الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation
Thème

Transformée de Laplace de l'Intégrale et la Dérivée Fractionnaire et Applications.

Présenté Par :
Melle. MEDJENOUNE Chaimaà.

Devant le jury composé de :

Pr. HAMMOUDI Ahmed	Professeur	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. MAMMAR Imane	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr. BENTOUT Sofiane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. MEKHALFI Kheira	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2021/2022

Dédicaces

Je dédie mon travail :

A mes chers respectueux parents, ceci est le fruit de tant d'années de votre éducation, de votre attention et de vos efforts. Merci.

A mes très chers sœurs qui m'ont encouragé le long de mon parcours universitaire : Sara, Soumia et Rofaida.

A toutes la famille MEDJENOUNE spécialement mes chers oncles.

A la mémoire de "Hbibi", puisse Dieu vous avoir en sa sainte miséricorde et que ce travail soit une prière pour votre âme.

A celle que je considère comme ma grand-mère "mima", que Dieu la préserve.

A toutes mes cousines et une spéciale dédicace à mes copines Hind et Fatima.

A ma chère voisine et ses enfants.

A mon encadrante Dr. MEKHALFI Kheira.

A tous mes enseignants de mathématiques.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département Mathématiques, université de Ain Temouchent.

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation et d'encouragements.

Deuxièmement, je voudrais remercier mon encadrant : Dr. MEKHALFI Kheira, pour m'avoir proposé ce sujet, ainsi que pour le soutien et ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury, le président : Mr. Hammoudi et les examinateurs : Mr. Bentout et Mme. Mammar pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens également à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université d'Ain Temouchent.

Table des matières

Notations et Symboles

Ensembles

- $\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^*$ Ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathcal{C}(]0,+\infty[)$ Ensemble des fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles.
- $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ Ensemble des fonctions réelles continues sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Fonctions

- $\Gamma(z)$ Fonction Gamma.
- $B(z,z')$ Fonction Bêta.
- $E_{\alpha,\beta}(z)$ Fonction de Mittag-Leffler.
- $I_a^\alpha f$ Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
- $D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
- ${}^cD_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f.
- $D^n f = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ Dérivée ordinaire d'ordre n par rapport à t de la fonction f.
- $\mathcal{L}\Big[f(t)\Big]$ Transformée de Laplace de la fonction f.
- $\mathcal{L}^{-1}\Big[F(p)\Big]$ Transformée de Laplace inverse de la fonction F.
- $\mathcal{L}\Big[{}_0D_t^s f(t)\Big]$ Transformée de Laplace de l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville.
- $\mathcal{L}[{}_0^cD_t^s f(t)]$ Transformée de Laplace de l'opérateur de dérivation de Caputo.

Abréviations

- EDO Equations différentielles ordinaires.
- EDF Equations différentielles fractionnaires.
- R-L Riemann-Liouville.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension des notions classiques de primitive et dérivation d'ordre entier non nul à tout ordre réel. Malgré que la dérivation fractionnaire a été définie par plusieurs approches aux noms de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo, cette notion a été introduite en $XVIII^e$ siècle lorsque Gottfried Leibniz a défini le symbole de la dérivation d'ordre entier positif, Guillaume l'Hôspital l'a interrogé sur la possibilité d'avoir une dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. Cette question a attiré l'attention des mathématiciens dont Euler ou Lagrange au $XVIII^e$ siècle suivi par Liouville en 1837, Riemann en 1847 ainsi que Grünwald 1867 et Letnikov en 1868. Pour plus de détail historique, on peut consulter [19].

La transformation de Laplace est l'une des plus importantes transformations intégrales. Elle intervient dans des nombreux problèmes de physique mathématique, de calcul de probabilités, d'automatique..., et elle joue aussi un grand rôle en analyse classique. Elle porte très légitiment le nom de Pierre-Simon Laplace (1749-1827). En effet, Laplace a souligné l'interêt de présenter la plupart des fonctions, des suites, des sommes partielles et des restes des séries usuelles sous forme intégrale, afin d'en obtenir des développements. Plus tard, l'ingénieur britannique Oliver Heaviside (1850-1925) a inventé le calcul symbolique afin de résoudre des équations différentielles et intégrales.

L'objectif de ce mémoire est d'utiliser la transformée de Laplace pour résoudre plusieurs types des équations différentielles linéaires et même de résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est précisément consacré à quelques éléments du calcul fractionnaire tout en rappelant les fonctions spéciales mises en jeu, à savoir la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler. Ensuite, on présente les opérateurs de base du calcul fractionnaire ainsi que leurs propriétés et qui sont : l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ensuite au sens de Caputo.

Le deuxième chapitre est destiné aux définitions et propriétés de la transformation de Laplace et la transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles, en donnant des exemples simples de résolutions de quelques fonctions par la transformée de Laplace et son inverse. Puis, on représente les définitions de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo qu'on aura besoin dans la suite du travail.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse à la résolution de quelques équations différentielles ordinaires d'ordre 1 très simple, d'ordre 2, d'ordre 2 à coefficient algébrique, d'ordre 3 et enfin le cas général d'ordre n. Ensuite, la résolution des équations différentielles fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, la résolution des équations différentielles sera faite par la transformée de Laplace.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les résultats fondamentaux du calcul fractionnaire. Nous présentons d'abord trois fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire (la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler), on donne ensuite les définitions nécessaires sur l'intégration et la dérivation au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo avec leurs propriétés, pour plus de détails voir ([17, 14, 15, 1, 16, 12, 3, 18, 11, 2, 4, 8, 6]).

1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Cette fonction généralise le factoriel $n!$, et permet à $n!$ de prendre des valeurs réelles ou complexes.

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma est une fonction complexe qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Elle est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.1 *Prenons l'exemple de $z = \dfrac{1}{2}$ et montrons que : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. D'après la définition 1.1.1, nous avons*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

En effet, on pose le changement de variable suivant

$$x = \sqrt{t} \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx,$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

sachant que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(Intégrale de Gauss).*

L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle suivante

Proposition 1.1.1

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{1.2}$$

En particulier :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. On démontre cette proposition par une intégration par partie :
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$, alors

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt \\ &= \Big[-t^z e^{-t}\Big]_0^{+\infty} + z\underbrace{\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt}_{\Gamma(z)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}dt = 1,$$

et en utilisant (1.2), on obtient pour $z \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Proposition 1.1.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \tag{1.3}$$

avec

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve. On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Calculons maintenant (1.3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)....\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)....\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)....3\times 1\times\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

En multipliant et divisant par $(2n-2)(2n-4)...2$, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1)(2n-2)...3\times 2\times 1}{2^n(2n-2)(2n-4)...2}.\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^n 2^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}(n-1)!}.
\end{aligned}$$

En multipliant et divisant par $2n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}\times 2n(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent (1.3) est prouvée.

Théorème 1.1.1 *La fonction Gamma est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}(\ln t)^k dt.$$

1.1.2 Fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans certaine combinaison avec la fonction Gamma.

Définition 1.1.2 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexes z et w strictement positifs, notée $B(z,w)$. Elle est définie par l'intégrale suivante*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{1.4}$$

pour tout $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\mathfrak{Re}(z) > 0$ et $\mathfrak{Re}(w) > 0$.

Proposition 1.1.3 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0 \quad et \quad \mathfrak{Re}(w) > 0. \tag{1.5}$$

Preuve. Pour tout $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\mathfrak{Re}(z) > 0$ et $\mathfrak{Re}(w) > 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}x^{w-1}e^{-x}dtdx.$$

On effectue le changement de variable : $r = t + x$ et $t = rs$ donc $0 \leq r \leq +\infty$ et $0 \leq s \leq 1$. Ainsi $dr = dt + dx$, $dt = sdr + rds$, $dx = (1-s)dr - rds$ alors $dtdx = rdsdr$.
Il s'en suit

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-r}r(1-s)^{w-1}r^{w-1}s^{z-1}r^{z-1}dsdr \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z+w-1}dr \int_0^1 (1-s)^{w-1}s^{z-1}ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z+w-1}dr B(z,w) \\
&= \Gamma(z+w)B(z,w).
\end{aligned}$$

D'où

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Exemple 1.1.2 *Calculons* $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\pi.$$

Proposition 1.1.4 *Pour tout* $p,q\in\mathbb{C}$ *;* $\mathfrak{Re}(p)>0$ *et* $\mathfrak{Re}(q)>0$ *on a les propriétés suivantes*

1. $B(p,q)=B(q,p)$,

2. $B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$,

3. $B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,q)$.

Preuve.

1. On a pour tout $p,q\in\mathbb{C}$,

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

Par le changement de variable $u=1-t$ alors,

$$\begin{aligned} B(p,q) &= -\int_1^0(1-u)^{p-1}u^{q-1}du \\ &= \int_0^1(1-u)^{p-1}u^{q-1}du \\ &= B(q,p). \end{aligned}$$

2. $\forall\ p,q\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p)q\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{q}{p+q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{q}{p+q}B(p,q), \end{aligned}$$

on obtient

$$(p+q)B(p,q+1)=qB(p,q),$$

et ceci implique

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \frac{p}{q}B(p,q+1)+B(p,q+1) \\ &= \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{q\Gamma(p+q+1)}+B(p,q+1) \\ &= \frac{p\Gamma(p)q\Gamma(q)}{q\Gamma(p+q+1)}+B(p,q+1) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q+1)}+B(p,q+1). \end{aligned}$$

D'où,

$$B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1).$$

3. $\forall\ p,q\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q}{p}\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q}{p}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{p\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q}{p}B(p+1,q). \end{aligned}$$

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.3 *On appelle fonction de Mittag-Leffler la fonction définie par*

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad z\in\mathbb{C},\alpha,\beta>0. \tag{1.6}$$

Pour $\beta=1$

$$E_{\alpha,1}(z)=E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad z\in\mathbb{C},\alpha>0.$$

Et pour $\beta=1,\ \alpha=1$ *on a*

$$E_{1,1}(z)=e^z.$$

Cette dernière joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

Propriétés 1.1.1 *A partir de la relation (1.6), on peut trouver les relations suivantes*

1. $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$
2. $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}.$
3. $E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$
4. $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$
5. $E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$

1.2 Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

Dans cette section on va présenter les notions de la dérivée et l'intégrale fractionnaire. Il existe beaucoup d'approches différentes qui ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation d'ordre non entiers, par exemple on a : la dérivée de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et de Caputo, on s'intéresse seulement sur la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo.

