

---

République Algérienne Démocratique et Populaire  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT



Institut des Sciences  
Département des Mathématiques et de l'Informatique

## MÉMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Equations différentielles et modélisation

Présenté par :

*M<sup>elle</sup>*. Chourouk HANDOUZI

---

## UN MODÈLE DYNAMIQUE AVEC IMPULSION

---

Soutenu le 26 juin 2019

Devant le jury composé de :

---

Président : M. Ahmed HAMMOUDI (Professeur) C.U.B.B.A.T.

Examinatrice : *M<sup>elle</sup>*. Sarra BENZERDJEB (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Encadreur : *M<sup>elle</sup>*. Meryem HELLAL (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

---

Année Universitaire : 2018 – 2019.

Si tu transformes tes erreurs en leçons,  
et tes peurs en courage,  
alors tout est réalisable.

---

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail,

A mon père et ma mère, dont le sacrifice pour moi est sans limite.

A mes chers frères, pour leur encouragement.

A ma sœur, ma tante et ma grand mère, pour leur affection.

A mes amis(es), à tous ceux qui me sont chers.

A mes très chères copines de la promotion, pour leur soutien moral.

A mes adorables cousins et cousines.

A mes tantes et mes oncles, qui ont tant attendu ce jour-là.

*Chourouk*

---

# Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie **ALLAH le tout puissant** de m'avoir donné le courage, la force, et la volonté d'achever ce travail et nous lui rendons grâce.

Mes remerciements s'adressent en tout premier lieu à mon encadreur *M<sup>elle</sup>*. **Meryem HAL-LEL** Maitre de Conférence "B" au Centre Universitaire Belhadj Bouchaïb d'Aïn-Témouchent qui a su guider mon travail.

Je remercie *M. le Professeur* **Ahmed HAMMOUDI** au Centre Universitaire Belhadj Bouchaïb d'Aïn-Témouchent d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie *M<sup>elle</sup>*. **Sarra BENZERDJEB** Maitre de Conférence "B" au Centre Universitaire Belhadj Bouchaïb d'Aïn-Témouchent d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont encouragé par leur soutien quotidien et infaillible, qui a été pour moi un pilier fondateur pour réaliser ce travail.

Du fond du cœur, je remercie ma famille qui ont conditionné un moment de leur vie afin que je réussisse cette thèse je pense en particulier à :

Mes parents, vos prières et bénédictions étaient pour moi une fortune, et elles le seront toujours. Qu'**Allah** vous procure la bonne santé et une très longue vie, merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Mes deux adorables frères *Imed* et *Saïd*, vous m'avez soutenu énormément. Que Dieu vous bénisse.

Ma très cher sœur *Fatna* à qui je témoigne un empreint d'estime et de reconnaissance pour sa patience et son aide sans faille. Merci et je lui suis très reconnaissante.

Ma tante *Hbib*a, je la remercie chaleureusement pour sa grande patience durant toutes

ces longues années.

Je tiens à remercier tous les enseignants de "département Mathématiques et Informatique".

Enfin je remercie tous mes amis et tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce mémoire.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>viii</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Équation différentielle ordinaire . . . . .	1
1.2 Point d'équilibre . . . . .	4
1.3 Notions sur la stabilité des points d'équilibre . . . . .	5
1.3.1 Étude qualitative des systèmes linéaires . . . . .	5
1.3.2 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre . . . . .	10
1.3.3 Classification d'un point d'équilibre . . . . .	11
1.3.4 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	13
<b>2 Modèles de base en dynamique de population</b>	<b>15</b>
2.1 Modèle de dynamique d'une seule population . . . . .	15
2.1.1 Modèle de Malthus . . . . .	16
2.1.2 Modèle de Verhulst . . . . .	17
2.2 Modèle avec deux populations . . . . .	20
2.2.1 Modèle de Lotka-Volterra . . . . .	20
2.3 Équation différentielle impulsive . . . . .	26
<b>3 Système proie-prédateur pour une ou deux espèces avec impulsion</b>	<b>33</b>
3.1 Étude qualitative du système . . . . .	34
3.2 Système proie-prédateur avec une récolte impulsive . . . . .	36
3.3 Comportement asymptotique des solutions . . . . .	42
3.4 Application . . . . .	50
<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

---

# Table des figures

1.1	Un nœud instable. . . . .	6
1.2	Un nœud stable. . . . .	6
1.3	Un point selle (col). . . . .	7
1.4	Une étoile instable. . . . .	7
1.5	Une étoile stable. . . . .	8
1.6	Un nœud dégénéré instable. . . . .	8
1.7	Un nœud dégénéré stable. . . . .	8
1.8	Un foyer répulsif. . . . .	9
1.9	Un centre. . . . .	9
1.10	Un foyer attractif. . . . .	10
1.11	portrait de phase du système (1.4). . . . .	13
2.1	Dynamique du modèle malthusien. . . . .	17
2.2	Représentation graphique du modèle logistique. . . . .	19
2.3	Représentation de l'approche asymptotique de la population vers le coefficient $k = 5$ . . . . .	20
2.4	La dynamique du système proie-prédateur de Lotka-Volterra. . . . .	25
2.5	Portrait de phase du système proie-prédateur de Lotka-Volterra dont la courbe entoure le point d'équilibre non trivial. . . . .	26

---

# Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$C(J, \mathbb{R})$	Ensemble des fonctions continues sur $J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ .
$ \cdot $	Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\ \cdot\ $	Norme sur $\mathbb{R}^n$ .
$V_0$	$\left\{ V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ continue en } (n\tau, (n+1)\tau) \times \mathbb{R}_+^2 \right.$ et $\lim_{(t,Y) \rightarrow (n\tau^+, X), t > n\tau} V(t, Y) = V(n\tau^+, X) \text{ existe} \left. \right\}$ .
$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$	Dérivée de la fonction $f(x)$ par rapport à la variable $x$ .
$\lambda_i, (i = 1, 2, \dots)$	Les valeurs propres.
$J_{(x,y)}$	Matrice jacobienne.
$\det J_{(x^*, y^*)}$	Le déterminant de la matrice $J_{(x,y)}$ au point $(x^*, y^*)$ .
$\text{tr} J_{(x^*, y^*)}$	La trace de la matrice $J_{(x,y)}$ au point $(x^*, y^*)$ .
$\lim$	La limite.
$\sup$	Borne supérieur.
$\max$	Le maximum.
$\Delta x$	La condition impulsive.
$\frac{dx}{dt}$	Dérivée de $x$ par rapport au temps $t$ .
$V$	Fonction de Lyapunov.

---

# Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un modèle mathématique pour une population constituée de deux espèces, pour cela on considère un modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra, présentant l'effet impulsif sur les proies, ces impulsions représentent la protection des proies par la récolte au moment fixé qui mène à l'étude des régions d'extinction et d'autres sans extinction.

La science qui s'intéresse à comprendre les événements environnementaux et à connaître les accroissements et les diminutions des effectifs d'individus qui la composent est la modélisation des dynamiques des populations, les premiers pas de la modélisation sont basés sur les équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations aux dérivées partielles (EDP) dont on étudie l'évolution d'une population au cours du temps, elle n'étudie pas seulement l'évolution des populations animales, végétales ou bactériennes, mais concerne aussi la génomique au niveau cellulaire, elle consiste non seulement à décrire la taille de la population étudiée au cours du temps mais aussi à expliquer les comportements évolutifs observés ainsi que les interactions entre les espèces vivantes et leur milieu.

Un modèle mathématique est une explication d'état réel à l'aide d'outils mathématiques, le principe d'un modèle est de remplacer un objet ou opérateur complexe par un système simple (exp : un modèle minimisé, modèle mathématique,...).

D'une manière générale, l'existence d'un modèle mathématique permet de pouvoir déterminer numériquement certains phénomènes du monde réel comme : la biologie, l'écologie, la physique, l'économie et la chimie .... etc (Voir [12, 19, 20, 24]) et de pouvoir prédire certains comportements, on ne devrait jamais perdre de vue le caractère interprétatif.

L'un des premiers modèles mathématiques en biologie remonte au 13<sup>ème</sup> siècle dit "problème de Fibonacci"(1202), à partir d'une suite récurrence, il modélise une population de lapins, à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle et 19<sup>ème</sup> siècle les premiers auteurs ont commencés par la modélisation d'une seule population : le modèle de Malthus (1798) puis le modèle de

Verhulst (1838), la différence entre ces modèles est basée sur la modification de la fonction de croissance c'est-à-dire l'interaction entre les individus est linéaire malthusienne dans le premier modèle et logistique dans le deuxième, et les premiers modèles de la dynamique de plusieurs espèces en interaction sont de type proie-prédateur, Alfred Lotka (1925) et Vito Volterra (1926) sont les premiers qui ont proposé indépendamment un modèle mathématique de deux populations en interaction, on représente cette interaction par des fonctions appelées fonctions de réponses ou réponses fonctionnelles (Voir [1, 18, 25]).

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre de ce mémoire porte sur des préliminaires où on rappelle quelques définitions et théorèmes nécessaires pour le développement de notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de certains modèles de base en dynamique de population, ainsi une représentation sur les équations différentielles impulsives qui apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel.

Le troisième chapitre de ce mémoire, constitue une étude de la dynamique d'un système proie-prédateur de type interaction où on suppose que les proies ont été récoltées, on étudie l'effet de l'impulsion sur la dynamique globale des deux populations, on termine ce mémoire par une conclusion et une bibliographie.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## Préliminaires

### Sommaire

---

1.1 Équation différentielle ordinaire . . . . .	1
1.2 Point d'équilibre . . . . .	4
1.3 Notions sur la stabilité des points d'équilibre . . . . .	5
1.3.1 Étude qualitative des systèmes linéaires . . . . .	5
1.3.2 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre . . . . .	10
1.3.3 Classification d'un point d'équilibre . . . . .	11
1.3.4 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	13

---

Nous allons consacrer ce premier chapitre à rappeler quelques notions nécessaires et préalables.

### 1.1 Équation différentielle ordinaire

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées de degrés " $n$ ", si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (Voir : [7, 14] ).

La forme la plus générale d'une équation différentielle ordinaire est :

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0,$$

où  $x$  est une fonction inconnue.

#### Définition 1.1.1. (Le problème de Cauchy) [7]

Soit  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue.

On considère le problème de Cauchy du premier ordre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $(t_0, x_0) \in I \times U$ .

**Définition 1.1.2.** [7]

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , une fonction  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec la condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times U$  est une solution du problème de Cauchy (1.1) si :

- i)  $x \in C^1(I, U)$ ,
- ii)  $\dot{x} = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I$ .
- iii)  $x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I$ .

**Théorème 1.1.1.** [14]

Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, une fonction  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution du problème de Cauchy (1.1) si et seulement si :

- i) La fonction  $x$  est continue et  $\forall t \in I, (t, x(t)) \in I \times U$ .
- ii)  $\forall t \in I$ , on a :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

**Preuve.** Soit  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue sur un intervalle ouvert  $I$  qui contient  $t_0$ .

- Supposons que  $x$  est une solution du problème de Cauchy (1.1), alors  $x$  dérivable sur  $I$  et vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

par intégration, on obtient pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds &= \int_{t_0}^t \frac{dx(s)}{dt} ds \\ &= [x(s)]_{t_0}^t \\ &= x(t) - x(t_0) \\ &= x(t) - x_0, \end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

- Inversement, supposons que  $\forall t \in I$ ,  $x$  vérifie :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

alors d'après la continuité de  $x$  et  $f$ , donc :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I,$$

de plus  $x$  vérifie

$$x(t_0) = x_0.$$

ce qui signifie que  $x$  est la solution du problème de Cauchy (1.1). ■

### Définition 1.1.3. (formule de Taylor-Young) [5]

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $I$ , le développement de Taylor de degré  $n$  de la fonction  $f$  autour d'un point  $x_0 \in I$  est définie par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f^{(2)}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \mathcal{R}_n(x),$$

$\Updownarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \underbrace{\mathcal{R}_n(x)}_{\text{le reste}}.$$

où :  $\mathcal{R}_n(x)$  tend vers zéro lorsque  $x = x_0$ .

### Définition 1.1.4. (Portrait de phase) [5]

Un portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites (on appelle orbite d'un point  $u$  ou trajectoire passant par  $u$ ).

Dans la pratique, tracer le portrait de phase d'un système de dimension deux, c'est tracer dans le plan  $(x, y)$ , suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $(\bar{x}, \bar{y})$  un point d'équilibre pour ce système.

On définit les ensembles des isoclines dans  $\mathbb{R}^2$  sur lesquels s'annulent les composantes  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  du système (1.2) .

### Définition 1.1.5. (Isocline verticale)

Soit  $(\bar{x}, \bar{y})$  un point de  $\mathbb{J}$ , on appelle isocline verticale l'ensemble  $\mathbb{J}$  des points tels que  $f(x, y) = 0$ . La trajectoire passant par  $(\bar{x}, \bar{y})$  a une tangente verticale, elle est parcourue de bas en haut si  $g(x, y) > 0$ , de haut en bas si  $g(x, y) < 0$ .

L'ensemble  $\mathbb{J}$  est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions.

**Définition 1.1.6. (Isoclines horizontale)**

Soit  $(\bar{x}, \bar{y})$  un point de  $\mathbb{I}$ , on appelle isocline horizontale l'ensemble  $\mathbb{I}$  des points tels que  $g(x, y) = 0$ .

La trajectoire passant par  $(\bar{x}, \bar{y})$  a une tangente horizontale, elle est parcourue de gauche à droite si  $f(x, y) > 0$ , de droite à gauche si  $f(x, y) < 0$ .

L'ensemble  $\mathbb{I}$  est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions.

**Remarque 1.1.1.** Les points d'équilibre de (1.2) se trouvent à l'intersection de  $\mathbb{I}$  et de  $\mathbb{J}$ .

**Définition 1.1.7. [5]**

Une fonction différentiable  $H(x, y)$  est une intégrale première du système différentiel (1.2), s'ils existent deux fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et si :

$$f(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Un système différentiel défini sur un domaine du plan est dit conservatif s'il possède une intégrale première sur ce domaine. Dans le cas où il ne possède pas d'intégrale première, il est dit dissipatif. On peut utiliser le terme intégrable au lieu de conservatif. Il peut être difficile dans certaines circonstances de montrer qu'un système donné n'est pas conservatif surtout si on ne précise pas plus la régularité de l'intégrale première.

