou X, Y et Z sont les composantes suivant les axes de la force de volume par unité de masse.

Rappelons que les composantes de l'accélération d'une particule, en variable d'Euler, sont les suivantes :

$$\vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Ou :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Comme en générale, on se trouve dans le champ de pesanteur, et puisque z est compté positivement ver le haut, on peu dire Z=-g, Y=0 et X=0

Remarque :

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \Omega = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial x} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + 2w\Omega_y - 2v\Omega_z = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} + 2u\Omega_z - 2w\Omega_x = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2v\Omega_x - 2u\Omega_y = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (34)$$

Les équations (32), (33) et (34) conduisent à une forme générale :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad \text{Équation dite équation générale d'Euler ou}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} g \overrightarrow{rad} V^2 + \overrightarrow{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}$$

### 4.2.2. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli[4]

L'équation générale de la dynamique des fluides parfait incompressibles peut s'écrire :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \gamma_x \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y = \gamma_y \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z = \gamma_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} \end{cases} \quad (35)$$

#### 4.2.2.1. Expression de la différentielle totale de la pression [9] :

La pression est une fonction des 3 variables « x », « y », et « z ». Parler de dérivée de la pression n'a plus de sens ici, c'est pourquoi on a introduit la notion de dérivée partielle (on dérive par rapport à une seule des variables, les autres étant considérées comme fixées...).

Par contre, on peut se demander comment varie la pression lorsque chacune des variables varie légèrement, c'est à dire lorsque x varie de dx, y de dy et z de dz.

L'impact de ces petites variations sur la fonction est appelé « la différentielle » de la fonction et notée par « d ». Ainsi :

« dp » est la différentielle de la fonction pression « p » et le lien avec les dérivées partielles est :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \quad (36)$$

Commentons succinctement cette expression :

$\frac{\partial p}{\partial x}$  : est le taux de variation de la pression dans la direction « x » (idem en « y » et « z »)

$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$  : est donc la valeur de la variation de la pression dans la direction « x » lorsque la variable « x » varie d'une petite quantité « dx » (idem en « y » et « z » ...)

Cette expression nous donne « simplement » la petite variation « dp » qui résulte des petites variations de ses 3 variables (x, y et z)

Remplaçons l'équation (35) dans l'équation (36), on trouve :

$$dp = \left(-\rho \frac{\partial V_x}{\partial t}\right) \cdot dx + \left(-\rho \frac{\partial V_y}{\partial t}\right) \cdot dy + \left(-\rho g - \rho \frac{\partial V_z}{\partial t}\right) \cdot dz$$

Qui peut se réécrire :

$$dp = \left(-\rho \partial V_x \frac{dx}{\partial t}\right) + \left(-\rho \partial V_y \frac{dy}{\partial t}\right) + \left(-\rho g dz - \rho \partial V_z \frac{dz}{\partial t}\right).$$

Soit :

$$dp = -\rho V_x \partial V_x - \rho V_y \partial V_y - \rho V_z \partial V_z - \rho g dz$$

On s'approche de l'équation cherchée, et en remarquant que

$$\vec{V} \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix} \quad d\vec{V} \begin{vmatrix} dV_x \\ dV_y \\ dV_z \end{vmatrix} \quad \vec{V} \cdot d\vec{V} = V_x \cdot dV_x + V_y \cdot dV_y + V_z \cdot dV_z = V \cdot dV$$

Alors :

$$dp = \rho \cdot V \cdot dV + \rho \cdot g \cdot dz$$

Victoire, c'est l'équation cherchée.....

$$dp + \rho \cdot V \cdot dV + \rho \cdot g \cdot dz = 0 \text{ EQUATION D'EULER}$$

Cette équation d'Euler a une application immédiate : le théorème de Bernoulli.

#### 4.2.2.2. Le théorème de Bernoulli.[4]

Il suffit d'intégrer l'équation d'Euler entre 2 points de la veine de fluide :

- Le point (1) où la pression vaut  $p_1$  la vitesse  $v_1$  et l'altitude  $z_1$
- le point (2) où la pression vaut  $p_2$  la vitesse  $v_2$  et l'altitude  $z_2$

$$\int_1^2 \text{Euler} \text{ donne } \int_1^2 [dp + \rho \cdot V \cdot dV + \rho \cdot g \cdot dz] = \int_{p_1}^{p_2} dp + \rho \int_{V_1}^{V_2} V \cdot dV + \rho \cdot g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

D'où le théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible :

$$P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Il peut se présenter sous trois formes différentes :

<b>Bilan énergétique</b>	
$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + g \cdot z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + g \cdot z_2$	
Le terme $\frac{1}{2} V^2$	un terme d'énergie cinétique PAR kg DE FLUIDE (expression de l'Ec dans le cas où $m = 1$ kg)
Le terme $g \cdot z_1$	un terme d'énergie potentielle de pesanteur, là encore PAR kg DE FLUIDE (expression de l'E dans le cas où $m = 1$ kg)
Le terme $\frac{P}{\rho}$	un terme d'énergie PAR kg DE FLUIDE

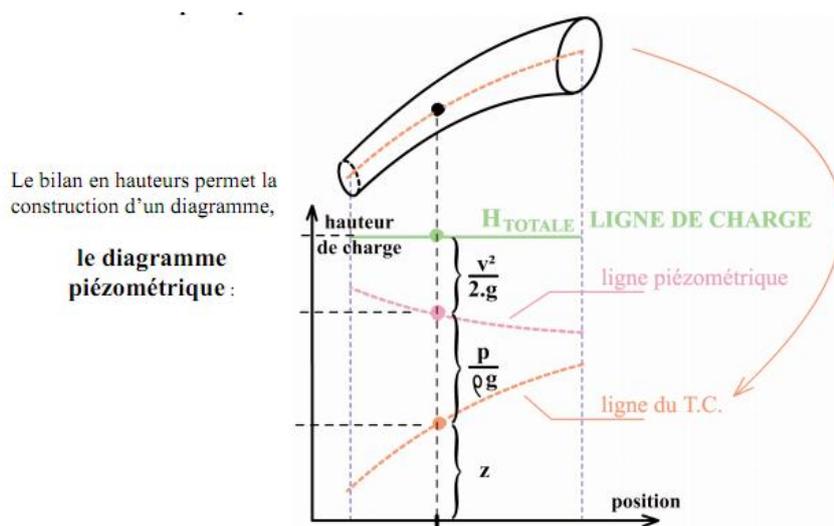
**Table 1** : théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible sous forme de bilan énergétique

Bilan des pressions	
$P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$	
pression statique	le terme $p + \rho g z$ noté $p^*$
pression dynamique	Le terme $\frac{\rho}{2} V_1^2$

**Table 2 :** théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible sous forme de bilan des pressions

Bilan des hauteurs	
$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot V_1^2 + z_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot V_2^2 + z_2$	
hauteur manométrique	le terme $\frac{P}{\rho \cdot g}$
Hauteur piézométrique	le terme $\frac{P}{\rho \cdot g} + z$
Hauteur capable	le terme $\frac{1}{2 \cdot g} \cdot v^2$
Altitude	le terme $Z$
la somme des trois termes est la charge totale, ou encore la hauteur manométrique équivalente	

**Table 3 :** théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible sous forme de bilan des hauteurs



**Figure 16:** ligne piézométrique et plan de charge d'un écoulement. [ 7]

#### 4.2.2.2.1. Applications du théorème de Bernoulli [4]

##### a) Première application : la sonde de Pitot

C'est un instrument de mesure très employé. Il permet d'accéder à la vitesse du fluide ou encore, si l'on connaît la section de passage du fluide, au débit de fluide.

