الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبيـة

République algérienne démocratique et populaire

وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمــــي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب

Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib

Faculté des Sciences et de Technologie

Département mathématiques et Informatique

Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme de Master en :mathématiques

Domaine : mathématiques et informatique

Filière : mathématique

Spécialité : Equations différentielles et modélisation

Thème

Stabilité de systèmes différentielles implicites dans les espaces de Hilbert

Présenté Par : Amina Menasra

Devant le jury composé de :

Dr Abderrahmane Beniani	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr Zokha Belattar	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr Fatima Tchouar	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr Mohamed Hariri	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadreur

Année Universitaire 2021/2022

الملخص

يمكن تعميم دراسة حزمة من المصفوفات حزمة من المشغلين في مساحات هيلبرت. نظرية الاقحوان الطيفي المشغل في المساحات ذات البعد اللانهائي يسمح بالتطبيقات في الفيزياء على سبيل المثال نظرية استقرار بعض ديناميات الأنظمة والتعميم من نظرية ليابوف.

تتكون هذه المذكرة من مقدمة وأربعة (04) فصول وأخيراً قائمة المراجع من 19 عنوانا.

في الفصل الأول نذكر الأدوات الأساسية لنظرية الطيفة ، وكذلك بعض التعاريف على حزمة من المصفوفات

الفصل الثاني مخصص لبعض طرق حل الأنظمة فروق خطية محدودة الأبعاد.

الفصل الثالث حول مفهوم استقرار هذه الأنظمة في البعد المحدود ولانهائي ،

في الفصل الأخير مخصص للتحليل الطيفي لحزمة من المشغلين وهكذا يعمم نظرية ليابونوف الكلاسيكية المستخدمة في نظرية الاستقرار أنظمة صريحة ذات أبعاد غير محدودة لمجموعة من المشغلين (دراسة استقرار النظام المتجانس الضمني)

الكلمات المفتاحية: الاستقرار بمعنى ليابونوف ، النظرية الطيفية ، حزمة المشغلين ، فضاءات هلبرت ، أنظمة ضمنية.

Résumé

L'étude d'un faisceau de matrices peut être généralisée pour un faisceau d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. La théorie spectrale du faisceau d'opérateur dans des espace de dimension infinie admet des, applications en physique par exemple la théorie de stabilité de quelques systèmes dynamique et généralisation du Théorème de Liapouov.

Cette mémoire se compose d'une introduction et Quatre (04) chapitres et enfin une liste bibliographique de 19 titres.

Dans le premier chapitre on rappelle les outils de base sur la théorie spectrale, aussi quelques définitions sur du faisceau de matrices .

Le deuxième chapitre est consacré quelques méthodes de résolution des systèmes différentiels linéaires en dimension finie.

Le troisième chapitre sur la notion de la stabilité de ces systèmes en dimension finie et infinie,

Dans le dernier chapitre est consacré la décomposition spectrale d'un faisceau d'opérateurs ainsi généralise le théorème classique de Liapounov utilisé à la théorie de stabilité des système explicite en dimension infinie à un faisceau d'opérateurs (l'étude de stabilité de système homogène implicite).

Mots clés : Stabilité (au sens de Liapounov) , théorie spectrale , faisceau d'opérateurs, espaces de Hilbert, systèmes implicites.

Abstract

The study of a bundle (Regelier and singular) of matrices can be generalized for a bundle of operators in Hilbert spaces. The spectral daisy theory of operator in spaces of infinite dimension admits applications in physics for example the theory of stability of some systems dynamics and generalization of Liapouov's theorem.

This thesis consists of an introduction and four (04) chapters and finally a bibliographic list of 19 titles.

In the first chapter we recall the basic tools on the spectral theory, aunsi some definitions on sheaf of matrices

The second chapter is devoted to some methods of solving systems finite-dimensional linear differentials.

The third chapter on the notion of the stability of these systems in finite dimension and infinite,

In the last chapter is devoted to the spectral decomposition of a bundle of operators thus generalizes the classical Liapunov theorem used to stability theory explicit systems in infinite dimension to a bundle of operators (the study of implicit homogeneous system stability).

Key words: Stability (in the sense of Liapunov), spectral theory, bundle of operators, Hilbert spaces, implicit systems.

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, je tiens à remercier, Mr **Mohamed HARIRI** pour avoir accepter de m'enncadrer, pour ses précieux conseils et orientations les plus précieuses. Je garderais un très bon souvenir de ses qualités profondément humaines.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Mr A. Beniani en acceptant de

présider le jury et à Mme Saiah et Mme Tchouar pour avoir accepter d'examiner ce mémoire.

Mes sincères remerciements à tous les membres de la faculté des sciences et technologie en particulier, le département de mathématiques et Informatique.

Je remercie, également, toute les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

A.MENASRA.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents, ma famille
et à toute la promotion du Master Analyse Mathématique.

A.MENASRA.

Principales notations utilisées

1. $\mathcal{H}$, espace de Hilbert
2. $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ désigne l'espace de Hilbert de tous les opérateurs linéaires bornés.
3. I : opérateur d'identité.
4. $\mathbb{C}$: nombres complexes.
5. $\mathcal{C}$: cercle unitaire, $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$.
6. $\mathcal{D}_1$: disque d'unité ouvert, $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < 1\}$.
7. $\overline{\mathcal{D}}_1$: disque unitaire fermé , $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq 1\}$.
8. $\mathbb{C}_-$: demi-plan ouvert dans $\mathbb{C}$, $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$
9. A^* : transposée du conjugué complexe de A ; lorsque A est dans un opérateur, A^* dénote l'adjoint de A.
10. $\sigma(T)$: spectre de opérateur T.
11. $\sigma(A, B)$ spectre de faisceau opérateur $\lambda A - B$, $\lambda \in \mathbb{C}$ and $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.
12. $\sigma_p(A, B)$ spectre de points du faisceau de l'opérateur $\lambda A - B$, i.e., l'ensemble des valeurs propres de $\lambda A - B$.
13. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire de $\mathcal{H}$.
14. $||x|| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ norme de $x \in \mathcal{H}$.
15. P : opérateur de projection orthogonale de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$.
16. $Q = I - P$.
17. $\text{diag}[\lambda A_1 - B_1, -B_2]$ bloc spécial-diagonale du faisceau de l'opérateur $\lambda A - B$.
18. La restriction des opérateurs A. i.e., $A \mid_{D_k} = A_k$, $k = 1, 2$.
19. $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ rayon spectral , $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pour le rayon spectral, la formule bien connue (Gelfand) suivante est valable.

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$$

Table des matières

Introduction

Dans la théorie de stabilité, nous utilisons des systèmes (continus ou discrets) sous la forme :

$$x'(t) = Tx(t) + F(t) \quad ; \quad t \geq 0..., \tag{1}$$

ou

$$x_{n+1} = Tx_n + F_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

où T est soit opérateur linéaire, ou une matrice dans des espaces de dimension finie. Depuis 1970 de nombreux mathématiciens comme M.Benabdallah [1], A.Favini et Yagi [6], Campbell [3], A.G.Rutkas [18], L.A Vlasenko [19] ... s'intéressent à l'implicite ou dégénéré plus général systèmes d'évaluation de la forme :

$$Ax'(t) = Bx(t) + f(t) \quad ; \quad t \geq 0..., \tag{3}$$

ou

$$Ax_{n+1} = Bx_n + f_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{4}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires et $f(.)$ est une fonction continue de $[0, \infty) \times \mathcal{H}$ à $\mathcal{H}$. L'opérateur A n'est pas nécessairement inversible.

La présente de mémoire est consacrée à l'étude de la théorie spectrale du faisceau $\lambda A - B$ d'opérateurs linéaires bornés A et B dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Historiquement, tout revient aux travaux de Weierstrass (1867) pour le cas du faisceau de matrices $\lambda A - B$ régulier ($det(\lambda A - B) \not\equiv 0$) et dans le cas le plus général à ceux de Kronecker (1890). F.R. Gantmacher (1965) donna un bon traitement de cette théorie dans[9]. Ces dernières années, plusieurs chercheurs donnèrent une grande importance à l'étude de (3.8). Ce type d'équations apparait dans des nombreux domaines, citons quelques uns :

• Les circuits : R.L.C (voir A.G.Rutkas, L.A Vlasenko (2006) [17, 19]).
La théorie spectrale est une branche essentielle de l'analyse fonctionnelle qui s'applique tant en mathématiques pures et appliquées (équations différentielles ou aux dérivées partielles) qu'en physique par exemple ,...