1.2.1 Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Dans ce qui suit, on se restreindra à des valeurs réelles strictement positives pour l'argument z de la fonction Gamma pour lesquelles, on introduira la notion d'intégrale fractionnaire d'un ordre réel positif non nul d'une fonction réelle continue sur un intervalle borné.

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\mathfrak{Re}(\alpha) > 0)$ au sens de R-L généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale itéré n-fois,

$$\begin{aligned} I_a^n f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Cette formule donne l'intégrale d'ordre entier n, sur l'intervalle $[a, x]$. L'ordre non entier la généralise.

Définition 1.2.1 ***(Intégrale de Riemann-Liouville)*** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^0$ tel que , on appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathfrak{Re}(\alpha) > 0)$ au sens de R-L de f notée I_a^α, l'intégrale définie par la formule suivante*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \qquad t > a. \tag{1.7}$$

Où Γ *est la fonction Gamma et on note* I_0^α *par* I^α.

Remarques. On peut définir l'intégrale fractionnaire sur un intervalle non borné de la forme $[a, +\infty[$, tout en gardant les mêmes propriétés que dans le cas borné.

Exemple 1.2.1 *Soit la fonction* f *définie par*

$$f(t) = (t-a)^\beta,\ t \in [a,b] \text{ où } \beta > -1.$$

Par définition on a

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds. \tag{1.8}$$

En effectuant le changement de variable suivant

$$s = a + (t-a)\tau \quad \text{avec} \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \text{donc} \quad ds = (t-a)d\tau. \tag{1.9}$$

Donc, (1.8) devient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-(t-a)\tau)^{\alpha-1} (a+(t-a)\tau - a)^\beta (t-a) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(t-a)(1-\tau)]^{\alpha-1} [(t-a)\tau]^\beta (t-a) d\tau. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (t-a)^\beta \tau^\beta (t-a) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^\beta (1-\tau)^{\alpha-1} (t-a)^{\alpha+\beta} d\tau \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^\beta (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de (1.4) puis de la relation (1.5), on aura

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient l'intégrale fractionnaire d'ordre α *de la fonction* f, *telle que*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.10}$$

Cas particulier :
Si $\beta = 0$, *on a*

$$I_a^\alpha 1 = I_a^\alpha (t-a)^0 = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

d'où pour une constance C, on aura

$$I_a^\alpha C = C \times \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Si $\alpha = 1$, on aura

$$\begin{aligned} I_a^1 (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(t-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}(t-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+1}}{\beta+1}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *Soient α et β des nombres complexes où $\mathfrak{Re}(\alpha) >$ et $\mathfrak{Re}(\beta) > 0$, et $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors*

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f] = I_a^{\alpha+\beta} f$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on a par définition

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} [I_a^\beta f](t)(s) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-r)^{\beta-1} f(r) dr \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(r) \underbrace{\int_r^t (t-s)^{\alpha-1} (s-r)^{\beta-1} ds}_{\mathcal{I}} \, dr. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable suivant

$$s = r + \tau(t-r) \Rightarrow ds = (t-r)d\tau, \text{ avec } (0 \leq \tau \leq 1)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 (t - r - (t-r)\tau)^{\alpha-1} (r + (t-r)\tau - r)^{\beta-1} (t-r) d\tau \\ &= \int_0^1 [(t-r)(1-\tau)]^{\alpha-1} [(t-r)\tau]^{\beta-1} (t-r) d\tau \\ &= \int_0^1 (t-r)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (t-r)^{\beta-1} \tau^{\beta-1} (t-r) d\tau \\ &= (t-r)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de (1.4) puis de la relation (1.5), on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= (t-r)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) \\ &= (t-r)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}[I_a^{\beta}f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(r)\left[(t-r)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]dr \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-r)^{\alpha+\beta-1}f(r)dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-r)^{\alpha+\beta-1}f(r)dr \\ &= I_a^{\alpha+\beta}f(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 1.2.2 *Soient* α *avec* $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ *et* $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

$$\frac{d}{dt}(I_a^{\alpha}f) = I_a^{\alpha-1}f, \text{ où } \alpha > 0.$$

Preuve. En utilisant les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre ainsi que la relation $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, on constatera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I_a^{\alpha}f)(t) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{d}{dt}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}f(s)ds \\ &= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-2}f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-2}f(s)ds \\ &= I_a^{\alpha-1}f(t). \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 ***(Dérivée de Riemann-Liouville)*** *Soient* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}([a,b])$. *On appelle "dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville" d'ordre* α *d'une fonction* $f \in \mathcal{C}([a,b])$, *la fonction définie par*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}f(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) \circ (I_a^{n-\alpha}f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds, \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ *et* $t > a$. *En particulier, pour* $\alpha \in \mathbb{N}$ *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique.*

Notation 1.2.1 *Pour $n \in \mathbb{N}$, le symbole D_a^n désignera l'opérateur de dérivation d'ordre entier n, c'est à dire*

$$D_a^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n = \frac{d^n}{dt^n},$$

avec la convention

$$D_a^0 f(t) = f(t).$$

Exemple 1.2.2 *Soit la fonction f définie par*

$$f(t) = (t-a)^\beta,\ \forall t \in [a,b] \text{ où } \beta \in \mathbb{R}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in]n-1, n[$, nous avons

$$D_a^\alpha (t-a)^\beta = D^n[I_a^{n-\alpha}(t-a)^\beta].$$

D'après (1.10), on obtient

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (t-a)^\beta &= D^n\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta}\right]. \end{aligned} \tag{1.11}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta} &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(n-\alpha+\beta-n+1)(t-a)^{n-\alpha+\beta-n} \\ &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Par substitution de (1.12) dans (1.11), on aura

$$D_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left[\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\right].$$

Alors, on obtient la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f, telle que

$$D_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Cas particulier :
Si $\alpha = 1$, on aura

$$\begin{aligned} D_a^1(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} \\ &= B(t-a)^{\beta-1} \\ &= \frac{d}{dt}(t-a)^\beta. \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, on aura

$$D_a^\alpha(1) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Ainsi, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante C n'est pas nulle, mais :

$$D_a^1(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Lemme 1.2.1 *Si $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors on a l'égalité*

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Preuve. En se basant sur la propriété classique :

$$(D^n I_a^n f)(t) = f(t).$$

Et en utilisant la définition 1.2.2 et la proposition 1.2.1, on déduit

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) &= D^n[I_a^{n-\alpha}(I_a^\alpha f(t))] \\ &= D^n[I_a^n f(t)] \\ &= f(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Lemme 1.2.2 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que*

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

Alors

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(t-a)^{j+\alpha-n}, \quad (n = [\alpha]+1).$$

Où les A_j, j=0,1,...,n-1, sont des constantes réelles.

Preuve. Comme $(D_a^\alpha f)(t) = 0$, alors

$$(D^n I_a^{n-\alpha} f)(t) = 0 \Rightarrow (I_a^{n-\alpha} f)(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j (t-a)^j$$

par composition avec l'opérateur I_a^α on obtient

$$I_a^n f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j I_a^\alpha (t-a)^j = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (t-a)^{j+\alpha},$$

par composition avec D_a^n, on obtient

$$D_a^n I_a^n f(t) = f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{j+\alpha},$$

or,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{j+\alpha} = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (t-a)^{j+\alpha-n},$$

donc,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (t-a)^{j+\alpha-n}.$$

Proposition 1.2.3 *Si $n > \mathfrak{Re}(\alpha) > \mathfrak{Re}(\beta) > n-1 > 0$, alors pour $f(t) \in \mathcal{C}([a,b])$, on a la relation*

$$(D_a^\beta I_a^\alpha f)(t) = I^{\alpha-\beta} f(t).$$

Preuve. En utilisant la définition 1.2.2 et la proposition 1.2.1, on obtient

$$\begin{aligned} (D_a^\beta I_a^\alpha f)(t) &= D^n[I_a^{n-\beta}(I_a^\alpha f(t))] \\ &= D^n[I_a^{n+\alpha-\beta} f(t)] \\ &= D^n[I_a^n(I_a^{\alpha-\beta} f(t))] \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

Car $D^n(I_a^n) = I$ (opérateur identité).
D'où le résultat.

Proposition 1.2.4 ***(Linéarité)*** *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$ dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ existent avec*
$n-1 < \mathfrak{Re}(\alpha) < n$. Alors pour $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$, on a

$$D_a^\alpha(\lambda f + \lambda' g)(t) = \lambda D_a^\alpha f(t) + \lambda' D_a^\alpha g(t),\ \forall t \in [a,b].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} D_a^\alpha(\lambda f+\lambda' g)(t) &= D^n\Big(I_a^{n-\alpha}(\lambda f+\lambda' g)(t)\Big)\\ &= D^n(\lambda I_a^{n-\alpha}f(t)+\lambda' I_a^{n-\alpha}g(t))\\ &= \lambda D^n(I_a^{n-\alpha}f(t))+\lambda' D^n(I_a^{n-\alpha}g(t))\\ &= \lambda D_a^\alpha f(t)+\lambda' D_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Proposition 1.2.5 *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction admettant une intégrale fractionnaire d'ordre α. Alors*

$$(D_a^\alpha\circ I_a^\alpha)f(t)=f(t).$$

Cependant, on remarque que ces opérateurs ne commutent pas entre eux

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(t)\neq D_a^\alpha I_a^\alpha f(t).$$

En effet,

$$(I_a^\alpha\circ D_a^\alpha)f(t)=f(t)-\sum_{j=1}^{n}\frac{(I_a^{n-\alpha}f)(a)(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)},\quad \forall t\in[a,b].$$

avec $\alpha>0$ et $n=[\alpha]+1$.