- **notion de pression d'arrêt :**

En présence d'un obstacle, les L.C. contournent l'obstacle, mais il y en a au moins une qui s'arrête en un point de cet obstacle (point M sur le dessin).

En ce point M appelé point d'arrêt :  $V_M=0$

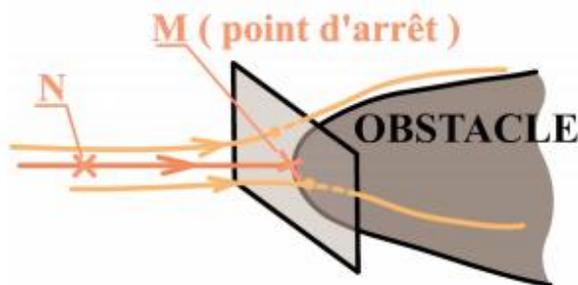


Figure 17: les lignes de courant autour d'un obstacle[4]

La charge totale, exprimée en pression est :

$$P_{totale, M} = P_M + \rho \cdot g \cdot z_M = P_M^*$$

Tandis qu'en un point N, en amont de M et sur la même L.C. :

$$P_{totale, N} = P_N + \rho \cdot g \cdot z_N + \frac{1}{2} \rho \cdot V_N^2 = P_N^* + \frac{1}{2} \rho \cdot V_N^2$$

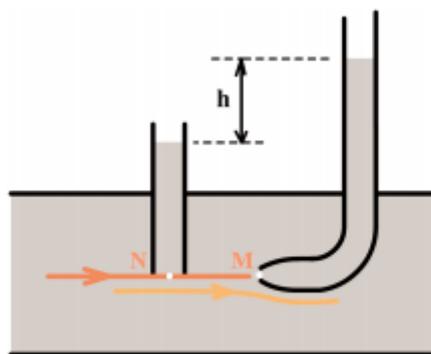
Par différence, on obtient (dans le cas où  $Z_M=Z_N$ ) puisque le long d'une L.C. la charge totale est constante

$$P_M = P_N + \frac{1}{2} \rho \cdot V_N^2 \text{ Qui représente « la pression d'arrêt »}$$

Il y a donc une possibilité de mesurer une vitesse de fluide. C'est ce qui est mis en pratique dans la sonde de Pitot.

- **Dispositif de Pitot :**

On dispose 2 tubes de prises de pression dans la canalisation de l'écoulement. Une prise de pression donne accès à la pression statique (point N) et une prise de pression qui permet l'obtention de la pression d'arrêt (point M).



**Figure 18:** deux tubes de prise pression dans la canalisation de l'écoulement[4]

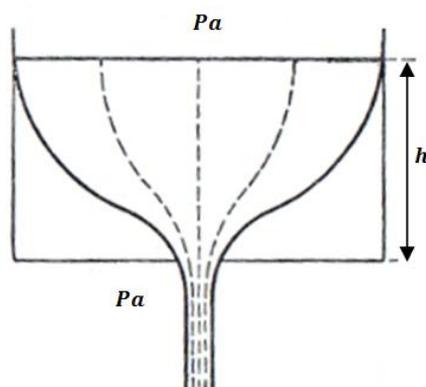
$$P_M = P_N + \frac{1}{2} \rho \cdot V_N^2 \text{ D'une part}$$

$$P_M = P_N + \rho \cdot g \cdot h \text{ D'autre part}$$

D'où l'expression de la vitesse du fluide dans la canalisation :

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

**b) Etude de la vidange d'un réservoir. [2]**



**Figure 19:** Vidange d'un réservoir[2]

Soit un réservoir de section  $S$  ouvert à l'air libre et comportant un orifice de section  $s$  à la partie inférieure ( $s$  petit par rapport à  $S$ ). La hauteur  $h$  étant variable, le régime n'est pas permanent mais  $s$  étant petit par rapport à  $S$ ,  $h$  varie lentement et on peut admettre que le régime est permanent pendant un intervalle de temps très court. L'écoulement peut donc être considéré comme une suite d'écoulements permanents.

**1. Calcul de la vitesse théorique de l'écoulement.**

Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre et celle de l'orifice en prenant le fond du réservoir comme origine des cotes.

La vitesse de la surface libre est négligeable et on obtient :

$$P_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h = P_a + \frac{\rho}{2} V^2 + 0$$

En désignant la vitesse du liquide au droit de l'orifice, d'où :

$$V = \sqrt{2gh}$$

Expression dite « **Formule de Torricelli** »

Le débit volumique théorique correspondant est :

$$q_v = s\sqrt{2gh}$$

## 2. Calcul du débit réel

En réalité, à cause des frottements, la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit

$$V_{réel} = \varphi_1 \sqrt{2gh}$$

$\varphi_1$  est un coefficient plus petit que 1, appelé coefficient de vitesse.

2° la forme des lignes de courant, indiquée sur la figure, est telle que, le liquide ne pouvant tourner brusquement, la section réelle du jet est inférieure à la section de l'orifice.

$$s_{réel} = \varphi_2 \cdot s$$

$\varphi_2$  Coefficient inférieur à 1, est appelé coefficient de contraction

Le débit réel vaut donc :

$$q_v = s_{réel} \cdot V_{réel} = \varphi_1 \varphi_2 s \sqrt{2gh}$$

On pose  $\alpha = \varphi_1 \varphi_2$ , coefficient de débit de l'orifice .

$$q_v = \alpha s \sqrt{2gh}$$

## 3. Calcul du temps de vidange

A un instant donné  $q_v = -\frac{dv}{dt} = \alpha s \sqrt{2gz}$

Z étant la cote de la surface libre par rapport à l'orifice, et v le volume de fluide contenu dans le réservoir à l'instant t .