Cette Mémoire comprend Quatre (04) chapitres.

Le premier chapitre, contient un ensemble de définitions .

• Sera consacrée aux différentes définitions de base sur la théorie spectrale d'opérateurs dans les espaces de Hilbert[13].

• Quelques définition sur du faisceau de matricices [9] (Thèorème de Weierstrass).

Le deuxième chapitre, comporte deux (02) approches de résolution du système (3.8).

• Nous rappelons quelques méthodes (de la matrice exponentielle et de Laplace) pour la résolution du système [12] (3.8).

Le troisième chapitre

• Sera réservée à un petit rappel sur la stabilité des systèmes homogène en passant de la dimension finie à la dimension infinie [4].

Le quatrième chapitre. Nous utilisons la décomposition spectrale d'un faisceau d'opérateurs [18], ainsi généralise le théorème classique de Liapounov utilisé à la théorie de stabilité des système explicite en dimontion infinie à un faisceau d'opérateurs. i.e., l'étude de stabilité de système homogène implicite [1]

$$Ax'(t) = Bx(t) \ \ , \ \ t \geq 0.$$

Chapitre Premier

Préliminaire

1.1 Espace de Hilbert et ses propriétés

1. **Définitions**

   Définition 1.1.1. *[10, 13]. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme* ***sesquilinéaire*** *sur $\mathcal{H}$, toute application $T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$*

   (a) $T(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha T(x_1, y) + \beta T(x_2, y)$.

   (b) $T(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} T(x, y_1) + \overline{\beta} T(x, y_2)$, *$\bar{\alpha}$ conjugué complexe d'un α.*

   Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la forme sesquilinéaire T devient une forme bilinéaire.

   Définition 1.1.2. *Une forme sesquilinéaire est dite* ***hermitienne*** *si :*

   $$\forall x, y \in \mathcal{H}, \qquad T(x, y) = \overline{T(y, x)}.$$

   Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors T est une forme bilinéaire symétrique.

   Définition 1.1.3. *[2]. On appelle* ***produit scalaire*** *sur $\mathcal{H}$ toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive T. Dans ce cas on écrit $T(x, y) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$.*

   Définition 1.1.4. *[10, 13]. On appelle* ***espace préhilbertien*** *tout espace vectoriel $\mathcal{H}$ muni de la norme associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}}$ suivante*

   $$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{H}}} \quad , \quad (x \in \mathcal{H}).$$

   Définition 1.1.5. *[10, 13]. On appelle espace* ***de Hilbert*** *(ou* ***hilbertien****) tout espace préhibertien complet.*

   Exemple 1.1.6.

(a) $\mathbb{C}^n$ *muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$*, est un espace de Hilbert.*

(b) $l^2(\mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n\geq 0} : \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < +\infty\}$ *muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_n}$$

est un espace de Hilbert.

2. **Orthogonalité**

Définition 1.1.7. *[10] Soient* x, y *deux éléments d'un espace préhilbertien* $\mathcal{H}$*. On dit que* x *et* y *sont* ***orthogonaux****, si leur produit scalaire est nul.*
Et on note :

$$x \perp y \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0.$$

Définition 1.1.8. *[13]. Soit* $\mathcal{H}$ *un espace préhilbertien et* $\mathcal{F}$ *une partie non vide de* $\mathcal{H}$*. On dit qu'un élément* x ***de*** $\mathcal{H}$ ***est orthogonal à*** $\mathcal{F}$*, s'il est orthogonal à chaque point* y *de* $\mathcal{F}$*. On écrit :*

$$x \perp \mathcal{F} \Longleftrightarrow \forall y \in \mathcal{F}, x \perp y.$$

Définition 1.1.9. *[13]. Soient* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *deux parties non vides d'un espace préhilbertien* $\mathcal{H}$*, on dit qu'elles sont* ***orthogonales*** *si tout point de l'une est orthogonal à chaque point de l'autre, on note :*

$$\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathcal{F}_1, \forall y \in \mathcal{F}_2, x \perp y.$$

On appelle ***orthogonal d'une partie*** $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{H}$*, l'ensemble des éléments de* $\mathcal{H}$ *orthgonaux à* $\mathcal{F}$*, on le note :*

$$\mathcal{F}^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \ \langle x, y\rangle = 0, \ \ \forall y \in \mathcal{F}\}.$$

3. **Projection orthogonale**

Définition 1.1.10. *[13]. Soit* $\mathcal{F}$ *une partie fermée d'un espace métrique* $(\mathcal{E}, d)$ *et soit* a *un point de* $\mathcal{E}$*. On appelle* ***projection orthogonale de*** a ***sur*** $\mathcal{F}$ *tout point* b *de* $\mathcal{F}$ *vérifiant :* $d(a, b) = d(a, \mathcal{F}) = \inf_{y\in\mathcal{F}} d(a, y)$*.*

1.2 Théorie spectrale élémentaire des opérateurs

1. **Opérateurs inversibles**

   Définition 1.2.1. *[10]. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces de Banach. Un opérateur $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dit* ***inversible*** *s'il est bijectif et son inverse T^{-1} est continue.*

   Exemple 1.2.2.

   (a) *L'identité dans un espace vectoriel normé $\mathcal{E}$*

   $$\begin{array}{rcll} I & : & \mathcal{E} & \longrightarrow \mathcal{E} \\ & & x & \longmapsto \quad I(x) = x \end{array}$$

   est inversible.

   (b) *Dans $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\geq 1} : \sum\limits_{n\geq 1} |x_n|^2 < +\infty\}$, l'application :*

   $$\begin{array}{rcll} T & : & \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ & & x & \longmapsto \quad T(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2^2}, \dots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, \dots) \end{array}$$

   est bijective et

   $$\begin{array}{rcll} T^{-1} & : & \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ & & x & \longmapsto \quad T^{-1}(x) = (x_1, 2x_2, 2^2x_3, \dots, 2^{n-1}x_n, \dots) \end{array}$$

   n'est pas bornée donc T^{-1} n'est pas continue. Par conséquant, T n'est pas inversible.

   Proposition 1.2.3. *Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux espaces de Banach. Alors tout opérateur bijectif est inversible.*

   Théorème 1.2.4. *(Application contractante)*
   Soit $\mathcal{E}$ en espace de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{E})$ tel que $\|T\| < 1$, alors $(I - T)$ est inversible et son inverse est $(I - T)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$.

   Corollaire 1.2.5. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ inversible. Si $V \in \mathcal{L}_c(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ tel que : $\|V\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, alors $T + V$ est inversible.*

2. **Opérateurs adjoints**

   Dans toute la suite on va considérer deux espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 1.2.6. *[10]. On appelle adjoint de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ l'application $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ (noté T^*) définie par :*

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2, \langle Tx, y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^* y\rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

L'application T^* est linéaire.

Proposition 1.2.7. *[10]. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Pour tout $T, V \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

(a) $(T + V)^* = T^* + V^*$

(b) $(\lambda V)^* = \overline{\lambda} V^*$

(c) $(T \circ V)^* = V^* \circ T^*$

(d) Si T est inversible, alors T^* l'est aussi, et son inverse est $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

(e) $(T^*)^* = T$

(f) $\|T^*\| = \|T\|$.