Remarque 1.2.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non-commutative, i.e*

$$D_a^\alpha\circ D_a^\beta=D_a^{\alpha+\beta}\neq D_a^\beta\circ D_a^\alpha.$$

Exemple 1.2.3 *On considère la fonction f définie par*

$$\begin{aligned} f:[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longrightarrow f(t)=1 \end{aligned}$$

On calcule $D_0^{\frac12}f$,$D_0^{\frac12}D_0^{\frac12}f$,$D_0^{\frac12+\frac12}f$.

On a $D_0^{\frac12}1=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac12}$ ceci nous donne

$$\begin{aligned} D_0^{\frac12}D_0^{\frac12}1 &= \frac{1}{\Gamma(\frac12)}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x^{-\frac12}}{(t-x)^{\frac12}}dx\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t x^{-\frac12}(t-x)^{\frac{-1}{2}}dx, \end{aligned}$$

on sait que

$$\begin{aligned} \int_0^t x^{-\frac12}(t-x)^{-\frac12}dx &= \int_0^1 r^{-\frac12}(1-r)^{-\frac12}dr\\ &= \int_0^1 r^{\frac12-1}(1-r)^{\frac12-1}dr\\ &= B(\frac12,\frac12). \end{aligned}$$

Donc $D_0^{\frac12}D_0^{\frac12}1=0=D_0^{\frac12+\frac12}1$.

Exemple 1.2.4 *Soit la fonction f définie par*

$$\begin{array}{rcl} f:[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t)=t^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

On calcule $D_0^{\frac{1}{2}}f$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ et $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f$.

De la même manière que l'exemple précédent, on trouve que $(D_0^{\frac{1}{2}}f)(t)=0$, de plus on a

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f)(t)=(D^1 f)(t)=\frac{d}{dt}t^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

D'où $(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f)(t)=0\neq -\dfrac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$

Exemple 1.2.5 *soient $\alpha_1=\dfrac{1}{2}$ et $\alpha_2=\frac{3}{2}$, la fonction f définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f:[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t)=t^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

On calcule $D_0^{\frac{1}{2}}f$, $D_0^{\frac{3}{2}}f$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}f$, $D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ et $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}f$.

On a

$$D_0^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dt}\int_0^t x^{\frac{1}{2}}(t-x)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

et alors

$$\begin{aligned} \int_0^t x^{\frac{1}{2}}(t-x)^{-\frac{1}{2}}dx &= \int_0^1 r^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dr \\ &= t\int_0^1 r^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}dr \\ &= t\int_0^1 r^{\frac{3}{2}-1}(1-r)^{\frac{1}{2}-1}dr \\ &= tB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$D_0^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}})=\frac{B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$D_0^{\frac{3}{2}}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dt^2}\left[tB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=0.$$

D'où

$$(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}f)(t)=0. \tag{1.13}$$

$$(D_0^{\frac{3}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f)(t) = D_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{1.14}$$

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} f)(t) = (D^2 f)(t) = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{1.15}$$

Alors d'après (1.13), (1.14), (1.15) on a

$$D_0^{\alpha_1} D_0^{\alpha_2} f \neq D_0^{\alpha_2} D_0^{\alpha_1} f \neq D_0^{\alpha_1+\alpha_2} f.$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

La notion de dérivation fractionnaire au sens de R-L a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire. Cependant, les demandes de la technologie moderne exigent une certaine révision de l'approche mathématique pure bien établie, car les problèmes appliqués nécessitent l'utilisation des conditions initiales $y(a)$, $y'(a)$, etc. Ces besoins ont bientôt conduit à la naissance d'une définition alternative des dérivées fractionnaires qui a été introduit par M. Caputo à la fin des années soixante.

Définition 1.2.3 *Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Caputo de f notée ${}^cD_a^\alpha$, la fonction définie par*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(t) &= I_a^{n-\alpha}[D^n f(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \qquad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, t > a). \end{aligned}$$

On note ${}^cD_0^\alpha$ par ${}^cD^\alpha$.

Exemple 1.2.6 *On considère la fonction f définie par*

$$f(t) = (t-a)^\beta, \ t \in [a,b] \ \text{où} \ \beta \geq 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in [n-1, n[$, nous avons

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha (t-a)^\beta &= I_a^{n-\alpha}[D^n (t-a)^\beta] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} [(s-a)^\beta]^{(n)} ds. \end{aligned}$$

On sait que

$$[(s-a)^\beta]^{(n)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (s-a)^{\beta-n},$$

et donc

$${}^cD_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \underbrace{\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\beta-n} ds.}_{\mathcal{I}} \tag{1.16}$$

En effectuant le changement de variable suivant

$$s = a + (t-a)\tau \text{ avec } 0 \le \tau \le 1, \text{ donc } ds = (t-a)d\tau,$$

dans l'intégrale $\mathcal{I}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^1 (t-a-(t-a)\tau)^{n-\alpha-1}(a+(t-a)\tau-a)^{\beta-n}(t-a)d\tau \\
&= \int_0^1 [(t-a)-(1-\tau)]^{n-\alpha-1}[(t-a)\tau]^{\beta-n}(t-a)d\tau \\
&= (t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 \tau^{(\beta-n+1)-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau.
\end{aligned}$$

En tenant compte de (1.4) puis de la relation (1.5), on aura

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= (t-a)^{\beta-\alpha}B(\beta-n+1, n-\alpha) \\
&= (t-a)^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

En retournant à la formule (1.16), on obtient alors

$${}^cD_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\left[\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\right].$$

Ainsi, on obtient la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f, telle que

$${}^cD_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Remarque 1.2.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t) = C$ est nulle, autrement dit : ${}^cD_a^\alpha C = 0$.*

Proposition 1.2.6 ***(Linéarité)*** *Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient deux fonctions f et g pour lesquelles les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Caputo existent. Alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a*

$${}^cD_a^\alpha(\lambda f + g)(t) = \lambda {}^cD_a^\alpha f(t) + {}^c D_a^\alpha g(t).$$

1.2.3 Relation entre la dérivée de Caputo et la dérivée de Riemann-Liouville

Proposition 1.2.7 *Si $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, la relation entre la dérivée de R-L et celle de Caputo est donnée par*

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^\alpha f(t) &= D_a^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right] \\
&= D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

avec $n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, t > a$.
En particulier, lorsque $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]0,1[$, *on a*

$$^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

A partir de (1.17), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α *de* f *au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo, si* f *est plate jusqu'à l'ordre* n *en* a.
Plus précisément, on a

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0,1,...,n-1). \quad Alors, \quad ^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t).$$

Lemme 1.2.3 *Soient* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, *alors*

$$(^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Preuve. Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, la relation (1.17) permet d'obtenir le résultat suivant

$$(^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = (D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^\alpha f)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

Puis, d'après le lemme 1.2.1, on a

$$(^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^\alpha f)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

Et comme $k \leq n-1 < \mathfrak{Re}(\alpha)$, pour $k = 0,1,...,-1$, alors les dérivées

$$(I_a^\alpha f)^{(k)}(a) = 0.$$

Ce qui donne

$$(^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Lemme 1.2.4 *Pour* $\alpha > 0$, *l'équation différentielle :*

$$^cD_a^\alpha f(t) = 0 \qquad t \in [a,b],$$

admet la solution générale :

$$f(t) = A_0 + A_1(t-a) + A_2(t-a)^2 + ... + A_n(t-a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(t-a)^k, \quad (n = [\alpha]+1).$$

Avec $A_k \in \mathbb{R}$, $(k = 0,1,2,...,n-1)$ *des constantes réelles.*

Preuve. Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$, on a l'équation différentielle d'ordre fractionnaire,

$$^cD_a^\alpha f(t) = 0.$$

D'après la définition 1.2.3, on a

$$I^{n-\alpha}[D^n f(t)] = 0.$$

On applique l'opérateur $^cD_a^{n-\alpha}$ à cette formule, on aura

$$^cD_a^{n-\alpha} I_a^{n-\alpha}[D^n f(t)] = 0.$$

D'après le lemme 1.2.3, il résulte que

$$^cD_a^{n-\alpha} I_a^{n-\alpha}[D^n f(t)] = D^n f(t) = 0.$$

Alors, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k (t-a)^k\right) = 0.$$

Ce qui montre

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (t-a)^k.$$

Chapitre 2

Transformée de Laplace

Dans ce chapitre nous représentons la définition de la transformée de Laplace et ses propriétés en indiquant la transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles. Ensuite, on parle sur la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo, pour plus de détails voir ([17, 12, 5, 7, 9, 10, 13]).

2.1 Définitions et propriétés

Dans cette section, nous donnons les définitions et les propriétés de la transformée de Laplace avec quelques exemples.

Définition 2.1.1 ***(Transformée de Laplace)*** *La transformée de Laplace d'une fonction réelle f localement intégrable sur $[0, +\infty[$ notée $F(p) = \mathcal{L}\Big[f(t)\Big](p)$, est donnée par*

$$F(p) = \mathcal{L}\Big[f(t)\Big](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Où p, appelé variable de Laplace ($\mathfrak{Re}(p) \geq 0$) et $f(t)$ est appelée l'originale de $F(p)$.

On peut définir une transformation inverse de Laplace, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que

$$F(p) = \mathcal{L}\Big[f(t)\Big](p) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[F(p)\Big].$$

Cette transformation inverse est définie comme suit.