Pendant le temps dt, z varie de dz et le volume de  $dv = -S dz$

En éliminant dv entre les deux équations, on obtient la relation

$$-S dz = \alpha s \sqrt{2gz} dt$$

$$dt = \frac{-S}{\alpha s \sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$t = \int_h^0 \frac{-S}{\alpha s \sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{S}{\alpha s \sqrt{2g}} [2\sqrt{z}]_0^h$$

$$t = \frac{2Sh}{\alpha s \sqrt{2gh}}$$

#### 4.2.2.2. 2.Exemple

Le diamètre de la tuyère AB varie linéairement de 0.1m en A à 0.2 m en B. si les pressions en A et B sont respectivement 2 et 2.3 bar, déterminer le débit volumique d'eau dans la tuyère et la pression en C milieu de AB et en D avec AD=1.8 m

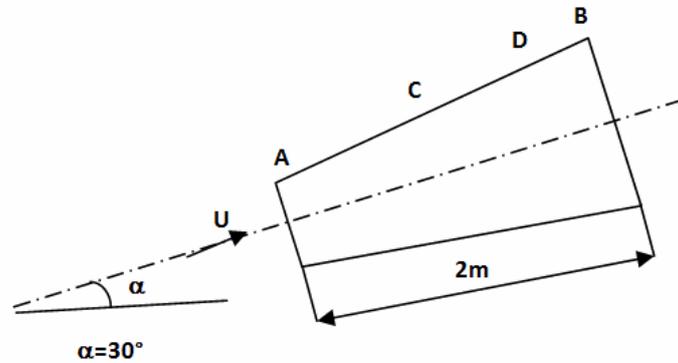


Figure 20: la configuration géométrique de la tuyère de l'exemple 1

#### 4.2.2.2. 3. Solution de l'exemple

- *Le débit volumique d'eau dans la tuyère*

Appliquons le théorème de Bernoulli en A et B :

$$P_A + \frac{\rho}{2} \cdot V_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \frac{\rho}{2} \cdot V_B^2 + \rho \cdot g \cdot z_B$$

$$\frac{\rho}{2} (V_A^2 - V_B^2) = (P_B - P_A) + \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

$$(37)$$

Sachant que :

$$z_B - z_A = 2 \cdot \sin 30^\circ$$

$$q_v = S_A \cdot V_A = S_B \cdot V_B$$

Donc (37) devient :  $\frac{\rho}{2} V_A^2 \left(1 - \frac{S_A^2}{S_B^2}\right) = (P_B - P_A) + \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A) \Rightarrow V_A = 9.22 \text{ m/s}$

Et par conséquent  $q_v = S_A \cdot V_A = 0.072 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  avec  $S_A = \frac{\pi}{4} \cdot d_A^2$

- *La pression en C milieu de AB*

Appliquons le théorème de Bernoulli entre A et C

$$P_A + \frac{\rho}{2} \cdot V_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = P_C + \frac{\rho}{2} \cdot V_C^2 + \rho \cdot g \cdot z_C$$

$$z_C - z_A = 1 \cdot \sin 30^\circ$$

$$S_A \cdot V_A = S_C \cdot V_C \Rightarrow V_C = V_A \frac{S_A}{S_C} \text{ Avec } S_C = \frac{\pi}{4} \cdot d_C^2$$

Ici il n'y a pas de problème pour déterminer le diamètre en point C « dc », parce que le diamètre de la tuyère varie linéairement de 0.1m en A à 0.2 m en B et puisque le point C milieu de AB , donc on trouve directement le diamètre au point C (dc =0.15) et par suite  $P_C = 2.28 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

- La pression en point D avec  $AD=1.8\text{ m}$

Appliquons toujours le théorème de Bernoulli en A et D

$$P_A + \frac{\rho}{2} \cdot V_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = P_D + \frac{\rho}{2} \cdot V_D^2 + \rho \cdot g \cdot z_D$$

On fait la même chose que précédent seulement il faut tenir en compte que :

$$z_D - z_A = 1.8 \sin 30^\circ$$

$$\text{On a } S_A \cdot V_A = S_D \cdot V_D \Rightarrow V_D = V_A \frac{S_A}{S_D} \text{ avec } S_D = \frac{\pi}{4} \cdot d_D^2$$

Dans ce cas , on ne connaît pas le diamètre en point D «  $d_D$  », il impérativement de trouver la formule linéaire du diamètre, qui correspond les données de l'exercice.

L'équation linéaire dans le cas général est de la forme suivante :  $d = Ax + B$

On a à  $x=0$ ,  $d=0.1$  donc  $B=0.1$

Plus : à  $x=2$ ,  $d=0.2$  et donc  $d=0.2=A \cdot 2 + 0.1 \Rightarrow A=0.05$

Par conséquent :  $d=0.05x+0.1$

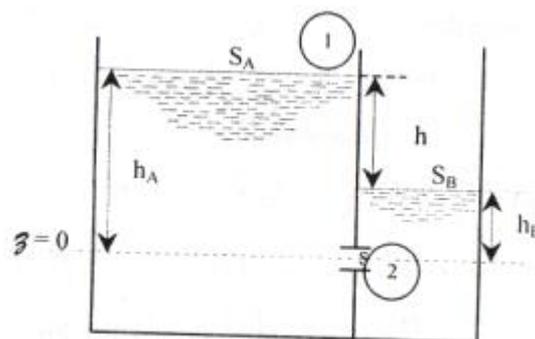
En s'appuyant sur cette expression, on trouve le diamètre au point D, donc  $d_D=0.05(1.8)+0.1=0.19\text{m}$

Et par la suite  $P_D = ?? \text{ Pa}$

#### 4.2.2.2. 4.Exemple2 :

Deux réservoirs A et B sont réunis par un orifice noyé de section  $s$  de coefficient de débit  $K_d$ . La section du réservoir A est  $S_A$ , celle du réservoir B est  $S_B$ . A l'instant  $t=0$ , la différence de niveau entre A et B est  $h$ . calculer le temps  $t$  pour que le liquide soit au même niveau en A et B.

Données :  $S_A=1\text{ m}^2$ ,  $S_B=0.5\text{ m}^2$ ,  $s=1\text{ cm}^2$ ,  $K_d=0.62$  et  $h=0.5\text{ m}$ .



