République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathematiques

Option : Equations différentielles et modélisation

Présenté par :

Melle. Ahlem Sidi yekhlef

Thème

Oscillation de la solution d'une équation différentielle sur les échelles de temps

Encadreur :

M. Ahmed Hammoudi

Professeur à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le : 09 - 06 - 2019.

Devant le jury composé de :

Président :	M. Tawfiq Fawzi Mami	(M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	M. Amin Benaissa Cherif	(M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Encadreur :	M. Ahmed Hammoudi	(Professeur)	C.U.B.B.A.T.

Remerciements

Au début et avant tout, je rends grâce à dieu qui m'a aidé à terminer ce travail.
Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire, le professeur A. Hammoudi. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté et aidé.
Un grand merci à vous monsieur pour avoir eu la patience, la disponibilité de répondre à mes innombrables questions et surtout vos judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Veuillez trouver ici l'expression de mon grand respect et ma profonde admiration pour toutes votre qualités scientifiques et humaines.

*

Mes remerciements s'adressent également aux enseignants, Monsieur T. F. Mami et Monsieur A. Benaissa Cherif pour avoir accepté d'évaluer ce travail et m'avoir fait l'honneur de participer au jury. Je désire aussi remercier toute l'équipe des formateurs du Master Equations Différentielles et Modélisation qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires. J'espère que mon travail soit à la hauteur des exigences formulées pour cette formation.

*

Enfin, un merci tout particulier à ma famille sans qui je n'aurais pu mener ce projet bien : à mes parents, pour leur soutien constant et leur amour infini tout au long de ces années, à mes frères Mohamed et Abd assamed et à ma sœur Sara qui sont toujours là pour avoir encouragé, ils sont vraiment occupés une place particulière dans ma vie.

Dédicaces

Je dédie ce travail,

à mes chers parents,

à mes frères et à ma sœur,

à toute ma famille,

à mes professeurs,

à tous ceux qui m'aiment,

à mes amis(ies) et à tous ceux que j'aime.

Résumé

Ce travail concerne l'oscillation des solutions des équations dynamiques de second ordre semi-linéaires à retard. En utilisant la techniques de transformation de RICATTI généralisée, de nouveaux critères d'oscillation sont obtenus. Nos résultats étendent les théorèmes d'oscillation de type KAMENEV, PHILOS et LI. Plusieurs exemples sont donnés pour illustrer nos résultats.

Mots clés :

semi-linéaire ; oscillation ; les échelles de temps ; le retard.

Sommaire

CHAPITRE 1

Motivation et position du problème

1.1 Introduction

La théorie des échelles de temps qui a récemment reçu beaucoup d'attention , a été introduite par le mathématicien Allemand Stefan Hilger en 1988 dans sa thèse de doctorat (voir [17]) afin d'unifier, étendre et généraliser des idées du calcul discret, quantique et continu au calcul d'échelle de temps arbitraire, où une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Beaucoup de résultats que l'on rencontre dans l'étude des équations différentielles et de différence restent valables dans le cas des échelles de temps. De plus, cette nouvelle théorie nous permet d'étudier des problèmes intéressants . Actuellement, la théorie des équations dynamiques [1] sur les échelles de temps qui est un champs large dans les mathématiques pures et appliquées sur l'existence et l'unicité des solutions a non seulement unifié les théories des équations différentielles et de différence mais étend aussi ces cas classiques aux équations de q-différence quand $\mathbb{T} = \{q^n : n \in \mathbb{N}\}$ avec $q > 1$.

Beaucoup des gens posent cette question : " A quoi ça sert cette nouvelle théorie ? ".

Le calcul sur les échelles de temps a un potentiel d'applications très vaste. Par exemple, en dynamique de la population, les équations dynamiques sur les échelles de temps peuvent modéliser les populations d'insectes qui sont continues pendant une saison (et peuvent suivre un schéma de différence avec la variable étape ou bien taille), meurent en hiver tandis que leurs œufs sont en incubation ou dormants, et puis éclosent dans une nouvelle saison.

1. une équation dynamique est une équation différentielle qui modélise un phénomène dynamique.

1.2 Position du problème et discussion

Depuis l'introduction de la théorie des échelles de temps, il y a eu beaucoup d'intérêt à étudier le comportement qualitatif (oscillation, périodicité, stabilité, etc.) des équations dynamiques sur les échelles de temps.

La théorie de l'oscillation est une branche importante de la théorie des équations dynamiques appliquée, liée à l'étude des phénomènes oscillants en technologie et sciences naturelles et sociales. Par exemple en médecine (rythme sinusoïdal cardiaque), électricité (oscillations libres d'un circuit LC [2]), physique (la théorie des dynamiques des fluides en astrophysique [3]) et en chimie (réactions oscillantes-ondes chimiques), etc.

L'activité de recherche concernant l'oscillation et la non-oscillation des solutions des équations dynamiques sur les échelles de temps a reçu une attention considérable. Nous renvoyons le lecteur aux [1, 3, 8, 10, 12–14, 16, 20, 25, 26, 31, 32]. Sachant que cette théorie était connue si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ pour les équations différentielles et les équations de différence (voir [2, 11, 15, 18, 19, 21–24, 27, 28, 30]). Un outil important dans l'étude de l'oscillation des solutions est la technique de transformation dite de Riccati qui remonte aussi loin que les résultats classiques de Wintner [28] et Hartman [15] donnant une condition suffisante pour l'oscillation de la solution d'une équation différentielle de la forme

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Par la transformation de Riccati

$$\omega(t) = r(t)\frac{x'(t)}{x(t)}, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

nous pouvons réduire les équations d'ordre deux de type Yan (voir [30]) à l'équation de Riccati (ou l'inégalité) de premier ordre . Le résultat de Wintner [28] a été amélioré par kamenev [18] en 1978, et l'un des résultats principaux est le suivant.

Théorème 1.2.1 (Critère d'oscillation de type kamenev [18])**.** L'équation (1.1) a une solution oscillante si

$$\limsup_{t\to+\infty} {}^{4}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^n q(s)ds = +\infty, \quad \text{pour certains } n > 1. \tag{1.3}$$

2. Un circuit LC est un circuit électrique contenant une bobine (L) et un condensateur (Capacité).
3. Partie de l'astronomie qui étudie les astres, les milieux spatiaux du point de vue physique.
4. la limite supérieure est un outil d'étude des suites de nombres réels. Une telle suite n'est en général ni monotone, ni convergente. Par exemple $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.

Le théorème (1.2.1) a été étendu par plusieurs chercheurs. En 1989, PHILOS [21] a obtenu des nouveaux résultats sur l'oscillation en remplaçant la fonction KERNEL $(t-s)^n$ par une classe générale des fonctions $H(t,s)$. Ce qui suit est le résultat principal de PHILOS.

Soient $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_0$ deux sous-ensemble de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définies comme suit :

$$\mathbb{D}=\big\{(t,s): t\geq s\geq t_0, t,s\in\mathbb{R}\big\} \text{ et } \mathbb{D}_0=\big\{(t,s): t> s\geq t_0, t,s\in\mathbb{R}\big\}. \tag{1.4}$$

Théorème 1.2.2 (Critère d'oscillation de type PHILOS [21])**.** On suppose qu'il existe des fonctions $H\in C(\mathbb{D},\mathbb{R}^+)$ et $h\in C(\mathbb{D}_0,\mathbb{R}^+)$ qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $H(t,t)=0$ pour $t\geq t_0$, $H(t,s)>0$ pour tout $(t,s)\in\mathbb{D}_0$;

(ii) $H_s(t,s)$ [5] ≤ 0 pour tout $(t,s)\in\mathbb{D}_0$;

(iii) $-H_s(t,s)=h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$, pour tout $(t,s)\in\mathbb{D}_0$.

Si

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)q(s)-\frac{1}{4}h^2(t,s)\right]\Delta s=+\infty, \tag{1.5}$$

alors (1.1) a une solution oscillante.

D'après [19], on remarque que les théorèmes (1.2.1) et (1.2.2) ne peuvent pas être appliqués à l'équation différentielle d'EULER

$$x^{''}(t)+\frac{\lambda}{t^2}x(t)=0, \quad \text{pour } t\in\mathbb{R}, \tag{1.6}$$

où $\lambda>0$ est une constante. (1.6) a une solution oscillante si $\lambda>\dfrac{1}{4}$ et non oscillante si $\lambda\leq\dfrac{1}{4}$ (voir [26]).