3. **Théorie spectrale élémentaire**

Définition 1.2.8. *[10, 13] Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé de dimension finie et T un opérateur de $\mathcal{L}_c(\mathcal{E})$, un nombre complexe λ est dit **valeur propre** de T si l'équation*

$$Tx = \lambda x$$

admet des solutions non nulles, et on note l'ensemble des valeurs propres de T par :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;\; : \;\; \exists x \in \mathcal{E} - \{0\} : Tx = \lambda x\}.$$

On note aussi par S_λ l'ensemble de ses solutions et on a :

$$S_\lambda = \{x \in \mathcal{E} - \{0\} : Tx = \lambda x\} = \ker(T - \lambda I),$$

*S_λ est appelé le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ. Ses éléments s'appellent **vecteurs propres**. L'inverse de $T - \lambda I$, quand il existe, est appelé **opérateur résolvant** ou **la résolvante de T**. On le note par*

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Définition 1.2.9. *[13]. Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est dit valeur **régulière** de $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{E})$ si l'équation $Tx = \lambda x$ n'admet pas de solutions non nulles. Autrement dit, une valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est régulière si l'opérateur $T - \lambda I$ est inversible. Notons par $\rho(T)$ l'ensemble des valeurs régulières.*

Proposition 1.2.10. *Dans le cas où $\mathcal{E}$ est de dimension finie on a seulement deux possibilités :*

1) *Si l'opérateur $T - \lambda I$ est inversible, alors la résolvante de T existe et est définie sur $\mathcal{E}$ tout entier, i.e $\lambda \in \rho(T)$.*

2) *Si l'opérateur $T - \lambda I$ n'est pas inversible alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

La situation change lorsque $\mathcal{E}$ est de dimension infinie de plus des deux possibilités 1) et 2) nous avons la troisième éventualité suivante :

3) *La résolvonte $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ existe mais n'est pas définie sur l'espace $\mathcal{E}$ tout entier.*

Spectre des opérateurs :

Le spectre de T contient les valeurs propres puisque si $Tx = \lambda x$ pour un élément x non nul, l'opérateur $(T - \lambda I)^{-1}$ n'existe pas. L'ensemble des valeurs propres de T est appelé **spectre ponctuel de** T et noté par $\sigma_p(T)$. La partie restante du spectre (c'est-à-dire la partie constituée des éléments λ pour lesquels l'opérateur $(T - \lambda I)^{-1}$ existe mais n'est pas défini sur $\mathcal{E}$ tout entier) est appelé **spectre continu de** T, noté par $\sigma_c(T)$.

Ainsi toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est soit propre, soit régulière ou soit un point du spectre continu, et on a :

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \quad , \quad \rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T).$$

Proposition 1.2.11. *Soit $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*

(a) Le rayon spectral de T est égal à la norme de T : $r(T) = ||T||$.

(b) Le spectre de T est réel, et on a la majoration :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, ||R_\lambda(T)|| \leq \frac{1}{|Im\lambda|}$$

(c) Le spectre résiduel de T est vide.

Exemple 1.2.12. *L'opérateur $I \in \mathcal{L}_c(\mathcal{E})$ admet une seule valeur propre $\lambda = 1$.*

En effet, c'est la seule valeur pour laquelle l'équation $Ix = \lambda x$ admet des solutions non nulles.

4. **Quelques propriétés**

Proposition 1.2.13. *[10, 13] Les valeurs propres de $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ appartiennent à la boule femée $\overline{B}(0, \|T\|)$. i.e*

$$\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Proposition 1.2.14. *[10, 13] Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ est un opérateur hermitien (c-à-d $T^* = u$), alors les valeurs propres de T sont réelles.*

Proposition 1.2.15. *[10] Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$. Si λ est une valeur propre de T, alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T^*.*

Proposition 1.2.16. *[10, 13] Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'un opérateur hermitien $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ sont orthogonaux.*

Proposition 1.2.17. *[13] Soit T un opérateur unitaire[1]. Alors*

$$\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

1.3 Théorie de Kronecker-Weierstrass pour les faisceaux de matrices

Définition 1.3.1. *On appelle λ-matrice ou matrice polynômiale, toute martice[9]*

$$P(\lambda) = (a_{ij}(\lambda)), \quad i = \overline{1,m} \;\; ; \;\; j = \overline{1,n}.$$

Définition 1.3.2. *([8]) Un faisceau de matrices $\lambda A - B$ est une matrice polynômiale dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, λ est une variable indéterminée ; A et B sont deux matrices quelconques de même ordre $m \times n$*

Définition 1.3.3. *([8]) un faisceau de matrices $\lambda A - B$ est dit **régulier** $(F.R)$ si :*

1. *Les deux matrices A et B sont des matrices carrées de même ordre n.*
2. *Le déterminant $|\lambda A - B|$ ne s'annule pas identiquement.*

*Si le rang $r < m = n$ le faisceau est appelé **faisceau singulier carré** $(F.S.C)$.*
*Si $m \neq n$,il sera dit **singulier rectangulaire** $(F.S.R)$.*

Théorème 1.3.4. *(Weierstrass)([8]). Tout faisceau régulier $\lambda A - B$ peut être réduit à une forme quasi-diagonale canonique (équivalente) :*

$$\begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & T - \lambda I \end{bmatrix} ;$$

*où les **s** premiers blocs diagonaux correspendent aux diviseurs élémentaires infinis ;*

1. C'est a dire que T est surjectif et vérifie :$\forall x, y \in \mathcal{E}, \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

$$où \quad N^{(u_k)} = I^{(u_k)} + \lambda H^{(u_k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{u_k \times u_k} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{u_k \times u_k}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{u_k \times u_k} , k = \overline{1, s}.$$

Le dernier bloc $T - \lambda I$ correspond à la forme normale de Jordan pour la matrice $T = (\lambda A - B)^{-1}$; où $|\lambda A - B| \neq 0$.

Algorithme de la réduction(Cas d'un faisceau régulier)

Soit le faisceau régulier de matrices $\lambda A - B$ d'ordre n :

1. Calculant tous les mineurs Δ_j d'ordre j de $\lambda A - B$; $j = 1, 2, \dots, n$. On a $C_m^j \times C_n^j$ mineurs d'ordre j.
2. Calculant le plus grand commun diviseur (P.G.C.D) $D_j(\lambda)$ des Δ_j.
3. Prenant soin d'avoir **1** comme coefficient du plus haut degré dans la suite des polynômes. : $D_j(\lambda), D_{j-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) \equiv 1$ (par convention).
   Chaque polynôme est divisible par le précédent.

   Définition 1.3.5. *[9] On appelle* polynômes invariants *du faisceau $\lambda A - B$ les polynômes $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ définis par :*

   $$i_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}; \ i_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)} \ ; \dots ; \ i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}.$$

4. Décomposant les polynômes en facteurs irréductibles sur le corps des nombres, on obtient :

   $$\begin{aligned} i_1(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{c_1} [\phi_2(\lambda)]^{c_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{c_s} \\ i_2(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{d_1} [\phi_2(\lambda)]^{d_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{d_s} \\ &\vdots \\ i_r(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{k_1} [\phi_2(\lambda)]^{k_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{k_s}. \end{aligned}$$

   Avec $c_j \geq d_j \geq \dots \geq k_j, \quad j = 1, 2, \dots, s.$

Définition 1.3.6. *[8] Tous les facteurs* $[\phi_1(\lambda)]^{c_1}, \ldots, [\phi_s(\lambda)]^{k_s}$ *distincts de* ***1*** *sont appelés* ***diviseurs élémentaires finis*** *(D.E.F) du faisceau* $\lambda A - B$.

Exemple 1.3.7. *Soient les matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & -6 \end{bmatrix} .$$

Le faisceau $\lambda A - B$ *s'écrit sous forme :*

$$\begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda+3 & \lambda+2 & 2\lambda+5 \\ \lambda+3 & \lambda+2 & 3\lambda+6 \end{bmatrix} .$$

D'où $\Delta_3(\lambda) = |\lambda A - B| = \lambda + 1 \not\equiv 0.$

On cherche d'abord les D.E.F du faisceau $\lambda A - B$. *On a alors :*

* $\Delta_3(\lambda)$ *est le seul mineur d'ordre 3 ; donc* $D_3(\lambda) = |\lambda A + B| = \lambda + 1.$
* *On calcule tous les mineurs d'ordre 2, leur P.G.C.D est* $D_2(\lambda) = 1.$
* *On calcule tous les mineurs d'ordre 1, leur P.G.C.D est* $D_1(\lambda) = 1.$
* *On calcule les polynômes invariants :* $i_1(\lambda) = \lambda+1$, $i_2(\lambda) = 1$, $i_3(\lambda) = 1$ *car* $D_0 \equiv 1.$
  Donc $\lambda + 1$ *est le seul diviseur élémentaire fini.*

Ainsi le faisceau $\lambda A - B$ *est équivalent à la forme quasi-diagonale canonique :*

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda+1 \end{bmatrix} .$$

Chapitre Deux

Résolutions des systèmes linéaires en dimension finie

Les systèmes différentiels linéaires ont une grande importance pratique, car de nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser par des tels systèmes. On sait d'autre part résoudre complétement les systèmes à coefficients constants, le calcul des solutions se fait par la méthode de la matrice exponentielle [5] et aussi par la méthode de la transformée de Laplace [14].