Définition 2.1.2 ***(Transformée inverse de Laplace)*** *La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$, notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[F(p)\Big]$ est donnée par*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[F(p)\Big] = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}dp. \tag{2.2}$$

est tel que l'intégrale existe ($\mathfrak{Re}(p) \geq 0$).

Définition 2.1.3 ***(L'intégrale de convolution)*** *La convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est définie comme*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{2.3}$$

Exemple 2.1.1 *Soient les deux fonctions suivantes : $f(t) = \sin(t)$ et $g(t) = \cos(t)$.*
Calculons la convolution de f et g,

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\cos(\tau)d\tau,$$

on a

$$\sin(t-\tau) = \sin(t)cos(\tau) - \sin(\tau)cos(t),$$

donc

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_0^t \Big(\sin(t)\cos(\tau) - \sin(\tau)cos(t)\Big)cos(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \Big(\sin(t)\cos^2(\tau) - \sin(\tau)\cos(\tau)\cos(t)\Big)d\tau \\
&= \int_0^t \sin(t)\cos^2(\tau)d\tau - \int_0^t \cos(t)\sin(\tau)\cos(\tau)d\tau \\
&= \sin(t)\int_0^t \cos^2(\tau)d\tau - \cos(t)\int_0^t \sin(\tau)\cos(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable suivant : $u = \sin(\tau) \Rightarrow du = \cos(\tau)d\tau$ et on sait que $\cos^2(\tau) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2\tau)\Big)$ alors

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \frac{1}{2}\sin(t)\int_0^t \Big(1+\cos(2\tau)\Big)d\tau - \cos(t)\int_0^t udu \\
&= \frac{1}{2}\sin(t)\Bigg[\tau + \frac{1}{2}\sin(2\tau)\Bigg]_0^t - \cos(t)\Bigg[\frac{1}{2}\sin^2(\tau)\Bigg]_0^t \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t) + \frac{1}{4}\sin(t)\sin(2t) - \cos(t)\Bigg(\frac{1}{2}\sin^2(t)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t) + \frac{1}{4}\sin(t)\sin(2t) - \frac{1}{2}\cos(t)\sin^2(t).
\end{aligned}$$

On sait que

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t),$$

alors

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \frac{1}{2}t\sin(t) + \frac{1}{4}\Big(2\sin^2(t)\cos(t)\Big) - \frac{1}{2}\cos(t)\sin^2(t) \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t) + \frac{1}{2}\sin^2(t)\cos(t) - \frac{1}{2}\sin^2(t)\cos(t) \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t).
\end{aligned}$$

Si $f(t) = 0$ et $g(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F(p)$ et $G(p)$ existent, alors on donne le théorème suivant

Théorème 2.1.1 *La transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est donnée par*

$$\mathcal{L}\Big[f(t) * g(t)\Big](p) = F(p)G(p). \tag{2.4}$$

2.2 Propriétés

Une fois établie la définition de la transformée de Laplace, on étudiera les propriétés fondamentales qui permettent de relier les opérations de dérivation par rapport au temps t, à la multiplication par la variable p.

2.2.1 Linéarité

De par la linéarité de l'intégration, la transformée de Laplace est linéaire, autrement dit, pour tout couple de fonctions telles que leurs transformées de Laplace convergent, et pour tout couple de constantes α et β, on vérifie

$$\mathcal{L}\Big[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\Big](p) = \alpha\mathcal{L}\Big[f_1(t)\Big](p) + \beta\mathcal{L}\Big[f_2(t)\Big](p).$$

Il en est évidemment de même pour la transformée inverse. Pour tout couple de constantes α et β, on a

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)] = \alpha\mathcal{L}[F_1(p)] + \beta\mathcal{L}[F_2(p)].$$

2.2.2 Translation dans l'espace de départ

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ avec retard de τ est donnée par

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-p\tau}F(p).$$

En particulier :

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[e^{-\tau p}F(p)\Big] = f(t-\tau).$$

Preuve. Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = t-\tau$, $du = dt$, dans le calcul de la transformée de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t-\tau)] &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+\tau)}du \\
&= e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du \\
&= e^{-p\tau}F(p).
\end{aligned}$$

2.2.3 Transformée de Laplace pour homothétie

Pour un réel positif k, on a

$$\mathcal{L}\Big[f(kt)\Big](p) = \frac{1}{k}F\Big(\frac{p}{k}\Big).$$

Preuve. Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = kt \Rightarrow du = kdt$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[f(kt)\Big](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(kt)dt \\ &= \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{k}u} f(u)du \\ &= \frac{1}{k}F\Big(\frac{p}{k}\Big).\end{aligned}$$

2.2.4 Transformée de Laplace d'une fonction modulée

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, modulée par e^{-at} est donnée par

$$\mathcal{L}\Big[e^{-at}f(t)\Big](p) = F(p+a).$$

Le terme de modulation étant constant par rapport à la variable d'intégration, on peut le déplacer dans l'intégrale et faire apparaître la transformée de Laplace en $(p+a)$ au lieu de p.

2.2.5 Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

Si on note $f(0)$ la valeur initiale de la fonction $f(t)$, la transformée de Laplace de la dérivée $\frac{df(t)}{dt}$ est donnée par la relation :

$$\mathcal{L}\Big[\frac{df(t)}{dt}\Big](p) = pF(p) - f(0).$$

Preuve. Cette relation se prouve en intégrant par parties la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ et en se souvenant que $\mathfrak{Re}(p) > 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[\frac{df(t)}{dt}\Big] &= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{df(t)}{dt}\Big)e^{-pt}dt \\ &= \Big[f(t)e^{-pt}\Big]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= pF(p) - f(0).\end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n est donnée par

$$\mathcal{L}\Big[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big](p) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - \ldots\frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}}.$$

2.2.6 Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction $f(t)$ est donnée par

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t f(u)du\Big](p) = \frac{1}{p}F(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation, notons $\tilde{f}(t)$, la primitive de $f(t)$ nulle en l'origine (i.e. $\frac{d\tilde{f}(t)}{dt} = f(t)$, et $\tilde{f}(0) = 0$), en intégrant par parties il s'ensuit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[\int_0^t f(u)du\Big](p) &= \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)e^{-pt}dt \\ &= \Big[-\tilde{f}(t)\frac{e^{-pt}}{p}\Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= \frac{1}{p}F(p).\end{aligned}$$

2.2.7 Dérivation de la transformée de Laplace

En dérivant la transformée de Laplace dans l'intégrale, on obtient

$$\frac{d\mathcal{L}[f(t)]}{dp} = \mathcal{L}[-tf(t)].$$

Plus généralement, en dérivant n fois, on a

$$\frac{d^n\mathcal{L}[f(t)]}{dp^n} = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)].$$

2.2.8 Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction en utilisant la relation connue sous l'appellation de théorème de la valeur initiale.

Théorème 2.2.1 ***(Théorème de la valeur initiale)*** *La valeur en $t = 0$ de $f(t)$ est donnée par*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to +\infty} pF(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to +\infty$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$. On a

$$\lim_{p\to +\infty} \mathcal{L}\Big[\frac{df(t)}{dt}\Big] = \lim_{p\to +\infty} \Big(pF(p) - f(0)\Big),$$

et

$$\lim_{p\to +\infty} \mathcal{L}\Big[\frac{df(t)}{dt}\Big] = \lim_{p\to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt}dt = 0,$$

d'où

$$\lim_{p\to +\infty} \Big(pF(p) - f(0)\Big) = 0 \Rightarrow \lim_{p\to +\infty} pF(p) = f(0) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

2.2.9 Théorème de la valeur finale

La valeur finale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction en utilisant la relation connue sous l'appellation de théorème de la valeur finale.

Théorème 2.2.2 ***(Théorème de la valeur finale)****La limite pour $t \to +\infty$ de la fonction $f(t)$ est donnée par*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to 0$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$.

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}dt\\ &= \Big[f(t)\Big]_0^{+\infty}\\ &= \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0).\end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \lim_{p\to 0}\Big(pF(p) - f(0)\Big)\\ &= \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0)\\ &= \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0),\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Exemple 2.2.1 *En utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales, calculer $s(t \to 0^+)$ et $s(t \to \infty)$ pour les fonctions suivantes :*

1. $S(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p}$

2. $S(p) = \dfrac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p}$

1. $S(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p}$
   - Calcul de $s(t \to 0^+)$:

$$\lim_{t\to 0^+} s(t) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \lim_{p\to+\infty} p\frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 1.$$

   - Calcul de $s(t \to +\infty)$:

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0^+} pS(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 2.$$

2. $S(p) = \dfrac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p}$
   - Calcul de $s(t \to 0^+)$:

$$\lim_{t\to 0^+} s(t) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \lim_{p\to+\infty} p\frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = +\infty.$$

   - Calcul de $s(t \to +\infty)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} s(t) &= \lim_{p\to 0} pS(p) \\ &= \lim_{p\to 0} p\frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = 2. \end{aligned}$$

2.3 Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

2.3.1 Transformée de Laplace d'une constante

La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = c$ avec c est une constante, se calcule directement par

$$\mathcal{L}\Big[c\Big](p) = \int_0^{+\infty} ce^{-pt}dt = c\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{c}{p}.$$

2.3.2 Transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée $\Gamma(t)$, est définie par

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, si & t < 0, \\ \\ 1, si & t > 0. \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big[\Gamma(t)\Big](p) &= \int_0^{+\infty} \Gamma(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de e^{-pt} est nulle. Finalement ;

$$\mathcal{L}\Big[\Gamma(t)\Big](p) = \frac{1}{p}, \quad \forall p > 0.$$

2.3.3 Transformée de Laplace de la fonction *sinus*

La fonction *sinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Donc la transformée de Laplace du *sinus* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[\sin(\omega t)\Big](p) &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} (e^{i\omega t-pt} - e^{-i\omega t-pt})dt \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i\omega t-pt}}{i\omega - p} + \frac{e^{-i\omega t-pt}}{i\omega + p}\right]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de e^{-pt} est nulle. Il vient donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[\sin(\omega t)\Big](p) &= \frac{-1}{2i}\left[\frac{1}{i\omega - p} + \frac{1}{i\omega + p}\right] \\ &= \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}.\end{aligned}$$