En 1995, LI [19] a considéré l'équation différentielle linéaire

$$(r(t)x^{'}(t))^{'}+q(t)x(t)=0, \quad \text{pour } t\in\mathbb{R}, \tag{1.7}$$

et afin d'améliorer les critères d'oscillation de PHILOS [21] et YAN [30], LI [19] a utilisé la transformation généralisée de RICCATI.

$$\omega(t)=\Phi(t)r(t)\left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}+\phi(t)\right), \quad \text{pour } t\in\mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Ici, il est supposé que $\Phi(t)>0$ et ϕ sont des fonctions différentiables. A l'aide de ces idées, on peut obtenir des nouvelles conditions d'oscillation qui peuvent être appliquées aux équations qui

5. La dérivée partielle de la fonction H par rapport à sa deuxième variable s.

ne sont pas traitées par la transformation de RICCATI (1.2). Comme il est souligné dans [19], en utilisant la transformation de RICCATI généralisée (1.8), les critères d'oscillation de type KAMENEV peuvent être appliqués à l'équation différentielle d'EULER. Le résultat principal de LI est le suivant.

Théorème 1.2.3 (Critère d'oscillation de type LI [19])**.** Soient $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_0$ deux sous ensembles définies comme (1.4). Soient $H \in C(\mathbb{D}, \mathbb{R}^+)$ et $h \in C(\mathbb{D}_0, \mathbb{R}^+)$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

(i) $H(t,t) = 0$ pour $t \geq t_0$, $H(t,s) > 0$ pour tout $(t,s) \in \mathbb{D}_0$;

(ii) $H_s(t,s) \leq 0$ pour tout $(t,s) \in \mathbb{D}_0$;

(iii) $-H_s(t,s) = h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$, pour tout $(t,s) \in \mathbb{D}_0$.

On suppose aussi qu'il existe une fonction $g \in C^1([t_0, +\infty))$ vérifiant

$$\int_{t_0}^{t} a(s)r(s)h^2(t,s)ds < \infty \quad \text{pour tout } t \geq t_0, \tag{1.9}$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)\psi(s) - \frac{1}{4}a(s)r(s)h^2(t,s) \right] ds = +\infty, \tag{1.10}$$

où $a(s) = \exp\{-2\int^s g(\xi)d\xi\}$ et $\psi(s) = a(s)\{q(s) + r(s)g^2(s) - [r(s)g(s)]'\}$.

Alors (1.7) a une solution oscillante.

En 1996, ROGOVCHENKO [22] a prouvé que le théorème (1.2.3) est vérifié sans l'hypothèse (1.9). Pour le cas d'un retard [6], nous utilisons la transformation modifiée de RICCATI

$$\omega(t) = \Phi(t)r(t)\left(\frac{x'(t)}{x(\tau(t))} + \phi(t)\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

En 2008, en utilisant la transformation de RICCATI généralisée

$$\omega(t) = \Phi(t)r(t)\left(\left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma} + \phi(t)\right), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1.12}$$

avec $\phi(t) = 0$, HASSAN [16] a considéré l'équation dynamique semi-linéaire de second ordre sans retard

$$\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} + q(t)x^{\gamma}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1.13}$$

où γ est un quotient des entiers positifs impairs, r et q sont des fonctions rd-continues positives sur $\mathbb{T}$.

6. Le retard d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_a(t) = f(t-a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

Dans ce qui suit, nous considérerons l'équation dynamique semi-linéaire de deuxième ordre à retard de la forme suivante

$$\left(r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+q(t)f(x(\tau(t)))=0, \quad t\geq t_0>0, \tag{1.14}$$

où la variable indépendante t est dans une échelle de temps $\mathbb{T}$. Puisqu'on s'intéresse à l'oscillation des solutions au voisinage de l'infini, nous supposerons que $\sup\mathbb{T}=+\infty$. Rappelons que nous considérerons seulement les solutions réelles non triviales (non identiquement nulle) $x\in C^1_{rd}([t_0,+\infty)_{\mathbb{T}})$ de l'équation (1.14). La fonction $r(x^{\Delta})^{\gamma}\in C^1_{rd}([t_0,+\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ satisfait (1.14) sur $[t_1,+\infty)_{\mathbb{T}}$ où $t_1>t_0$ est choisi tel que $\tau(t)\geq t_0$ pour $t\geq t_1$. Nous limiterons notre approche aux solutions qui existent sur une demi-droite $[t_1,+\infty)_{\mathbb{T}}$ et satisfaisant la norme $\sup\{|x(t)|:t>t_2\}>0$ pour $t_2>t_1$. Nous utiliserons la transformation de Riccati généralisée

$$\omega(t)=\Phi(t)r(t)\left(\left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(\tau(t))}\right)^{\gamma}+\phi(t)\right), \quad t\in\mathbb{T}. \tag{1.15}$$

Par une observation et un calcul détaillé, nous montrerons que nous pouvons obtenir les mêmes résultats sans introduire le terme $\phi(t)$ dans (1.11) ou (1.15). Pour la simplicité des notations dans les lemmes, les théorèmes et les exemples qui suivent, nous utiliserons $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}:=[t_0,+\infty)\cap\mathbb{T}$ et $(x(\sigma(t)))^{\gamma}=(x^{\sigma}(t))^{\gamma}=(x^{\gamma}(t))^{\sigma}$.

Plan de travail

Ce document est composé de deux chapitres précédés d'une introduction détaillée. Chaque chapitre est composé de plusieurs sections dans lesquelles nous développons les différents aspects du sujet du chapitre.

Après l'introduction, nous trouvons dans le chapitre 2 l'ensemble de toutes les notions de base concernant les calculs sur les échelles de temps : définitions, lemmes et théorèmes que nous utiliserons dans toute la suite du mémoire.

Dans le chapitre 3, nous introduisons les nouveaux critères d'oscillation de la solution de l'équation dynamique de deuxième ordre semi-linéaire à retard présentée par W. Hongwo, L. Erbe et A. Peterson en 2016 (voir [29]) et nous étudions le comportement asymptotique de cette équation. Ces résultats seront illustrés par des exemples..

Finalement, nous donnons une petite conclusion et une bibliographie qui contient les références sur lesquelles nous nous sommes appuyés dans ce travail.

CHAPITRE 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base concernant les calculs sur les échelles de temps. La plupart de ces résultats seront énoncés sans preuve. Les Démonstrations peuvent être consultées dans les livres [4–6].

2.1 Calculs sur les échelles de temps

Définition 2.1.1. [5, 6]. Une échelle de temps notée $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.2. [5, 6]. Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$, on définit l'opérateur de saut avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par :

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

et l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par :

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Par convention, on suppose que $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ (i.e $\sigma(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un maximum t), $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (i.e $\rho(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un minimum t).

Les définitions ci-dessus pour l'opérateur de saut avant et l'opérateur de saut arrière prêtent à la classifications des points dans une échelle de temps.

Définition 2.1.3. [5, 6]. Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $t \in \mathbb{T}$.

1. Si $t = \sigma(t) < \sup \mathbb{T}$ alors t est dense à droite.
2. Si $t < \sigma(t)$ alors t est dispersé à droite.

3. Si $\rho(t) = t > \inf \mathbb{T}$ alors t est dense à gauche.
4. Si $\rho(t) > t$ alors t est dispersé à gauche.
5. Si $\rho(t) = t = \sigma(t)$ alors t est un point dense.
6. Si $\rho(t) < t < \sigma(t)$ alors t est un point isolé.

Définition 2.1.4. [5, 6]. La fonction de granulation $\mu : \mathbb{T} \longrightarrow [0, \infty)$ est définie par :

$$\mu(t) := \sigma(t) - t \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}.$$

Définition 2.1.5. [5, 6]. Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps.

- Si $\mathbb{T}$ admet un maximum M dispersé à gauche, alors on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

En résumé,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\rho(\sup \mathbb{T}),\ \sup \mathbb{T}] & \text{si} \quad \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \quad \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

- Si $\mathbb{T}$ admet un minimum m dispersé à droite, alors $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, sinon $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.