Tout système linéaire de **n** équations différentielles du premier ordre à coefficients constants est de la forme vectorielle suivante

$$x'(t) = Tx(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

où $x(t)$ est un vecteur colonne avec les composantes $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, T est une matrice carrée constante et $f(t)$ est un vecteur colonne avec les composantes $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ est appelé système de la forme normale. La solution du système (2.1) est la somme de la solution générale du système homogène correspondant

$$x'(t) = Tx(t), \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

et une solution particulière du système (2.1).

Si le système linéaire est donné sous la forme

$$A_1 x'(t) = Bx(t) + \varphi(t), \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

où A_1 est une matrice inversible ($\det A_1 \neq 0$), alors il suffit de multiplier par A_1^{-1} le système (2.3) pour obtenir le système de la forme (2.1) avec $T = A_1^{-1}B$ et $\varphi(t) = A_1 f(t)$.

2.1 Méthode de la matrice exponentielle

- **Étude du système homogène de la forme** (2.2)

Définition 2.1.1. *Une matrice fondamentale de solutions est une matrice M dont les colonnes sont $\boldsymbol{n}$ solutions linéairement indépendantes de* (2.2).

Théorème 2.1.2. *La matrice $M(t) = e^{tT}$ est une matrice fondamentale de solutions du système* (2.2).

Remarque 2.1.1. *Si $M(t)$ est une matrice fondamentale de solutions du système* (2.2)*, alors la solution générale est donnée par $x(t) = M(t)v$, $v \in \mathbb{K}^n$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$.*

Proposition 2.1.3. *Soint T une matrice carrée d'ordre $\boldsymbol{n}$, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors, l'application*

$$\varphi \;:\; I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$t \mapsto e^{tT}$$

est de classe C^1 sur I. De plus, $\forall t \in I$: $\quad \varphi'(t) = T\varphi(t) = \varphi(t)T$.

Exemple 2.1.4. *Par la méthode de la matrice exponentielle $M(t) = e^{tT}$ résolvons le système non homogène* (2.1)*, où*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0.$$

Solution. Le polynôme caractéristique de T est $P_T(\lambda) = det(T - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ admet deux racines simples (qui sont les valeurs propres de T) $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. Les vecteurs propres correspondants sont respectivement $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$ car $det(P) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Par conséquent, T est diagonalisable. D'où $T = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par suite, la matrice fondamentale de solutions est

$$\begin{aligned} M(t) &= e^{tT} = e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, la solution du système (2.1) sera par la méthode de la variation de la constante :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) = M(t)v + \int_0^t M(t-s)f(s)ds = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{2t-2s} - e^{3t-3s} & 2e^{2t-2s} - 2e^{3t-3s} \\ -e^{2t-2s} + e^{3t-3s} & -e^{2t-2s} + 2e^{3t-3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s} \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 2(c_1+c_2)e^{2t} - (c_1+2c_2)e^{3t} + 2(t+2)e^{2t} - \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{t} \\ -(c_1+c_2)e^{2t} + (c_1+2c_2)e^{3t} - (t+3)e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 2.1.5. *Résolvons le système homogène (2.2), où* $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution. On peut vérifier aisément que la matrice T n'est pas diagonalisable. Dans ce cas on va calculer l'exponentielle de la matrice T par la définition en remarquant que

$$T = 2I + N, \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nilpotente ; car $N^3 = N^4 = \cdots = 0$. Il est clair que les matrices I et N commutent, on en déduit que $e^{tT} = e^{2tI}e^{tN}$; mais

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k N^k}{k!} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$e^{tT} = e^{2t}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3t + \frac{t^2}{2})e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution générale du système homogène (2.2) est

$$x(t) = e^{tT}v = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3t + \frac{t^2}{2})e^{2t} \\ 0 & 1 & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3(3t + \frac{t^2}{2})e^{2t} \\ c_2te^{2t} - c_3te^{2t} \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix},$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes réelles arbitraires.

2.2 Résolution des systèmes diffèrentiels par la transformation de Laplace

On appelle **fonction originale** toute fonction à valeurs complexes $x(t)$ de la variable réelle t qui satisfait aux conditions suivantes[15] :

1. $x(t) = 0$ si $t < 0$.
2. $x(t)$ est intégrable sur tout l'intervalle fini de l'axe des t.
3. Lorsque t augmente, le module de la fonction $x(t)$ ne croît pas plus rapidement qu'une certaine fonction exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe des nombres $M > 0$ et $\alpha \geq 0$ tels que pour tout t l'on ait

$$|x(t)| \leq Me^{\alpha t}. \tag{2.4}$$

On appelle **transformée** ou **transformation de Laplace** de $x(t)$ *“ la fonction originale de* $x(t)$ “ la fonction $\tilde{x}(\lambda)$ de la variable complexe λ définie par [14]

$$\tilde{x}(\lambda) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-\lambda t}dt \tag{2.5}$$

où $Re\lambda > \alpha$.

Application :

Soit à chercher une solution du système de deux équations différentielles à coefficients constants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t), \end{cases} \tag{2.6}$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0. \tag{2.7}$$

Supposons que les fonctions $f_1(t), f_2(t), x(t), y(t)$ sont des fonctions originales. D'après la règle de dérivation des originaux et en tenant compte de (2.7), la transformée de Laplace des fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$ sont $\lambda\tilde{x}(\lambda) - x_0$ et $\lambda\tilde{y}(\lambda) - y_0$ respectivement.

En appliquant la transformée de Laplace aux membres de chacune des équations du système (2.6), on obtient un système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \lambda\tilde{x}(\lambda) = a_1\tilde{x}(\lambda) + b_1\tilde{y}(\lambda) + \tilde{f}_1(\lambda) + x_0, \\ \lambda\tilde{y}(\lambda) = a_2\tilde{x}(\lambda) + b_2\tilde{y}(\lambda) + \tilde{f}_2(\lambda) + y_0. \end{cases}$$

C'est un système de deux équations algébriques linéaires à deux inconnues $\tilde{x}(\lambda)$ et $\tilde{y}(\lambda)$. En le résolvant, on trouve $\tilde{x}(\lambda)$ et $\tilde{y}(\lambda)$ et ensuite, en passant aux originaux, on obtient la solution $x(t)$, $y(t)$ du système (2.6) satisfaisant aux conditions initiales (2.7) .

Remarque 2.2.1. *En opérant de manière analogue, on résout les systèmes linéaires de la forme*

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l + f_k(t), \qquad a_{kl} = const, \qquad x_k(0) = x_k^0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemple 2.2.1. *Soit à résoudre le système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y + 5, \\ \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t, \end{cases}$$

qui satisfait à la condition initiale $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

Solution. *Dans notre exemple $f_1(t) = 5$ et $f_2(t) = -37t$. D'où $\tilde{f}_1(t) = \frac{5}{\lambda}$ et $\tilde{f}_2(t) = \frac{-37t}{\lambda^2}$. En appliquant la transformée de Laplace, le système sera de la forme*

$$\begin{cases} \lambda x(\lambda) = -7x(\lambda) + y(\lambda) + \frac{5}{\lambda}, \\ \\ \lambda y(\lambda) = -2x(\lambda) - 5y(\lambda) - \frac{37}{\lambda^2}, \end{cases}$$

En le résolvant on obtient

$$\tilde{x}(\lambda) = \frac{5\lambda^2 + 25\lambda - 37}{\lambda^2(\lambda^2 + 12\lambda + 37)}, \qquad \tilde{y}(\lambda) = \frac{-47\lambda - 259}{\lambda^2(\lambda^2 + 12\lambda + 37)}.$$

Décomposons en éléments simples les fractions figurant aux second membres, il vient

$$\tilde{x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\lambda + 6}{(\lambda + 6)^2 + 1},$$
$$\tilde{y}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{7}{\lambda^2} - \frac{\lambda + 6}{(\lambda + 6)^2 + 1} + \frac{1}{(\lambda + 6)^2 + 1}.$$

En passant aux originaux, on obtient la solution cherchée

$$x(t) = 1 - t - e^{-6t}\cos t, \qquad y(t) = 1 - 7t + e^{-6t}\cos t + e^{-6t}\sin t.$$

Remarque 2.2.2. *On peut utiliser la transformée de Laplace [6, 17] pour les systèmes implicites (3.8) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Chapitre Trois

Stabilité des systèmes différentiels explicites

3.1 Stabilité en dimension finie

Nous présentons dans cette section certaines types les plus simples de points de repos, ainsi que, leurs natures.