## 1.2 Point d'équilibre

Une notion qui est fondamentale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre.

Soit l'équation différentielle autonome du premier ordre est la suivante :

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.3}$$

où :  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2.1. [10]**

Un point  $x^* \in \mathcal{D}$  est appelé point d'équilibre (ou : point stationnaire, solution stationnaire, point critique) de l'équation (1.3) si  $f(x^*) = 0$ .

autrement dit  $x^*$  est une solution constante de l'équation (1.3).

## 1.3 Notions sur la stabilité des points d'équilibre

### Définition 1.3.1. [2]

- Un point équilibre  $x^*$  de (1.3) est dit stable si pour tout  $\varepsilon$  positif, il existe  $\delta$  positif tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.3), on a :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \forall t \geq 0, \|x(t) - x^*\| < \varepsilon.$$

- Si  $x^*$  n'est pas stable, alors il est instable.
- Un point équilibre  $x^*$  de (1.3) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe  $\delta_0$  positif avec  $0 < \delta_0 < \delta$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.3), on a :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

### Théorème 1.3.1. [10]

Soient  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  et  $x^*$  est un point d'équilibre de l'équation (1.3) avec  $f(x^*) = 0$  et  $f'(x^*) \neq 0$ , alors :

- Le point d'équilibre  $x^*$  est asymptotiquement stable si  $f'(x^*) < 0$ .
- Le point d'équilibre  $x^*$  est instable si  $f'(x^*) > 0$ .

### 1.3.1 Étude qualitative des systèmes linéaires

Soit la notation matricielle suivante (Voir [16]) :

$$\dot{X} = \Phi(X),$$

$X = (x, y)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Phi(X) = (f(x, y), g(x, y))$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On considère ici le cas où  $f$  et  $g$  sont des fonctions linéaires de  $x$  et de  $y$ , alors on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \Leftrightarrow \dot{X} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On se limite ici au cas où  $A$  est inversible c'est à dire :  $\det(A) \neq 0$  et on n'a pas de valeurs propres nulles puisque  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ .

L'unique solution de  $AX = 0$  est alors  $X = 0$  et le système admet un seul point d'équilibre à l'origine du plan de phase.

- Deux valeurs propres réelles distinctes :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

Le système  $\dot{X} = AX$  se transforme alors en son système canonique  $\dot{Y} = JY$  avec  $Y = (w, z)$

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \dot{w} = \lambda_1 w \\ \dot{z} = \lambda_2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ z(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

avec  $C_1, C_2$  sont deux constantes positives.

- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux valeurs propres réelles distinctes strictement positives, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty.$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est appelé un nœud instable et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

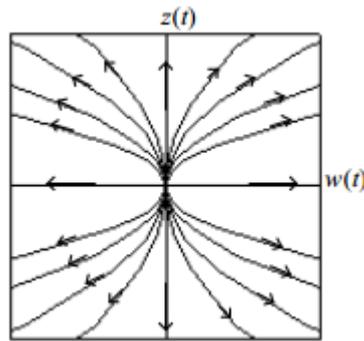


FIGURE 1.1: Un nœud instable.

- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux valeurs propres réelles distinctes strictement négatives, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est appelé un nœud stable et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

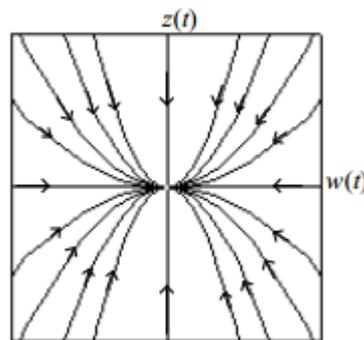


FIGURE 1.2: Un nœud stable.

- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe opposé ie :  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$  ou  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0, \quad (\lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 < 0).$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est appelé point selle, et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

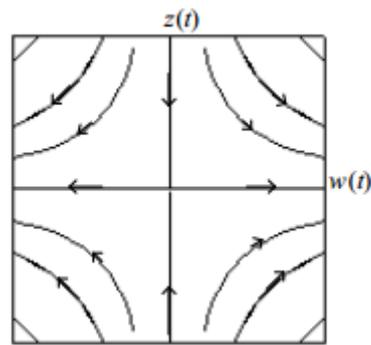


FIGURE 1.3: Un point selle (col).

- Une valeur propre double :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$

Dans le cas où  $A$  est diagonalisable, le système canonique s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} w(t) = C_1 e^{\lambda_0 t}, \\ z(t) = C_2 e^{\lambda_0 t}. \end{cases}$$

- Si  $\lambda_0 > 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty.$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est une étoile instable et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

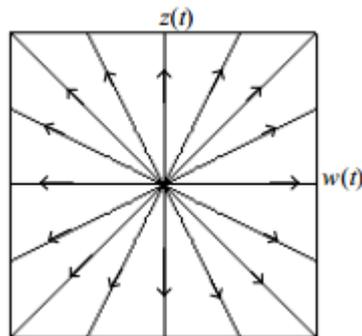


FIGURE 1.4: Une étoile instable.

- Si  $\lambda_0 < 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est une étoile stable et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

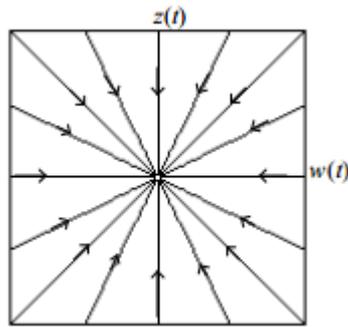


FIGURE 1.5: Une étoile stable.

Dans le cas où  $A$  n'est pas diagonalisable, le système canonique s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w + z \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t) = (C_1 + tC_2)e^{\lambda_0 t}, \\ z(t) = C_2 e^{\lambda_0 t}. \end{cases}$$

– Si  $\lambda_0 > 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty.$$

l'origine est dans ce cas un nœud dégénéré instable et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

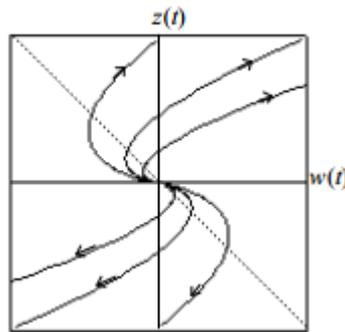


FIGURE 1.6: Un nœud dégénéré instable.

– Si  $\lambda_0 < 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

l'origine est un nœud dégénéré stable et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

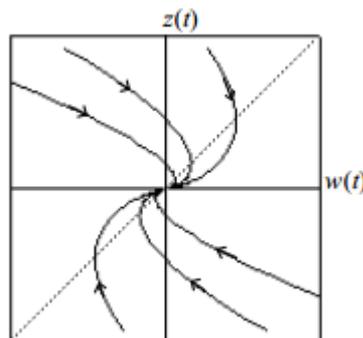


FIGURE 1.7: Un nœud dégénéré stable.

- Deux valeurs propres complexes conjuguées :  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

D'après l'expression de la forme de Jordan dans le cas de valeurs propres complexes conjuguées, le système canonique est :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \dot{w} = \alpha w - \beta z, \\ \dot{z} = \beta w + \alpha z. \end{cases}$$

Ce type de système se résout en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} w = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = w^2 + z^2 \\ \tan \theta = \frac{z}{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\dot{r} = w\dot{w} + z\dot{z}, \\ \dot{\theta} = \cos^2 \theta \left( -\frac{z}{w^2} \dot{w} + \frac{1}{w} \dot{z} \right). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0. \end{cases}$$

- 1<sup>er</sup> Cas :  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , l'origine est un foyer répulsif et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

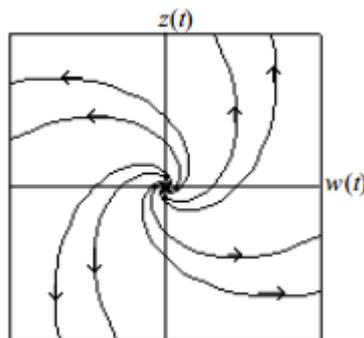


FIGURE 1.8: Un foyer répulsif.

- 2<sup>ème</sup> Cas :  $\alpha = 0$  et  $\beta > 0$ , l'origine est un centre et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

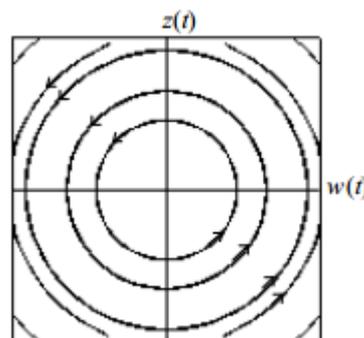


FIGURE 1.9: Un centre.

- 3<sup>ème</sup> Cas :  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$ , l'origine est un foyer attractif et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

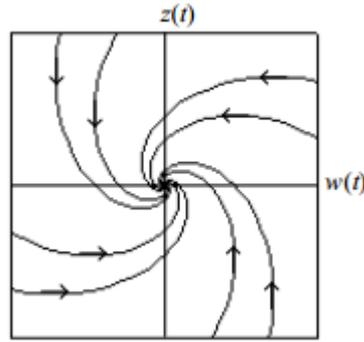


FIGURE 1.10: Un foyer attractif.

### 1.3.2 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

On considère la méthode la plus utilisée en pratique dans le cas des systèmes non linéaires (Voir [4]).

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^2$ , définies sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(x^*, y^*)$  un point d'équilibre pour ce système.

En faisant le développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions autour de  $(x^*, y^*)$  et on obtient :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) \frac{(x - x^*)^2}{2!} \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \frac{(y - y^*)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*)(x - x^*)(y - y^*) + o(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x^*, y^*) \frac{(x - x^*)^2}{2!} \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x^*, y^*) \frac{(y - y^*)^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x^*, y^*)(x - x^*)(y - y^*) + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

On suppose que :

$$\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{u} = \dot{x}, \\ \dot{v} = \dot{y}. \end{cases}$$

Alors, le développement de Taylor devient :

$$f(u + x^*, v + y^*) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \mathcal{R},$$

$$g(u + x^*, v + y^*) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \mathcal{R}.$$

Il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v, \\ \dot{v} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v.\end{aligned}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

### Définition 1.3.2. (La méthode de linéarisation) [17]

Soit  $(x^*, y^*)$  est un point d'équilibre du système (1.4) et soit  $J_{(x,y)}$  la matrice Jacobienne associée à ce système, la linéarisation de ce système en ce point d'équilibre est définie par :

$$J_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

où :  $J_{(x^*, y^*)}$  est appelée la matrice Jacobienne calculée au point  $(x^*, y^*)$ .

**Remarque 1.3.1.** La linéarisation d'un système nous amène à l'étude de la nature des points d'équilibre.

### 1.3.3 Classification d'un point d'équilibre

La stabilité d'un point d'équilibre  $(x^*, y^*)$  est classée selon les valeurs propres qui jouent un rôle important dans l'analyse de la stabilité des points d'équilibre de la matrice Jacobienne  $J_{(x^*, y^*)}$ , aussi bien que son déterminant et sa trace ( Voir [15] ), tel que :

$$\det(J_{(x^*, y^*)}) = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{et} \quad \text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Les valeurs propres de  $J_{(x^*, y^*)}$  sont des solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \text{tr}(J_{(x^*, y^*)})\lambda + \det(J_{(x^*, y^*)}) = 0,$$

où :

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr} + \sqrt{\text{tr}^2 - 4\det}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr} - \sqrt{\text{tr}^2 - 4\det}}{2}.$$

la nature des points d'équilibre dépend essentiellement du signe du discriminant qui est donné par :

$$\Delta = (\text{tr})^2 - 4\det,$$

Trois cas existent :

**Cas 1** :  $\Delta = 0$ 

On trouve  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , alors :

$$\begin{cases} \det J_{(x^*, y^*)} = \lambda^2, \\ \operatorname{tr} J_{(x^*, y^*)} = 2\lambda. \end{cases}$$

Donc

- Si la trace est positive c'est-à-dire  $\lambda > 0$ , on a un nœud dégénéré instable.
- Si la trace est négative c'est-à-dire  $\lambda < 0$ , on a un nœud dégénéré stable.

**Cas 2** :  $\Delta > 0$ 

On trouve deux valeurs propres réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  distinctes, alors :

- Si  $\det J_{(x^*, y^*)} < 0$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe opposé, alors le point d'équilibre est un point selle (col).
- Si  $\det J_{(x^*, y^*)} > 0$  et  $\operatorname{tr} J_{(x^*, y^*)} < 0$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  sont de signe négatif, alors le point d'équilibre est un nœud stable.
- Si  $\det J_{(x^*, y^*)} > 0$  et  $\operatorname{tr} J_{(x^*, y^*)} > 0$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  sont de signe positif, alors le point d'équilibre est un nœud instable.

**Cas 3** :  $\Delta < 0$ 

On trouve deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Donc

$$\begin{cases} \det J_{(x^*, y^*)} = \alpha^2 + \beta^2 > 0, \\ \operatorname{tr} J_{(x^*, y^*)} = 2\alpha. \end{cases}$$

- Si  $\operatorname{tr} J_{(x^*, y^*)} = 0$ , alors le point d'équilibre est un centre.
- Si  $\operatorname{tr} J_{(x^*, y^*)} > 0$  c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est positive, alors le point d'équilibre est un foyer instable.
- Si  $\operatorname{tr} J_{(x^*, y^*)} < 0$  c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est négative, alors le point d'équilibre est un foyer stable.