**Figure 21** : la configuration géométrique des deux réservoirs l'exemple 2

#### 4.2.2.2. 5. Solution de l'exemple 2

Entre A et 2, il vient

$$P_A + \frac{\rho}{2} \cdot V_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = P_2 + \frac{\rho}{2} \cdot V_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Avec  $P_A = P_{atm}$ ,  $V_A = 0$  ( $h_A = \text{constant}$ ),  $z_2 = 0$  (référence)

$$P_2 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot z_B$$

C'est-à-dire

$$\frac{V_2^2}{2 \cdot g} = \frac{P_{atm}}{\rho \cdot g} + z_A - \left( \frac{P_{atm}}{\rho \cdot g} + z_B \right) = h_A - h_B$$

D'où

$$V_2 = V = \sqrt{2 \cdot g(z_A - z_B)}$$
 vitesse du fluide dans l'orifice noyé, de section  $s$

Ce qui représente la formule de Torricelli dans le cas de  $z_B = 0$

La conservation du débit volumique permet d'écrire :

$$-S_A \cdot \left( \frac{dZ_A}{dt} \right) = s \cdot V \quad \text{Signe moins car diminution de débit dans A}$$

$$S_B \cdot \left( \frac{dZ_B}{dt} \right) = s \cdot V \quad \text{Signe plus car augmentation de débit dans B}$$

C'est-à-dire

$$\frac{dZ_A}{dt} = -K_d \frac{s}{S_A} \sqrt{2 \cdot g(z_A - z_B)}$$

Et

$$\frac{dZ_B}{dt} = -K_d \frac{s}{S_B} \sqrt{2 \cdot g(z_A - z_B)}$$

Posons

$z = z_A - z_B$  Et faisons la différence des expressions précédentes. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= -K_d \cdot s \cdot \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \\ \frac{dZ}{\sqrt{2 \cdot g \cdot z}} &= -K_d \cdot s \cdot \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) dt = -K_d \cdot s \cdot \left( \frac{S_A + S_B}{S_A \cdot S_B} \right) dt \\ dt &= -\frac{dZ}{\sqrt{2 \cdot g \cdot z}} \left( \frac{S_A \cdot S_B}{K_d \cdot s(S_A + S_B)} \right) \\ t &= \frac{-S_A \cdot S_B}{K_d \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot s} \cdot (S_A + S_B)} \int_h^0 \frac{dZ}{\sqrt{z}} ; L'intégrale donnant  $-2\sqrt{h}$  \end{aligned}$$

$$D'où t = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot g}} \cdot \frac{S_A \cdot S_B}{K_d \cdot s \cdot (S_A + S_B)} \sqrt{h} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{0,5}}{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,62 \cdot 10^{-4}} \cdot 1,5} = 1716 \text{ s}$$

$$t = 28 \text{ mn et } 36 \text{ s}$$

**Chapitre 5**  
**Dynamique des fluides réels incompressibles**  
**(visqueux)**

## 5.1.Introduction

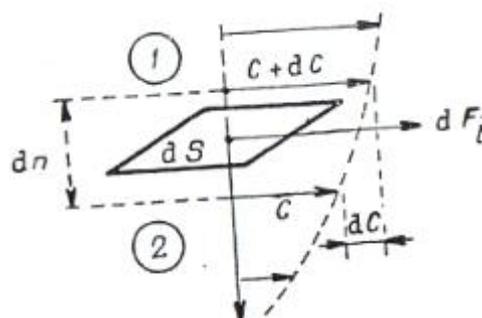
Contrairement à un fluide parfait par lequel, le frottement est négligeable, un fluide réel (ou visqueux) en écoulement est le siège de frottement qui peut être important. Cette perte d'énergie est due au frottement entre deux couches de fluide voisines ou entre le fluide et la paroi d'une conduite.

## 5.2. Définition élémentaire de la viscosité dynamique [2]

### 5.2.1. Formule de Newton

Soit, dans un milieu fluide en écoulement, deux couches fluides frottant l'une sur l'autre et  $dS$  un élément de leur surface commune.

L'action de contact exercée sur la surface  $dS$  par le fluide supérieur 1 (vitesse  $c+dc$ ) est une force oblique ayant pour composante normale  $dF_n$  (force normale de pression) et pour composante tangentielle  $dF_t$ . Cette composante tangentielle est due à la viscosité. Elle provient de la différence de vitesse  $dc$  existant entre deux éléments fluides voisins et tendant à déformer le fluide.



Dans un fluide visqueux newtonien la composante  $dF_t$  est proportionnelle à  $\frac{\partial c}{\partial n}$ .

Par définition de la viscosité dynamique, on pose  $dF_t = \eta \cdot \frac{\partial c}{\partial n} \cdot dS$  (Formule de Newton)

La force de viscosité est proportionnelle à la surface et au gradient de vitesse le long de la normale à la surface. Le coefficient de proportionnalité  $\eta$  de cette formule dépend du fluide ; c'est une grandeur caractéristique de ce dernier, que l'on appelle sa viscosité dynamique.

Cette relation est valable aussi à la paroi qui exerce une force retardatrice sur le fluide. C'est d'ailleurs en cet endroit que les forces sont les plus souvent maximales, car le gradient de vitesse  $y$  est le plus élevé.

## 5.3. Etude directe de l'écoulement laminaire dans un tube cylindrique horizontale de section circulaire constante[2]

Soit un tuyau cylindrique horizontal, siège d'un écoulement permanent, symétrique par rapport à l'axe  $X'X$  du tuyau. Nous supposons que cet écoulement a lieu par couches cylindriques coaxiales, toutes les vitesses étant parallèles à  $X'X$  (écoulement laminaire). La vitesse  $u$  en un point dépend uniquement de sa distance  $r$  à l'axe. Les composantes  $v$  et  $w$  sont nulles.

$$\text{On a } \frac{du}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

La vitesse  $u$  d'une particule reste constante et les trajectoires sont rectilignes.

Les quantités d'accélération sont donc nulles.

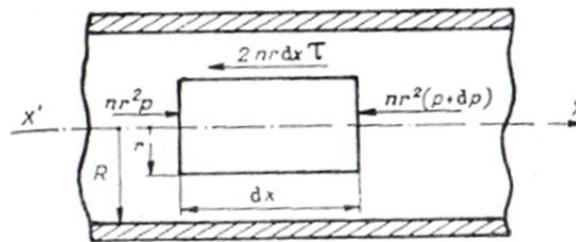
Si les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur, on peut admettre que la pression est constante dans une section droite du tuyau.

Enfin, l'étude générale de la viscosité nous permet de prévoir le sens des forces de viscosité au voisinage de la paroi.

### 5.3.1. Equilibre d'un cylindre élémentaire

Etudions l'équilibre longitudinal d'un élément cylindrique centré sur l'axe, de rayon  $r$  et de longueur  $dx$ .

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x}$$



**Figure 22:** les forces de pression exercées sur un élément cylindrique centré sur un axe

Pour cela, dressons un tableau de classification des forces ayant une composante sur  $X'X$ .

Forces de pression :

À l'amont :  $\pi r^2 p$  ;

À l'aval :  $-\pi r^2 (p+dp)$

Force de viscosité (surface latérale) :  $2 \pi r dx \tau$

En posant  $\tau = \frac{dF_t}{dS}$  = contrainte tangentielle dans le fluide visqueux ou force de viscosité par unité de surface (convention de signe).