Définition 3.1.1. *[12]. Soit Considérons le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx_i}{dx} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Une solution $\varphi_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ du système (3.1) satisfaisant aux conditions initiales $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i_0}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$ est dite ***stable au sens de Liapounov*** *si quel que soit $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute solution $x_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$, du système (3.1) dont les valeurs initiales satisfont aux conditions*

$$|x_i(t_0) - \varphi_{i_0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

l'on ait les inégalités

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

pour tous les $t \geq t_0$.

Proposition 3.1.2. *Si la condition (3.2), en plus des inégalités (3.3) est aussi vérifée la condition*

$$\lim_{t \to \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

alors la soluion $\varphi_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ est dite ***asymptotiquement stable****.*

Remarque 3.1.1. *L'étude de la stabilité de la solution du système* (3.1) *peut être ramener à celle de la solution nulle, d'un certain système analogue au système* (3.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.5}$$

où $F_i(0, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$

Définition 3.1.3. *On dit que le point* $x_i = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$ *est* ***un point de repos*** *du système* (3.5)

Exemple 3.1.4. *Etudions la stabilité de la solution de l'équation suivante :*

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t + x$$

qui satisfait à la condition initiales $x(0) = 0$.

Solution. Cette équation est linéaire non homogène. Sa solution générale est $x(t) = Ce^{-t} + t$. A la condition initiale $x(0) = 0$ satisfait la solution $\varphi(t) = t$ de cette équation. A la condition initiale $x(0) = x_0$ satisfait la solution suivante

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t.$$

Considérons la différence des deux solutions précédentes et écrivons-la sous la forme

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute solution $x(t)$ de cette équation, dont les valeurs initiales satisfont à la condition $|x_0 - 0| < \delta$, vérifie l'inégalté

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|e^{-t} < \epsilon$$

pour tous les $t \geq 0$. Par suite, la solution $\varphi(t) = t$ est stable. De plus, puisque :

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \to \infty} |x_0 - 0|e^{-t} = 0$$

la solution $\varphi(t) = t$ est asymptotiquement stable.

Exemple 3.1.5. *Montrons que la solution du système suivant :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$

qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = 0, \ y(0) = 0$ *est stable.*

Solution. La solution de ce système satisfaisant aux conditions initiales données est $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. Toutes solution de ce système satisfaisant aux conditins initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ est de la forme

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \qquad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Prenons un $\epsilon > 0$ quelconque et montrons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour $|x_0 - 0| < \delta$, $|y_0 - 0| < \delta$ on ait les inégalités

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \epsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \epsilon,$$

pour tous $t \geq 0$. Cela signifiera justement, en vertu de la défintion même, que la solution nulle $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ de ce système est stable au sens de Liapounov. On a évidemment

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|,$$

$$|x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0|$$

pour tous les $t \geq 0$. Donc, si $|x_0| + |y_0| < \epsilon$, on a à plus forte raison

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \epsilon, \qquad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \epsilon$$

pour tous les $t \geq 0$.

Par conséquent, si l'on prend par exemple $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, alors, pour $|x_0| < \delta$ et $|y_0| < \delta$ on aura les inégalités précédentes pour tous les $t \geq 0$,c'est-à-dire que la solution de ce système est stable au sens de Liapounov, mais cette stabilité n'est pas asymptotique.

Types les plus simples de points de repos.

Considérons un système de deux équations différentielles homogènes à coefficients constants (stationnaire)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{3.6}$$

Pour étudier la stabilité du point de repos du système (3.6) il faut établir l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.7}$$

et chercher ses racines λ_1 et λ_2.

1. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes :
   (a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable).

Exemple 3.1.6. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

est un noeud stable, car $\lambda = -\frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{21}}{2} < 0.$

(b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable).

Exemple 3.1.7. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

est un noeud instable, car $\lambda = 3 \mp \sqrt{2} > 0.$

(c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est instable (col instable).

Exemple 3.1.8. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$$

est un col instable, car $\lambda_1 = -\sqrt{3} < 0$ *et* $\lambda_2 = \sqrt{3} > 0.$

2. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes : $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$

   (a) $p < 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (foyer stable).

   Exemple 3.1.9. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

   est un foyer instable, car $\lambda = -1 \mp i\sqrt{2}.$

   (b) $p > 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est instable (foyer instable).

   Exemple 3.1.10. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y, \end{cases}$$

   est un foyer instable, car $\lambda = 2 \mp i.$

   (c) $p = 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est stable (centre).

   Exemple 3.1.11. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système de l'exemple 3.1.5 ci-dessus est un centre stable, car* $\lambda = \mp i.$

3. Les racines sont multiples :

   (a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable).

Exemple 3.1.12. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

est un noeud stable, car $\lambda = -1$ *est une racine double.*

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable).

Exemple 3.1.13. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x, \end{cases}$$

est un nœud instable, car $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 > 0$.

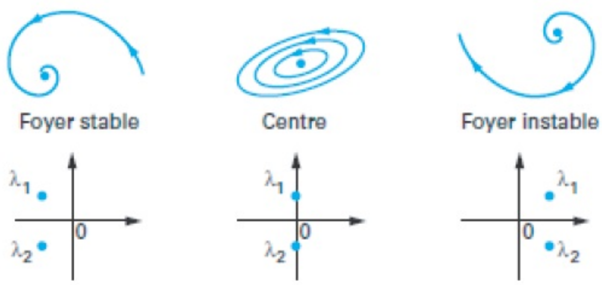

FIGURE 3.1 – Plans de phases pour des valeurs propres λ_1 et λ_2 ayant une partie imaginaire non nulle.

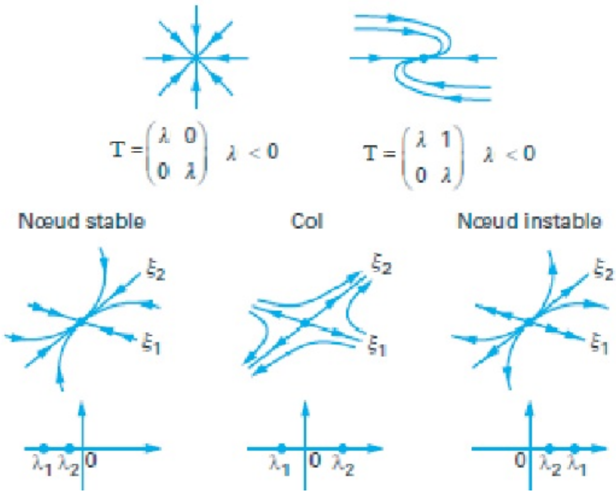

FIGURE 3.2 – Portraits de phases plans et linéaires, lorsque les valeurs propres sont réelles

3.2 Stabilité en dimension infinie

Rappelons que si $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, est un opérateur hermitien, alors son spectre est situé sur l'axe des réels. Le petit segment qui contient $\sigma(T)$ est noté par : $[\lambda_m(T), \lambda_M(T)]$, tels que :

$$\lambda_m(T) = \inf\{\langle Tx, x\rangle; \|x\| = 1\},$$

$$\lambda_M(T) = \sup\{\langle Tx, x\rangle; \|x\| = 1\}$$

et

$$\|T\| = \max\{\lambda_M(T), -\lambda_m(T)\}.$$

Un opérateur T est dit **positif**, si $\langle T(x), x\rangle$ est positif quelque soit $x \neq 0$. Il sera dit **uniformément positif** et on écrit $T \gg 0$, si la forme $\langle T(x), x\rangle$ est uniformément positive sur la sphr̂e unité, c'est-à-dire : si $\lambda_m(T) > 0$. En théorie des équations différentielles, la fonction e^{Tt} joue un rôle spécial et important, elle peut s'écrire avec l'une des deux relation suivantes [4] :

$$e^{Tt} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_T} e^{\lambda t}(T - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où le contour $\Gamma_T \subset \rho(T)$; ou bien

$$e^{Tt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

Définition 3.2.1. *[7] Le système (2.2) est stable si et seulement si $\lim_{k\to 0} ||T^k x|| = 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$. L'opérateur T est stable si et seulement si le système (2.2)est stable.*

Remarque 3.2.1. *La propriété décrite par la définition 3.2.1 est généralement appelée asymptotique la stabilité.*

Proposition 3.2.2.

a. *Si le système (2.2) est stable alors $\sigma_p(T) \subset \overline{\mathcal{D}}_1$.*

b. *Si $\sigma_p(T) \subset \overline{\mathcal{D}}_1$ alors (2.2) est stable.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $\sigma_p(T) \subset \overline{\mathcal{D}}_1$ donc le système (2.2) est stable. Si $\sigma_p(T) \subset \overline{\mathcal{D}}_1$ le spectre est dans la disque unitaire $\overline{\mathcal{D}}_1$ donc $r(t) < 1$, $\exists \delta$ tel que $0 < \delta < 1$:

$$0 < ||T^k x|| \leq \delta^k ||x||, \quad k \to \infty$$

et

$$\lim_{k\to\infty} ||T^k x|| = 0$$

donc le système (2.2) est stable.