Définition 2.1.6. [5, 6]. Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on définit la fonction $f^\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f^\sigma(t) := (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}.$$

Exemple 2.1.1. Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ on a :

$$\sigma(t) = \rho(t) = t, \quad \mu(t) = 0, \quad \mathbb{T}^k = \mathbb{T} = \mathbb{R}.$$

Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ on a :

$$\sigma(t) = t + 1, \quad \rho(t) = t - 1, \quad \mu(t) = 1, \quad \mathbb{T}^k = \mathbb{T} = \mathbb{Z}.$$

Exemple 2.1.2. Soit h un nombre réel positif fixé. On définit l'échelle de temps $h\mathbb{Z}$ par :

$$h\mathbb{Z} = \{hz : z \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \cdots\}.$$

Ici,

$$\sigma(t) = t + h, \quad \rho(t) = t - h, \quad \mu(t) = h \ \text{ et } \ \mathbb{T}^k = \mathbb{T} = h\mathbb{Z}.$$

Exemple 2.1.3. Soit q un nombre réel fixé tel que $q > 1$. On définit l'échelle de temps $\overline{q^{\mathbb{Z}}}$ par :

$$\overline{q^{\mathbb{Z}}} = \{q^Z : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} = \{\cdots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, \cdots\} \cup \{0\}.$$

Ici,

$$\sigma(t) = tq, \quad \rho(t) = \frac{t}{q}, \quad \mu(t) = (q-1)t \ \text{ et } \ \mathbb{T}^k = \mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}.$$

2.2 Différentiabilité et dérivées partielles

2.2.1 Différentiabilité sur les échelles de temps

Maintenant nous considérons une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ (l'espace $\mathbb{R}$ peut être remplacé par n'importe quel espace de Banach) et on définit la delta dérivée de f en un point $t \in \mathbb{T}^k$ de la façon suivante.

Définition 2.2.1. [5, 6]. Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$. On dira que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ [1] de t où

$$|f^{\sigma}(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \qquad \text{pour tout} \quad s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ la Δ-dérivée (ou Hilger dérivée) de f en t.
Si f est Δ-différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la Δ-dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Rappelons quelques propriétés de la delta dérivée qui sont utilisées dans ce travail.

Théorème 2.2.1. [5, 6]. Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$.

1. Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.
2. Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t et on a :
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{2.1}$$
3. Si t est dense à droite, alors f est Δ-différentiable en t si et seulement si $\lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existe et finie. Dans ce cas on a :
$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$
4. Si f est Δ-différentiable en t, alors
$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Exemple 2.2.1. [5,6]. Encore une fois, nous considérons les deux cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ et nous supposons que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en $t \in \mathbb{T}^k$.

1. $\mathbb{T}$ est muni de la topologie induite.

1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{R}$ est un point dense,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

2. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{Z}$ est un point isolé,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

tel que Δ est l'opérateur de différence avant défini par la dernière équation ci-dessus.

Théorème 2.2.2. [5,6]. Soient $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ des fonctions Δ-différentiables en $t \in \mathbb{T}^k$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. La somme $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t). \tag{2.2}$$

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

3. Le produit $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t). \tag{2.3}$$

4. Si $f(t)f^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est Δ-différentiable en t et

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f^{\sigma}(t)}. \tag{2.4}$$

5. Si $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t et

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)}. \tag{2.5}$$

Théorème 2.2.3 (Théorème des accroissements finis [5,6])**.** Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et Δ-différentiable sur $[a, b)$. Alors il existe $\eta,\ \xi \in [a, b)$ tel que

$$f^{\Delta}(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^{\Delta}(\eta).$$

Corollaire 2.2.1. [5,6]. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $[a, b)$. Alors f est dite strictement croissante, strictement décroissante, croissante et décroissante sur $[a, b]$ si $f^{\Delta}(t) > 0$, $f^{\Delta}(t) < 0$, $f^{\Delta}(t) \geq 0$ et $f^{\Delta}(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a, b)$, respectivement.

2.2.2 Dérivées partielles sur les échelles de temps

On introduit la Δ-dérivée partielle pour les fonctions de plusieurs variables sur les échelles de temps.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(\mathbb{T}_i)_{i\in[1,n]\cap\mathbb{Z}}$ des échelles de temps. On note :

1. $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \times \cdots \times \mathbb{T}_n = \{t = (t_1, t_2, \cdots, t_n) : t_i \in \mathbb{T}_i, \text{ pour tout } i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}\}$.
2. $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}_1^k \times \mathbb{T}_2^k \cdots \times \mathbb{T}_n^k$.
3. $\sigma_i(t_i) = \inf\{s \in \mathbb{T}_i : s > t_i\}, \text{ pour tout } i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.
4. $\rho_i(t_i) = \sup\{s \in \mathbb{T}_i : s < t_i\}, \text{ pour tout } i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.
5. $f^{\sigma_i}(t) = f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, \sigma_i(t_i), \cdots, t_n), \text{ pour tout } i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.
6. $f^{s_i}(t) = f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, s_i(t_i), \cdots, t_n), \text{ pour tout } i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.

Définition 2.2.2. [4]. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction. La Δ-dérivée partielle de f par rapport à $t_i \in \mathbb{T}_i^k$ est définie par :

$$\frac{\partial f(t_1, \cdots, t_n)}{\Delta_i t_i} = \lim_{s\to t} \frac{f^{\sigma_i}(t) - f^{s_i}(t)}{\sigma_i(t_i) - s_i}, \quad \text{avec} \quad s_i \in \mathbb{T}_i \backslash \{\sigma_i(t_i)\}.$$

si elle existe et finie.

On peut remplacer la notation $\dfrac{\partial f(t_1, \cdots, t_n)}{\Delta_i t_i}$ par les symboles suivants :

$$\frac{\partial f(t)}{\Delta_i t_i} = \frac{\partial f}{\Delta_i t_i}(t) = f_{t_i}^{\Delta_i}(t) = f^{\Delta_i}(t).$$

Exemple 2.2.2. [4]. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{T} = \mathbb{R} \times h\mathbb{Z}$, avec $h > 0$ par :

$$f(t, s) = t^4 s^2 \text{ pour tout } (t, s) \in \mathbb{T}.$$

Alors

$$f^{\Delta_1}(t) = 4t^3 s^2,$$

et

$$f^{\Delta_2}(t) = \frac{f(t, s + h) - f(t, s)}{h} = t^4 \frac{(s + h)^2 - s^2}{h} = t^4(h + 2s).$$

2.3 Intégration

Pour introduire la notion de la Δ-intégrabilité sur les échelles de temps, nous avons besoin tout d'abord de décrire les fonctions qui sont intégrables et pour cela nous présentons les concepts suivants :

Définition 2.3.1. [5, 6]. Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régulière si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.

Définition 2.3.2. [5, 6]. Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$. On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont Δ-différentiables et ses Δ-dérivées sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}^1_{rd} = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 2.3.1. [5, 6]. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

1. Si f est continue, alors f est rd-continue.
2. Si f est rd-continue, alors f est régulière.
3. L'opérateur de saut avant σ est rd-continue.
4. Si f est rd-continue ou régulière, alors f^σ c'est ainsi.
5. Si f est continue et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est rd-continue ou régulière, alors $f \circ g$ est également rd-continue ou régulière respectivement.

Définition 2.3.3. [5, 6]. Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est pré-différentiable avec un domaine de différentiabilité D si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. f est continue sur $\mathbb{T}$;
2. $D \subset \mathbb{T}^k$;
3. $\mathbb{T}^k \backslash D$ est dénombrable et contient les points dispersés à droite dans $\mathbb{T}$;
4. f est Δ-différentiable en tout point $t \in D$.

Le théorème suivant garantit l'existence des pré-antidérivées.

Théorème 2.3.2 (l'existence de pré-antidérivées [6])**.** Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ régulière. Alors il existe une fonction F pré-différentiable avec un domaine de différentiabilité D telle que

$$F^\Delta(t) = f(t), \quad \text{pour tout} \quad t \in D.$$

Définition 2.3.4. [5,6]. Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ régulière. Toute fonction F donnée par le théorème (2.3.2) s'appelle pré-antidérivée de f. Nous définissons l'intégrale indéfinie d'une fonction régulière f par :

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

avec C est une constante.

Définition 2.3.5. [5,6]. Une fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée antidérivée de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ si

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \text{pour tout } \ t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 2.3.6. [5,6]. Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ régulière. Nous définissons l'intégrale de Cauchy par :

$$\int_a^b f(t)\Delta(t) = F(b) - F(a), \qquad \text{pour tout } \ a, b \in \mathbb{T}. \tag{2.6}$$

Théorème 2.3.3 (Existence d'Antidérivées [5,6])**.** Chaque fonction rd-continue a une antidérivée. En particulier si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors F défini par :

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau, \quad \text{avec } \ t \in \mathbb{T}$$

est une antidérivée de f.

Exemple 2.3.1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ et $a \neq 1$ est une constante, alors

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C, \quad \text{avec } \ C \in \mathbb{R}.$$

Notez que

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t.$$

Le théorème suivant fournit plusieurs propriétés élémentaires de la delta intégrale.