Classification des équilibres en fonction de la trace et du déterminant de la matrice  $J_{(x^*, y^*)}$  est résumée comme suit :

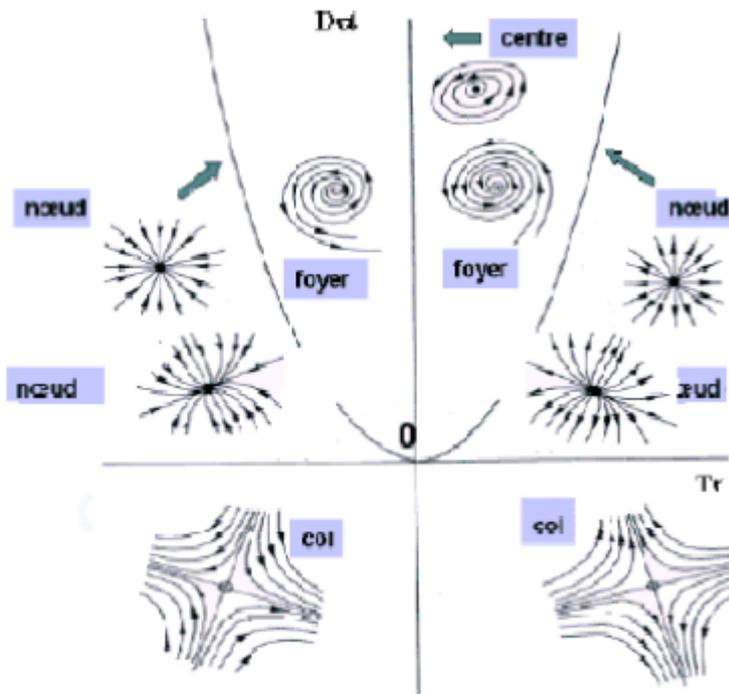


FIGURE 1.11: portrait de phase du système (1.4).

**Remarque 1.3.2.** On suppose pour le système (1.5) que :

$$\begin{cases} \det J_{(x^*, y^*)} \neq 0, \\ (\text{tr} J_{(x^*, y^*)})^2 - 4\det J_{(x^*, y^*)} \geq 0. \end{cases}$$

Nous concluons ce qui suit :

- Si  $\det J_{(x^*, y^*)} < 0$  alors le point d'équilibre est un point selle (col).
- Si  $\det J_{(x^*, y^*)} > 0$  et  $\text{tr} J_{(x^*, y^*)} > 0$ , alors le point d'équilibre est instable.
- Si  $\det J_{(x^*, y^*)} > 0$  et  $\text{tr} J_{(x^*, y^*)} < 0$ , alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

### 1.3.4 Stabilité au sens de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov nommées d'après le mathématicien russe **Alexandre Mikhaïlovitch Lyapunov**, sont des fonctions qui peuvent être utilisées pour prouver la stabilité globale et non seulement locale d'un point critique (ou équilibre) d'un système dynamique ou équation différentielle, on construisant les fonctions de Lyapunov avec un certain nombre de conditions qui doivent être réunies.

Malheureusement, il n'y a pas de façon systématique pour trouver ces fonctions.

**Définition 1.3.3.** [10]

Soient  $\mathcal{D}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contient le point d'équilibre  $(x^*, y^*)$ ,  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  est dite définie positive si :

- $V(x^*, y^*) = 0$ .
- $V(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathcal{D}$  avec  $(x, y) \neq (x^*, y^*)$ .

$V$  est dite définie négative si  $-V$  est définie positive.

**Théorème 1.3.2. (Lyapunov) [22]**

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.6)$$

Soit  $(x^*, y^*)$  un point d'équilibre de ce système (1.6) et soit  $\mathcal{D}$  un voisinage de  $(x^*, y^*)$  inclus dans  $\mathbb{R}^2$  et  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  tel que :

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}.$$

- $V$  définie positive.
- Si  $\dot{V} < 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{D} - \{(x^*, y^*)\}$  alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.
- Si  $\dot{V} \leq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{D} - \{(x^*, y^*)\}$  alors le point d'équilibre est stable.
- Si  $\dot{V} > 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{D} - \{(x^*, y^*)\}$  alors le point d'équilibre est instable.

La théorie de Lyapunov joue un rôle important dans l'étude théorique de la stabilité des systèmes non linéaires.

---

---

# CHAPITRE 2

---

## Modèles de base en dynamique de population

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle de dynamique d'une seule population</b>	<b>15</b>
2.1.1	Modèle de Malthus	16
2.1.2	Modèle de Verhulst	17
<b>2.2</b>	<b>Modèle avec deux populations</b>	<b>20</b>
2.2.1	Modèle de Lotka-Volterra	20
<b>2.3</b>	<b>Équation différentielle impulsive</b>	<b>26</b>

---

Notons par  $x(t)$  la population d'une espèce donnée à l'instant  $t$ , la loi d'évolution de cette population peut se mettre sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \text{naissance} - \text{décès} + \text{migration}.$$

Pour plus de détails le lecteur peut consulter [8, 9, 13, 18].

### 2.1 Modèle de dynamique d'une seule population

La forme générale de la loi de croissance de la population est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

avec la condition initiale  $x(0) = x_0$ .

### 2.1.1 Modèle de Malthus

En 1798, le mathématicien britannique **Thomas Malthus** a proposé le premier modèle de la dynamique de population, qui repose sur l'idée d'une croissance géométrique de la population, tandis que les ressources sont illimitées. Il a supposé que dans une zone isolée (sans migration) une population à l'instant  $t$  possède une densité  $x(t)$ , et que les naissances et les décès sont proportionnels à la population à l'instant  $t$ .

**Malthus** a proposé le modèle linéaire suivant :

$$\frac{dx}{dt} = nx - mx. \quad (2.1)$$

avec la condition initiale  $x(0) = x_0$ .

où  $n$  et  $m$  sont des constantes positives représentant respectivement, les taux de natalité et de mortalité, la solution de cette équation est :

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

où  $r = n - m$  : est une constante représentant le taux de croissance intrinsèque.

$x(0) = x_0$  : est l'effectif initial de la population au temps  $t_0 = 0$ .

#### Un aperçu du modèle

- Points d'équilibre

Le modèle admet un seul point d'équilibre  $x^* = 0$ .

- Stabilité

On pose

$$f(x) = rx,$$

par dérivation on obtient

$$f'(x) = r,$$

au point  $x^*$

$$f'(0) = r > 0,$$

donc le point d'équilibre  $x^* = 0$  est un point d'équilibre instable.

Par conséquent, ce modèle prévoit trois types de comportement :

- Si  $r > 0$  la population croît exponentiellement vers une densité infinie (explosion de la population), c'est-à-dire :  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .
- Si  $r < 0$  la population décroît exponentiellement vers une densité nulle (extinction de la population), c'est-à-dire :  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

- Si  $r = 0$  la population reste à une densité constante (l'évolution de la population est stationnaire pour n'importe quelle condition initiale), c'est-à-dire :  $x(t) = x_0, \forall t \geq 0$ .

La figure suivante résume les résultats ci-dessus :

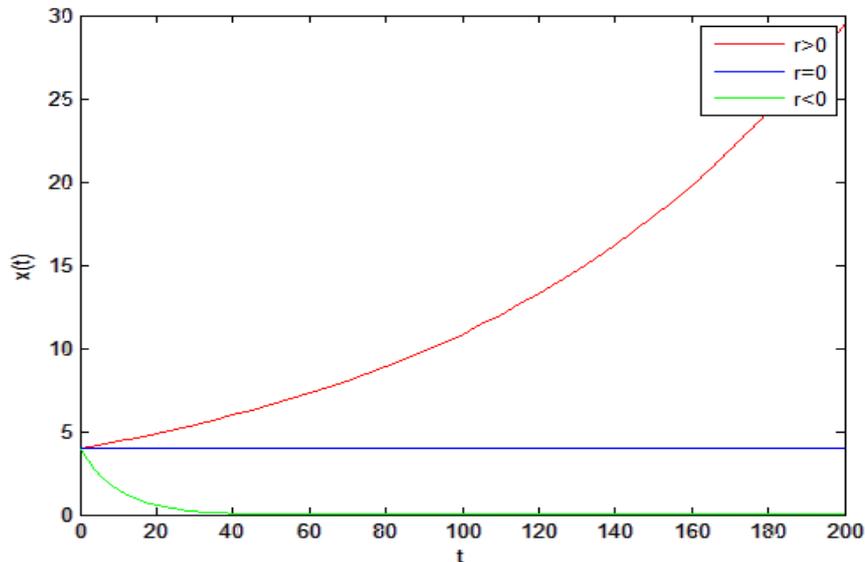
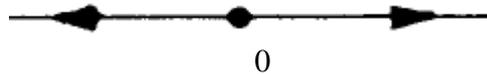


FIGURE 2.1: Dynamique du modèle malthusien.

### • Portrait de phase

Le portrait de phase du modèle de **Malthus** est le suivant :

- Pour  $r > 0$



- Pour  $r < 0$



L'hypothèse sur laquelle s'est basé **Malthus** dans son modèle proposé (rien ne limite la croissance) peut être valable pendant une courte période, mais elle est irréaliste à long terme, car le milieu ne peut pas supporter un nombre d'individus supérieur à un certain seuil, afin d'éviter ce problème et le remédier, **Verhulst** propose son modèle :

### 2.1.2 Modèle de Verhulst

En 1838, le mathématicien belge **Pierre-François Verhulst** a proposé un nouveau modèle s'inspirant du modèle de **Malthus** et qui prend en compte les ressources du milieu qui étant limitées, où le taux de croissance de la population dépendait de la densité et d'une capacité limite, représentent un frein à la croissance de la population, puisque nous savons de façon

réaliste que les individus ne peuvent pas se propager indéfiniment dans un espace défini, ce qui peut se traduire par une baisse de la natalité

$$n(x) = \alpha - \beta x, \quad (2.2)$$

et une augmentation de la mortalité

$$m(x) = \gamma + \delta x, \quad (2.3)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des constantes positives.

En remplaçant (2.2) et (2.3) dans (2.1), on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right). \quad (2.4)$$

avec  $r = \alpha - \gamma > 0$  c'est à dire que  $\alpha > \gamma$ , est une constante représentant le taux de croissance intrinsèque de la population.

$k = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$  : représente la capacité limite du milieu.

Par la méthode de séparation des variables pour l'équation (2.4) on obtient :

$$x(t) = \frac{rke^{rt}}{k + x_0(e^{rt} - 1)}. \quad (2.5)$$

### Un aperçu du modèle

On pose

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right),$$

#### • Points d'équilibre

$$f(x) = 0 \implies rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0$$

$$\implies x = 0 \quad \vee \quad x = k,$$

Donc on a deux points d'équilibre :

$$x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad x_2^* = k.$$

#### • Stabilité

Par dérivation, on trouve :

$$f'(x) = r \left(1 - \frac{2x}{k}\right),$$

au point  $x_1^*$  on obtient

$$\begin{aligned} f(x_1^*) &= f(0) \\ &= r > 0, \end{aligned}$$

donc le point  $x_1^* = 0$  est un point instable.

Au point  $x_2^*$  on obtient :

$$\begin{aligned} f(x_2^*) &= f(k) \\ &= -r < 0, \end{aligned}$$

donc le point  $x_2^* = k$  est un point stable.

Ce modèle prévoit les comportements suivants :

- Si  $x_0 < k$  : La population croit et s'approche asymptotiquement de  $k$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .
- Si  $x_0 = \frac{k}{2}$  il existe alors un point d'inflexion au point  $x = \frac{k}{2}$  ce qui signifie que quand la population est égale à la moitié de sa capacité limite que sa croissance est la plus forte.
- Si  $x_0 > k$ , la population décroît et elle s'approche asymptotiquement de  $k$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .
- Si  $x_0 = k$  la population reste constante pour tout  $t > 0$ .

La figure suivante résume les résultats ci-dessus :

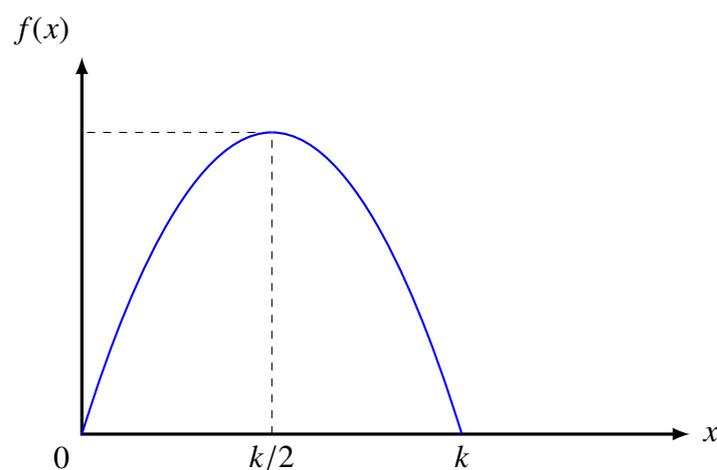


FIGURE 2.2: Représentation graphique du modèle logistique.

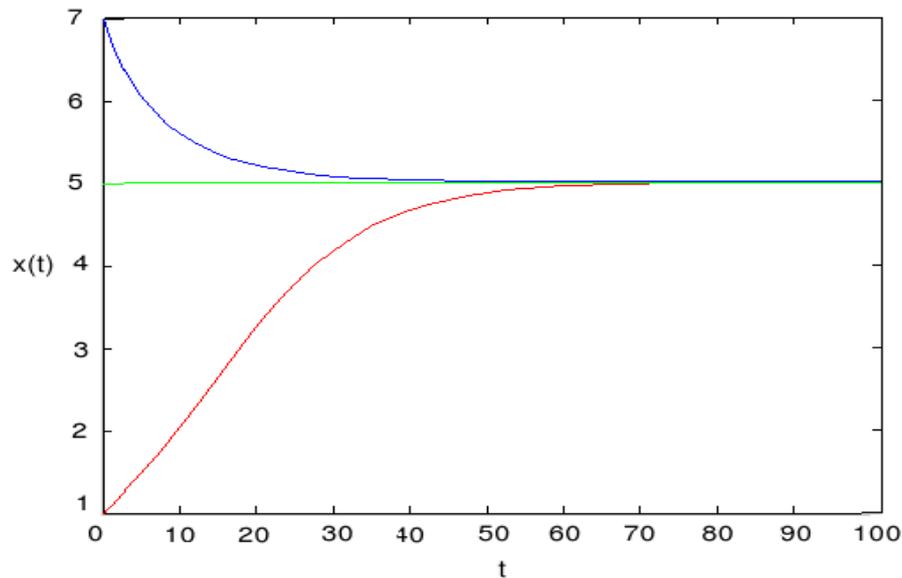
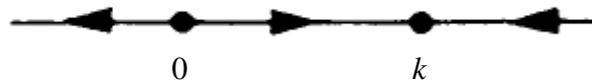


FIGURE 2.3: Représentation de l'approche asymptotique de la population vers le coefficient  $k = 5$ .