$\Leftarrow$ Supposons que $\sigma_p(T) \nsubseteq \overline{\mathcal{D}}_1$ donc $r(t) > 1$ et par $0 < \delta < 1$, tel que $||T^k|| > \delta^k$ et pour $\delta > 1$ donc $||T^k||$ n'est pas borné et $\exists x \in \mathcal{H}$: $||T^k x||$ n'est pas borné , donc T n'est pas stable.

Théorème 3.2.3. *[11] La solution nulle de (2.2) est stable de Liapounov si et seulement si toute valeur propre de T a une partie réelle strictement inférieure à zéro ou égale à zéro et des valeurs propres avec la partie réelle nulle a une structure de Jordan triviale.*

Notez que e^{Tt} est borné la condition sur les valeurs propres de T mentionnée ci-dessus est satisfait.

Théorème 3.2.4. *(Stabilité asymptotique de Liapunov [4]). Les suivants sont équivalents.*

1. *Le système (2.2) est asymptotiquement stable.*
2. *Le système (2.2) est exponentiellement stable.*

3. *Toutes les valeurs propres de T ont des parties réelles strictement négatives.*
4. *Pour tout $G \gg 0$, il existe une solution unique $W \gg 0$ à l'équation (3.13) de Liapunov suivante*
$$WT + T^*W = -2G$$
5. *Il existe $W \gg 0$ qui satisfait l'inégalité matricielle de Liapunov suivante*
$$WT + T^*W \ll 0.$$

Proposition 3.2.5. *[4]*
La norme $\|x\|_{T,r} = \left(\int_0^\infty \|e^{Tt}x\|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$, *$r \geq 1$ est équivalente à la norme originale $\|x\|$.*

Démonstration.

L'assertion de la proposition est équivalente à l'existence de deux constantes positives m_r et M_r et $v > 0, N > 0$ tels que

$$m_r\|x\| \leq \|x\|_{T,r} \leq M_r\|x\|.$$

On a
$$\|x\|^r_{T,r} \leq \|x\|^r \int_0^\infty \|e^{Tt}\|^r dt \leq \|x\|^r N^r \int_0^\infty e^{-\nu rt} dt = \frac{N^r}{\nu r}\|x\|^r \tag{3.8}$$
d'une part.
D'autre part, étant donné
$$\|x\| = \|e^{-Tt}e^{Tt}x\| \leq \|e^{-Tt}\|\|e^{Tt}x\| \leq e^{t\|T\|}\|e^{Tt}x\|. \tag{3.9}$$

On obtient
$$\|x\|_{T,r} = \left(\int_0^\infty \|e^{Tt}x\|^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \geq \|x\| \left(\int_0^\infty e^{-rt\|T\|} dt\right)^{\frac{1}{r}} = \frac{\|x\|}{\sqrt[r]{r\|T\|}}. \tag{3.10}$$

En effet, d'apres (3.9) on a
$$e^{-rt\|T\|}\|x\|^r \leq \|e^{Tt}x\|^r$$

d'où
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \|e^{Tt}x\|^r dt &\geq \int_0^{+\infty} e^{-rt\|T\|}\|x\|^r dt \\
&\geq \|x\|^r \int_0^\infty e^{-r\|T\|t} dt \\
&\geq \|x\|^r [\frac{-1}{r\|T\|}e^{-r\|T\|t}]_0^{+\infty} \\
&\geq \|x\|^r \frac{1}{r\|T\|}.
\end{aligned}$$

D'où
$$\left(\int_0^\infty \|e^{Tt}x\|^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \geq \|x\|\frac{1}{\sqrt[r]{r\|T\|}}$$
Ainsi d'après (3.8) et (3.10), la proposition est prouvée si prend
$$m_r = \frac{1}{r\sqrt[r]{\|T\|}} \qquad et \qquad M_r = \frac{N}{r\sqrt[r]{\|T\|}}.$$

Rappelons que l'équation opératorielle
$$AX + XB = Y$$
admet la solution suivante [4]
$$X = -\int_0^{+\infty} e^{At}Ye^{Bt}dt \tag{3.11}$$

- **Théorème Général de Liapounov**

Théorème 3.2.6. *(Théorème Général de Liapounov)[4]. Le spectre d'un opérateur T est dans le demi plan gauche si et seulement s'il existe un opérateur $W \gg 0$ (uniformement positif) tel que :*
$$Re(WT) \ll 0. \tag{3.12}$$
De plus, si $\sigma(T)$ est à l'intérieur du demi plan gauche, alors pour tout opérateur $G \gg 0$, il existe un opérateur $W \gg 0$ tel que :
$$Re(WT) = -G \quad \Leftrightarrow \quad WT + T^*W = -2G. \tag{3.13}$$

Ainsi, si $Re(T) \ll 0$, le spectre $\sigma(T)$ sera à l'intérieur du demi plan gauche.

Démonstration.

Nécessité : On suppose que le spectre de T, $\sigma(T)$ est à l'intérieur du demi plan gauche. Donc l'équation (3.13) admet une solution sous la forme suivante :
$$W = 2\int_0^\infty e^{Tt}Ge^{Tt}dt,$$

avec $X = W$, $Y = -2G$, $\quad B = A = T = T^*$, alors $\sigma(T^*)$ est aussi à l'intérieur du demi plan gauche et l'opérateur W est uniformément positif

$$\begin{aligned}\langle Wx, x\rangle &= 2\int_0^\infty \langle Ge^{T^*t}x, e^{Tt}x\rangle dt \\ &\geq 2\lambda_m(G)\int_0^\infty \|e^{Tt}x\|^2 dt \\ &\geq 2\lambda_m(G)\|x\|^2_{T,2} \\ &\geq 2\lambda_m(G)m_2^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

Donc la condition nécessaire est prouvée.

Suffisance : Supposons maintenant qu'il existe un opérateur $W \gg 0$ satisfaisant à (3.13) quelque soit $G \gg 0$.
Selon la proposition 3.2.5, la condition suffisante sera vraie si on obtient l'estimation suivante :

$$\|e^{Tt}\| \leq Ne^{-\nu t} \qquad (\nu > 0).$$

Soit

$$\phi(t) = \|e^{Tt}x\|^2_W = (We^{Tt}x, e^{Tt}x).$$

Alors

$$\begin{gathered}\phi'(t) = (WAe^{Tt}x, e^{Tt}x) + (We^{Tt}x, Te^{Tt}x) \\ = ((WT + T^*W)e^{Tt}x, e^{Tt}x) = -2(Ge^{Tt}x, e^{Tt}x) \\ \leq -2\lambda_m(G)\|e^{Tt}x\|^2 \leq \tfrac{2\lambda_m(G)}{\|W\|}\|e^{Tt}x\|^2_W = -2\nu\phi(t)\end{gathered}$$

avec $\nu = \lambda_m(G)/\|W\| > 0$.
intégrons l'inégalité $\phi'(t) \leq -2\nu\phi(t)$:

$$\ln\frac{\phi(t)}{\phi(0)} = \int_0^t \frac{\phi'(s)}{\phi(s)}ds \leq -2\nu t,$$

ce qui implique $\phi(t) \leq \phi(0)e^{-2\nu t}$.
Finalement,

$$\|e^{Tt}x\|_W \leq \|x\|_W e^{-\nu t}.$$

Donc, la condition suffisante est montrée, avec $N = \|x\|_W$.

Chapitre Quatre

Stabilité des systèmes différentiels implicites

4.1 Décomposition spectrale pour le faisceau $\lambda A - B$

- **Le théorème de Riesz généralisé** [16]

Soit T un opérateur borné dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, σ_1 est une partie isolée de son spectre

$$\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2.$$

Ensuite, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\sigma_1} \dot{+} \mathcal{H}_{\sigma_2}$. Où $\mathcal{H}_{\sigma_1}$,$\mathcal{H}_{\sigma_2}$ sont deux sous-espaces T-invariants et

$$\sigma(T/\mathcal{H}_{\sigma_1}) = \sigma_1 \quad , \quad \sigma(T/\mathcal{H}_{\sigma_2}) = \sigma_2.$$

De plus, le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_{\sigma_1}$ est

$$P = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\partial D} (T - \mu I)^{-1} dz;$$

∂D est La frontière d'un certain domaine D tel que $\sigma_1 = \sigma(T) \cap D$.