Théorème 2.3.4. [5,6]. Si $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors

1. $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t\,;$
2. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t))\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t\,;$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t\,;$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t\,;$
5. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0\,;$

6. $\displaystyle\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t\,;$
7. $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t\,;$
8. $|f(t)| \leq g(t)$ sur $[a,b)$, alors
$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t;$$
9. Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b] \cap \mathbb{T}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

Définition 2.3.7. [5, 6]. Supposons que $\sup \mathbb{T} = \infty$. L'intégrale impropre est définie par :
$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\Delta t. \tag{2.7}$$

Théorème 2.3.5. [5, 6]. Soient $a, b \in \mathbb{T}$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors
$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt,$$
où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.
2. Si $[a,b] \cap \mathbb{T}$ ne contient que les points isolés, alors
$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t).$$
3. Soient $a, b \in h\mathbb{Z}$ tels que $b > a$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors
$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{k=\frac{b}{h}-1} hf(kh).$$

Exemple 2.3.2. Si $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}}$ avec $q > 1$, alors
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\Delta t = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{t^2}\Delta t = \lim_{b\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu(q^k)}{(q^k)^2} = (q-1) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} q^{-k} = q.$$

Théorème 2.3.6. [5, 6]. Supposons que $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et $\widetilde{\mathbb{T}} := v(\mathbb{T})$ est une échelle de temps. Soit $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$. Si $v^{\Delta}(t)$ et $w^{\widetilde{\Delta}}(v(t))$ existent pour $t \in \mathbb{T}^k$, alors
$$(w \circ v)^{\Delta}(t) = ((w^{\widetilde{\Delta}} \circ v)v^{\Delta})(t), \quad \text{pour } t \in \mathbb{T}^k. \tag{2.8}$$

2.4 L'intégrale de Lebesgue sur les échelles de temps

Dans cette section, nous définissons une théorie de la mesure et l'intégration pour les échelles de temps $\mathbb{T}$ bornées où $a := \min \mathbb{T}$ et $b := \max \mathbb{T}$.

2.4.1 Notion de mesure sur les échelles de temps

Définition 2.4.1. [7]. Soit $\mathcal{F}_1$ une famille d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite de $\mathbb{T}$ de la forme

$$[c, d) = \{t \in \mathbb{T} : c \leq t < d\},$$

où $c, d \in \mathbb{T}$ et $c \leq d$.

Définition 2.4.2. [7]. On définit une mesure additive $m_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$ par

$$m_1([c, d)) = d - c.$$

Une mesure extérieure $m_1^* : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ est définie par :
Pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{T}$,

$$m_1^*(E) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum\limits_{k=1}^{k=n} m_1(A_k) : E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{k=m} A_k \ \text{ avec } \ A_k \in \mathcal{F}_1 \right\} & si \quad b \notin E, \\ +\infty & si \quad b \in E. \end{cases}$$

Définition 2.4.3. [7]. Un ensemble $A \subset \mathbb{T}$ est $\Delta-$mesurable si la relation

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap (\mathbb{T} \backslash A)),$$

est vérifiée pour tout ensemble $E \subset \mathbb{T}$.

Maintenant, on considère la famille

$$\mathcal{M}(m_1^*) = \{A \subset \mathbb{T} : A \text{ est } \Delta - \text{mesurable}\},$$

et la mesure μ_Δ comme étant la restriction de m_1^* sur l'ensemble $\mathcal{M}(m_1^*)$.

Lemme 2.4.1. [7]. L'ensemble de tous les points dispersés à droite de $\mathbb{T}$ est dénombrable, c'est-à-dire, il existe $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ tels que

$$\mathcal{R} := \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) > t\} = \{t_i\}_{i \in I}.$$

Théorème 2.4.1. [7]. Pour tout $t \in \mathbb{T}$ tel que $t < \max \mathbb{T}$. Alors l'ensemble $\{t\}$ est $\Delta-$mesurable et donné par :

$$\mu_\Delta(\{t\}) = \sigma(t) - t.$$

Pour $E \subset \mathbb{T}$, nous définissons

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap \mathcal{R}\},$$

avec $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$.

Corollaire 2.4.1. [7]. L'ensemble $\mathcal{R}$ est $\Delta-$mesurable et pour tout $E \subset \mathbb{T}$ on a

$$\mu_\Delta(E \cap \mathcal{R}) = \sum_{i \in I_E} \sigma(t_i) - t_i = \sum_{i \in I_E} \mu(t_i).$$

Théorème 2.4.2. [7]. Soit $A \subset \mathbb{T}$. Alors A est $\Delta-$mesurable si et seulement si A est mesurable pour la mesure de Lebesgue noté μ_L. Dans ce cas, si $b \notin A$, nous avons la propriété suivante

$$\mu_\Delta(A) = \mu_\Delta(E \cap \mathcal{R}) + \mu_L(A).$$

Corollaire 2.4.2. [7]. Soit E est $\Delta-$mesurable. Alors $\mu_\Delta(E) = \mu_L(E)$ si et seulement si $b \notin E$ et E n'a pas des points dispersé à droite.

2.4.2 Mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions sur les échelles de temps

Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, nous avons besoin d'une fonction auxiliaire $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui prolonge f à l'intervalle $[a, b]$ définie par

$$\widetilde{f}(t) := \begin{cases} f(t) & si \quad t \in \mathbb{T}, \\ f(t_i) & si \quad t \in (t_i, \sigma(t_i)), \ \text{pour } i \in I. \end{cases}$$

Définition 2.4.4. [7]. Une fonction $\varphi : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est $\Delta-$mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\varphi^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{t \in \mathbb{T} : \varphi(t) < \alpha\}$$

est $\Delta-$mesurable.

Proposition 2.4.1. [7]. Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}$ son extension sur $[a, b]$. Alors f est $\Delta-$mesurable si et seulement si $\widetilde{f}$ est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 2.4.5. [9] Soit $E \subseteq \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta-$mesurable. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite $\Delta-$intégrable si et seulement si :

- f est $\Delta-$mesurable.
- $\displaystyle\int_E |f(s)|\Delta s < \infty.$

Théorème 2.4.3. [7]. Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta-$mesurable tel que $b \notin E$ et $\widetilde{E} = E \cup (\cup_{i\in I_E}(t_i, \sigma(t_i)))$. Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$mesurable et $\widetilde{f}$ son extension sur $[a, b]$. Alors, f est $\Delta-$intégrable sur E si est seulement si $\widetilde{f}$ est mesurable au sens de Lebesgue. Dans ce cas on a

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{f}(s)ds = \int_E f(s)ds + \sum_{i\in I_E} \mu(t_i)f(t_i)$$

Nous considérons quelques lemmes qui seront utilisés dans ce travail.

Lemme 2.4.2. [8,12]. Soit $\gamma > 0$ un quotient des entiers positifs impairs et $x^\gamma \in \mathcal{C}^1_{rd}([t_0, \infty)_\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Alors

$$(x^\gamma(t))^\Delta = \begin{cases} \gamma(x^\sigma(t))^{\gamma-1}x^\Delta(t) & \text{si} \quad 0 < \gamma \leq 1, \\ \gamma(x(t))^{\gamma-1}x^\Delta(t) & \text{si} \quad \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Lemme 2.4.3. [8]. Soient $\psi(u) = a_0u - b_0(u - c_0)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$ avec γ est un quotient des entiers positifs impairs, a_0,$c_0 \in \mathbb{R}$ et $b_0 > 0$. Alors $\psi(u)$ atteint sa valeur maximale en $u^* = c_0 + (\frac{a_0\gamma}{b_0(\gamma+1)})^\gamma$ et on a :

$$\max_{u\in\mathbb{R}} \psi(u) = \psi(u^*) = a_0c_0 + \frac{\gamma^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{a_0^{\gamma+1}}{b_0^\gamma}.$$

CHAPITRE 3

Oscillation de la solution d'une équation différentielle semi-linéaire à retard de second ordre sur les échelles de temps

3.1 Définition de l'oscillation

Avant de commencer notre étude, nous avons besoin tout d'abord de donner la définition mathématique d'une fonction oscillante.

Définition 3.1.1. [26]. Une fonction $x : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est dite éventuellement positive, s'il existe $t_0 \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$x(t) > 0, \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Définition 3.1.2. [26]. Une fonction $x : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est dite éventuellement négative, s'il existe $t_0 \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$x(t) < 0, \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Définition 3.1.3. [26]. On dit qu'une fonction $x : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est oscillante sur $[a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ si elle est ni éventuellement positive ni éventuellement négative ; c'est-à-dire pour $T \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ assez grand, l'équation $x(t) = 0$ admet une infinité des zéros au voisinage de l'infini sur $[T, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Elle est dite non oscillante dans la cas contraire.