2.3.4 Transformée de Laplace de la fonction *cosinus*

Comme pour la fonction *sinus*, la fonction *cosinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Donc la transformée de Laplace du *cosinus* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[\cos(\omega t)\Big](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}\right](p) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\omega t-pt} + e^{-i\omega t-pt}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\omega t-pt}}{i\omega - p} - \frac{e^{-i\omega t-pt}}{i\omega + p}\right]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de e^{-pt} est nulle. On obtient donc,

$$\mathcal{L}\Big[\cos(\omega t)\Big](p) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{i\omega - p} + \frac{1}{i\omega + p}\right] = \frac{p}{w^2 + p^2}.$$

On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction *sinus* donne :

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega\cos(\omega t).$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il s'ensuit alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[\cos(\omega t)\Big](p) &= \frac{1}{\omega}\Big(p\mathcal{L}[\sin(\omega t)] - \sin(0)\Big)\\ &= \frac{p}{\omega}\frac{\omega}{\omega^2+p^2} = \frac{p}{\omega^2+p^2}.\end{aligned}$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

2.3.5 Transformée de Laplace de l'exponentielle

La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{-at}$ se calcule directement par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[e^{-at}\Big](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt\\ &= \left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a+p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}, \qquad \forall p > \mathfrak{Re}(a).\end{aligned}$$

2.3.6 Transformée de Laplace de *sinus hyperbolique*

la fonction *sinus hyperbolique* peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sinh(at) = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}.$$

Donc la transformée de Laplace du *sinus hyperbolique* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[\sinh(at)\Big](p) &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}e^{-pt}dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}]\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+a}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{p+a-(p-a)}{p^2-a^2}\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{2a}{p^2-a^2} = \frac{a}{p^2-a^2}.\end{aligned}$$

2.3.7 Transformée de Laplace de *cosinus hyperbolique*

Comme pour la fonction *sinus hyperbolique*, la fonction *cosinus hyperbolique* peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\cosh(at) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}.$$

Donc la transformée de Laplace du *cosinus hyperbolique* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big[\cosh(at)\Big](p) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} e^{-pt} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{p-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+a} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{p+a+p-a}{p^2-a^2}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\frac{2p}{p^2-a^2} = \frac{p}{p^2-a^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *Calculer les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :*

1. $f_1(t) = t^n$, $n > 1$,

2. $f_2(t) = e^{2t}t^3$,

3. $f_3(t) = 4 - e^{-4t} + 6\sin(t)$.

1. pour $n > 1$, on applique la transformée de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big[f_1\Big](p) = \mathcal{L}\Big[t^n\Big] &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt \\
&= \frac{1}{p}\Bigg[t^n e^{-pt}\Bigg]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt \\
&= \frac{n}{p}\mathcal{L}[t^{n-1}] \\
&= \frac{n}{p}\frac{(n-1)}{p}\mathcal{L}[t^{n-2}] \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{p^3}\mathcal{L}[t^{n-3}] \\
&\vdots \\
&= \frac{n!}{p^n}\mathcal{L}[1] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \forall p > 0.
\end{aligned}$$

2. En appliquant la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}\Big[f_2(t)\Big](p) = \mathcal{L}[e^{2t}t^3].$$

On sait que

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{p^4},$$

donc, $\mathcal{L}[f_2(t)]$ est la translation de la fonction $\mathcal{L}[t^3]$, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{3!}{(p-2)^4} = \frac{6}{(p-2)^4}.$$

3. En appliquant la transformée de Laplace sur cette fonction, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big[f_3\Big](p)(t) &= \mathcal{L}\Big[4 - e^{-4t} + 6\sin(t)\Big](p) \\
&= \mathcal{L}[4] - \mathcal{L}[e^{-4t}] + 6\mathcal{L}[\sin(t)] \\
&= \frac{4}{p} - \frac{1}{p+4} + 6\frac{1}{p^2+1} \\
&= \frac{4}{p} - \frac{1}{p+4} + \frac{6}{p^2+1}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.2 *Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :*

1. $F(p) = \dfrac{2p+1}{p^2+5p+6}$,

2. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p^2(p-1)}$.

1. Par fraction simple on a

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{2p+1}{(p+3)(p+2)} \\
&= \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+2} \\
&= \frac{5}{p+3} - \frac{3}{p+2},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{p+3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{p+2}\right] \\
&= 5e^{-3t} - 3e^{-2t}.
\end{aligned}$$

2. On décompose la fonction F en éléments simples

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)} = e^{-3p}\left[\frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{p-1}\right] \\
&= e^{-3p}\left[\frac{-p-1}{p^2} + \frac{1}{p-1}\right] \\
&= e^{-3p}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right],
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)}\right] = u(t-3)[e^{t-3} - 1 - (t-3)] \\ &= u(t-3)[e^{t-3} - t + 2]. \end{aligned}$$

Dans les sections qui suivent sur les transformée de Laplace des dérivées fractionnaires, nous supposerons que la borne inférieure $a = 0$.

2.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $s > 0$ de R-L définie par :

$$ {}_aD_t^{-s}f(t) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_a^t (t-\tau)^{s-1}f(\tau)d\tau, \tag{2.5}$$

laquelle peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{s-1}$ et $f(t)$ comme suit :

$$ {}_0D_t^{-s}f(t) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^t (t-\tau)^{s-1}f(\tau)d\tau = t^{s-1} \star f(t). \tag{2.6}$$

La transformée de Laplace de la fonction t^{s-1} est

$$G(p) = \mathcal{L}\Big[t^{s-1}\Big](p) = \Gamma(s)p^{-s}. \tag{2.7}$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution (2.4), nous obtenons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L :

$$\mathcal{L}\Big[{}_0D_t^{-s}f(t)\Big](p) = p^{-s}F(p). \tag{2.8}$$

Nous nous intéressons maintenant au calcul de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L, qui pour cela nous l'écrivons sous la forme

$$ {}_0D_t^{s}f(t) = g^{(n)}(t),$$

avec

$$g(t) = {}_0 D_t^{-(n-s)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-s)}\int_0^t (t-\tau)^{n-s-1}f(\tau)d\tau. \tag{2.9}$$

L'utilisation de la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier donne :

$$\mathcal{L}\Big[{}_0D_t^{s}f(t)\Big](p) = p^nG(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k g^{(n-k-1)}(0). \tag{2.10}$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t)$ est déterminée par (2.8) :

$$G(p) = p^{-(n-s)}F(p). \tag{2.11}$$

En résumé, de la définition de la dérivée fractionnaire de R-L, il vient :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}{}_0D_t^{-(n-s)}f(t) = {}_0D_t^{s-k-1}f(t). \tag{2.12}$$

En substituant (2.11) et (2.12) dans (2.10), nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L d'ordre $s > 0$:

$$\mathcal{L}\Big[{}_0D_t^s f(t)\Big](p) = p^s F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [{}_0D_t^{s-k-1}f(t)]_{t=0}. \tag{2.13}$$

2.5 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

Afin d'établir la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, écrivons la dérivée de Caputo sous la forme :

$${}^cD_t^s f(t) = {}_0D_t^{-(n-s)}g(t), \qquad (n-1 < s \leq n), \tag{2.14}$$

avec

$$g(t) = f^{(n)}(t). \tag{2.15}$$

En utilisant la formule (2.8) de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L, on aura

$$\mathcal{L}\Big[{}_0^cD_t^s f(t)\Big](p) = p^{-(n-s)}G(p), \tag{2.16}$$

où, grâce à la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n,

$$G(p) = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0) = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0). \tag{2.17}$$

En introduisant (2.17) dans (2.16), on arrive à la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{L}[{}_0^cD_t^s f(t)](p) = p^s F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{s-k-1} f^{(k)}(0) \quad (n-1 < s \leq n). \tag{2.18}$$

Tableau de transformation de Laplace des dérivées fractionnaires

$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$
$\frac{1}{p^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(p+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{at}$
$\frac{1}{p^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{p^\alpha}{p(p^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{p(p^\alpha+a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{p^\alpha(p-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha - a}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

Dans le tableau a et b sont des constantes réelles distinctes.

Chapitre 3

Résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace

Dans ce chapitre, nous commençons par la résolution des équations différentielles ordinaires par la transformée de Laplace. Puis, l'étude des équations différentielles fractionnaires du type Riemann-Liouville et Caputo, pour plus de détails voir ([13, 10]).

3.1 Résolution d'EDO linéaires

Les EDO linéaires du 1er et 2ème ordre à coefficients constants se résolvent facilement à l'aide d'une méthodologie claire et systématique. Par contre ces techniques ne s'appliquent pas aux EDO d'ordre plus élevée. Nous présentons dans ce paragraphe tout l'interêt de la transformée de Laplace : résoudre une EDO linéaire d'ordre n.