- Portrait de phase

Le portrait de phase du modèle de **Verhulst** est le suivant :



## 2.2 Modèle avec deux populations

### 2.2.1 Modèle de Lotka-Volterra

Le modèle que nous étudions a été proposé par **Volterra** (et indépendamment par **Lotka**) en 1926 dans un ouvrage intitulé " Théorie mathématique de la lutte pour la vie ", qui est probablement le premier traité d'écologie mathématique.

Juste après la première guerre mondiale (période durant laquelle la pêche avait été nettement réduite) ils ont remarqué que le nombre de sardines avait diminué, tandis que le nombre de requins avait augmenté.

Ils ont proposé indépendamment et à peu près simultanément le premier modèle mathématique pour tenter de décrire l'interaction entre une population de proies et une population de prédateurs.

#### Représentation du modèle proie-prédateur

Ce modèle a été largement étudié car il est d'une part relativement simple et d'autre part il est considéré comme la base des systèmes d'interaction proie-prédateur.

Le système de Lotka-Volterra est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_{12}y), \\ \dot{y} = y(-r_2 + a_{21}x). \end{cases} \quad (2.6)$$

où :  $r_1, a_{12}, r_2$  et  $a_{21}$  sont des constantes strictement positives.

On note :

$x$  : l'effectif de la population de proie et  $y$  celui de la population de prédateur.

$r_1$  : le taux de croissance de la proie en l'absence du prédateur.

$a_{12}$  : le taux de prédation du prédateur sur la proie.

$a_{21}$  : le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation (ou le taux de conversion à la biomasse prédateur).

$r_2$  : le taux de mortalité (ou décès) du prédateur en l'absence de proie.

### Interprétation globale [13]

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- La proie en l'absence de prédation grandit de manière Malthusienne, c'est le terme  $r_1x$ .
- L'effet de prédation consiste à réduire le taux de croissance de la proie par habitant selon un terme proportionnel à la population de proies et de prédateurs, c'est le terme  $-a_{12}xy$ .
- En l'absence de proie pour assurer la subsistance, le taux de mortalité des prédateurs entraîne une décroissance exponentielle, c'est le terme  $-r_2y$ .
- La contribution de la proie au taux de croissance des prédateurs est le terme  $a_{21}xy$ , est proportionnelle à la proie disponible et à la taille de la population de prédateurs.
- Les termes  $xy$  peuvent être considérés comme représentant la conversion de l'énergie d'une source à une autre.

### Points d'équilibre

On note

$$\begin{cases} f(x, y) = x(r_1 - a_{12}y), \\ g(x, y) = y(-r_2 + a_{21}x). \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(r_1 - a_{12}y) = 0, \\ y(-r_2 + a_{21}x) = 0. \end{cases}$$

Donc on a deux points d'équilibre le premier point trivial  $(0, 0)$  et le deuxième point non-trivial  $(x^*, y^*) = \left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)$ .

## Étude de la stabilité des points d'équilibre

### Stabilité locale des points d'équilibre

Maintenant on va étudier la stabilité locale des points d'équilibre par la méthode de la matrice Jacobienne qui est basée sur la linéarisation du système (2.6).

Soit la matrice Jacobienne associée à ce système est :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} r_1 - a_{12}y & -a_{12}x \\ a_{21}y & -r_2 + a_{21}x \end{pmatrix}.$$

– Le premier point d'équilibre  $(0, 0)$  :

La matrice Jacobienne au point  $(0, 0)$  est donnée par :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

La matrice (2.7) étant diagonale, on a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = r_1 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -r_2 < 0.$$

Alors, puisque ces deux valeurs propres sont de signe opposé cela implique que le point  $(0, 0)$  est un point selle.

– Le deuxième point d'équilibre  $\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)$  :

La matrice Jacobienne au point  $\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)$  est donnée par :

$$J_{\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)} = \begin{pmatrix} 0 & -r_2 \\ r_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

La trace et le déterminant de la matrice (2.8) :

$$\begin{cases} \det J_{\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)} = r_1 r_2 > 0, \\ \text{tr} J_{\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)} = 0. \end{cases}$$

Donc on prévoit un centre pour le système linéarisé, mais on peut rien dire pour le système non linéaire, la linéarisation ne nous permet pas de conclure.

Pour cela nous calculons l'intégrale première :

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{x(r_1 - a_{12}y)}{y(-r_2 + a_{21}x)}.$$

par séparation des variables, on trouve :

$$\frac{(-r_2 + a_{21}x)}{x} dx = \frac{(r_1 - a_{12}y)}{y} dy,$$

Par intégration, on obtient :

$$-r_2 \ln x + a_{21}x - r_1 \ln y + a_{12}y = c \implies H(x, y) = c,$$

$H(x, y)$  est une intégrale première si

$$\frac{\partial H(x(t), y(t))}{\partial t} = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x(t), y(t))}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left( \frac{-r_2}{x} + a_{21} \right) (r_1 x - a_{12}xy) + \left( \frac{-r_1}{y} + a_{12} \right) (r_2 y + a_{21}xy) \\ &= -r_2 r_1 + r_2 a_{12}y + a_{21} r_1 x - a_{21} a_{12} xy + r_1 r_2 - r_1 a_{21} x - r_2 a_{12} y + a_{12} a_{21} xy \\ &= 0, \end{aligned}$$

Donc  $H(x(t), y(t))$  est bien une intégrale première

$$\begin{aligned} \nabla H(x(t), y(t)) &= \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ &= \left( \frac{-r_2}{x} + a_{21}, \frac{-r_1}{y} + a_{12} \right), \end{aligned}$$

Au point  $(x^*, y^*)$  on a :

$$\begin{aligned} \nabla H(x^*, y^*) &= \nabla H \left( \frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}} \right) \\ &= \left( \frac{-r_2}{r_2/a_{21}} + a_{21}, \frac{-r_1}{r_1/a_{12}} + a_{12} \right) \\ &= (-a_{21} + a_{21}, -a_{12} + a_{12}) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

Soit le développement de Taylor suivant :

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= H(x^*, y^*) + (x - x^*) \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y^*) + (y - y^*) \frac{\partial H}{\partial y}(x^*, y^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2!} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*, y^*) \\
&+ \frac{(y - y^*)^2}{2!} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x^*, y^*) + (x - x^*)(y - y^*) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) + o(x^*, y^*),
\end{aligned}$$

Calculons les dérivés second

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y) = \frac{r_2}{x^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y) = \frac{r_1}{y^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Donc le développement de Taylor devient :

$$H(x, y) = H(x^*, y^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2!} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*, y^*) + \frac{(y - y^*)^2}{2!} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x^*, y^*).$$

Puisque

$$H(x, y) - H(x^*, y^*) > 0. \quad (2.10)$$

Alors la fonction  $H$  admet un minimum au point  $\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)$  il en résulte que les trajectoires sont fermées autour des points d'équilibre et le centre est conservé.

### • Stabilité globale

Maintenant on va étudier la stabilité globale du point d'équilibre  $\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)$ , ceci est fait en utilisant le théorème de Lyapunov 1.3.2.

les valeurs propres de la matrice (2.8) :

$$\det(J - \lambda I) = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{r_2 r_1}.$$

On a deux valeurs propres imaginaires pures et le principe de linéarisation ne s'applique pas, pour cela on pose la fonction suivante :

$$V(x, y) = H(x, y) - H\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right).$$

est une fonction de Lyapunov,  $H$  est l'intégrale première du système (2.6).

Vérifions si  $V$  est définie positive :

on a  $V\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right) = 0$  et  $V > 0$  d'après (2.10), pour tout  $(x, y) \in \mathcal{D}$  avec  $(x, y) \neq \left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} \\
 &= \frac{\partial \left[ H(x, y) - H\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right) \right]}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \left[ H(x, y) - H\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right) \right]}{\partial y} \dot{y} \\
 &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \dot{y} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $\dot{V}(x, y) = 0$

D'après le théorème de Lyapunov 1.3.2 on conclut que l'équilibre  $\left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}\right)$  est stable.

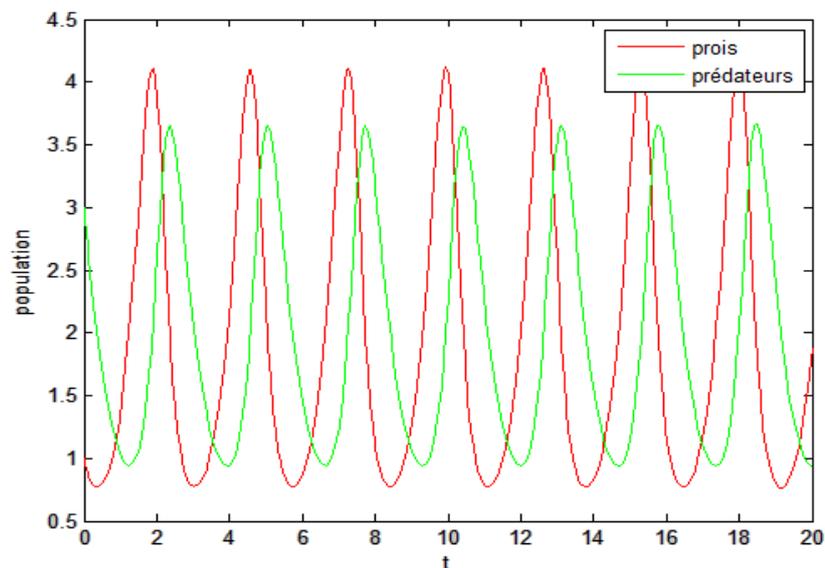


FIGURE 2.4: La dynamique du système proie-prédateur de Lotka-Volterra.

- **Portrait de phase**

– Isocline verticale : (  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} \neq 0$  )

$$\dot{x} = 0 \implies x = 0 \quad \vee \quad y = \frac{r_1}{a_{12}}.$$

– Isocline horizontale : (  $\dot{y} = 0$  et  $\dot{x} \neq 0$  )

$$\dot{y} = 0 \implies y = 0 \quad \vee \quad x = \frac{r_2}{a_{21}}.$$

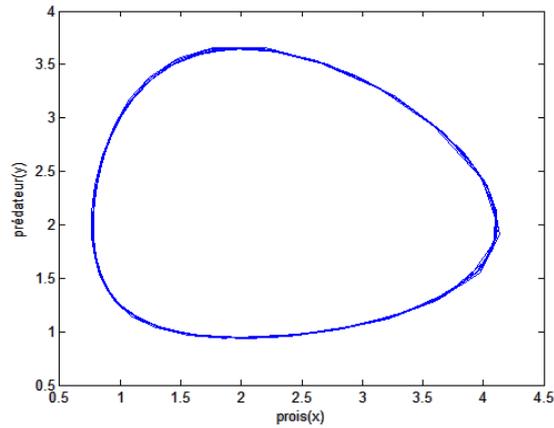


FIGURE 2.5: Portrait de phase du système proie-prédateur de Lotka-Volterra dont la courbe entoure le point d'équilibre non trivial.

## 2.3 Équation différentielle impulsive

Les équations différentielles impulsives apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel.

la dynamique de nombreux processus en évolution est sujette à un brusque changement comme : chocs, récoltes, catastrophes naturelles.

Souvent ces perturbations à court terme sont traitées comme ayant agi instantanément, ou sous la forme " d'impulsion "(Pour plus de détails le lecteur peut consulter [3, 6, 21, 23]).

Nous considérons les équations différentielles ordinaires impulsives du premier ordre :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \neq t_k \quad t \in J, \text{ avec } J = [t_0, t_0 + T], T > 0,$$

et une valeur initiale

$$y(t_0) = y_0,$$

où :  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction donnée soumise à une équation aux différences qui représentent la condition impulsive  $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , tel que :

$$\Delta y(t) = I_k(t, y(t)) \quad t = t_k,$$

$$\Delta y(t) = y(t_k^+) - y(t_k^-) \quad k = 1, \dots, n,$$

$$y(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} y(t) \quad \text{et} \quad y(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} y(t),$$

avec

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k.$$

**Définition 2.3.1.** [3]

Soit le problème impulsif du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in J' = J \setminus \{t_1, t_2, \dots\}, \\ y(t_k^+) = y(t_k^-) + I_k(y(t_k)), & k = 1, \dots, n, \\ y(t_0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.11)$$

où :  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , et  $I_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Tel que  $f, I_k$  sont des fonctions données.

**Définition 2.3.2.** [21]

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ , une fonction réelle  $y(t)$  est appelée une solution du problème (2.11) sur  $J$  si :

- i)  $(t, y(t)) \in D$  pour  $t \in J = [t_0, t_0 + T]$ .
- ii)  $y(t)$  est continument différentiable et satisfait  $y'(t) = f(t, y(t))$  sur  $J$ .
- iii)  $y(t_k^+) = y(t_k^-) + I_k(y(t_k))$  pour  $t_k \in [t_0, t_0 + T]$  avec  $y(t_k^-) = y(t_k)$ .

**Lemme 2.3.1.** [3]

Une fonction  $y$  est une solution du problème (2.11) si et seulement si :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds + \sum_{t_0 < t_k < t} I_k(y(t_k)),$$

pour  $t \in J$ .

**Preuve.** En effet, supposons que  $y$  est une solution de (2.11).

Soit  $J_0 = [t_0, t_1] = [0, t_1]$ ,  $J_1 = ]t_1, t_2]$ ,  $\dots$ ,  $J_k = ]t_k, t_{k+1}]$ .