En raison de la symétrie de l'écoulement,  $\tau$  a bien la même valeur en tout point de la surface latérale.

Le tube de section constante étant horizontale ; les forces de volume n'interviennent pas.

L'équation de projection horizontale donne donc

$$\pi r^2 p - \pi r^2 (p+dp) + 2\pi r dx \tau = 0$$

D'où on tire  $\tau = \frac{r}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$

Cette équation montre que les forces de viscosité sont nulle sur l'axe et croissent linéairement avec  $r$  jusqu'à une valeur maximale  $\tau_p$  sur la paroi du tube (voir figure ci contre).

Ceci permet de déduire que  $\tau$  étant dirigé en sens inverse de la vitesse, donc négatif avec nos conventions de signe,  $\frac{dp}{dx}$  est lui aussi négatif, c'est-à-dire que la pression décroît dans le sens de l'écoulement.

On peut d'ailleurs arriver à cette même conclusion en remarquant que, dans le cas du tube cylindrique horizontal, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de situation par kilogramme de fluide sont constante. Les pertes d'énergies par frottement ne peuvent donc être prélevées que sur l'énergie de pression.

### 5.3.2. Répartition des vitesses

D'après la définition de la viscosité dynamique, on a

$$\tau = \frac{dF_t}{dS} = \eta \cdot \frac{\partial c}{\partial n} = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial r}$$

Ce qui montre que  $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$

D'où on tire

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\tau}{\eta} = \frac{\tau}{2\eta} \frac{dp}{dx} ;$$

$\frac{dp}{dx}$  est constant dans la section considéré et indépendante de  $r$ , on peut donc intégrer en fonction de  $r$

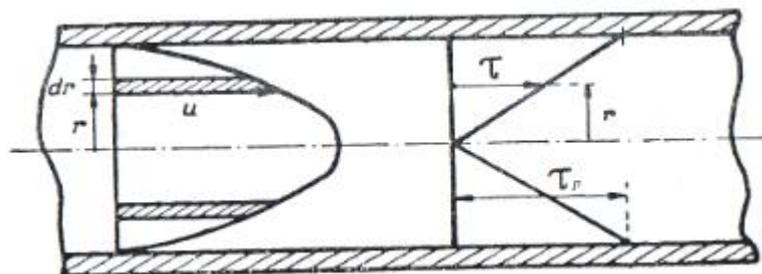
$$du = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} r dr ;$$

$$u = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} r^2 + C^{te} ;$$

Pour déterminer la constante, on écrit que la vitesse est nulle à la paroi

$$\text{à } r = R, \quad u = 0 = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} R^2 + C^{te}$$

$$\text{D'où : } u = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$$



**Figure 23:** les profils de vitesse et de contrainte tangentielle dans une conduite cylindrique[2]

Le profile de vitesses est donc une parabole ayant son sommet sur l'axe (voir figure)

$$\text{On a : à } r = 0, \quad u = u_{max} = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} R^2$$

$$\text{Et à } r = R, \quad \tau_p = \frac{R}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$$

### 5.3.3. Calcul du débit .formule de POISEUILLE

Le débit volumique dans un anneau élémentaire d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$  est, compte tenu de l'expression de  $u$ .

$$dq_v = u \cdot dS = 2\pi r u \, dr = -\frac{\pi}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) r \, dr$$

Et, en intégrant pour l'ensemble du tuyau

$$\begin{aligned} q_v &= \int_0^R dq_v = -\frac{\pi}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \\ &= -\frac{\pi}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \left[ \frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ q_v &= -\frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dp}{dx} R^4 \end{aligned}$$

Et, en fonction du diamètre

$$q_v = -\frac{\pi}{128} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dp}{dx} D^4$$

La vitesse moyenne est donc

$$U_m = \frac{q_v}{\pi R^2} = -\frac{1}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx} R^2$$

Soit la moitié de la vitesse maximale calculée précédemment

### 5.3.4. Exemples

#### 5.3.4.1. Exemple 1

Un fluide a une viscosité dynamique  $\mu=0.00488 \text{ N.S.m}^{-2}$  et une masse volumique  $\rho=913 \text{ kg.m}^{-3}$ . Calculer le gradient des vitesses et l'intensité de la contrainte tangentielle à la paroi en admettant :

- Une vitesse dont la distribution est linéaire
- Une vitesse dont la distribution est parabolique

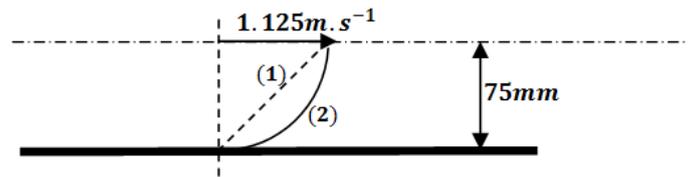


Figure 24: les données de l'exemple 1

### 5.3.4.2. Solution de l'exemple 1

a) Pour une vitesse dont la distribution est linéaire

$$U = Ar + B$$

$$\text{À } r=0, \quad U = U_{\max} = 1.125 \text{ m/s} = B$$

$$\text{À } r=R, \quad U=0 = AR + 1.125, \text{ donc } A = -1.125/0.075 = -15$$

$$\text{Donc } U = -15r + 1.125$$

- Le gradient des vitesses

$$\frac{\partial u}{\partial r} = A = -15 \text{ s}^{-1}$$

- L'intensité de la contrainte tangentielle à la paroi

$$\tau = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = -0.00483 * 15 = 0.07245 \text{ N/m}^2$$

b) Pour une vitesse dont la distribution est parabolique

$$U = Ar^2 + Br + C \quad (38)$$

A, B et C = ??

$$\text{À } r=0, \quad U = U_{\max} = 1.125 \text{ m/s} = C \quad (39)$$

$$\text{À } r=R, \quad U=0 = AR^2 + Br + 1.125 \quad (40)$$

À  $r=0$ , la vitesse est maximale et la courbe montre le pique et donc  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$

$$(40) \text{ donne } \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 2Ar + B \Big|_{r=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$(3) \Rightarrow AR^2 + 1.125 = 0 \Rightarrow A = \frac{-U_{\max}}{R^2}$$

$$\text{donc (1)} \Rightarrow U = \left( \frac{-U_{\max}}{R^2} \right) r^2 + U_{\max} = U_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r^2}{R^2} \right) \right)$$

Et donc l'expression finale

$$U = U_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r^2}{R^2} \right) \right) \text{ Valable pour une distribution de vitesse parabolique}$$

- Le gradient des vitesses

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -2 \cdot U_{max} \cdot \frac{r}{R^2} = -2 \cdot 1.125 \cdot \frac{r}{0.075^2} = -400r \text{ s}^{-1}$$

- L'intensité de la contrainte tangentielle à la paroi

$$\tau = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = -2 \cdot \eta \cdot U_{max} \cdot \frac{r}{R^2} = -400r \cdot 0.00483 = -1.932r \text{ N/m}^2$$

### 5.3.4.3. Exemple 2

Soit un écoulement plan d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  et de masse volumique  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  sur une plaque plane.