Exemple 3.1.1. Considérons l'équation différentielle suivante

$$x^{(2)}(t) + x(t) = 0, \qquad \text{pour tout} \quad t \in [0, +\infty)_{\mathbb{R}}.$$

Elle a une solution $x(t) = \sin(t)$ oscillante sur $[0, +\infty)_{\mathbb{R}}$.

Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation différentielle semi-linéaire à retard de second ordre de la forme :

$$\left(r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+q(t)f(x(\tau(t)))=0, \qquad t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.1}$$

On supposera que le problème (3.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}^2_{rd}([t_0,+\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$. On impose les conditions suivantes :

($\mathcal{H}_1$) $\gamma>0$ est de la forme $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ avec γ_1,γ_2 sont des entiers positifs impairs ;

($\mathcal{H}_2$) $\tau\in\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est strictement croissante, $\tau(t)\leq t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty$;

($\mathcal{H}_3$) $r,q\in\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ sont positives, avec q est non identiquement nulle sur tout demi-droite de la forme $[t_*,+\infty)$;

($\mathcal{H}_4$) Il existe une constante $L>0$ telle que $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfait $\dfrac{f(x)}{x^{\gamma}}\geq L$ pour tout $x\neq 0$.

3.2 Cas où l'équation admet une solution non oscillante

Dans cette section, nous supposons que l'équation (3.1) admet une solution éventuellement positive (le raisonnement reste valable si elle est éventuellement négative).

Lemme 3.2.1. [29]. Supposons que l'équation (3.1) admet une solution x éventuellement positive sur $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ telle que

$$\int_{t_0}^{+\infty}\left(\frac{1}{r(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta s=+\infty. \tag{3.2}$$

Alors, il existe $t_1\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$x^{\Delta}(t)>0, \qquad \text{pour tout} \;\; t\in[t_1,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.3}$$

Preuve. Soit x une solution éventuellement positive de l'équation (3.1), alors il existe $t_1\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$x(t)>0, \qquad x(\tau(t))>0, \qquad \text{pout tout} \;\; t\in[t_1,+\infty)_{\mathbb{T}}.$$

D'après (3.1), les conditions ($\mathcal{H}_3$) et ($\mathcal{H}_4$) on a

$$\left(r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}=-q(t)f(x(\tau(t)))\leq -Lq(t)x^{\gamma}(\tau(t))\leq 0, \;\; \text{pour tout} \;\; t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.4}$$

Montrons que

$$r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma}>0, \qquad \text{pour tout} \;\; t\in[t_1,+\infty)_{\mathbb{T}}.$$

En effet, on suppose le contraire c'est-à-dire il existe $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$r\left(t_2\right)\left(x^{\Delta}\left(t_2\right)\right)^{\gamma}:=\alpha\leq 0.$$

Si $\alpha = 0$, alors d'après (3.4) et $(\mathcal{H}_3)$, nous avons

$$\begin{aligned}\left(r\left(t_2\right)\left(x^{\Delta}\left(t_2\right)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}=0 &\overset{(3.4)}{\Longrightarrow} q(t_2)f(x(\tau(t_2)))=0,\\ &\Longrightarrow q(t_2)=0 \;\; \text{ou} \;\; f(x(\tau(t_2)))=0.\end{aligned}$$

$(\mathcal{H}_3)$ nous donne $q(t) \neq 0$ pour $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, alors $f(x(\tau(t_2))) = 0$.
Ce qui contredit le fait que $f(x) > 0$ pour $x > 0$, donc on obtient que $\alpha < 0$.
Puisque la fonction $r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}$ est décroissante sur $[t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$, alors

$$r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma}\leq\alpha, \qquad \text{pour} \;\; t\in[t_2,+\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Ce qui implique que

$$x^{\Delta}(t)\leq\left(\frac{\alpha}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour} \;\; t\in[t_2,+\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Soit $t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}$, alors d'après (3.2) on obtient

$$\begin{aligned}x(t)&=x(t_2)+\int_{t_2}^{t}x^{\Delta}(s)\Delta s\\ &\leq x(t_2)+\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_{t_2}^{t}\left(\frac{1}{r(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta s \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.\end{aligned}$$

Contradiction, car $x(t) > 0$ pour $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$.
Et par suite $r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma} > 0$ pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, ainsi $x^{\Delta}(t) > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ (car r est positive et γ est un impair). □

Lemme 3.2.2. [29]. Supposons que l'équation (3.1) admet une solution x éventuellement positive sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ telle que (3.2) est vérifiée, alors il existe $t_1 \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma}\geq Lx^{\gamma}(\tau(t))\int_{t}^{+\infty}q(s)\Delta s, \qquad \text{pour tout} \;\; t\in[t_1,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.5}$$

Preuve. Par le lemme (3.2.1), nous avons $x^{\Delta}(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$ et par (3.4), on a la fonction $r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}$ est décroissante sur $[t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Alors pour $T \geq t \geq t_1$ suffisamment assez grand, on a

$$\int_t^T \left(r(s)\left(x^{\Delta}(s)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} \Delta s \overset{(3.4)}{\leq} -L\int_t^T q(s)x^{\gamma}(\tau(s))\Delta s,$$

donc

$$r(T)(x^{\Delta}(T))^{\gamma} - r(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} \overset{(2.6)}{\leq} -L\int_t^T q(s)x^{\gamma}(\tau(s))\Delta s,$$

ainsi

$$-r(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} \overset{(3.4),(\mathcal{H}_2),(3.3),(\mathcal{H}_1)}{\leq} -Lx^{\gamma}(\tau(t))\int_t^T q(s)\Delta s,$$

d'où

$$r(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} \geq Lx^{\gamma}(\tau(t))\int_t^T q(s)\Delta s,$$

quand $T \to +\infty$, d'après (2.7) on obtient (3.5). □

3.3 Théorèmes d'existence de l'oscillation

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes pour l'oscillation de la solution x de l'équation (3.1) sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.
Pour la simplification, on note

$$\Phi_+^{\Delta}(t) = \max\{\Phi^{\Delta}(t), 0\}, \quad r^*(t) = \max\{r(\xi) \mid \tau(t) \leq \xi < \tau^{\sigma}(t)\}. \tag{3.6}$$

Maintenant, nous somme prêts à présenter le théorème d'oscillation de type Kamenev.

Théorème 3.3.1. [29]. Supposons que les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ et (3.2) sont vérifiées. On suppose aussi qu'il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\limsup_{t\to+\infty}\left[L\Phi(t)\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s + \int_{t_0}^t \left(L\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)(\Phi_+^{\Delta}(s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s)\Phi(s))^{\gamma}}\right)\Delta s\right] = +\infty, \tag{3.7}$$

où $\Phi_+^{\Delta}(s)$ et $r^*(s)$ sont définies par (3.6).
Alors l'équation (3.1) admet une solution oscillante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Preuve. Supposons le contraire, que (3.1) admet un solution x non oscillante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ donc x est éventuellement positive ou éventuellement négative. Nous considérons seulement le cas où $x(t) > 0$ pour $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, la substitution $y = -x$ transforme (3.1) en une équation de la même forme. Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(\tau(t)) > 0$ pour $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Nous définissons la fonction ω par :

$$\omega(t) := \Phi(t)r(t)\left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(\tau(t))}\right)^{\gamma}, \qquad \text{pour tout} \;\; t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.8}$$

Alors (3.3) du lemme (3.2.1) implique que

$$\omega(t) > 0, \qquad \text{pour tout} \;\; t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

L'inégalité (3.5) du lemme (3.2.2) donne

$$w(t) = \Phi(t)r(t)\frac{(x^{\Delta}(t))^{\gamma}}{x^{\gamma}(\tau(t))} \geq L\Phi(t)\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s, \qquad \text{pour tout} \;\; t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.9}$$