Pour  $t \in [0, t_1]$  on aura :

$$\begin{aligned} y'(t) = f(t, y(t)) &\implies \int_0^t y'(s)ds = \int_0^t f(s, y(s))ds \\ &\implies y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds, \end{aligned}$$

donc

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds \quad \text{pour } t \in [0, t_1]. \quad (2.12)$$

Pour  $t \in ]t_1, t_2]$  on aura :

$$\begin{aligned} y'(t) = f(t, y(t)) &\implies \int_{t_1}^t y'(s) ds = \int_{t_1}^t f(s, y(s)) ds \\ &\implies y(t) - y(t_1^+) = \int_{t_1}^t f(s, y(s)) ds, \end{aligned}$$

D'après (2.11), on a :

$$y(t_1^+) - y(t_1^-) = I_1(y(t_1)),$$

donc

$$y(t) = y(t_1^-) + I_1(y(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, y(s)) ds.$$

et puisque  $y(t_1) = y(t_1^-)$  et si on la remplace dans (2.12) on trouve :

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds + I_1(y(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, y(s)) ds \\ &= y_0 + I_1(y(t_1)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds, \end{aligned}$$

Alors

$$y(t) = y_0 + I_1(y(t_1)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad \text{pour } t \in ]t_1, t_2]. \quad (2.13)$$

Pour  $t \in ]t_2, t_3]$  on aura :

$$\begin{aligned} y'(t) = f(t, y(t)) &\implies \int_{t_2}^t y'(s) ds = \int_{t_2}^t f(s, y(s)) ds \\ &\implies y(t) - y(t_2^+) = \int_{t_2}^t f(s, y(s)) ds, \end{aligned}$$

D'après (2.11), on a :

$$y(t_2^+) - y(t_2^-) = I_2(y(t_2)),$$

donc

$$y(t) = y(t_2^-) + I_2(y(t_2)) + \int_{t_2}^t f(s, y(s)) ds,$$

et puisque  $y(t_2) = y(t_2^-)$  et si on la remplace dans (2.13) on trouve :

$$y(t_2) = y_0 + I_1(y(t_1)) + \int_0^{t_2} f(s, y(s)) ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + I_1(y(t_1)) + \int_0^{t_2} f(s, y(s)) ds + I_2(y(t_2^-)) + \int_{t_2}^t f(s, y(s)) ds \\ &= y_0 + I_1(y(t_1)) + I_2(y(t_2)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^2 I_k(y(t_k)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds, \end{aligned}$$

D'où

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^2 I_k(y(t_k)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad \text{pour } t \in ]t_2, t_3]. \quad (2.14)$$

Pour  $t \in ]t_3, t_4]$  on aura :

$$\begin{aligned} y'(t) = f(t, y(t)) &\implies \int_{t_3}^t y'(s) ds = \int_{t_3}^t f(s, y(s)) ds \\ &\implies y(t) - y(t_3^+) = \int_{t_3}^t f(s, y(s)) ds, \end{aligned}$$

D'après (2.11), on a :

$$y(t_3^+) - y(t_3^-) = I_3(y(t_3)),$$

Alors

$$y(t) = y(t_3^-) + I_3(y(t_3)) + \int_{t_3}^t f(s, y(s)) ds,$$

et puisque  $y(t_3) = y(t_3^-)$  et si on la remplace dans (2.14) on trouve :

$$y(t_3) = y_0 + \sum_{k=1}^2 I_k(y(t_k)) + \int_0^{t_3} f(s, y(s)) ds.$$

Donc

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 + \sum_{k=1}^2 I_k(y(t_k)) + \int_0^{t_3} f(s, y(s)) ds + I_3(y(t_3)) + \int_{t_3}^t f(s, y(s)) ds \\
&= y_0 + \sum_{k=1}^2 I_k(y(t_k)) + I_3(y(t_3)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds \\
&= y_0 + \sum_{k=1}^3 I_k(y(t_k)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds,
\end{aligned}$$

D'où

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^3 I_k(y(t_k)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad \text{pour } t \in ]t_3, t_4]. \quad (2.15)$$

Jusqu'à  $t \in ]t_i, t_{i+1}]$ , on aura :

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^i I_k(y(t_k)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

Donc on peut généraliser la solution par :

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n I_k(y(t_k)) + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad \text{pour tout } t \in J.$$

■

**Exemple 2.3.1.** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2, & t \neq \frac{k\pi}{4} \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta x = -1, & t = \frac{k\pi}{4}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Par intégration sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{4}]$ , on aura

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 &\implies \int_0^t dx(s) = \int_0^t 1 + x^2(s) ds \\
&\implies \int_0^t \frac{dx(s)}{1 + x^2(s)} = \int_0^t ds,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\arctg(x(t)) = t,$$

D'où

$$x(t) = tg(t).$$

Donc la solution est :

$$x(t) = tg(t) \text{ pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \quad (2.17)$$

Par intégration sur l'intervalle  $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ , on aura

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \implies \int_{\frac{\pi}{4}}^t \frac{dx(s)}{1 + x^2(s)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^t ds,$$

Ce qui donne

$$\arctg(x(t)) - \arctg\left(x\left(\frac{\pi^+}{4}\right)\right) = t - \frac{\pi}{4},$$

Alors, on trouve :

$$x(t) - x\left(\frac{\pi^+}{4}\right) = tg\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

D'après (2.16) on a :

$$x\left(\frac{\pi^+}{4}\right) = x\left(\frac{\pi^-}{4}\right) - 1,$$

D'où

$$x(t) = x\left(\frac{\pi^-}{4}\right) - 1 + tg\left(t - \frac{\pi}{4}\right),$$

De plus  $x\left(\frac{\pi^-}{4}\right) = x\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et puisque  $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ , alors si on les remplace dans (2.17) on aura :

$$x(t) = 1 - 1 + tg\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc la solution est :

$$x(t) = tg\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ pour tout } t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (2.18)$$

Par intégration sur l'intervalle  $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ , on aura

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \implies \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{dx(s)}{1 + x^2(s)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^t ds,$$

d'où

$$\arctg(x(t)) - \arctg\left(x\left(\frac{\pi^+}{2}\right)\right) = t - \frac{\pi}{2},$$

en suite

$$x(t) - x\left(\frac{\pi^+}{2}\right) = tg\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

d'après (2.16) on a :

$$x\left(\frac{\pi^+}{2}\right) = x\left(\frac{\pi^-}{2}\right) - 1,$$

alors

$$x(t) = x\left(\frac{\pi^-}{2}\right) - 1 + \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

De plus  $x\left(\frac{\pi^-}{2}\right) = x\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , alors si on la remplace dans (2.18) on aura :

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1 + \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \implies x(t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Donc la solution est :

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ pour tout } t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]. \quad (2.19)$$

Par intégration sur l'intervalle  $\left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ , on aura

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \implies \int_{\frac{3\pi}{4}}^t \frac{dx(s)}{1 + x^2(s)} = \int_{\frac{3\pi}{4}}^t ds,$$

ce qui implique que

$$\operatorname{arctg}(x(t)) - \operatorname{arctg}\left(x\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = t - \frac{3\pi}{4},$$

alors

$$x(t) - x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

D'après (2.16) on a :

$$x\left(\frac{3\pi^+}{4}\right) = x\left(\frac{3\pi^-}{4}\right) - 1,$$

d'où

$$x(t) = x\left(\frac{3\pi^-}{4}\right) - 1 + \operatorname{tg}\left(t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

De plus  $x\left(\frac{3\pi^-}{4}\right) = x\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ , alors si on la remplace dans (2.19) on aura :

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - 1 + \operatorname{tg}\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \implies x(t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Donc la solution est :

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ pour tout } t \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$

Donc on peut généraliser la solution par :

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{k\pi}{4}\right) \text{ pour } t \in \left]\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4}\right] \text{ et } k = 1, 2, \dots$$

---

---

## CHAPITRE 3

---

# Système proie-prédateur pour une ou deux espèces avec impulsion

### Sommaire

3.1 Étude qualitative du système . . . . .	34
3.2 Système proie-prédateur avec une récolte impulsive . . . . .	36
3.3 Comportement asymptotique des solutions . . . . .	42
3.4 Application . . . . .	50

Nous avons vu dans le chapitre 2 une présentation du modèle proie-prédateur ainsi qu'une analyse complète de la stabilité des points d'équilibre.

Dans ce chapitre, on étudie un modèle qui prend en compte la présence d'une récolte constante de la proie en des instants fixes.

On considère le modèle proie-prédateur du système autonome de Lotka-Volterra suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y), \\ \dot{y} = y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y). \end{cases} \quad (3.1)$$

où tous les paramètres sont positifs.

L'interaction des écosystèmes<sup>1</sup> est toujours influencée par les activités humaines, qui apportent des changements au comportement dynamique des populations.

Par conséquent, la question qui se pose est : quel est le comportement dynamique de la population représentée par le système (3.1), lorsque la proie est capturée ou stockée par un taux constant ?

---

1. Un écosystème est un ensemble formé par une communauté d'êtres vivants en interrelation avec son environnement.

Nous allons nous concentrer sur le système proie-prédateur (3.1) avec récolte constante est donné par le système des équations différentielles impulsives suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y) \\ \dot{y} = y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y) \\ \Delta x = -h, \end{cases} \quad \begin{matrix} t \neq n\tau, \\ \\ t = n\tau. \end{matrix} \quad (3.2)$$

où :  $x(t)$  désigne l'effectif de la population de proie et  $y(t)$  celui de la population de prédateur au temps  $t$ , respectivement les paramètres  $(r_i (i = 1, 2), a_{ij} (i, j = 1, 2))$   
 $\tau$  représente la période de la récolte impulsive, et  $h$  représente la quantité récoltée des proies au temps  $t = n\tau$ .

avec

$$\Delta x(n\tau) = x(n\tau^+) - x(n\tau), \quad (3.3)$$

et

$$x(n\tau^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(n\tau + h).$$

### Interprétation du modèle

Le système (3.1) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - a_{12}xy \\ \dot{y} = y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y). \end{cases} \quad \text{avec } K = \frac{r_1}{a_{11}}, \quad (3.4)$$

où :

$x$  : l'effectif de la population de proie.

$y$  : l'effectif de la population de prédateur.

$r_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$  : la population de proie suit une loi logistique.

$r_1$  : le taux de croissance de la proie en l'absence du prédateur.

$K$  : la capacité limite du milieu pour la population de proie.

$a_{12}xy$  : interaction entre les deux populations proie et prédateur.

$a_{12}$  : le taux de conversion de la biomasse de la proie à prédateur .

$r_2$  : le taux de mortalité (ou décès) du prédateur en l'absence de proie.

$a_{22}yy$  : interaction entre les prédateurs.

$a_{22}$  : le taux de conversion de la biomasse du prédateur à un autre prédateur .

$a_{21}xy$  : interaction entre les deux populations proie et prédateur.

$a_{21}$  : le taux de conversion de la biomasse du prédateur à la proie .

## 3.1 Étude qualitative du système

### • Points d'équilibre

Pour déterminer les points d'équilibre du système (3.1), on considère le système :

$$\begin{cases} x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y) = 0, \\ y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y) = 0. \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = 0 & \vee & r_1 - a_{11}x - a_{12}y = 0, \\ y = 0 & \vee & -r_2 + a_{21}x - a_{22}y = 0. \end{cases}$$

et on obtient :

$$\begin{cases} x = 0 & \vee & y = \frac{r_1 - a_{11}x}{a_{12}}, \\ y = 0 & \vee & x = \frac{r_2 + a_{22}y}{a_{21}}. \end{cases}$$

Donc ce système possède quatre points équilibre  $(0, 0)$  et  $\left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$ ,  $\left(0, \frac{-r_2}{a_{22}}\right)$  qui est refusé et le point  $(x^*, y^*) = \left(\frac{r_2 a_{12} + a_{22} r_1}{a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}}, \frac{r_1 a_{21} - a_{11} r_2}{a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}}\right)$  avec la condition

$$r_1 a_{21} > a_{11} r_2 \Leftrightarrow \frac{r_1}{a_{11}} > \frac{r_2}{a_{21}}.$$

### • Étude de la stabilité des points d'équilibre

Maintenant on va étudier la stabilité locale des points d'équilibre par la méthode de la matrice Jacobienne qui est basée sur la linéarisation du système (3.1).

La matrice Jacobienne associée à ce système est donnée par :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} r_1 - 2a_{11}x - a_{12}y & -a_{12}x \\ a_{21}y & -r_2 + a_{21}x - 2a_{22}y \end{pmatrix}.$$

– Le premier point d'équilibre  $(0, 0)$  : ( trivial ).

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix},$$

La matrice étant diagonale, on a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = r_1 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -r_2 < 0.$$

Alors, puisque ces deux valeurs propres sont de signe opposé, cela implique que le point  $(0, 0)$  est un point selle.

– Le deuxième point d'équilibre  $\left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$  :

$$J_{\left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)} = \begin{pmatrix} -r_1 & -\frac{a_{12}r_1}{a_{11}} \\ 0 & -r_2 + \frac{a_{21}r_1}{a_{11}} \end{pmatrix},$$

On a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = -r_1 < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -r_2 + \frac{a_{21}r_1}{a_{11}}.$$

Si  $-r_2 + \frac{a_{21}r_1}{a_{11}} > 0 \Leftrightarrow \frac{r_1}{a_{11}} > \frac{r_2}{a_{21}} \Rightarrow \lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$  donc le point d'équilibre  $\left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$  est un point selle.

Si  $-r_2 + \frac{a_{21}r_1}{a_{11}} < 0 \Leftrightarrow \frac{r_1}{a_{11}} < \frac{r_2}{a_{21}} \Rightarrow \lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$  donc le point d'équilibre  $\left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$  est un nœud stable.

– Le troisième point d'équilibre  $(x^*, y^*) = \left(\frac{r_2 a_{12} + a_{22} r_1}{a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}}, \frac{r_1 a_{21} - a_{11} r_2}{a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}}\right)$  :

$$J_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} r_1 - 2a_{11}x^* - a_{12}y^* & -a_{12}x^* \\ a_{21}y^* & -r_2 + a_{21}x^* - 2a_{22}y^* \end{pmatrix},$$

$(x^*, y^*)$  réalise le système suivant :

$$\begin{cases} r_1 - a_{11}x^* - a_{12}y^* = 0, \\ -r_2 + a_{21}x^* - a_{22}y^* = 0. \end{cases}$$

La matrice Jacobienne au point  $(x^*, y^*)$  devient :

$$J_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} -a_{11}x^* & -a_{12}x^* \\ a_{21}y^* & -a_{22}y^* \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

La trace et le déterminant de la matrice (3.5) sont données par :

$$\begin{cases} \text{tr}J_{(x^*, y^*)} = -(a_{11}x^* + a_{22}y^*) < 0, \\ \det J_{(x^*, y^*)} = a_{11}x^* a_{22}y^* + a_{12}x^* a_{21}y^* > 0. \end{cases}$$

Donc le point d'équilibre  $(x^*, y^*) = \left(\frac{r_2 a_{12} + a_{22} r_1}{a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}}, \frac{r_1 a_{21} - a_{11} r_2}{a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}}\right)$  est un point stable.