Le profil de vitesse est donné par :  $V(y) = \frac{1}{2}y^3$

Déterminer la valeur de la tension de cisaillement :

- à la paroi ?

- à 7 cm de la paroi ?

### 5.3.4.4. Solution de l'exemple 2

On a  $\tau = \eta \cdot \frac{\partial V}{\partial y}$

Avec :  $\mu = \rho \cdot \nu = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ kg/m} = 5 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3}{2}y^2$$

$$\tau|_{y=0} = \eta \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \text{ N/m}^2$$

$$\tau|_{y=0.07} = \eta \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0.07} = 5 \cdot \frac{3}{2} (0.07)^2 = 3.62 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^2$$

### 5.3.4.5. Exemple 3

La vitesse moyenne dans un tube de 0.1 m de diamètre est de  $1.5 \text{ ms}^{-1}$ . Si le fluide a une masse volumique de  $1260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et une viscosité de  $0.9 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ .

- déterminer la nature d'écoulement,
- calculer la vitesse au centre de la conduite
- calculer le gradient de pression qui assure cet écoulement

### 5.3.4.6. Solution de l'exemple 3

a)  $Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D_h}{\mu} = \frac{1260 \cdot 1.5 \cdot 0.1}{0.9} = 210 < Re_{critique} \Rightarrow$  l'écoulement est laminaire

b)  $U_{max} = 2 \cdot U_{moy} = 3 \text{ ms}^{-1}$

c) Un tube représente une distribution parabolique donc  $u = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$

$$r=0, \quad U=U_{\max} \text{ à } r=0, \quad u = u_{\max} = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (R^2) \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{4\eta \cdot u_{\max}}{R^2} = ??? \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} / \text{m}$$

### 5.3.4.7. Exemple 4

Un fluide s'écoule dans une conduite cylindrique de 2 m de diamètre à raison de  $12 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  avec une vitesse nulle à la paroi et une vitesse de  $8 \text{ ms}^{-1}$  sur l'axe de tuyau. Si la distribution de la vitesse obéit à la loi  $u=A-Br^{n+1}$ , où  $u$  est la vitesse du fluide au rayon  $r$ .

- Déterminer les valeurs des constantes  $A$ ,  $B$  et  $n$  en précisant les unités de  $A$  et  $B$ .
- Evaluer la vitesse moyenne de l'écoulement et déterminer la position radiale à laquelle doit être placé un tube de Prandtl afin de mesurer cette vitesse moyenne  $u_m$

### 5.3.4.8. Solution de l'exemple 4

$$U=A-Br^{n+1}$$

$$\text{à } r=0, \quad U=U_{\max}=8=A$$

$$\text{à } r=R, \quad U=0=A-BR^{n+1} \text{ et puisque } R=1$$

$$A=B=8$$

$$[U] = [A] = [Br^{n+1}] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow [B] = \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}^{n+1}} = \text{m}^{-n} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{D'où } B = 8 \text{ m}^{-n} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } A = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$q_v = \int_0^R U \, ds = \int_0^R (A - Br^{n+1}) 2\pi r \, dr = 2\pi A \int_0^R r \, dr - 2\pi B \int_0^R r^{n+2} \, dr$$

$$q_v = 2\pi A \left( \frac{R^2}{2} \right) - 2\pi B \left( \frac{R^{n+3}}{n+3} \right) = \pi A - \frac{2\pi B}{n+3} \Rightarrow n = \frac{2\pi B}{\pi A - q} - 3$$

$$\Rightarrow n = 0.83$$

$$U_{\text{moy}} = \frac{q}{s} = \frac{q}{\pi r^2} = 3.82 \text{ ms}^{-1}$$

$$U_{\text{moy}} = A - Br_m^{n+1} \Rightarrow r_m = \left( \frac{A - U_{\text{moy}}}{B} \right)^{1/n+1} = \left( \frac{8 - 3.82}{8} \right)^{1/1.83} = 0.701 \text{ m}$$

$$\Rightarrow r_m = 0.701 \text{ m}$$

# **Chapitre6**

## **Perte de charge et calcul des conduites**

## 6.1.Introduction

Il a été observé que la pression d'un liquide réel diminue tout au long d'une canalisation dans laquelle il s'écoule, même si elle est horizontale et de section uniforme. De plus La pression d'un fluide réel diminue après le passage à travers un coude, une vanne ou un rétrécissement. Donc un fluide réel, en mouvement, subit des pertes d'énergie dues aux frottements sur les parois de la canalisation ou sur les "accidents" de parcours .

## 6.2. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite. On suppose éventuellement, qu'il existe entre (1) et (2) des machines hydrauliques. On note :

$J_{12}$ : Somme de toutes les pertes de charge, singulière et linéaires entre les sections (1) et (2)

$P_n$  : Puissance mécanique échangé entre le fluide et les machines éventuellement placées entre (1) et (2). Le Théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante :

$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho}(P_2 - P_1) + g \cdot (z_2 - z_1) = J_{12} + \frac{P_n}{q_m}$$

### 6.2.1. Les pertes de charge

Les pertes de charges sont de deux natures : linéaire et singulière.

#### 1. Pertes de charge linéaires

Les pertes de charges linéaires sont dues au frottement de fluide avec la paroi, ces pertes de charges sont proportionnelles à la vitesse, rugosité des surfaces internes de la conduite et la longueur de la conduite et sont inversement proportionnelles au diamètre de la conduite.

Les pertes de charges linéaires  $J_L$  sont calculées par la formule suivante :

$$J_L = \lambda \frac{V^2}{2g} \left( \frac{L}{D} \right)$$

$V$  : vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite (m/s)

$L$  : longueur de la conduite (m)

$d$  : diamètre de la conduite (m)

$\lambda$  : Coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend du régime d'écoulement et notamment du nombre de Reynolds  $Re$

- Dans un régime d'écoulement laminaire :  $Re < 2000$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (\text{Formule de Poiseuille})$$

- Dans un régime d'écoulement turbulent lisse :  $2000 < Re < 10^5$

$$\lambda = 0.316 \cdot Re^{-0.25} \quad (\text{Formule de Blasius})$$

- Dans un régime d'écoulement turbulent rugueux :  $Re > 10^5$

$$\lambda = 0.79 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} \text{ (Formule de Blench)}$$

Avec :  $\varepsilon$  : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)

$d$  : diamètre intérieur de la conduite (mm)

Parfois, on lit la valeur de  $\lambda$  sur un abaque établie par Moody.