3.1.1 Résolution des EDO linéaire d'ordre 1 très simple

Exemple 3.1.1 *Considérons l'EDO linéaire d'ordre 1 non homogène i.e. le cas le plus simple qui soit.*
On cherche la solution $y(t)$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = 1$$

avec la condition initiale suivante :

$$y(0) = 0.$$

Prenons la transformée de Laplace de chaque membre de l'égalité. Le terme de droite est une constante, dont la transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L}\Big[1\Big](p) = \int_0^{+\infty} 1e^{-pt}dt = 1\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right] = \frac{1}{p}.$$

Notons $Y(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $y(t)$. Par linéarité la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\Big[y'(t)+y(t)\Big](p) & = & \mathcal{L}\Big[y'(t)\Big]+\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] \\ & = & p\mathcal{L}\Big[y(t)\Big]-y(0)+\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] \\ & = & pY(p)-y(0)+Y(p) \\ & = & (p+1)Y(p)+0=(p+1)Y(p). \end{array}$$

Donc l'expression de $Y(p)$ en fonction de p est donnée par :

$$(p+1)Y(p)=\frac{1}{p} \Leftrightarrow Y(p)=\frac{1}{p(p+1)},$$

une décomposition en éléments simples de fraction rationnelle en p donne :

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1},$$

reste à déterminer la transformée inverse de cette expression, par linéarité on sait que :

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right],$$

on a déjà établi que la transformée de Laplace de 1 est $\frac{1}{p}$ et de e^{-at} est $\frac{1}{p+a}$, la solution est finalement donnée par,

$$y(t)=1-e^{-t}.$$

Exemple 3.1.2 *Maintenant, on cherche la solution $y(t)$ de l'équation différentielle :*

$$y'(t)-y(t)=3\sin(t)$$

avec la condition initiale suivante :

$$y(0)=0.$$

La transformée de Laplace du 2ème membre est :

$$\mathcal{L}\Big[3\sin(t)\Big](p)=3\mathcal{L}\Big[\sin(t)\Big]=3\times\frac{1}{1+p^2}=\frac{3}{1+p^2}.$$

Par linéarité, la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\Big[y'(t)-y(t)\Big](p) & = & \mathcal{L}\Big[y'(t)\Big]-\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] \\ & = & p\mathcal{L}\Big[y(t)\Big]-y(0)+\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] \\ & = & pY(p)-y(0)-Y(p) \\ & = & (p-1)Y(p). \end{array}$$

Donc

$$(p-1)Y(p) = \frac{3}{1+p^2} \Leftrightarrow Y(p) = \frac{3}{(1+p^2)(p-1)},$$

après décomposition en éléments simples de fraction rationnelle en p, on obtient :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{\frac{3}{2}}{p-1} - \frac{\frac{3}{2}p + \frac{3}{2}}{p^2+1} \\ Y(p) &= \frac{3}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{3}{2}\frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{p^2+1}. \end{aligned}$$

On cherche la transformée inverse de cette expression :

$$y(t) = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right] - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right] - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right].$$

On a déjà établi que la transformée de Laplace de e^t est $\dfrac{1}{p-1}$ et de $\cos(t)$ est $\dfrac{p}{p^2+1}$ et de $\sin(t)$ est $\dfrac{1}{p-1}$, alors la solution est donnée par :

$$y(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}\cos(t) - \frac{3}{2}\sin(t).$$

3.1.2 Résolution des EDO linéaire d'ordre 2

Exemple 3.1.3 *On cherche la solution $y(t)$ de l'équation différentielle*

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$$

On note $\mathcal{L}[y] = Y(p)$, par linéarité la transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$\mathcal{L}\Big[y''(t)\Big] + 5\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] + 6\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] = 0,$$

alors,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ p\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] - y'(0) + 5\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] + 6\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] = 0 \\ &\Rightarrow\ p(p\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] - y(0)) - y'(0) + 5(p\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] - y(0)) + 6\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] = 0 \\ &\Rightarrow\ p^2Y(p) - 2p - 3 + 5pY(p) - 10 + 6Y(p) = 0 \\ &\Rightarrow\ Y(p)(p^2+5p+6) = 2p + 13 \\ &\Rightarrow\ Y(p) = \frac{2p+13}{p^2+5p+6}. \end{aligned}$$

On passe à la décomposition en éléments simples de fraction rationnelle en p de $\frac{2p+13}{p^2+5p+6}$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} Y(p) = & \quad \frac{9}{p+2} - \frac{7}{p+3} \\ = & \quad 9\left(\frac{1}{p+2}\right) - 7\left(\frac{1}{p+3}\right). \end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse, on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= 9\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] - 7\left(\frac{1}{p+3}\right) \\ y(t) &= 9e^{-2t} - 7e^{-3t}. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.4 *On cherche maintenant la solution $y(t)$ de l'équation différentielle suivante avec les conditions initiales :*

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = 2e^t \\ \\ y(0) = 0 \ ; y'(0) = 1 \end{cases}$$

La transformée de Laplace du terme à droite est donnée par :

$$\mathcal{L}\Big[2e^t\Big](p) = 2\mathcal{L}\Big[e^t\Big] = \frac{2}{p-1}.$$

Et par linéarité, la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big[y''(t) - 6y'(t) + 10y(t)\Big](p) &= \mathcal{L}\Big[y''(t)\Big] - 6\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] + 10\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] \\ &= p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - 6pY(p) - 6y(0) + 10Y(p) \\ &= p^2Y(p) - 1 - 6pY(p) + 10Y(p) \\ &= Y(p)(p^2 - 6p + 10). \end{aligned}$$

Donc l'expression de $Y(p)$ en fonction de p est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p)(p^2 - 6p + 10) &= 1 + \frac{2}{p-1} \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{p+1}{(p-1)(p^2-6p+10)}. \end{aligned}$$

Après une décomposition en éléments simples, on trouve :

$$Y(p) = \frac{2}{5}\frac{1}{p-1} - \frac{2}{5}\frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{9}{5}\frac{1}{(p-3)^2+1}.$$

En appliquant la transformée inverse, on trouve finalement la solution $y(t)$:

$$y(t) = \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{3t}\cos(t) + \frac{9}{5}e^{3t}\sin(t).$$

Exemple 3.1.5 *Cherchons la solution* $y(t)$ *de l'équation différentielle suivante*

$$y''(t) + y(t) = \sin(2t)$$

avec les conditions initiales :

$$y(0) = 2\;;\; y'(0) = 1.$$

La transformée de Laplace de $\sin(2t)$ *est donnée par*

$$\mathcal{L}\Big[\sin(2t)\Big](p) = \frac{2}{p^2+4}.$$

En appliquant la transformée de Laplace sur l'équation différentielle, on obtient :

$$\mathcal{L}\Big[y''(t)\Big] + \mathcal{L}\Big[y(t)\Big] = \frac{2}{p^2+4},$$

alors,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad p\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] - y'(0) + \mathcal{L}\Big[y(t)\Big] = \frac{2}{p^2+4}\\
&\Rightarrow\quad p^2\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] - py(0) - y'(0) + \mathcal{L}\Big[y(t)\Big] = \frac{2}{p^2+4}\\
&\Rightarrow\quad p^2Y(p) - 2p - 1 + Y(p) = \frac{2}{p^2+4}\\
&\Rightarrow\quad Y(p)(p^2+1) = 2p + 1 + \frac{2}{p^2+4}\\
&\Rightarrow\quad Y(p) = \frac{2p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{(p^2+4)(p^2+1)}.
\end{aligned}$$

Après la décomposition de cette expression, on obtient :

$$Y(p) = \frac{2p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{3}\frac{2}{p^2+4}.$$

Et on applique la transformée inverse sur cette expression pour obtenir la solution $y(t)$*, nous donne :*

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{p^2+4}\right)\\
y(t) &= 2\cos(t) + \sin(t) + \frac{2}{3}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t)\\
y(t) &= 2\cos(t) + \frac{5}{3}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t).
\end{aligned}$$

3.1.3 Résolution des EDO linéaire d'ordre 2 à coefficient algébrique

Exemple 3.1.6 *On cherche la solution $y(t)$ de l'EDO à coefficient algébrique suivante :*

$$\begin{cases} 3ty''(t) + 6y'(t) + ty(t) = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Appliquant la transformée de Laplace sur les membres de l'égalité, et par linéarité on obtient :

$$\mathcal{L}\Big[3ty''(t) + 6y'(t) + ty(t)\Big](p) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\mathcal{L}\Big[ty''(t)\Big] + 6\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] + \mathcal{L}\Big[ty(t)\Big] = 0.$$

On a la propriété suivante :

$$\mathcal{L}\Big[t^n f(t)\Big] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p),$$

alors,

$$\mathcal{L}\Big[ty(t)\Big] = -\frac{d}{dp} Y(p) = -Y'(p),$$

et,

$$\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] = pY(p) - y(0),$$

et,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big[ty''(t)\Big] &= -\frac{d}{dp}[p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)] \\ &= -2pY(p) - p^2 Y'(p) + y(0). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -6pY(p) - 3p^2 Y'(p) + 3y(0) + 6pY(p) - 6y(0) - Y'(p) = 0 \\ &\Rightarrow \quad -Y'(p)(3p^2 + 1) = 3 \\ &\Rightarrow \quad -Y'(p) = \frac{3}{3p^2 + 1} \\ &\Rightarrow \quad -Y'(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{p^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &\Rightarrow \quad -Y'(p) = \frac{\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}}{p^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}. \end{aligned}$$

On applique maintenant la transformée inverse sur cette expression,

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[-Y'(p)\Big] = \sqrt{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{p^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right].$$

Et on sait que

$$-Y'(p) = \mathcal{L}\Big[ty(t)\Big],$$

alors

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[-Y'(p)\Big] = ty(t).$$

Donc la solution est donnée comme suit,

$$\begin{aligned} ty(t) &= \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right) \\ &\Rightarrow\ y(t) = \sqrt{3}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)}{t}. \end{aligned}$$

3.1.4 Résolution d'EDO linéaire d'ordre 3

Exemple 3.1.7 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$y'''(t) + 5y''(t) + 6y'(t) = 0,$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = 3,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 7.$$

Et on cherche la solution $y(t)$ de cette EDO, notons $Y(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $y(t)$.