## 3.2 Système proie-prédateur avec une récolte impulsive

Premièrement, nous considérons le système d'une espèce avec une récolte impulsive suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_{11}x) & t \neq n\tau, \\ \Delta x = -h & t = n\tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

**Lemme 3.2.1.** [11]

Si  $h < \frac{r_1}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{r_1\tau} - 1}}{\sqrt{e^{r_1\tau} + 1}} = h^*$ , alors

1. Le système (3.6) a deux solutions positives  $\tau$ -périodiques  $x_i^*(t) (i = 1, 2)$

$$x_i^*(t) = \frac{r_1 x_i^* e^{r_1(t-n\tau)}}{r_1 - a_{11}x_i^* + a_{11}x_i^* e^{r_1(t-n\tau)}} \quad \text{pour } t \in (n\tau, (n+1)\tau],$$

et

$$x_1^* = \frac{(r_1 - ha_{11}) + \sqrt{(r_1 - ha_{11})^2 - 4r_1 ha_{11}/(e^{r_1\tau} - 1)}}{2a_{11}},$$

$$x_2^* = \frac{(r_1 - ha_{11}) - \sqrt{(r_1 - ha_{11})^2 - 4r_1 ha_{11}/(e^{r_1\tau} - 1)}}{2a_{11}}.$$

2. Si la condition initiale  $x(0) = x_0 \in \{x_0 \mid x_0 > x_2^*\}$ , alors

$$x(t) \longrightarrow x_1^*(t) \text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

Si la condition initiale  $x(0) = x_0 \in \{x_0 \mid 0 < x_0 < x_2^*\}$ , alors il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$x(N_0\tau^+) = x(N_0\tau) - h < 0.$$

3.  $x_i^* \leq x_i^*(t) \leq x_i^* + h$  ( $i = 1, 2$ ) pour  $t \in (0, +\infty)$ .

**Preuve.** 1. Soit  $x(t) = x(t, x_0)$  la solution du système (3.6) avec la condition initiale  $x(0) = x_0$  alors on a :

$$\frac{dx}{dt} = x(r_1 - a_{11}x),$$

Par la méthode de séparation des variables, on trouve :

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{(r_1 - a_{11}x)} = \frac{\alpha r_1 + x(\beta - \alpha a_{11})}{x(r_1 - a_{11}x)},$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \alpha r_1 = 1 \\ \beta - \alpha a_{11} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{r_1} \\ \beta = \frac{a_{11}}{r_1} \end{cases}$$

ce qui implique que :

$$\frac{1}{x(r_1 - a_{11}x)} = \frac{1/r_1}{x} + \frac{a_{11}/r_1}{(r_1 - a_{11}x)}.$$

Par suite, on intègre et on obtient :

$$\int_{n\tau}^t \frac{1/r_1}{x(s)} dx(s) + \int_{n\tau}^t \frac{a_{11}/r_1}{(r_1 - a_{11}x(s))} dx(s) = \int_{n\tau}^t ds,$$

donc

$$\frac{1}{r_1} [\ln x(s)]_{n\tau}^t - \frac{1}{r_1} [\ln(r_1 - a_{11}x(s))]_{n\tau}^t = t - n\tau,$$

ce qui implique

$$\ln \frac{x(t)}{x(n\tau^+)} - \ln \frac{(r_1 - a_{11}x(t))}{(r_1 - a_{11}x(n\tau^+))} = r_1(t - n\tau),$$

Après un calcul simple, on obtient :

$$\frac{x(t)}{(r_1 - a_{11}x(t))} \cdot \frac{(r_1 - a_{11}x(n\tau^+))}{x(n\tau^+)} = e^{r_1(t-n\tau)},$$

et donc on trouve

$$x(t) = \frac{r_1 e^{r_1(t-n\tau)} x(n\tau^+)}{r_1 + a_{11}(e^{r_1(t-n\tau)} - 1)x(n\tau^+)}. \tag{3.7}$$

D'après (3.3) on obtient :

$$-h + x(n\tau) = x(n\tau^+).$$

On note  $x_n = x(n\tau^+)$ ,  $x_{n+1} = x((n+1)\tau^+)$  et  $x((n+1)\tau^+) = x((n+1)\tau) - h$   
d'où

$$x((n+1)\tau) = \frac{r_1 e^{r_1 \tau} x_n}{r_1 + a_{11}(e^{r_1 \tau} - 1)x_n},$$

et

$$x((n+1)\tau^+) = x_{n+1} = \frac{r_1 e^{r_1 \tau} x_n}{r_1 + a_{11}(e^{r_1 \tau} - 1)x_n} - h, \quad (3.8)$$

Soit  $x_{n+1} = x_n = x$ , alors on trouve :

$$x = \frac{r_1 e^{r_1 \tau} x}{r_1 + a_{11}(e^{r_1 \tau} - 1)x} - h = f(x), \quad (3.9)$$

Cherchons les solution de (3.9) :

$$\begin{aligned} x = \frac{r_1 e^{r_1 \tau} x}{r_1 + a_{11}(e^{r_1 \tau} - 1)x} - h &\implies (x+h)(r_1 + a_{11}(e^{r_1 \tau} - 1)x) = r_1 e^{r_1 \tau} x \\ &\implies a_{11}x^2 - (r_1 - a_{11}h)x + \frac{hr_1}{(e^{r_1 \tau} - 1)} = 0 \end{aligned}$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (r_1 - a_{11}h)^2 - 4a_{11} \frac{hr_1}{(e^{r_1 \tau} - 1)}.$$

Si  $\Delta > 0$  alors il existe deux racines positives données par :

$$x_{1,2}^* = \frac{-(a_{11}h - r_1) \pm \sqrt{(r_1 - ha_{11})^2 - 4r_1 ha_{11}/(e^{r_1 \tau} - 1)}}{2a_{11}},$$

donc

$$x_{1,2}^* = \frac{(r_1 - ha_{11}) \pm \sqrt{(r_1 - ha_{11})^2 - 4r_1 ha_{11}/(e^{r_1 \tau} - 1)}}{2a_{11}}.$$

Pour  $\Delta > 0$  on a  $(a_{11}h - r_1)^2 > 4a_{11} \frac{hr_1}{(e^{r_1 \tau} - 1)}$  donc on a

$$(r_1^2 + a_{11}^2 h^2 - 2r_1 a_{11} h)(e^{r_1 \tau} - 1) > 4a_{11} h r_1,$$

ce qui donne

$$r_1^2(e^{r_1 \tau} - 1) + a_{11}^2 h^2(e^{r_1 \tau} - 1) - 2r_1 a_{11} h(e^{r_1 \tau} - 1) > 4a_{11} h r_1,$$

ce qui implique

$$h^2 a_{11}^2 (e^{r_1 \tau} - 1) - 2hr_1 a_{11} (e^{r_1 \tau} + 1) + r_1^2 (e^{r_1 \tau} - 1) > 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4r_1^2 a_{11}^2 (e^{r_1\tau} + 1)^2 - 4a_{11}^2 r_1^2 (e^{r_1\tau} - 1)^2 \\
&= 4r_1^2 a_{11}^2 [(e^{r_1\tau} + 1)^2 - (e^{r_1\tau} - 1)^2] \\
&= 4r_1^2 a_{11}^2 [(e^{r_1\tau} + 1 + e^{r_1\tau} - 1)(e^{r_1\tau} + 1 - e^{r_1\tau} + 1)] \\
&= 4r_1^2 a_{11}^2 [(2e^{r_1\tau})(2)] \\
&= 4r_1^2 a_{11}^2 4e^{r_1\tau} > 0,
\end{aligned}$$

Alors il existe deux racines :

$$\begin{aligned}
h_{1,2} &= \frac{2r_1 a_{11} (e^{r_1\tau} + 1) \pm \sqrt{4r_1^2 a_{11}^2 4e^{r_1\tau}}}{2a_{11}^2 (e^{r_1\tau} - 1)} \\
&= \frac{2r_1 a_{11} (e^{r_1\tau} + 1) \pm 2r_1 a_{11} 2\sqrt{e^{r_1\tau}}}{2a_{11}^2 (e^{r_1\tau} - 1)} \\
&= \frac{r_1 a_{11} [(e^{r_1\tau} + 1) \pm 2\sqrt{e^{r_1\tau}}]}{a_{11}^2 (e^{r_1\tau} - 1)} \\
&= \frac{r_1 (e^{r_1\tau} + 1) \pm 2\sqrt{e^{r_1\tau}}}{a_{11} (e^{r_1\tau} - 1)} \\
&= \frac{r_1 (\sqrt{e^{r_1\tau}} \pm 1)^2}{a_{11} (\sqrt{e^{r_1\tau}} + 1)(\sqrt{e^{r_1\tau}} - 1)},
\end{aligned}$$

alors :

$$h_1 = \frac{r_1}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{r_1\tau}} + 1}{\sqrt{e^{r_1\tau}} - 1},$$

et

$$h_2 = \frac{r_1}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{r_1\tau}} - 1}{\sqrt{e^{r_1\tau}} + 1}.$$

Par hypothèse :

$$h^* = \frac{r_1}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{r_1\tau}} - 1}{\sqrt{e^{r_1\tau}} + 1}.$$

Dans ce cas on peut noter  $\Delta = h^* - h$ , d'où l'équation (3.9) possède :

- Si  $h < h^* \implies \Delta > 0 \implies$  il existe deux solutions positives  $x_1^*$  et  $x_2^*$ .
- Si  $h > h^* \implies \Delta < 0 \implies$  il n'existe pas de solutions réelles.
- Si  $h = h^* \implies \Delta = 0 \implies$  il existe deux solutions égales  $x_{1,2}^* = \frac{r_1 - ha_{11}}{2a_{11}}$ .

2. Si  $h < h^*$ , nous considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{r_1 e^{r_1 \tau} x}{r_1 + a_{11}(e^{r_1 \tau} - 1)x} - h.$$

On a  $x > 0$  et  $x - f(x) = (x - x_1^*)(x - x_2^*)$ , donc :

Si

$$\begin{aligned} x > f(x) &\implies x - f(x) > 0 \\ &\implies (x - x_1^*)(x - x_2^*) > 0, \end{aligned}$$

Donc  $0 < x < x_2^*$  et  $x > x_1^*$ .

Si

$$\begin{aligned} x < f(x) &\implies x - f(x) < 0 \\ &\implies (x - x_1^*)(x - x_2^*) < 0, \end{aligned}$$

Alors  $x_2^* < x < x_1^*$ .

Donc

**1<sup>er</sup> Cas :**

Si la condition initiale  $x_0 \in \{x_0 \mid x_1^* > x_0 > x_2^*\}$  alors :

$$x_1 = f(x_0) > x_0 \quad \text{et} \quad x_1 < x_1^*.$$

Nous avons

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_1^* \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

puisque  $A$  est une racine de l'équation (3.8) et  $A = x_1^*$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_1^* \quad \text{pour} \quad x_0 > x_2^*.$$

par conséquent, nous avons

$$x(t) \longrightarrow x_1^*(t) \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty \quad \text{pour} \quad x_0 \in \{x_0 \mid x_0 > x_2^*\}.$$

**2<sup>me</sup> Cas :**

Si la condition initiale  $x_0$  satisfait  $0 < x_0 < x_2^*$ , nous avons

$$\dots < x_2 < x_1 < x_0 < x_2^*.$$

c'est-à-dire que la suite  $\{x_n\}$  est décroissante monotone, mais n'est pas minorée.

Si elle est minorée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A < x_2^*.$$

avec,  $A$  est une racine de l'équation (3.9), mais il n'y a pas d'autre racine réelle pour (3.9) sauf  $x_i^*(i = 1, 2)$ .

Cette contradiction indique que  $\{x_n\}$  n'est pas minorée, cela montre qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x(N_0\tau^+) < 0$ .

3. On a

$$x_i^*(t) = \frac{r_1 x_i^* e^{r_1(t-n\tau)}}{r_1 - a_{11}x_i^* + a_{11}x_i^* e^{r_1(t-n\tau)}} \quad \text{pour } t \in (n\tau, (n+1)\tau],$$

par dérivation, on trouve :

$$(x_i^*)'(t) = \frac{r_1^2 x_i^* (r_1 - a_{11}x_i^*) e^{r_1(t-n\tau)}}{(r_1 - a_{11}x_i^* + a_{11}x_i^* e^{r_1(t-n\tau)})^2} \quad \text{pour } t \in (n\tau, (n+1)\tau],$$

donc  $x_i^*(t)$  est croissante monotone pour  $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$  si  $x_i^* < \frac{r_1}{a_{11}}$  ( $i = 1, 2$ ), ce qui montre que

$$x_i^*(n\tau^+) \leq x_i^*(t) \leq x_i^*((n+1)\tau),$$

Alors

$$x_i^* \leq x_i^*(t) \leq x_i^* + h \quad \text{pour } t \in (n\tau, (n+1)\tau], n \in \mathbb{N}.$$

■

### Lemme 3.2.2. [11]

Si  $h > h^*$  alors il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$x(N_1\tau^+) = x(N_1\tau) - h < 0.$$

En effet, si  $h > h^*$  l'équation (3.9) n'admet pas de solution réelle, alors il n'existe pas de point d'équilibre pour (3.8), similaire à la preuve (2) du lemme 3.2.1 pour  $x_0 < x_2^*$ .

Les lemmes ci-dessus montrent que :

$h = h^*$  est le niveau critique de la récolte pour le système (3.6).

Si  $h > h^*$ , on obtient l'extinction de la population car il y a un effort assez grand dans la récolte.