Maintenant, on applique la règle du produit (2.3) et la règle du quotient (2.5) de la Δ-dérivée à la fonction (3.8), de (3.4) et (3.6) on trouve

$$\begin{aligned}
\omega^{\Delta} &\overset{(3.8)}{=} \left(r(x^{\Delta})^{\gamma}\frac{\Phi}{(x\circ\tau)^{\gamma}}\right)^{\Delta} \\
&\overset{(2.3)}{=} [r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\Delta}\frac{\Phi}{(x\circ\tau)^{\gamma}} + [r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}\left[\frac{\Phi}{(x\circ\tau)^{\gamma}}\right]^{\Delta} \\
&\overset{(2.5)}{=} \Phi\frac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\Delta}}{(x\circ\tau)^{\gamma}} + [r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}\left[\frac{\Phi^{\Delta}(x\circ\tau)^{\gamma} - \Phi[(x\circ\tau)^{\gamma}]^{\Delta}}{(x\circ\tau)^{\gamma}(x\circ\tau^{\sigma})^{\gamma}}\right] \\
&\overset{(2.5)}{=} \Phi\frac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\Delta}}{(x\circ\tau)^{\gamma}} + [r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}\left[\frac{\Phi^{\Delta}}{(x\circ\tau^{\sigma})^{\gamma}} - \frac{\Phi[(x\circ\tau)^{\gamma}]^{\Delta}}{(x\circ\tau)^{\gamma}(x\circ\tau^{\sigma})^{\gamma}}\right] \\
&\overset{(3.4)}{\leq} -L\Phi q + \frac{\Phi^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \Phi\frac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}[(x\circ\tau)^{\gamma}]^{\Delta}}{(x\circ\tau)^{\gamma}(x\circ\tau^{\sigma})^{\gamma}} \\
&\overset{(3.6)}{\leq} -L\Phi q + \frac{\Phi^{\Delta}_{+}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \Phi\frac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}[(x\circ\tau)^{\gamma}]^{\Delta}}{(x\circ\tau)^{\gamma}(x\circ\tau^{\sigma})^{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Par le lemme (2.4.2), nous obtenons

$$[(x\circ\tau)^{\gamma}]^{\Delta} = \begin{cases} \gamma(x\circ\tau^{\sigma})^{\gamma-1}(x\circ\tau)^{\Delta}, & \text{si} \quad 0 < \gamma \leq 1, \\ \gamma(x\circ\tau)^{\gamma-1}(x\circ\tau)^{\Delta}, & \text{si} \quad \gamma \geq 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Soit $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{T}$. [1] On distingue deux cas :

1. $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ car $\sup\mathbb{T} = +\infty$ (d'après la définition (2.1.5)).

- Si $\sigma(t) > t$, par (2.1) et le théorème (2.2.3) nous obtenons

$$\begin{aligned}(x \circ \tau)^{\Delta}(t) &\overset{(2.1)}{=} \frac{(x \circ \tau^{\sigma})(t) - (x \circ \tau)(t)}{\sigma(t) - t} \\ &\overset{(2.1)}{=} \frac{(x \circ \tau^{\sigma})(t) - (x \circ \tau)(t)}{\tau^{\sigma}(t) - \tau(t)} \tau^{\Delta}(t) \\ &\overset{(2.2.3)}{\geq} x^{\Delta}(\xi)\tau^{\Delta}(t), \quad \text{où } \ \xi \in [\tau(t), \tau^{\sigma}(t)).\end{aligned} \tag{3.12}$$

- Si $\sigma(t) = t$, alors par la condition $(\mathcal{H}_2)$ nous obtenons $\sigma(\tau(t)) = \tau(\sigma(t)) = \tau(t)$ et (2.8) de théorème (2.3.6) nous donne

$$(x \circ \tau)^{\Delta}(t) = x'(\tau(t))\tau'(t). \tag{3.13}$$

En utilisant (3.11), (3.12) et (3.13) dans (3.10), nous obtenons

$$\omega^{\Delta} \leq -L\Phi q + \frac{\Phi_+^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \begin{cases} \gamma\Phi \dfrac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}(x \circ \tau^{\sigma})^{\gamma-1}x^{\Delta}(\xi)\tau^{\Delta}}{(x \circ \tau)^{\gamma}(x \circ \tau^{\sigma})^{\gamma}}, & \text{si } \ 0 < \gamma \leq 1, \\ \\ \gamma\Phi \dfrac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}(x \circ \tau)^{\gamma-1}x^{\Delta}(\xi)\tau^{\Delta}}{(x \circ \tau)^{\gamma}(x \circ \tau^{\sigma})^{\gamma}}, & \text{si } \ \gamma \geq 1. \end{cases}$$

On multiplie et on divise le terme où $\gamma \geq 1$ par $x \circ \tau^{\sigma}$, on trouve

$$\omega^{\Delta} \leq -L\Phi q + \frac{\Phi_+^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \begin{cases} \gamma\Phi\tau^{\Delta} \dfrac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}}{(x \circ \tau^{\sigma})^{\gamma+1}} \dfrac{(x \circ \tau^{\sigma})^{\gamma}}{(x \circ \tau)^{\gamma}} x^{\Delta}(\xi), & \text{si } \ 0 < \gamma \leq 1, \\ \\ \gamma\Phi\tau^{\Delta} \dfrac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}}{(x \circ \tau^{\sigma})^{\gamma+1}} \dfrac{x \circ \tau^{\sigma}}{x \circ \tau} x^{\Delta}(\xi), & \text{si } \ \gamma \geq 1. \end{cases} \tag{3.14}$$

D'après la condition $(\mathcal{H}_2)$ et (3.3) de lemme (3.2.1), on a

$$\begin{aligned}\sigma(t) \geq t &\overset{(\mathcal{H}_2)}{\Longrightarrow} \tau(\sigma(t)) > \tau(t) \\ &\overset{(3.3)}{\Longrightarrow} x(\tau(\sigma(t))) > x(\tau(t)) \\ &\Longrightarrow \frac{(x \circ \tau^{\sigma})(t)}{(x \circ \tau)(t)} \geq 1, \quad \text{avec } x(\tau(t)) > 0 \text{ pour tout } t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\gamma > 0$, (3.14) devient

$$\omega^{\Delta} \leq -L\Phi q + \frac{\Phi_+^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta} \frac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}}{(x \circ \tau^{\sigma})^{\gamma+1}} x^{\Delta}(\xi), \tag{3.15}$$

où $\xi \in [\tau(t), \tau^{\sigma}(t))$. On a d'après (3.4) que la fonction $r(x^{\Delta})^{\gamma}$ est décroissante et la condition $(\mathcal{H}_2)$ nous donne que $\tau(t) \leq t$ pour $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Alors pour $\xi < \tau^{\sigma}(t) \leq \sigma(t)$ [2], nous avons

$$r(\xi)\left(x^{\Delta}(\xi)\right)^{\gamma} \geq r(\tau^{\sigma}(t))\left(x^{\Delta}(\tau^{\sigma}(t))\right)^{\gamma} \geq r(\sigma(t))\left(x^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\gamma}.$$

Il s'ensuit que

$$x^{\Delta}(\xi) \geq \left(r(\sigma(t))\left(x^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(r(\xi))^{-\frac{1}{\gamma}} \geq \left(r(\sigma(t))\left(x^{\Delta}(\sigma(t))\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(r^{*}(t))^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.16}$$

où $r^{*}(t)$ est définie par (3.6).

On remplace (3.16) dans (3.15), on obtient

$$\begin{aligned} \omega^{\Delta} &\overset{(3.16)}{\leq} -L\Phi q + \frac{\Phi_{+}^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta}\left[\frac{[r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}{(x\circ\tau)^{\gamma+1}}\right]^{\sigma}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &\overset{(3.8)}{=} -L\Phi q + \frac{\Phi_{+}^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta}\left[\frac{\omega^{\sigma}}{\Phi^{\sigma}}\right]^{1+\frac{1}{\gamma}}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= -L\Phi q + \frac{\Phi_{+}^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma})^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}(\omega^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pour

$$a_0 = \frac{\Phi_{+}^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}, \qquad b_0 = \gamma\Phi\tau^{\Delta}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma})^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}} > 0, \qquad c_0 = 0. \tag{3.18}$$

D'après le lemme (2.4.3), (3.17) et (3.18) nous avons

$$\omega^{\Delta}(t) \leq -L\Phi(t)q(t) + \frac{r^{*}(t)(\Phi_{+}^{\Delta}(t))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Phi(t)\tau^{\Delta}(t))^{\gamma}}, \qquad \text{pour} \quad t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus de t_1 à $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$, nous obtenons

$$\omega(t) \leq \omega(t_1) - \int_{t_1}^{t}\left[L\Phi(s)q(s) - \frac{r^{*}(s)(\Phi_{+}^{\Delta}(s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s)\Phi(s))^{\gamma}}\right]\Delta s.$$

Par l'inégalité (3.9), nous avons

$$L\Phi(t)\int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s + \int_{t_1}^{t}\left[L\Phi(s)q(s) - \frac{r^{*}(s)(\Phi_{+}^{\Delta}(s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s)\Phi(s))^{\gamma}}\right]\Delta s \leq \omega(t_1) < \infty$$

donc

$$\limsup_{t\to+\infty}\left[L\Phi(t)\int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s + \int_{t_1}^{t}\left(L\Phi(s)q(s) - \frac{r^{*}(s)(\Phi_{+}^{\Delta}(s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s)\Phi(s))^{\gamma}}\right)\Delta s\right] < \infty.$$