$$\mathcal{L}\Big[y'''(t) + 5y''(t) + 6y'(t)\Big](p) = 0.$$

Par linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ \mathcal{L}\Big[y'''(t)\Big] + 5\mathcal{L}\Big[y''(t)\Big] + 6\mathcal{L}\Big[y'(t)\Big] = 0 \\ &\Rightarrow\ p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) + 5p^2Y(p) - 5py(0) - 5y'(0) + 6pY(p) - 6y(0) = 0 \\ &\Rightarrow\ p^3Y(p) + 5p^2Y(p) + 6pY(p) - 3p^2 + 2p - 7 - 15p - 8 = 0 \\ &\Rightarrow\ Y(p)(p^3+5p^2+6p) = 3p^2 + 13p + 15 \\ &\Rightarrow\ Y(p) = \frac{3p^2+13p+15}{p^3+5p^2+6p} = \frac{3p^2+13p+15}{p(p+2)(p+3)}. \end{aligned}$$

Après la décomposition de cette expression on obtient :

$$Y(p) = \frac{5}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3},$$

Finalement, on applique la transformée de Laplace inverse sur cette expression et on obtient la solution $y(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right] \\ y(t) &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-3t}. \end{aligned}$$

3.1.5 Cas général : EDO linéaire d'ordre n

Considérons l'EDO linéaire d'ordre n non homogène suivante Avec les conditions initiales données :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) = f(t), \\ \\ y^{(n-1)}(0), ..., y(0) \quad \text{données.} \end{cases}$$

Rappelons que l'on a :

$$\mathcal{L}\Big[y^{(k)}(t)\Big](p) = p\mathcal{L}\Big[y^{(k-1)}(t)\Big] - y^{(k-1)}(0) = ... = p^k\mathcal{L}\Big[y(t)\Big] - \sum_{i=0}^{k-1} p^i y^{(k-1-i)}(0).$$

On note : $Y(p) = \mathcal{L}\Big[y(t)\Big](p)$ et $F(p) = \mathcal{L}\Big[f(t)\Big](p)$
On suppose pour des raisons de simplicité et clarté de calculs que :

$$y^{(n-1)}(0) = ... = y(0) = 0.$$

Etape 1 : On considère la transformée de l'équationdifférentielle ; soit :

$$\mathcal{L}\Big[y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) - f(t)\Big](p) = 0 \quad \forall p.$$

Par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}(.)$, on obtient :

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_0)Y(p) = F(p).$$

Soit :

$$Y(p) = \frac{F(p)}{(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_0)}.$$

La transformée $Y(p)$ de la solution recherchée $y(t)$ est donc obtenue sous la forme d'une fraction rationnelle.

Etape 2 : On décompose cette fraction rationnelle en éléments simples de la forme : $\dfrac{1}{(p-z)^m}$, $m \geq 1$, et $\dfrac{(ap+b)}{(p^2+c_1p+c_0)}$

Etape 3 : On identifie chaque élément simple comme étant l'image d'une fonction connue. Pour cela on utilise une table d'images usuelles par transformée de Laplace.
On obtient finalement la solution de l'EDO par inversion de chacun des éléments simples :

$$y(t) = \sum \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p-z)^m}\right](t) + \sum \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(ap+b)}{(p^2-c_1p+c_0)}\right](t).$$

3.2 Résolution des équations différentielles fractionnaires

3.2.1 Résolution des EDF au sens de Riemann-Liouville

Dans cette sous-section, nous allons explorer quelques exemples d'équations différentielles fractionnaires simples de Riemann-Liouville.

Exemple 3.2.1 *Nous voudrions résoudre l'équation différentielle fractionnaire donnée par :*

$$D_t^{\frac{1}{3}}y(t) = c_1y(t).$$

où c_1 est une constante. Puisque $0 \leq p = \frac{1}{3} \leq 1$ nous allons utiliser la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour $n = 1$ et prendre la transformée de Laplace des deux côtés de la dernière équation. Si nous utilisons également la linéarité de la transformée de Laplace, cela donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big[D_t^{\frac{1}{3}}y(t)\Big] = \mathcal{L}\Big[c_1y(t)\Big] &= c_1\mathcal{L}\Big[y(t)\Big], \\
p^{\frac{1}{3}}Y(p) - D_t^{\frac{1}{3}-1}y(0) &= c_1Y(p), \\
p^{\frac{1}{3}}Y(p) - D_t^{-\frac{2}{3}}y(0) &= c_1Y(p).
\end{aligned}$$

On voit que $D_t^{-\frac{2}{3}}y(0)$ est la valeur de $D_t^{-\frac{2}{3}}y(t)$ évaluée à $t = 0$. Si nous supposons que cette valeur existe, nous pouvons définir $D_t^{-\frac{2}{3}}y(0)$ égal à c_2 pour obtenir

$$p^{\frac{1}{3}}Y(p) - c_2 = c_1Y(p). \tag{3.1}$$

Si nous résolvons ceci pour $Y(p)$ nous obtenons

$$Y(p)(p^{\frac{1}{3}} - c_1) = c_2$$

alors

$$Y(p) = \frac{c_2}{p^{\frac{1}{3}} - c_1}$$

En utilisant le tableau de transformation de Laplace des dérivés fractionnaires avec $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ *et* $a = c_1$, *et concluons que*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_2}{p^{\frac{1}{3}} - c_1}\right] = c_2 t^{\frac{1}{3}-1} E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}(c_1 t^{\frac{1}{3}}) = c_2 t^{-\frac{2}{3}} E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}(c_1 t^{\frac{1}{3}})$$

Exemple 3.2.2 *Maintenant, nous voudrions résoudre l'équation différentielle fractionnaire donnée par*

$$D_t^{\frac{19}{12}} y(t) = 0. \tag{3.2}$$

Puisque $1 \leq p = \dfrac{19}{12} \leq 2$, *nous allons utiliser la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour* $n = 2$ *et prendre la transformée de Laplace des deux côtés. Cela donne*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[D_t^{\frac{19}{12}} y(t)\right] &= 0 \\ p^{\frac{19}{12}} Y(p) - D_t^{\frac{19}{12}-1} y(0) - p D_t^{\frac{19}{12}-2} y(0) &= 0 \\ p^{\frac{19}{12}} Y(p) - D_t^{\frac{7}{12}} y(0) - p D_t^{-\frac{5}{12}} y(0) &= 0. \end{aligned}$$

En suivant les mêmes étapes que dans l'exemple précédent, nous supposons que les valeurs de $D^{\frac{7}{12}} y(0)$ *et* $D^{-\frac{5}{12}} y(0)$ *existent et nous pouvons les prendre égal à* c_3, c_4 *respectivement pour obtenir*

$$p^{\frac{19}{12}} Y(p) - c_3 - p c_4 = 0$$

Maintenant nous résolvons ceci pour $Y(p)$ *nous obtenons*

$$Y(p) = \frac{c_3 + p c_4}{p^{\frac{19}{12}}} = \frac{c_3}{p^{\frac{19}{12}}} + \frac{c_4}{p^{\frac{7}{12}}}$$

alors en utilisant le tableau, on obtient la solution suivante

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_3}{p^{\frac{19}{12}}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_4}{p^{\frac{7}{12}}}\right] \\ &= \frac{c_3 t^{\frac{7}{12}}}{\Gamma\left(\frac{19}{12}\right)} + \frac{c_4 t^{\frac{-5}{12}}}{\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.3 *Soit l'équation différentielle fractionnaire*

$$D_t^{\frac{2}{3}} y(t) = ay(t), \tag{3.3}$$

où a est une constante réelle. On a : $0 < \alpha = \frac{2}{3} \leq 1$, *nous pouvons utiliser donc la formule (2.13).En prenant la transformée de Laplace des deux membres de cette équation, on obtient*

$$\mathcal{L}\Big[{}_0D_t^{\frac{2}{3}} y(t)\Big] = a\mathcal{L}\Big[y(t)\Big], \tag{3.4}$$

ce qui nous donne

$$p^{\frac{2}{3}} Y(p) - D_t^{\frac{2}{3}-1} y(0) = aY(p). \tag{3.5}$$

ceci implique

$$p^{\frac{2}{3}} Y(p) - D_t^{-\frac{1}{3}} y(0) = aY(p). \tag{3.6}$$

La constante $D_t^{-\frac{1}{3}} y(0)$ *est la valeur de* $D_t^{-\frac{1}{3}} y(t)$ *en* $t = 0$.
Si nous supposons que cette valeur existe, et nous l'appelons c_5 *; alors l'équation (3.6) devient*

$$p^{\frac{2}{3}} Y(p) - c_5 = aY(p). \tag{3.7}$$

En résolvant cette équation pour $Y(p)$, *on arrive à*

$$Y(p) = \frac{c_5}{p^{\frac{2}{3}} - a}. \tag{3.8}$$

Finalement, grâce au tableau, on trouve l'inverse de la transformée de Laplace de $Y(p)$, *puis on conclut que*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_5}{p^{\frac{2}{3}} - a}\right] = c_5 t^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}\Big(at^{\frac{2}{3}}\Big). \tag{3.9}$$

On peut se demander si l'existence de $D_t^{-\frac{1}{3}} y(0)$ *implique que sa valeur est en fait* c_5 *comme supposé. Nous montrerons que c'est le cas.*
Encore une autre fois, en utilisant la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire on remarque que

$$\mathcal{L}\Big[D_t^{-\frac{1}{3}} y(t)\Big] = p^{-\frac{1}{3}} Y(p). \tag{3.10}$$

Comme

$$Y(p) = \frac{c_5}{p^{\frac{2}{3}} - a},$$

alors

$$\mathcal{L}\Big[D_t^{-\frac{1}{3}}y(t)\Big] = \frac{c_5 p^{-\frac{1}{3}}}{p^{\frac{2}{3}} - a}.$$

Par conséquent

$$D_t^{-\frac{1}{3}}y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_5 p^{-\frac{1}{3}}}{p^{\frac{2}{3}} - a}\right] = c_5 E_{\frac{2}{3},1}\Big(at^{\frac{2}{3}}\Big).$$