Si  $h < h^*$ , le comportement asymptotique dépend de la condition initiale (ou bien état initial) de la population. Donc si le niveau initial de la population est assez grand, alors le système garde sa stabilité, par contre si le niveau initial de la population est très petit, alors on obtient l'extinction de la population.

Soit  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ .

Soit  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $V$  appartient à la classe  $V_0$  si et seulement si :

1.  $V$  est continue sur  $(n\tau, (n+1)\tau] \times \mathbb{R}^2$  et pour tout  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\lim_{(t,Y) \rightarrow (n\tau^+, X)} V(t, Y) = V(n\tau^+, X) < \infty.$$

2.  $V$  est localement lipchizienne par rapport à  $X$ .

**Lemme 3.2.3.** [11]

On suppose que  $V \in V_0$  et

$$\begin{cases} D^+V(t, X) \leq g(t, V(t, X)), & t \neq n\tau, \\ V(n\tau, X(n\tau^+)) \leq \psi_n(V(n\tau, X(n\tau))). \end{cases} \quad (3.10)$$

où :

$$D^+V(t, X) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (V(t+h, X+hf(t, X)) - V(t, X)),$$

et

$$f(t, X) = (x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y), y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y)).$$

$g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est continu sur  $(n\tau, (n+1)\tau] \times \mathbb{R}_+$  pour  $u \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (n\tau^+, u)} g(t, y) = g(n\tau^+, u) < \infty.$$

et  $\psi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  n'est pas décroissante.

soit  $r(t)$  la solution maximale de l'équation différentielle impulsive suivante :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = g(t, u(t)), & t \neq n\tau, \\ u(n\tau^+) = \psi_n(u(n\tau)), \\ u(0^+) = u_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

existe sur  $[0, +\infty)$ .  $V(0^+, X_0) \leq u_0$  implique que

$$V(t, X(t)) \leq r(t) \text{ pour } t \geq 0.$$

où  $X(t)$  est la solution de (3.2) avec la condition  $X(0) = X_0$ .

### 3.3 Comportement asymptotique des solutions

Dans cette section, on parlera des solutions qui tendent vers zéro et des zones d'extinction, en suite, on s'intéresse par l'étude des régions où on n'a pas d'extinction et leurs limites positives (supérieurs et inférieurs).

On note par  $(x(t), y(t))$  la solution de (3.2) avec la condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ .

**Théorème 3.3.1.** [11]

Si  $h > h^*$  et la condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ , ou  $h < h^*$  et la condition initiale

$$(x_0, y_0) \in D_1 = \{(x_0, y_0) \mid 0 < x_0 < x_2^*, y_0 > 0\}.$$

Alors nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

**Preuve.** Si  $h > h^*$  et la condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ , alors d'après le lemme 3.2.2, on a :

$$x(t) \leq 0 \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

ce qui conduit à

$$\dot{y} \leq -r_2 y \quad \text{car} \quad \dot{y} = y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y),$$

et puisque les constantes sont positives alors

$$\frac{dy}{dt} \leq -r_2 y,$$

en intégrant cette équation, on trouve :

$$\ln |y(t)| \leq -r_2 t + c,$$

enfin on obtient

$$y(t) \leq ke^{-r_2 t},$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

De la même manière, si  $h < h^*$  et  $0 < x_0 < x_2^*$  par le lemme 3.2.1, on a :

$$x(t) \leq 0 \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

■

Donc on conclut que  $\mathbb{R}_+^2$  c'est une région d'extinction des prédateurs si  $h > h^*$  et  $D_1$  une région d'extinction des prédateurs si  $h < h^*$ .

Maintenant, nous sommes en mesure d'étudier le comportement asymptotique de la solution avec la condition initiale :

$$(x_0, y_0) \in D_2 = \{(x_0, y_0) \mid x_0 > x_2^*, y_0 > 0\} \text{ pour } h < h^*.$$

**Théorème 3.3.2.** [11]

Si  $h < h^*$  et  $\frac{a_{11}}{a_{21}} r_2 \tau > \ln \frac{r_1 - a_{11}x_1^* + a_{11}x_1^* e^{r_1 \tau}}{r_1}$ , alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

où  $(x(t), y(t))$  est la solution avec la valeur initiale  $(x_0, y_0) \in D_2$  et  $x_1^*$  est définie dans le lemme 3.2.1.

**Preuve.** Supposons que  $(x(t), y(t))$  est la solution avec la condition initiale  $(x_0, y_0) \in D_2$ , puis

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \leq x(r_1 - a_{11}x), & t \neq n\tau, \\ \Delta x = -h, & t = n\tau, \\ x(0^+) = x_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

D'après le lemme 3.2.3, nous avons

$$x(t) \leq x_1(t) \text{ pour tout } t > 0.$$

où  $x_1(t)$  est une solution avec la condition initiale  $x_1(0^+) = x(0^+) = x_0$  du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(r_1 - a_{11}x_1), & t \neq n\tau, \\ \Delta x_1 = -h, & t = n\tau. \end{cases} \quad (3.13)$$

A partir du lemme 3.2.1, nous avons

$$x_1(t) \longrightarrow x_1^*(t) \text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

où  $x_1^*(t)$  est une solution positive stable périodique de (3.13) et  $x_1^*(t)$  et  $x_1^*$  sont données dans le lemme 3.2.1.

par conséquent, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N_2 > 0$  tel que  $x_1(t) < x_1^*(t) + \varepsilon$  si  $t \geq N_2\tau$  ce qui donne

$$\dot{y}(t) \leq y(-r_2 + a_{21}(x_1^*(t) + \varepsilon)),$$

Par intégration on trouve :

$$\int_{N_2\tau}^t \frac{dy(s)}{y(s)} dt \leq \int_{N_2\tau}^t (-r_2 + a_{21}(x_1^*(t) + \varepsilon)) ds \implies [\ln y(s)]_{N_2\tau}^t \leq \int_{N_2\tau}^t (-r_2 + a_{21}(x_1^*(t) + \varepsilon)) ds,$$

ce qui implique que

$$y(t) \leq y(N_2\tau^+) e^{\int_{N_2\tau}^t (-r_2 + a_{21}(x_1^*(t) + \varepsilon)) dt}.$$

Alors si  $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$  et  $n > N_2$  et d'après la propriété 3 du lemme 3.2.1, nous avons :

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(N_2\tau^+) e^{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (a_{21}(x_1^*(t) + \varepsilon)) dt} e^{\int_{N_2\tau}^{n\tau} (-r_2 + a_{21}(x_1^*(t) + \varepsilon)) dt} \\ &\leq y(N_2\tau^+) e^{[a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon)]\tau} e^{(n-N_2)\tau(-r_2 + a_{21}\varepsilon) + a_{21}x_1^*(t)} \\ &\leq Me^{(n-N_2)\left[(-r_2 + a_{21}\varepsilon)\tau + \frac{a_{21}\tau r_1 x_1^* e^{r_1(t-n\tau)}}{r_1 - a_{11}x_1^* + a_{11}x_1^* e^{r_1(t-n\tau)}}\right]} \\ &\leq Me^{(n-N_2)\left[(-r_2 + a_{21}\varepsilon)\tau + \ln \frac{r_1 - a_{11}x_1^* + a_{11}x_1^* e^{r_1\tau}}{r_1} \frac{a_{21}}{a_{11}}\right]} \end{aligned}$$

par l'hypothèse, nous pouvons choisir  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que :

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}(r_2\tau - a_{21}\varepsilon\tau) > \ln \frac{r_1 - a_{11}x_1^* + a_{11}x_1^*e^{r_1\tau}}{r_1},$$

ce qui conduit  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ ,  
où

$$M = y(N_2\tau^+)e^{[a_{21}(x_1^*+h+\varepsilon)]\tau}.$$

■

Par les deux théorèmes on a :

Si  $h < h^*$  et  $h > \frac{r_1}{a_{11}} \left(1 - e^{-\frac{a_{11}}{a_{21}}r_2\tau}\right) \frac{e^{r_1\tau} - e^{-\frac{a_{11}}{a_{21}}r_2\tau}}{e^{r_1\tau} - 1} = h^c$ , d'où  $\mathbb{R}_+^2$  est une région d'extinction pour le prédateur.

**Lemme 3.3.1.** [11]

Si  $h < h^*$  et  $a_{21}(x_1^* + h) > r_2$ , alors  $x(t) \leq x_1^* + h + \varepsilon_1$  et

$$y(t) \leq \frac{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h)}{a_{22}} + \varepsilon_2 \text{ pour } t \text{ assez grand,}$$

Avec  $\varepsilon_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ) assez petits et  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in D_2$ .

**Preuve.** Pour  $\varepsilon_1 > 0$  il existe  $N_3 > 0$  tel que :

$$x(t) \leq x_1^*(t) + \varepsilon_1 \text{ pour } t > N_3\tau,$$

Par le lemme 3.2.1, on a :

$$x(t) \leq x_1^* + h + \varepsilon_1 = M_1 \text{ pour } t > N_3\tau.$$

On a

$$\dot{y}(t) = y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y),$$

donc

$$\dot{y}(t) \leq y(-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y),$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dt} \leq y(-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y),$$

Par la méthode de séparation des variables, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y} &= \frac{-r_2\alpha + \alpha a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - \alpha a_{22}y + \beta y}{y(-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y)} \\ &= \frac{-r_2\alpha + \alpha a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) + y(\beta - \alpha a_{22})}{y(-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y)} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \beta - \alpha a_{22} = 0 \\ \alpha(a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \frac{a_{22}}{a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2} \\ \alpha = \frac{1}{a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2} \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{y(-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y)} \leq \frac{1/(a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2)}{y} + \frac{a_{22}/(a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2)}{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y}.$$

Par la suite, on intègre et on obtient :

$$\frac{1}{a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2} \left[ \int \frac{dy}{y} + a_{22} \int \frac{dy}{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - a_{22}y} \right] \leq \int dt,$$

Alors

$$y \leq \left( \frac{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1)}{a_{22}} - y \right) a_{22} e^{(a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2)t} K,$$

Après un calcul simple, on trouve :

$$y \leq \frac{[-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1)]K}{a_{22}K + 1/[e^{(a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1) - r_2)t}]},$$

puisque'on a  $a_{21}(x_1^* + h) > r_2$  et  $t$  assez grand, alors

$$y(t) \leq \frac{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1)}{a_{22}},$$

donc pour chaque  $\eta_1 > 0$ , il existe  $T_1 (> N_3\tau)$  tel que :

$$y(t) \leq \frac{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h + \varepsilon_1)}{a_{22}} + \eta_1 \quad t > T_1.$$

D'où

$$y(t) \leq \frac{-r_2 + a_{21}(x_1^* + h)}{a_{22}} + \varepsilon_2 = M_2 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{21}\varepsilon_1}{a_{22}} + \eta_1.$$

Donc les solutions qui appartiennent à  $D_2$  sont asymptotiquement positives et majorées si  $h < h^*$  avec  $a_{21}(x_1^* + h) > r_2$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{si} \quad h < h^* \quad \text{et} \quad a_{21}(x_1^* + h) < r_2.$$

■

Soit le système :

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}), & t \neq n\tau, \\ \Delta\tilde{x} = -h, & t = n\tau. \end{cases} \quad (3.14)$$

Si  $r_1 - a_{12}M_2 > 0$  et

$$h < \frac{r_1 - a_{12}M_2}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1}}{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} + 1}} = h^\circ,$$

De plus

$\tilde{x}_1(t) \rightarrow \tilde{x}_1^*$  quand  $t \rightarrow \infty$  si  $\tilde{x}(0) > \tilde{x}_2^*$ .

$\tilde{x}_i^*(t) \geq \tilde{x}_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) pour  $t > 0$ .

En effet, soit  $\tilde{x}(t)$  solution du système (3.14) avec une condition initiale  $\tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_0(i = 1, 2)$

Alors on a :

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{x}(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}),$$

Par la méthode de séparation des variables, on trouve :

$$\frac{1}{\tilde{x}(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x})} = \frac{1/r_1 - a_{12}M_2}{\tilde{x}} + \frac{a_{11}/r_1 - a_{12}M_2}{(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x})},$$

Par la suite, on intègre et on obtient

$$\int_{n\tau}^t \frac{1/r_1 - a_{12}M_2}{\tilde{x}(s)} d\tilde{x}(s) + \int_{n\tau}^t \frac{a_{11}/r_1 - a_{12}M_2}{(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}(s))} d\tilde{x}(s) = \int_{n\tau}^t ds,$$

donc

$$\frac{1}{r_1 - a_{12}M_2} \left[ \ln \tilde{x}(s) \right]_{n\tau}^t - \frac{1}{r_1 - a_{12}M_2} \left[ \ln(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}(s)) \right]_{n\tau}^t = t - n\tau,$$

ce qui implique

$$\ln \frac{\tilde{x}(t)}{\tilde{x}(n\tau^+)} - \ln \frac{(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}(t))}{(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}(n\tau^+))} = (r_1 - a_{12}M_2)(t - n\tau),$$

D'où

$$\frac{\tilde{x}(t)}{(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}(t))} \cdot \frac{(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}\tilde{x}(n\tau^+))}{\tilde{x}(n\tau^+)} = e^{(r_1 - a_{12}M_2)(t - n\tau)},$$

et donc on trouve

$$\tilde{x}(t) = \frac{(r_1 - a_{12}M_2)e^{r_1 - a_{12}M_2(t - n\tau)}\tilde{x}(n\tau^+)}{r_1 - a_{12}M_2 + a_{11}(e^{(r_1 - a_{12}M_2)(t - n\tau)} - 1)\tilde{x}(n\tau^+)}. \quad (3.15)$$

D'après (3.3) on obtient :

$$-h + \tilde{x}(n\tau) = \tilde{x}(n\tau^+).$$

On note  $\tilde{x}_n = \tilde{x}(n\tau^+)$ ,  $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}((n+1)\tau^+)$  et  $\tilde{x}((n+1)\tau^+) = \tilde{x}((n+1)\tau) - h$