Cette décomposition peut être généralisée à un faisceau d'opérateurs comme suit :

Soit σ_1 une partie isolée du spectre du faisceau $\lambda A - B$ [18].

Alors,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\sigma_1} \dot{+} \mathcal{H}_{\sigma_2},$$

où

$$\sigma_2 = \sigma(A,B) \setminus \sigma_1;$$

$\mathcal{H}_{\sigma_1}$, $\mathcal{H}_{\sigma_2}$ sont deux sous-espaces invariants par $\lambda A - B$.

Et

$$\sigma(A_k, B_k) = \sigma_k, \quad qui \quad A_k = A|_{\mathcal{H}_{\sigma_k}}; \quad B_k = B|_{\mathcal{H}_{\sigma_k}}, k = 1, 2.$$

Les projecteurs de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_{\sigma_1}$, $\mathcal{H}_{\sigma_2}$ sont :

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}(\lambda A - B)^{-1}A d\lambda \quad , \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} A(\lambda A - B)^{-1} d\lambda \quad ,$$

$$P_2 = I_{\mathcal{H}} - P_1 \quad , \quad Q_2 = I_{\mathcal{H}} - Q_1.$$

∂D désigne la frontière d'un domaine D tel que $\sigma_1 = \sigma(A,B) \cap D$.

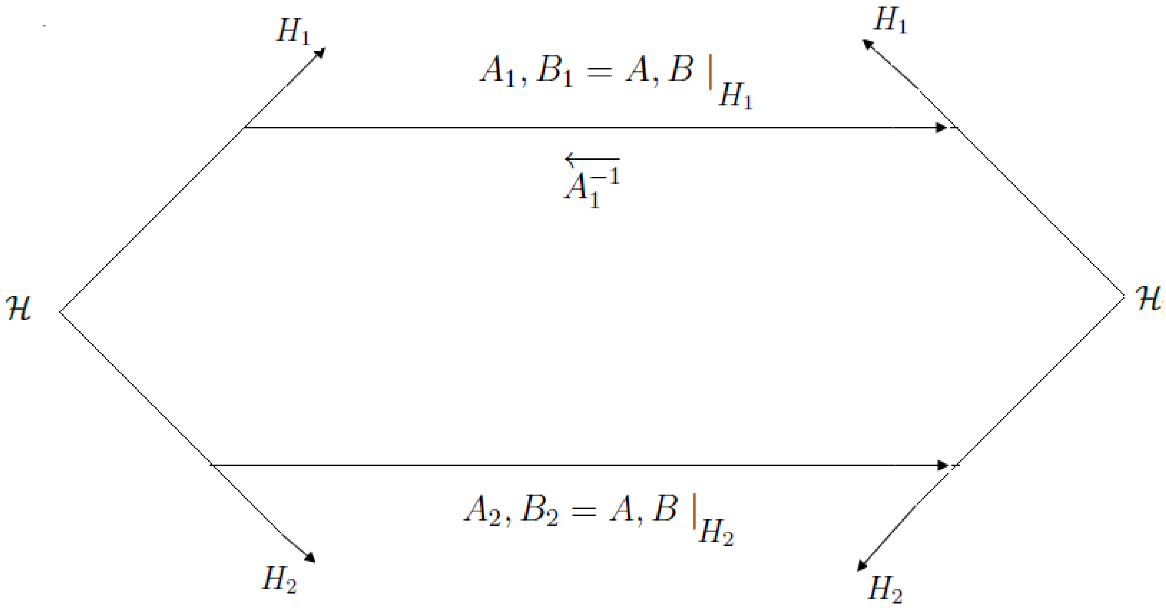

FIGURE 4.1 – Décomposition des espaces

• Projection et décomposition du système (4.2)

De $Px = x_1$ ou $(I-P)x = x_2$, ensuit que $Px' = x_1'$ ou $(I-P)x' = x_2$, , puisque $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Appliquer P ou $(I-P)$ des deux côtés de le système (4.2) donne

$$A_1x_1'(t) = B_1x_1(t), \quad t \geq 0, \quad x_1(t) \in \mathcal{H}_1. \tag{4.1}$$

le système (4.1) appelée, dans la suite, projection de (4.2) sur $\mathcal{H}_1$. Le systèmes correspondant écrit comme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Stabilité des systèmes homogènes

Considérons le système homogène décrit par l'équation implicite

$$Ax'(t) = Bx(t), \quad t \geq 0, \quad x(t) \in \mathcal{H}. \tag{4.2}$$

où A et B sont des opérateurs bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Définition 4.2.1. *Le système (4.2) est dit exponentiellement stable si pour toute solution $x(t)$, $t \geq 0$ nous avons :*

$$||x(t)|| \leq Me^{\alpha t}||x_0||, \tag{4.3}$$

où les constantes M et $\alpha < 0$ ne dépendent pas de la solution $x(t)$.

Définition 4.2.2. *[1]. Le point $\lambda \in \mathbb{C}$ est dit point régulier du faisceau $\lambda A - B$ si l'opérateur $(\lambda A - B)^{-1}$ existe et est borné sur $\mathcal{H}$. L'ensemble des points réguliers est noté par $\rho(A, B)$ et son complémentaire $\sigma(A, B) = \mathbb{C} \setminus \rho(A, B)$ est appelé spectre du faisceau $\lambda A - B$. L'ensemble des valeurs propres du faisceau $\lambda A - B$ est noté par :*

$$\sigma_p(A, B) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} / \exists v \neq 0 : (\lambda A - B)v = 0\big\}.$$

Théorème 4.2.3. *Si le système (4.2) est exponentiellement stable, alors toutes les valeurs propres du faisceau $\lambda A - B$ sont dans le demi-plan $Re\lambda < 0$, où $\alpha = 0$ est la constante définie dans (4.3).*

Démonstration. Supposons qu'il existe une valeur propre $\lambda_0 \in \sigma_p(A, B)$ telle que $Re\lambda_0 \geq -\alpha$. Alors $(\lambda_0 A - B)v = 0$, où v est le vecteur propre correspondant. Par conséquent, $y(t) = e^{\lambda_0 t}v$ est une solution de système (4.2) vérifiant la condition $y(0) = v$. De plus nous avons ;

$$||y(t)|| = ||e^{\lambda_0 t}v|| = e^{(Re\lambda_0)t}||v|| \geq e^{-\alpha t}||y(0)||.$$

Donc, la solution $y(t)$ ne satisfait pas la condition (4.3) et par conséquent le système (4.2) n'est pas exponentiellement stable qui est absurde.

Remarque 4.2.1. *Si le système (4.2) est exponentiellement stable, alors toutes les valeurs propres du faisceau $\lambda A - B$ se trouvent dans le demi-plan gauche : $\sigma_p(A, B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$.*

4.3 Généralisation du Théorème de Liapounov

Nous pouvons maintenant étendre le théorème général de Liapounov [4] relatif au spectre de l'opérateur borné T, au spectre du faisceau $\lambda A - B$ des opérateurs bornés A et B dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ en utilisant la théorie spectrale du faisceau d'opérateurs et une application conforme appropriée comme suit :

Théorème 4.3.1. *Supposons que le faisceau des opérateurs bornés A, B ait un spectre $\sigma(A, B)$ dans le demi-plan gauche. Alors $G \gg 0$ est utilisé pour tout opérateur uniforme non négatif*[1]*, il existe un opérateur $W \gg 0$ tel que.*

$$A^*WB + B^*WA = -G. \tag{4.4}$$

Démonstration. On suppose que $\sigma(A, B) \subset \{\lambda : Re\lambda < 0\}$.Alors i est un point régulier, et $T = i(iA + B)(iA - B)^{-1}$ est un opérateur borné. En utilisant une transformation de type Cayley :

$$\mu = \varphi(\lambda) = \frac{-i\lambda + 1}{\lambda - i}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} T - \mu I &= i(iA + B)(iA - B)^{-1} - (\tfrac{-i\lambda+1}{\lambda-i})(iA - B)(iA - B)^{-1} \\ &= \tfrac{-2}{\lambda-i}(\lambda A - B)(iA - B)^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur $T - \mu I$ est inversible si et seulement si le faisceau $\lambda A - B$ est également inversible. Par conséquent, le spectre de T est égal à $\sigma(T) = \sigma(I, T) = \varphi(\sigma(A, B))$. Par conséquent, $\sigma(T)$ est est dans le disque unitaire. D'après le théorème général de Liapounov [4], nous avons : Il existe un opérateur $W \gg 0$ pour tout opérateur $H \gg 0$ tel que :

$$\begin{aligned} Re(WT) &= \tfrac{WT+T^*W}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}[iW(iA + B)(iA - B)^{-1} - i(-iA^* - B^*)^{-1}(-iA^* + B^*)W] \\ &= \tfrac{i}{2}(-iA^* - B^*)^{-1}[(-iA^* - B^*)W(iA + B) - (-iA^* + B^*)W(iA - B)](-iA - B)^{-1} \\ &= (-iA^* - B^*)^{-1}(A^*WB + B^*WA)(iA - B)^{-1} = -H \end{aligned}$$

1. Cela indique que G est un opérateur auto-adjoint ($G = G^*$), et le produit scalaire est défini non négatif ($\langle Gx, x\rangle \geq a||x||^2, a > 0$).