2. la condition $(\mathcal{H}_2)$ est vérifiée car $\sigma(t) \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$ pour tout $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Contradiction avec la condition (3.7). Ceci complète la preuve de théorème (3.3.1). □

Pour $\Phi(t) = t$, on a $\Phi^{\Delta}(t) = 1$ donc $\Phi^{\Delta}_{+}(t) = 1$ et le théorème (3.3.1) devient

Corollaire 3.3.1. [29]. Supposons que les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ et (3.2) sont vérifiées. Si

$$\limsup_{t\to+\infty}\left[Lt\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s + \int_{t_0}^t \left(Lsq(s) - \frac{r^*(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\tau^{\Delta}(s)\right)^{\gamma} s^{\gamma}}\right)\Delta s\right] = +\infty,$$

où $r^*(s)$ est définie par (3.6), alors l'équation (3.1) admet une solution oscillante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Remarques 3.3.1. [29]. Le théorème (3.3.1) est nouveau, puisque nous avons le terme $L\Phi(t)\displaystyle\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s$ dans l'hypothèse (3.7). De plus, le théorème (3.3.1) peut être appliqué aux différentes équations qui ne sont pas traitées par les résultats établis dans [1, 3, 8, 12, 14–16, 18–22, 24, 28, 32]. Nous illustrons l'importance de ce terme dans l'exemple suivant.

Exemple 3.3.1. [29]. Considérons l'équation dynamique semi-linéaire à retard de second ordre suivante

$$\left((x^{\Delta}(t))^{\gamma}\right)^{\Delta} + \frac{\lambda}{t\sigma^{\gamma}(t)}(x(\tau(t)))^{\gamma} = 0, \quad \text{pour } t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3.19}$$

où $\mathbb{T}$ est une échelle de temps arbitraire et $t_0 > 0$ un élément de $\mathbb{T}$, $\lambda > 0$ et $0 < \gamma \leq 1$ est un quotient des entiers positifs impairs. On prend $\Phi(t) = t$.
En faisant correspondre (3.19) à l'équation (3.1), on obtient

$$r(t) \equiv 1, \quad q(t) = \frac{\lambda}{t\sigma^{\gamma}(t)}, \quad f(x(\tau(t))) = x^{\gamma}(\tau(t)),$$

donc d'après (3.6) et la condition $(\mathcal{H}_4)$

$$r^*(t) = 1, \quad \text{et} \quad L = 1.$$

D'après la règle de la Δ-dérivée (2.4), on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{t^{\gamma}}\right)^{\Delta} &= -\frac{(t^{\gamma})^{\Delta}}{t^{\gamma}\sigma^{\gamma}(t)}\\
&= -\frac{1}{t^{\gamma}\sigma^{\gamma}(t)}\frac{\sigma^{\gamma}(t) - t^{\gamma}}{\sigma(t) - t}\\
&= -\frac{1}{t^{\gamma}\sigma^{\gamma}(t)}\frac{\gamma\eta^{\gamma-1}(\sigma(t) - t)}{\sigma(t) - t}\\
&\geq -\frac{\gamma t^{\gamma-1}}{t^{\gamma}\sigma^{\gamma}(t)} = -\frac{\gamma}{t\sigma^{\gamma}(t)}, \qquad \eta \in [t, \sigma(t)].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Donc par le corollaire (3.3.1) et (3.20), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\left[Lt\int_t^{+\infty}q(s)\Delta s+\int_{t_0}^t\left(Lsq(s)-\frac{r^*(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\tau^\Delta(s)\right)^\gamma s^\gamma}\right)\Delta s\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\left[t\int_t^{+\infty}\frac{\lambda}{s\sigma^\gamma(s)}\Delta s+\int_{t_0}^t\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\tau^\Delta(s)\right)^\gamma s^\gamma}\right)\Delta s\right]\\
&\geq\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}t^{1-\gamma}+\int_{t_0}^t\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\tau^\Delta(s)\right)^\gamma s^\gamma}\right)\Delta s\right].
\end{aligned}\tag{3.21}$$

- Si $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ et $\tau(t)=t-\tau$ pour $\tau\geq 0$, alors les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ et (3.2) sont vérifiées. En effet,

  $*$ Il est supposé que $0<\gamma\leq 1$ est un quotient des entiers positifs impairs, donc $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.

  $*$ la fonction τ est continue donc rd-continue sur $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$, elle est strictement croissante (car $\tau^\Delta(t)=1>0$) et tend vers l'infini quand t tend vers $+\infty$.

  $*$ On a $r(t)\equiv 1>0$ positive et continue donc rd-continue sur $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ et $q(t)=\dfrac{\lambda}{t\sigma^\gamma(t)}$ est positive car $\lambda>0$ ainsi t et $\sigma(t)$ sont dans $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ avec $t_0>0$.

  $*$ On a $f(x)=x^\gamma$ continue sur $\mathbb{R}$ (avec $\gamma>0$) et satisfait $\dfrac{f(x)}{x^\gamma}\geq L$ avec $L>0$ et $x\neq 0$.

  $*$ $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}r(s)\Delta s=\int_{t_0}^{+\infty}ds=+\infty.$

Pour $0<\gamma<1$ et $\lambda>\dfrac{\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}$, on a

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}t^{1-\gamma}+\int_{t_0}^t\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\tau^\Delta(s)\right)^\gamma s^\gamma}\right)\Delta s\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}t^{1-\gamma}+\int_{t_0}^t\left(\frac{\lambda}{s^\gamma}-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}s^\gamma}\right)ds\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}+\frac{1}{1-\gamma}\left(\lambda-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right)\right]t^{1-\gamma}-\frac{1}{\gamma-1}\left[\lambda-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right]t_0^{1-\gamma}\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{\gamma(1-\gamma)}\left(\lambda-\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right)t^{1-\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\left(\lambda-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right)t_0^{1-\gamma}\\
&=+\infty
\end{aligned}$$

Donc (3.19) admet une solution oscillante si $0<\gamma<1$ et $\lambda>\dfrac{\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}$.

- Si $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, $\gamma=1$ et $\tau(t)=t$, (3.19) devient

$$x''(t)+\frac{\lambda}{t^2}x(t)=0,\qquad t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{R}},$$

qui est l'équation différentielle d'Euler. De (3.21), on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}t^{\gamma-1}+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\tau^\Delta(s)\right)^\gamma s^\gamma}\right)\Delta s\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\left[\lambda+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\lambda}{s}-\frac{1}{4s}\right)ds\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\left[\lambda+\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda-\frac{1}{4}}{s}ds\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\left[\lambda+\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)(\ln t-\ln t_0)\right]=+\infty,
\end{aligned}$$

si $\lambda>\dfrac{1}{4}$ qui est la condition d'oscillation pour l'équation différentielle d'Euler.

► A partir de cet exemple, on conclut que l'équation (3.19) admet une solution oscillante si la condition $\lambda>\dfrac{\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}$ est vérifiée avec $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ et $0<\gamma\leq 1$. De plus, les résultats obtenus dans [1–3, 8, 12, 14–16, 18–24, 27, 28, 30, 32] imposent à cette condition.

- On considère maintenant l'échelle de temps quantique $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}=\{q^n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$ où $q>1$, $\tau(t)=\dfrac{t}{\tau}$ avec $t=q^n\in\mathbb{T}$ et $\tau=q^m$ avec $n,m\in\mathbb{N}$ tel que $m<n$.

Alors les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ avec (3.2) sont vérifiées [3].