## 2. Pertes de charge singulières

Quand la conduite subit de brusque variation de section ou de direction, il se produit des pertes de charges dites singulières, elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation. On les exprime par :

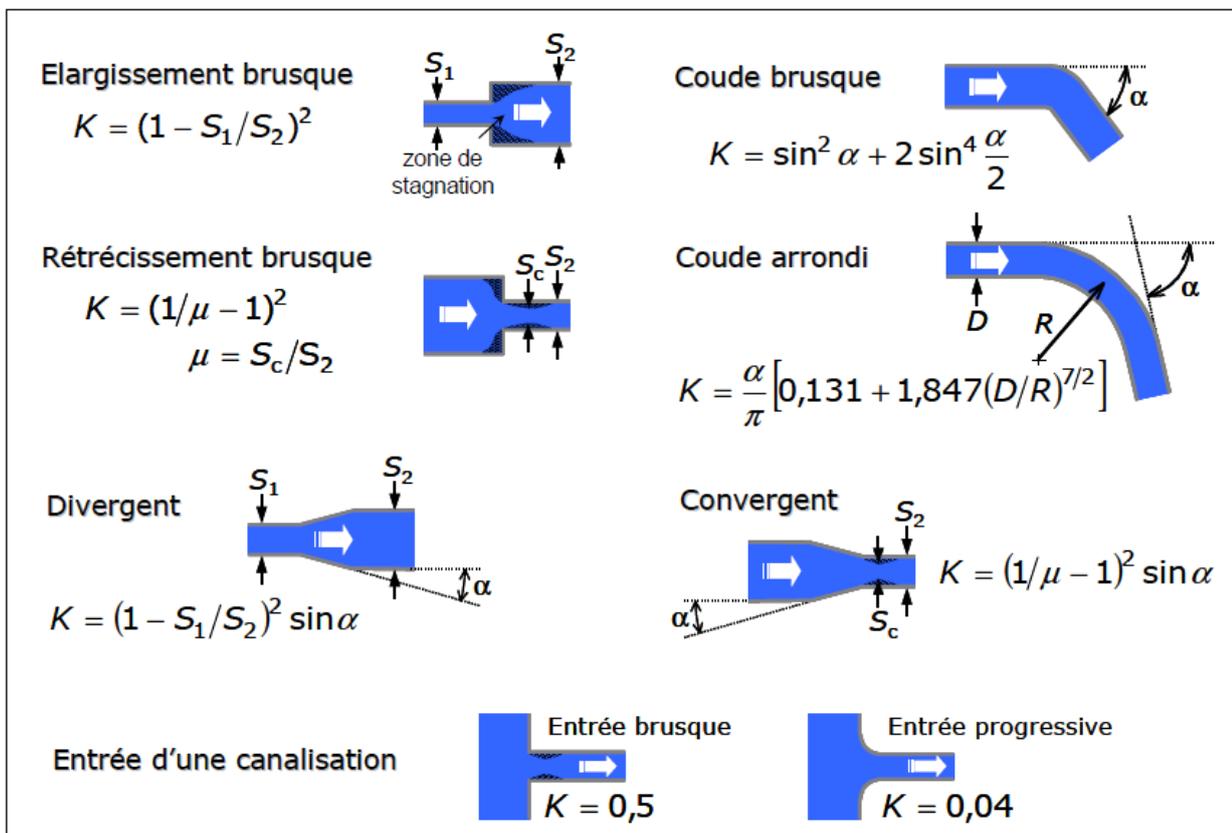
$$J_s = K_s \frac{V^2}{2g}$$

où  $s$  : indice de l'accident de forme de la conduite.

$K_s$  : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme.

Les valeurs de  $K_s$  sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

Quelques  $K_s$  sont données dans ce qui suit



### 6.2.2. Exemple

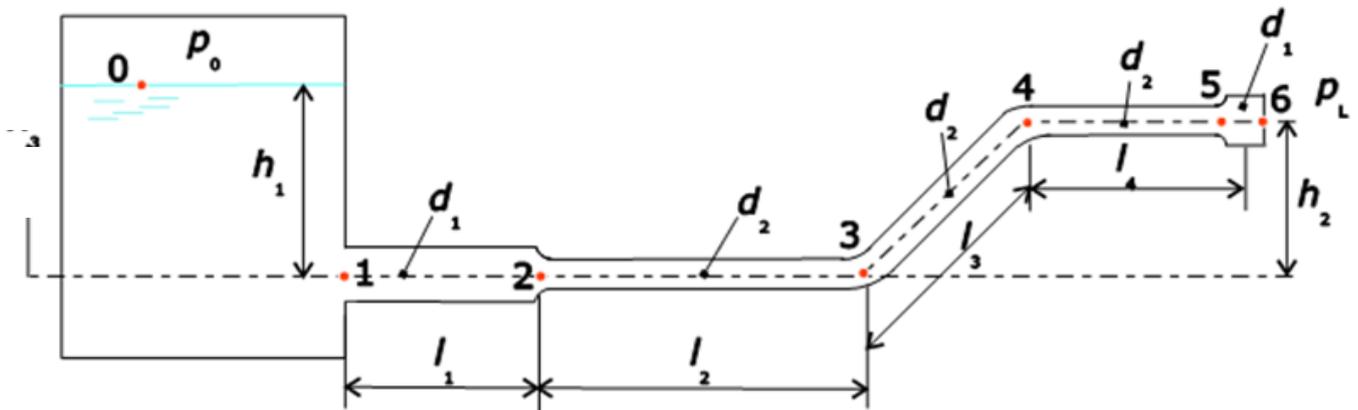


Figure 25: les données géométriques du circuit hydraulique

Le circuit hydraulique présenté ici est étudié en prenant en compte les pertes de charge régulières et singulières. On suppose que le débit volumique du fluide (eau) dans le circuit est  $q_v = 8 \text{ l.s}^{-1}$ . On donne les valeurs suivantes (voir le schéma) :

$h_1 = 25 \text{ m}$ ,  $h_2 = 5 \text{ m}$ ,  $l_1 = 35 \text{ m}$ ,  $l_2 = 25 \text{ m}$ ,  $l_3 = 13 \text{ m}$ ,  $l_4 = 25 \text{ m}$ ,  $d_1 = 80 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 60 \text{ mm}$ ; la rugosité de la paroi est :  $\varepsilon = 0.04 \text{ mm}$

les coefficients de pertes de charges singulières sont aux points considérés :  $\zeta_1 = 0.5$  (raccordement d'un réservoir avec une conduite),  $\zeta_2 = 0.05$  (ajutage),  $\zeta_3 = \zeta_4 = 0.31$  (coudes),  $\zeta_5 = 0.3$  (diffuseur).