C'est la même chose que

$$A^*WB + B^*WA = -G,$$

où

$$-G = (iA^* + B^*)H(iA - B) \ll 0.$$

En réalité,

$G^* = G$ et $\langle Gx, x\rangle \geq a||x||^2, a > 0$. Donc, la relation (4.4) est vérifiée.

Théorème 4.3.2. *Supposons que i soit un point régulier pour le faisceau des opérateurs bornés $\lambda A - B$, et qu'il existe un opérateur $W \gg 0$ tel que*

$$A^*WB + B^*WA \ll 0. \tag{4.5}$$

Le faisceau $\lambda A - B$ spectre $\sigma(A, B)$ est alors dans le demi-plan gauche.

Démonstration. Si $i \in \rho(A, B)$ après cela, l'opérateur $T = i(iA + B)(iA - B)^{-1}$ est borné, et la relation (4.5) devient

$$-(iA^* + B^*)Re(WT)(iA - B) = A^*WB + B^*WA \ll 0.$$

Par conséquent,

$$Re(WT) \ll 0.$$

En utilisant Théorème classique de Liapounov [4] le spectre $\sigma(T)$ sera à l'intérieur du disque unitaire. En conclusion,

$$\sigma(A, B) = \varphi^{-1}(\sigma(T)) \subset \{\lambda : Re\lambda < 0\}$$

où

$$\lambda = \varphi^{-1}(\mu) = \frac{i\mu + 1}{\mu + i}$$

le théorème 4.3.2 est démontré.

Théorème 4.3.3. *Si la relation est (4.4) est satisfaisante pour le couple (W, G) opérateurs non négatifs uniformes. Alors, le faisceau $\lambda A - B$. n'a pas de valeur propre i .*

Démonstration. Supposons par absurde, que $i \in \sigma_p(A, B)$. On désigne par $\nu \neq 0$ le vecteur propre correspondant. Alors, $(iA - B)\nu = 0$ ou $B\nu = iA\nu$, et le produit scalaire devient dans ce cas :

$$\begin{aligned}\langle G\nu,\nu\rangle &= \langle B^*WA\nu,\nu\rangle + \langle A^*WB\nu,\nu\rangle \\ &= \langle WA\nu, B\nu\rangle + \langle WB\nu, A\nu\rangle \\ &= -i\langle WA\nu, A\nu\rangle + i\langle WA\nu, A\nu\rangle = 0.\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse, nous avons une contradiction. $G \gg 0$.
Ou

$$\langle G\nu,\nu\rangle \geq a||\nu||^2 > 0;$$

et le théorème 4.3.3 est prouvé.

Remarque 4.3.1. *En utilisant les théorèmes 4.3.1-4.3.3, nous pouvons obtenir les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité pour les systèmes stationnaires dégénérés. En utilisant la notion de diviseurs élémentaires du pinceau des matrices (chap. XII) [8], on arrive au résultat suivant dans les espaces de dimension finie :*

Corollaire 4.3.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes dans les espaces de dimension finie :*

i) *Le système (4.2) exponentiellement stable ;*

ii) $\sigma(A,B) = \sigma_p(A,B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \ : Re\lambda < 0\}$ *;*

iii) *Il existe une matrice définie non négative $W \gg 0$ qui a la propriété que*

$$A^*WB + B^*WA \ll 0.$$

Exemple 4.3.5. *Considérons le système (4.2) dans les espaces de dimension finie, soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $A, B \in \mathbb{R}^2$ et $A_1 = A\,|_{\mathcal{H}_1}$ $\quad B_1 = B\,|_{\mathcal{H}_1}$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda A - B = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$det(\lambda A - B) = \lambda + 1 \neq 0$. *Le faisceau est donc régulier.*

- *Diviseurs élémentaires finis (D.E.F)*

$$D_2(\lambda) = \lambda + 1, \quad D_1(\lambda) = 1, \quad D_0(\lambda) = 1.$$

- *Recherche de polynômes dits invariants*

$$i_1(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda + 1, \;\; i_2(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = 1.$$

Donc d'après le Théorème de Weierstrass's [8]

$$\lambda A - B \equiv \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = diag[\lambda+1, \quad 1] = diag[\lambda A_1 - B_1, \quad -B_2].$$

Depuis

$$\sigma(A;B) = \sigma_1(A_1;B_1) = \sigma_p(A;B) = \{-1\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\},$$

alors le système (4.2) est exponentiellement stable.

Conclusion

Stabilité des systèmes implicites (continu et discret) en généralisant le théorème de Liapounov.

Le chapitre 4 est consacré à la dimension infinie, duquel de nombreux travaux ont été consacrés [1, 17, 18]. On a pu étudier dans ce chapitre la stabilité des systèmes différentiels homegène .

Bibliographie

[1] M.Benabdallah, A.G.Rutkas and A.A.Soloviev. On the stability of degenerate difference systems in Banach spaces,J.Sov.Math ., 57(1991), 3435–3439.

[2] H.Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Dunod, Paris, (1999).

[3] S.L.Campbell, C. D. Meyer and J.Rose.N. Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J Appl Math, Vol 31 no 1, nov (1976), pp 411-425.

[4] J.L.Daletc´kiĭ , M.G.Krein. Stability of solutions of differential equations in Banach space, American Math Society Providence, 43(1975).

[5] J.P.Demailly. Analyse numerique et équations différentielles, OPU. Alger,(1994).

[6] A.Favini and A.Yagi. Degenerate differential equations in Banach spaces, Marcel Dekker Inc. New York.Basel.Hong Kong,(1999).

[7] P.A. Fuhrmann, On observability and stability in infinite-dimensional linear systems, JOTA, 12, (1973),pp 173-181.

[8] F.R. Gantmakher , Theory of Matrices, Nauka, Moscow, in Russian, 1988 .

[9] F.R.Gantmacher. The theory of matrices, Chelsea Publishing Company Vol 1 and 2., New York, (1960).

[10] M.Hazi. Topologie au delà des travaux dirigés. Visite guidée dans les espaces normés. OPU. Tome 3, (2009).

[11] R.E.Kalman and J. E. Bertram, Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov, II Discrete-time systems, ASME J. Basic Engineering, ser 1. (1960) ;pp 394-400 .

[12] M.Krasnov, A.Kisselev, G. Makarenko. Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires, editions MIR. Moscou,(1984).

[13] P. Lévy-Bruhl. Introduction à la théorie spectrale, Dunod, Paris, (2003).

[14] M.V.Makarets and V.Yu.Reshetnyak. Ordinary differential equation and calculus of variation, Londan, (1995).

[15] R. Murray, Spiegel, Transformées de Laplace cours et problèmes, 450 exercices resolus, Serie schaum, paris, (1980).

[16] F. Riesz, B. Nagy. Leçons d'Analyse fonctionnelle. Paris,(1968).

[17] A.G. Rutkas. Cauchy problem for the equation $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$, Differ. Uravn., 11, No.11,(1975), pp 1996-2010.

[18] A.G. Rutkas , Spectral methods for studying degenerate differential-operator equations. Springer Science No 144, (2007) ;pp 4246-4263.

[19] L.A.Vlasenko. Evolutionary models with implicit and degenerate differential equations, Dniepropetrovsk ,No 4885.,in Russian (2006).