D'où

$$\tilde{x}((n+1)\tau) = \frac{(r_1 - a_{12}M_2)e^{r_1\tau}\tilde{x}_n}{r_1 - a_{12}M_2 + a_{11}(e^{r_1\tau} - 1)\tilde{x}_n},$$

et

$$\tilde{x}((n+1)\tau^+) = \tilde{x}_{n+1} = \frac{r_1 e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} \tilde{x}_n}{r_1 - a_{12}M_2 + a_{11}(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1)\tilde{x}_n} - h. \quad (3.16)$$

Posons  $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n = \tilde{x}$ , alors on a :

$$\tilde{x} = \frac{(r_1 - a_{12}M_2)e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau}\tilde{x}}{r_1 - a_{12}M_2 + a_{11}(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1)\tilde{x}} - h. \quad (3.17)$$

A partir de l'équation précédente, on obtient

$$a_{11}\tilde{x}^2 - (r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}h)\tilde{x} + \frac{h(r_1 - a_{12}M_2)}{(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1)} = 0,$$

le discriminant de ce polynôme est donné par la formule suivante :

$$\Delta = (r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}h)^2 - 4a_{11}\frac{h(r_1 - a_{12}M_2)}{(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1)}.$$

Si  $\Delta > 0$  alors il existe deux solutions :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1,2}^* &= \frac{1}{2a_{11}} ((r_1 - a_{12}M_2 - ha_{11}) \\ &\pm \frac{\sqrt{(r_1 - a_{12}M_2 - ha_{11})^2(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1) - 4a_{11}h(r_1 - a_{12}M_2)}}{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1}}). \end{aligned}$$

Alors  $\Delta > 0$ , ceci implique  $(a_{11}h - (r_1 - a_{12}M_2))^2 > 4a_{11}\frac{h(r_1 - a_{12}M_2)}{(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1)}$  donc on a

$$((r_1 - a_{12}M_2)^2 + a_{11}^2h^2 - 2(r_1 - a_{12}M_2)a_{11}h)(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1) > 4a_{11}h(r_1 - a_{12}M_2),$$

d'où on obtient l'équation :

$$(r_1 - a_{12}M_2)^2(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1) + a_{11}^2h^2(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1) - 2(r_1 - a_{12}M_2)a_{11}h(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1) > 4a_{11}h(r_1 - a_{12}M_2),$$

ce qui implique

$$h^2a_{11}^2(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1) - 2h(r_1 - a_{12}M_2)a_{11}(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} + 1) + (r_1 - a_{12}M_2)^2(e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1) > 0,$$

On a :

$$\Delta = 4(r_1 - a_{12}M_2)^2a_{11}^24e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} > 0.$$

Alors il existe deux racines :

$$h_1 = \frac{r_1 - a_{12}M_2}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} + 1}}{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1}},$$

et

$$h_2 = \frac{r_1 - a_{12}M_2}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1}}{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} + 1}},$$

D'où

$$h^\circ = h_2 = \frac{r_1 - a_{12}M_2}{a_{11}} \cdot \frac{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} - 1}}{\sqrt{e^{(r_1 - a_{12}M_2)\tau} + 1}} > h.$$

**Théorème 3.3.3.** [11]

Si  $h < h^\circ$ ,  $-r_2 + a_{21}\tilde{x}_1^* > 0$  et  $r_1 - a_{12}M_2 > 0$ , alors

$$x(t) \geq \tilde{x}_1^* - \delta_1 \text{ et } y(t) \geq \frac{-r_2 + a_{21}\tilde{x}_1^*}{a_{22}} - \delta_2 \text{ pour } t \text{ assez grand,}$$

où  $(x(t), y(t))$  est la solution de (3.2) avec la condition initiale

$$(x_0, y_0) \in D_3 = \{(x_0, y_0) \mid M_1 > x_0 > \max\{x_2^*, \tilde{x}_2^*\}, M_2 > y_0 > 0\},$$

et  $\delta_1, \delta_2 > 0$  assez petits tels que

$$\tilde{x}_1^* - \delta_1 > 0 \text{ et } \frac{-r_2 + a_{21}\tilde{x}_1^*}{a_{22}} - \delta_2 > 0.$$

**Preuve.** Si  $h < h^\circ$ , alors  $h < h^*$  et  $x_1^* > \tilde{x}_1$ , et on a  $(x_0, y_0) \in D_3 \subseteq D_2$ , alors toutes les conditions du lemme 3.3.1 sont satisfaites.

Par conséquent, on a  $y(t) \leq M_2$  pour tout  $t > 0$ , ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \geq x(r_1 - a_{12}M_2 - a_{11}x), & t \neq n\tau, \\ \Delta x = -h, & t = n\tau. \end{cases} \quad (3.18)$$

Avec  $x(t) \geq \tilde{x}_1(t)$  pour  $t > 0$  ou  $\tilde{x}_1(t)$  est une solution du système (3.14) avec une condition initiale  $\tilde{x}_1(0) = x_0$ .

Par l'hypothèse  $x_0 > \tilde{x}_2^*$ , on sait que

$$\tilde{x}_1(t) \longrightarrow \tilde{x}_1^*(t) \text{ si } t \longrightarrow \infty.$$

Donc pour tout  $\delta_2 > 0$ , il existe  $T_2 > 0$  tel que :

$$\tilde{x}_1(t) \geq \tilde{x}_1^*(t) - \delta_1 \geq \tilde{x}_1^* - \delta_1 > 0 \text{ pour } t \geq T_2,$$

Ainsi, on obtient

$$\dot{y}(t) \geq y(-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - a_{22}y),$$

Alors, on a

$$\frac{dy}{dt} \geq y(-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - a_{22}y),$$

Par la méthode de séparation des variables, on trouve :

$$\frac{1}{y(-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - a_{22}y)} \geq \frac{1/(a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - r_2)}{y} + \frac{a_{22}/(a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - r_2)}{-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - a_{22}y},$$

Par suite, on intègre et on obtient :

$$y \geq \left( \frac{-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - a_{22}y}{a_{22}} \right) a_{22} e^{(a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - r_2)t} K,$$

D'où

$$y \geq \frac{[-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1)]K}{a_{22}K + 1/[e^{(a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) - r_2)t}]},$$

Puisqu'on a  $-r_2 + a_{21}\tilde{x}_1^* > 0$  et  $t$  assez grand, on obtient

$$y(t) \geq \frac{-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1)}{a_{22}},$$

en raison de  $-r_2 + a_{21}\tilde{x}_1^* > 0$ , on peut choisir  $\delta_1 > 0$  assez petit pour que  $-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1) > 0$ .

Donc

$$y(t) \geq \frac{-r_2 + a_{21}(\tilde{x}_1^* - \delta_1)}{a_{22}} - \eta_2 > 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

■

## 3.4 Application

Dans cette partie on va donner quelques exemples pour illustrer nos résultats.

**Exemple 3.4.1.** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + 2x - y) \end{cases} \quad t \neq n, \quad (3.19)$$

$$\Delta x = -1 \quad t = n.$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $h = 1, r_1 = 2, a_{11} = 1$  et  $\tau = 1$

Premièrement on calcule le  $h^*$  :

$$h^* = \frac{r_1}{a_{11}} \frac{\sqrt{e^{r_1\tau}} - 1}{\sqrt{e^{r_1\tau}} + 1}.$$

d'où

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{2}{1} \frac{\sqrt{e^2} - 1}{\sqrt{e^2} + 1} \\ &= 2 \frac{\sqrt{7.389} - 1}{\sqrt{7.389} + 1} \\ &= 0.9242, \end{aligned}$$

Donc  $h^* = 0.9242 < 1$  qui implique que  $h^* < h$ .

Si on choisit la condition initiale  $(x_0, y_0) = (1000, 200)$ ,

D'après le théorème 3.3.1, pour tout condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ , on a :

$$y(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

**Exemple 3.4.2.** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + 2x - y) \\ \Delta x = -0.8 \end{cases} \quad \begin{matrix} t \neq n, \\ t = n. \end{matrix} \quad (3.20)$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$ , calculons le  $h^*$  :

$$h^* = \frac{r_1}{a_{11}} \frac{\sqrt{e^{r_1 \tau}} - 1}{\sqrt{e^{r_1 \tau}} + 1}.$$

d'où

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{2}{1} \frac{\sqrt{e^2} - 1}{\sqrt{e^2} + 1} \\ &= 2 \frac{\sqrt{7.389} - 1}{\sqrt{7.389} + 1} \\ &= 0.9242, \end{aligned}$$

Calculons le  $h^c$  :

$$h^c = \frac{r_1}{a_{11}} \left( 1 - e^{-\frac{a_{11}}{a_{21}} r_2 \tau} \right) \frac{e^{r_1 \tau} - e^{\frac{a_{11}}{a_{21}} r_2 \tau}}{e^{r_1 \tau} - 1}.$$

d'où

$$\begin{aligned}h^c &= 2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{e^2 - e^{\frac{1}{2}}}{e^2 - 1} \\&= 2(1 - 0.6065) \frac{7.389 - 1.6487}{7.389 - 1} \\&= 0.7070,\end{aligned}$$

Puisque  $h = 0.8$  ce qui implique  $h < h^*$  et  $h > h^c$ ,

Pour une condition initiale positive  $(x_0, y_0) = (20, 20) \in \mathbb{R}_+^2$  et d'après le théorème 3.3.1 et le théorème 3.3.2 on obtient :

$$y(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

---

## Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire on a étudié un système de Lotka-Volterra de type proie-prédateur. On a commencé par l'étude de la stabilité des points d'équilibre, puis on a considéré le cas d'impulsion dans une espèce, représentant une récolte instantanée (i.e impulsive) dans la proie.

Dans le futur, on prévoit d'étudier des modèles plus généraux avec impulsions non constantes.

---

# Bibliographie

- [1] BRAUER, F., CASTILLO-CHAVEZ, C., AND CASTILLO-CHAVEZ, C. *Mathematical models in population biology and epidemiology*, vol. 40. Springer, 2001.
- [2] DANG-VU, H., AND DELCARTE, C. *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*. Ellipses, 2000.
- [3] DRUMI BAINOV, P. S. *Impulsive Differential Equations - Periodique Solutions and Applications*. chapman and Hall - CRC(Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics), (1993).
- [4] FORTIN, A. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Presses inter Polytechnique, 2001.
- [5] FRANÇOISE, J.-P. *Oscillations en biologie : analyse qualitative et modèles*, vol. 46. Springer Science & Business Media, 2005.
- [6] FU, X., YAN, B., AND LIU, Y. Introduction of impulsive differential systems.
- [7] H.AMANN. *Ordinary Differential Equation - An Introduction to Nonlinear Analysis*. (Derguyter Studies in Mathematics)-Walter De Guyter Inc, (1990).
- [8] H.L.FREEDMAN. *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*. Springer Marcel Dekker Inc ( Pure And Applied Mathematics ), (1980).
- [9] J-C.POGGIALE, C.LETT, P. *Modélisation Mathématique En Écologie*. Dunod, Paris, (2010).
- [10] JACK K.HALE, H. *Dynamics and bifurcations*. (Research in Criminology)-Springer-Verlag, (1991).
- [11] J.APPEL. Ultimate behavior of predator-prey system with constant harvesting of the prey impulsively. *Math and Computing* (september Vol 22(2006)), 149–158.
- [12] J.D.MURRAY. *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications*. Bainbridge Island, Washington, (2002).
- [13] J.D.MURRAY. *Mathematical Biology :I.An Introduction*. Third Edition, Baibrige Island, vol 17 January(2002).

- [14] J.K.HALE. *Ordinary differential equations*. Krieger, (1980).
- [15] M.EUGENE. *Dynamical Systems in Neuroscience - the geometry of Excitability and Bursing*. (Computation Neuroscience)-The MIT Press, (2006).
- [16] MORRIS.HIRSCH, AND STEPHEN.SMALE. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Pure Applied Mathematics, 1974.
- [17] MUSTAFA.R.S.KULENOVIC, O. M. *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*. -chapman and Hall-CRC, (2002).
- [18] N.BACAER. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer Verlag London, (2011).
- [19] RAVI P.AGARWAL, D. O. Infinite interval problems modeling the flow of a gas through a semi-infinite porous medium. *Studies in Applied Mathematics* 108, 3 (2002), 245–257.
- [20] R.P.AGARWAL, D. Infinite interval problems modeling phenomena which arise in the theory of plasma and electrical potential theory. *Studies in Applied Mathematics* 111, 3 (2003), 339–358.
- [21] SAMOILENKO, A. M., PERESTYUK, N., AND CHAPOVSKY, Y. *Impulsive differential equations*, vol. 14. World Scientific, 1995.
- [22] SOPHIE TARBOURIECH, GERMAIN GARCIA, J. M. G. D. S. J. I. Q. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer Science and Business Media, 2011.
- [23] V.LAKSHMIKANTHAM, D.BAINOV, P. *Theory of impulsive differential equations*, vol. 6. World scientific, 1989.
- [24] W.SIMON. *Mathematical techniques for biology and medicine*. Courier Corporation, 1986.
- [25] YASUHIRO, T. *Global dynamical properties of Lotka-Volterra systems*. World Scientific, 1996.

## Résumé

---

L'objectif principal de cette étude consiste à examiner un système proie-prédateur de type interaction de Lotka-Volterra, on s'intéresse à étudier l'effet de la récolte sur la dynamique globale des deux espèces, nous présentons des régions différentes d'extinction et d'autres sans extinction.

---

**Mots-clés:** Modèles de dynamique de population, équation différentielle impulsive, stabilité, récolte, Point d'équilibre.

---

## Abstract

---

The principal objective of this study is to examine a Lotka-Volterra interaction-type prey-predator system, we are interested in studying the effect of the harvest on the global dynamics of the two species, we present different regions of extinct and non-extinct.

---

**Keywords:** Population Dynamic Models, Impulsive Differential Equation, Stability, Harvesting, Equilibrium Point.

---

## ملخص

---

الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو دراسة نظام فريسة-المفترس لنوع التفاعل من لوتكا-فولتيرا، ونحن مهتمون بدراسة تأثير الحصاد على الديناميات الكلية للأنواع، نقدم مناطق مختلفة من الانقراض و أخرى دون انقراض.

---

الكلمات المفتاحية: نماذج ديناميكية السكان ، المعادلة التفاضلية الاندفاعية ، الثبات ، الحصاد ، نقطة التوازن .