En $t = 0$, *on obtient*

$$D_t^{-\frac{1}{3}}y(0) = c_5 E_{\frac{2}{3},1}(0) = c_5.$$

Exemple 3.2.4 *Considérons maintenant l'équation suivante :*

$${}_0D_t^{\frac{4}{3}}y(t) = 0.$$

Maintenant, on a : $1 < \alpha = \frac{4}{3} \leq 2$, *nous pouvons donc utiliser la formule (2.7). En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de cette équation, on trouve :*

$$\mathcal{L}\Big[{}_0D_t^{\frac{4}{3}}y(t)\Big] = 0,$$

ce qui nous donne :

$$p^{\frac{4}{3}}Y(p) - p\,{}_0D_t^{-(2-\frac{4}{3})}y(0) -{}_0 D_t^{-(1-\frac{4}{3})}y(0) = 0,$$

nous supposons que les constantes ${}_0D_t^{-(2-\frac{4}{3})}y(0)$ *et* ${}_0D_t^{-(1-\frac{4}{3})}y(0)$ *existent et appelées* C_1 *et* C_2 *respectivement, alors ça devient :*

$$p^{\frac{4}{3}}Y(p) - C_1 p - C_2 = 0.$$

En résolvant par rapport à $Y(p)$, *nous obtenons*

$$Y(p) = \frac{C_1 p}{p^{\frac{4}{3}}} + \frac{C_2}{p^{\frac{4}{3}}} = 0.$$

nous utilisons encore une fois le tableau, on trouve la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$ *et nous concluons que*

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_1 p}{p^{\frac{4}{3}}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_2}{p^{\frac{4}{3}}}\right] \\ &= \frac{C_1}{\Gamma\Big(\frac{4}{3}\Big)}t^{-\frac{2}{3}} + \frac{C_2}{\Gamma\Big(\frac{4}{3}\Big)}t^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.5 *Considérons le problème de Riemann-Liouville suivant :*

$$\begin{cases} D^2y(t) + D^{\frac{3}{2}}y(t) = 1 + t, \\ \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + \frac{p^2Y(p) - py(0) - y'(0)}{p^{\frac{1}{2}}} + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - p - 1 + \frac{p^2Y(p) - p - 1}{p^{\frac{1}{2}}} + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - y'(0) - py(0) + p^{\frac{3}{2}}Y(p) - p^{\frac{1}{2}}y(0) - p^{-\frac{1}{2}}y(0) + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - 1 - p + p^{\frac{3}{2}}Y(p) - p^{\frac{1}{2}} - p^{-\frac{1}{2}} + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad Y(p)((p^2 + p^{\frac{3}{2}} + 1)) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + 1 + p + p^{\frac{1}{2}} + p^{-\frac{1}{2}} \\
&\Rightarrow \quad Y(p)(p^2 + p^{\frac{3}{2}} + 1) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)(p^2 + p^{\frac{3}{2}} + 1) \\
&\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2},
\end{aligned}$$

en utilisant la transformée inverse des deux côtés, on obtient la solution

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[Y(p)\Big] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[Y(p)\Big](t) = 1 + t.$$

3.2.2 Résolution des EDF au sens de Caputo

Dans cette sous-section, nous allons explorer deux exemples d'équations différentielles fractionnaires de Caputo.

Exemple 3.2.6 *Soit l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^cD_0^{\frac{2}{3}}y(t) = cy(t)$$

c étant une constante réelle.
En appliquant la transformée de Laplace, on aura :

$$\mathcal{L}\Big[D_0^{\frac{2}{3}}y(t)\Big] \quad = \quad \mathcal{L}\Big[cy(t)\Big],$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad p^{\frac{2}{3}}Y(p) - p^{\frac{2}{3}-0-1}y^{(0)}(0) = cY(p) \\
&\Rightarrow \quad p^{\frac{2}{3}}Y(p) - p^{-\frac{1}{3}}y(0) = cY(p) \\
&\Rightarrow \quad Y(p)(p^{\frac{2}{3}} - c) = p^{-\frac{1}{3}}y(0) \\
&\Rightarrow \quad Y(p) = y(0)\frac{p^{-\frac{1}{3}}}{p^{\frac{2}{3}} - c}
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse pour trouver la solution finale

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[y(0)\frac{p^{-\frac{1}{3}}}{p^{\frac{2}{3}} - c}\right]$$

avec ($\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha - \beta = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta = 1$), *d'après le tableau on obtient*

$$y(t) = y(0)E_{\frac{2}{3},1}\left(ct^{\frac{2}{3}}\right).$$

Exemple 3.2.7 *On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^{c}D_0^{\frac{4}{3}}y(t) = 0,$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = y'(0) = 1.$$

En appliquant la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}\left[{}^{c}D_0^{\frac{4}{3}}y(t)\right] = 0,$$

alors,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad p^{\frac{4}{3}}Y(p) - p^{\frac{4}{3}-0-1}y^{(0)}(0) - p^{\frac{4}{3}-1-1}y^{(1)}(0) = 0 \\
&\Rightarrow \quad p^{\frac{4}{3}}Y(p) - p^{\frac{1}{3}}y(0) - p^{-\frac{2}{3}}y'(0) = 0 \\
&\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{p^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{4}{3}}} + \frac{p^{-\frac{2}{3}}}{p^{\frac{4}{3}}} \\
&\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}.
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse, on aura

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(p)\right] = \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{t}{\Gamma(2)} = 1 + t.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a introduit le calcul différentiel et l'intégral d'ordre non entier. On a étudié l'intégration au sens de Riemann-Liouville ainsi que la dérivation au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.
On a appliqué la transformée de Laplace à la résolution de certaines équations différentielles ordinaire avec différent ordre.
On a utilisé la technique de la transformée de Laplace pour l'intégrale et la dérivée fractionnaire pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, (1964).

[2] Ali Assi, *Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Differential Equations in Matlab, Engineering Education and Research using MATLAB*, 2011.

[3] A. B. Basset ; *A Treatise on Hydrodynamics*, vol. **2**, Cambridge University Press., England, 1888.

[4] Choi J., Rathie A.K. and Parmar R.K., *Extension of Extended beta, hypergeometric and confluent hypergeometric functions*, Honam Math. J.. **36(2)** (2014) 339367.

[5] L. Debnath. *Introduction to the theory and application of the laplace transformation.* IEEE transactions on systems, Man,and Cebernetics,**7**,1977.

[6] Kai. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differebtial Equation, An Application Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Ed Springer, 2004.

[7] G.Doetsch. *Guide to the applications of the laplace and z-transforms.* 1971.

[8] M. Henry, *La théorie de la fonction gamma*, Limbourg, 1858.

[9] G. Jumarie, *Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative*,Appl. Math. Lett.**22**(2009), 1695-1664.

[10] M. Kimen, *Fractional Calculus : Definitions and Applications*, Western Kentucky University.

[11] A. A. Kilbas and S. A. Marzan ; *Cauchy Problem for Differentical Equation with Caputo Derivative.* Fra. Cal. App. App. ISSN (2004) **1311-0454**.

[12] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies* **204**, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[13] Y. Leroyer, et P. Tesson. *Mathématiques pour l'ingénieur*, Dunod, Paris, 2009.

[14] K. Miller,B.Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[15] K. B. Oldham, J. Spanier ; *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.

[16] Abdelghani. Ouahab, *Calcul fractionnaire Laboratoire de Mathématiques*, Université de Sidi-Bel-Abbes B.P. **89, 22000** Sidi-Bel-Abbes, Algérie.

[17] I. Podlubny, *Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering*, vol, **198**, Academic Press, New York/London/Toronto, 1999.

[18] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Mathematica (1948) **81**, pp. 1-222.

[19] Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.O. (1993), *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach, New York. 1993.

Résumé

Ce mémoire est dédié à la résolution de quelques équations différentielles ordinaires d'ordres différents et des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Nous allons donner quelques notions fondamentales utilisées dans la dérivation fractionnaire telles que la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés. Aussi nous allons donner les définitions des intégrales et des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo et le lien entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés. Aussi nous présentons la définition de la transformée de Laplace avec ses propriétés et la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. La solution des équations différentielles ordinaires et fractionnaires se trouve par la transformée de Laplace en utilisant ses propriétés.

Mots-clés: Calcul fractionnaire, dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, équations différentielles fractionnaires, transformée de Laplace.

Abstract

This work is dedicated to the resolution of some differential equations of fractional order. We will give some basic notions used in fractional derivative such as Gamma function, Beta function and Mittag-Leffler function with examples and some properties. Also, we will present the definitions of fractional derivatives for Riemann-Liouville type and for Caputo type and the links between these derivatives with examples and some properties. Also, we will present the definition of Laplace transform and its properties and the Laplace transform of fractional derivatives for Riemann-Liouville type and Caputo type. The solution of differential equations and fractional equations is found by Laplace transform using its properties.

Keywords: Fractional calculus, fractional derivative for Riemann-Liouville type, fractional derivative for Caputo type, differential fractional, Laplace transform.

ملخص

هذه المذكرة مخصصة للحل لبعض المعادلات التفاضلية برتبة كسرية. نقدم بعض المفاهيم الاساسية المستخدمة في التكاملات والمشتقات الكسرية مثل الدالة جاما، الدالة بيتا، ودالة ميتاج-لفلر. ايضا نقدم تعريف التكاملات والمشتقات ذات رتب كسرية لنوع ريمان-لوفيل ونوع كابيتو وكذا العلاقة بينهم. سنقدم ايضا تعريف محولة لابلاس وخصائصها ومحولة لابلاس للمشتقات ذات رتب كسرية لنوع ريمان-لوفيل ونوع كابيتو. نجد حل المعادلات باستعمال محولة لابلاس وخصائصها.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري، مشتق كسري لنوع ريمان-لوفيل، مشتق كسري لنوع كابيتو، المعادلات التفاضلية الكسرية، محولة لابلاس.