La viscosité cinématique de l'eau est :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}$ . La pression de sortie est  $P_L = 1 \text{ bar}$ .

1. Déterminer la pression  $p_0$  dans le réservoir.
2. Tracer les lignes de charge et piézométrique de l'écoulement.

### 6.2.3. Solution de l'exemple

D'après l'équation de continuité, on peut écrire :

$$v_1 = v_6 = \frac{q_v}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = 1.59 \text{ m.s}^{-1}$$

La vitesse du fluide au point 2 vaut

$$v_2 = \frac{q_v}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = 2.83 \text{ m.s}^{-1}$$

La détermination du coefficient de perte de charge linéaire, nécessite la connaissance du régime d'écoulement et donc la valeur du nombre de Reynolds

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = 127200, Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\nu} = 169800$$

Puisque les valeurs de  $Re_1$  et  $Re_2$  sont supérieures à  $10^5$ , on peut dire qu'on est dans un régime d'écoulement turbulent rugueux, dans ce cas on applique donc la Formule de Blench  $\lambda = 0.79 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$

Ou :  $\varepsilon$  : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)

$d$  : diamètre intérieur de la conduite (mm)

$$\lambda_1 = 0.79 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{d_1}} = 0.79 \sqrt{\frac{0.04}{80}} = 0.0176$$

$$\lambda_2 = 0.79 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{d_2}} = 0.79 \sqrt{\frac{0.04}{60}} = 0.020$$

On peut maintenant applique le théorème de Bernoulli généralisé

$$H_0 = H_6 + \Delta H_s + \Delta H_r$$

Puisque il n'ya pas de machine dans le circuit. La vitesse en 0 est négligeable par rapport aux autres vitesses dans le circuit. On a donc :

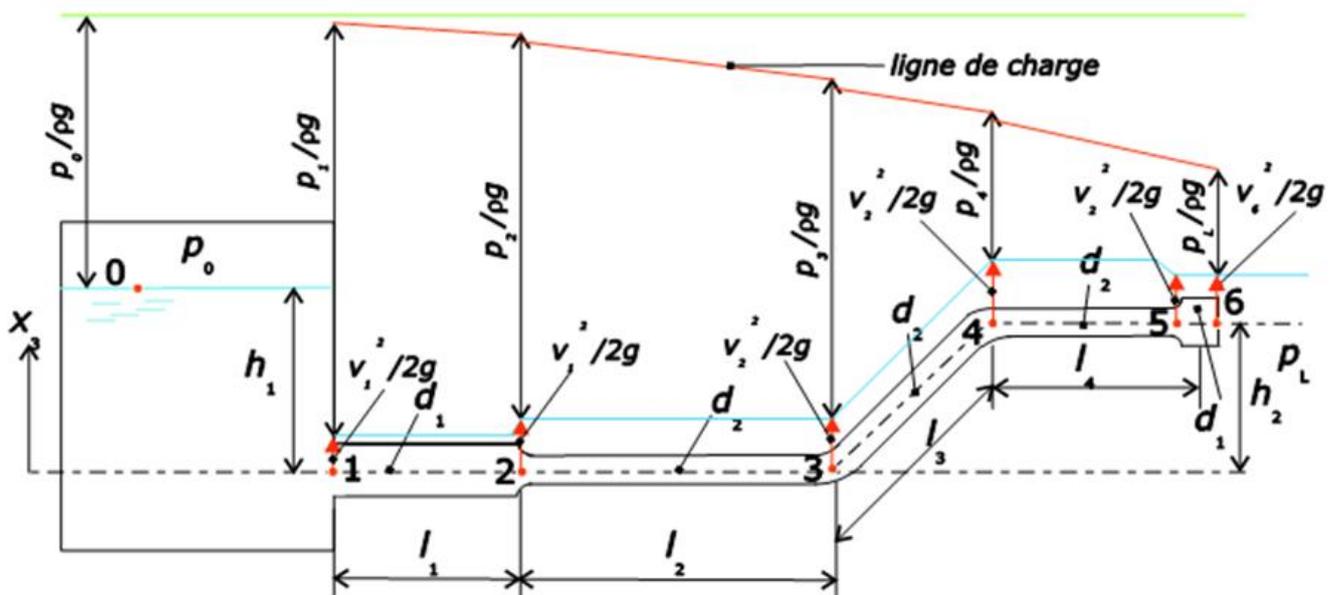
$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho g} + h_1 = & \frac{p_L}{\rho g} + h_2 + \frac{v_6^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_3 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_4 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_5 \frac{v_6^2}{2g} + \lambda_1 \frac{v_1^2}{2g} \left( \frac{l_1}{d_1} \right) \\ & + \lambda_2 \frac{v_2^2}{2g} \left( \frac{l_2 + l_3 + l_4}{d_2} \right) \end{aligned}$$

Numériquement on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho g} + 7 = & \frac{10^5}{10^3 \times 9.81} + 5 + \left( 1 + 0.5 + 0.3 + \frac{0.0176 \times 35}{0.08} \right) \frac{1.59^2}{2 \times 9.81} \\ & + \left( 0.05 + 2 \times 0.31 + \frac{0.02 \times (25 + 13 + 25)}{0.06} \right) \frac{2.83^2}{2 \times 9.81} \end{aligned}$$

Le calcul donne  $P_0 =$  bar

**Le tracé les lignes de charge et piézométrique de l'écoulement :**



**Figure 26:** les lignes de charge et piézométrique de l'écoulement

## Références Bibliographiques

- [1]. R. Comolet, Mécanique expérimentale des fluides T1, T2 et T3, Ed Masson.
- [2]. R. Ouziaux, J. Perrier, Mécanique des fluides appliquée, Ed Dunod.
- [3]. Metiche mehdi, mécanique des fluides approfondie, exercices résolus, centre universitaire de Bechar (Algérie)
- [4]. Riadh ben hamouda , notions de Mécanique des fluides ,Cours et exercices corrigés, centre de publication universitaire
- [5]. L.Loukarfi, exercices résolus de mécanique des fluides , el oumma 1999, isbn :9961-067-097-3
- [6]. Kherouf mazouz , recueil d'exercices d'hydraulique générale avec réponses , direction de la publication universitaire de Guelma 2006(Algérie)
- [7]. S. Candel, Mécanique des fluides Cours et Exercices, Ed Dunod.
- [8]. Ion Paraschivoiu, Mécanique des fluides, Presses int. Polytechnique.
- [9]. Radyadour Kh Zeytounian, Mécanique des fluides fondamentale, Ed Springer.
- [10]. M. A Morel, J.-P. Laborde, Exercices de mécanique des fluides, Ed Eyrolles.
- [11].M. Damou, Mécanique des fluides, Ed OPU.