D'après la règle de la $\Delta-$dérivée (2.5), on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{t^\gamma}\right)^\Delta &=\frac{t^\gamma-t(t^\gamma)^\Delta}{t^\gamma\sigma^\gamma(t)}=\frac{1}{\sigma^\gamma(t)}-\frac{t(t^\gamma)^\Delta}{t^\gamma\sigma^\gamma(t)}=\frac{1}{\sigma^\gamma(t)}-\frac{t}{t^\gamma\sigma^\gamma(t)}\frac{\sigma^\gamma(t)-t^\gamma}{\sigma(t)-t},\\
&=\frac{1}{\sigma^\gamma(t)}-\frac{t}{t^\gamma\sigma^\gamma(t)}\frac{\gamma\eta^{\gamma-1}(\sigma(t)-t)}{\sigma(t)-t},\\
&\geq\frac{1}{\sigma^\gamma(t)}-\frac{t\gamma t^{\gamma-1}}{t^\gamma\sigma^\gamma(t)}=\frac{1-\gamma}{\sigma^\gamma(t)}\qquad\text{pour}\quad\eta\in[t,\sigma(t)].
\end{aligned}\tag{3.22}$$

De (3.21) et (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}t^{1-\gamma}+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\tau^\Delta(s)\right)^\gamma s^\gamma}\right)\Delta s\right].\\
&\geq\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}t^{1-\gamma}-\frac{\lambda}{\gamma}t_0^{1-\gamma}+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{\tau^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}s^\gamma}\right)\Delta s\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{s}{s^\gamma}\right)^\Delta\Delta s+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{\tau^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}s^\gamma}\right)\Delta s\right]\\
&\geq\limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma}\int_{t_0}^{t}\frac{1-\gamma}{\sigma^\gamma(s)}\Delta s+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\lambda}{\sigma^\gamma(s)}-\frac{\tau^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}s^\gamma}\right)\Delta s\right]\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\lambda}{\gamma\sigma^\gamma(s)}-\frac{\tau^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}s^\gamma}\right]\Delta s.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

3. De la même manière que le cas précédant, on peut montrer que les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ avec (3.2) sont vérifiées avec un choix différend de $\tau(t)=\dfrac{t}{\tau}$ qui est rd-continue sur $[t_0,+\infty)_{q^{\mathbb{N}}}$, strictement croissante car $\tau^\Delta(t)=\dfrac{1}{\tau}>0$ et tend vers l'infini quand t tend vers $+\infty$.

On a $\sigma(t) = qs$, donc (3.23) devient

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\lambda}{\gamma\sigma^\gamma(s)} - \frac{\tau^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}s^\gamma}\right]\Delta s &= \limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\frac{\lambda}{\gamma q^\gamma}}{s^\gamma} - \frac{\frac{\tau^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}}{s^\gamma}\right]\Delta s \\ &= \limsup_{t\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{\gamma q^\gamma} - \frac{\tau^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right]\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta s}{s^\gamma}\,[4] \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

si $\lambda > \dfrac{\gamma(\tau q)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}$.

► On conclut que (3.19) admet une solution oscillante sur $[t_0, +\infty)_{q^{\mathbb{N}}}$ si $\lambda > \dfrac{\gamma(\tau q)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}$. De plus, les résultats obtenus dans [1–3, 8, 12, 14–16, 18–24, 27, 28, 30, 32] requièrent à cette estimation. Par conséquent, nos résultats améliorent les résultats correspondants dans ces références même pour $\tau(t) = t$.

Avant de présenter le théorème d'oscillation de type Philos pour l'équation (3.1), nous définissons deux sous ensembles $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}_0$ de $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ comme suit :

$$\mathbb{D} = \{(t,s)\in\mathbb{T}\times\mathbb{T} : t\geq s\geq t_0\}, \quad \mathbb{D}_0 = \{(t,s)\in\mathbb{T}\times\mathbb{T} : t > s\geq t_0\}.$$

Théorème 3.3.2. [29]. Supposons que les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ et (3.2) sont vérifiées. On suppose qu'il existe des fonctions $H\in C(\mathbb{D},\mathbb{R}^+)$, $h\in C(\mathbb{D}_0,\mathbb{R}^+)$ et $\Phi\in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\exists\, t_0\in\mathbb{T}$, $H(t,t) = 0$ pour tout $t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$, $H(t,s) > 0$ pour tout $(t,s)\in\mathbb{D}_0$;

(ii) H admet une dérivée partielle première continue et négative sur $\mathbb{D}_0$ par rapport à s ;

(iii) $-[H(t,s)\Phi(s)]^{\Delta_s} = h(t,s)\,[H(t,s)\Phi(s)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$, pour tout $(t,s)\in\mathbb{D}_0$.

Si

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^\Delta(s))^\gamma}\right]\Delta s = +\infty, \tag{3.24}$$

où $r^*(s)$ est définie par (3.6), alors (3.1) a une solution oscillante sur $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$.

Preuve. Supposons le contraire, c'est-à-dire l'équation (3.1) admet une solution x non oscillante. Alors x est éventuellement positive ou éventuellement négative, on prouve le théorème

4. $\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta s}{s^\gamma} = \sum_{s\in[t_0,t)}\frac{qs}{s^\gamma} = q\sum_{s\in[t_0,t)}\frac{1}{s^{\gamma-1}} = q\sum_{k=b}^{n-1}\left(q^{1-\gamma}\right)^k = q^{1+b(1-\gamma)}\frac{1-q^{(1-\gamma)(n-b)}}{1-q^{1-\gamma}}.$

pour le premier cas (le raisonnement reste valable pour le deuxième cas).
Soit $\phi \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, on définit w comme (1.15) c'est-à-dire

$$\omega(t) := \Phi(t) r(t) \left(\left(\frac{x^\Delta(t)}{x(\tau(t))} \right)^\gamma + \phi(t) \right), \quad t \in [t_1, +\infty)_\mathbb{T}.$$

Puisque x est éventuellement positive et (3.2) est vérifiée, (3.3) de lemme (3.2.1) nous donne

$$\omega(t) \geq \Phi(t) r(t) \phi(t), \qquad \text{pour} \quad t \in [T, +\infty)_\mathbb{T} \quad \text{avec} \quad T \geq t_1. \tag{3.25}$$

De la même manière que la preuve de théorème (3.3.1), on obtient l'inégalité

$$\omega^\Delta \leq -L\Phi q + \Phi(r\phi)^\Delta + \frac{\Phi^\Delta}{\Phi^\sigma} \omega^\sigma - \gamma \Phi \tau^\Delta (r^*)^{-\frac{1}{\gamma}} (\Phi^\sigma)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}} (\omega^\sigma - (r\phi\Phi)^\sigma)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}. \tag{3.26}$$

En effet, on applique les règles du produit (2.3), la somme (2.2) et le quotient (2.5) de la Δ-dérivée à la fonction (1.15), de (3.4) on trouve

$$\begin{aligned} \omega^\Delta &\leq -L\Phi q + \frac{\Phi^\Delta}{\Phi^\sigma} \omega^\sigma - (r\phi)^\sigma \Phi^\Delta + (r\phi\Phi)^\Delta - \Phi \frac{[r(x^\Delta)^\gamma]^\sigma [(x \circ \tau)^\gamma]^\Delta}{(x \circ \tau)^\gamma (x \circ \tau^\sigma)^\gamma}, \\ &= -L\Phi q + \frac{\Phi^\Delta}{\Phi^\sigma} \omega^\sigma + (r\phi)^\Delta \Phi - \Phi \frac{[r(x^\Delta)^\gamma]^\sigma [(x \circ \tau)^\gamma]^\Delta}{(x \circ \tau)^\gamma (x \circ \tau^\sigma)^\gamma}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Nous pouvons obtenir (3.11), (3.12) et (3.13) d'une manière identique que la preuve de théorème (3.3.1).

En utilisant (3.11), (3.12) et (3.13) dans (3.27), nous obtenons

$$\omega^\Delta \leq -L\Phi q + \frac{\Phi^\Delta}{\Phi^\sigma} \omega^\sigma + \Phi(r\phi)^\Delta - \begin{cases} \gamma \Phi \tau^\Delta \dfrac{[r(x^\Delta)^\gamma]^\sigma}{(x \circ \tau^\sigma)^{\gamma+1}} \dfrac{(x \circ \tau^\sigma)^\gamma}{(x \circ \tau)^\gamma} x^\Delta(\xi), & \text{si} \quad 0 < \gamma \leq 1, \\ \\ \gamma \Phi \tau^\Delta \dfrac{[r(x^\Delta)^\gamma]^\sigma}{(x \circ \tau^\sigma)^{\gamma+1}} \dfrac{x \circ \tau^\sigma}{x \circ \tau} x^\Delta(\xi), & \text{si} \quad \gamma \geq 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

D'après la condition $(\mathcal{H}_2)$ et (3.3) du lemme (3.2.1), on trouve que $(x \circ \tau^\sigma)(t) \geq (x \circ \tau)(t)$.
Par conséquent, pour $\gamma > 0$, de (3.28) on obtient

$$\omega^\Delta \leq -L\Phi q + \frac{\Phi^\Delta}{\Phi^\sigma} \omega^\sigma + \Phi(r\phi)^\Delta - \gamma \Phi \tau^\Delta \frac{[r(x^\Delta)^\gamma]^\sigma}{(x \circ \tau^\sigma)^{\gamma+1}} x^\Delta(\xi), \tag{3.29}$$

où $\xi \in [\tau(t), \tau^\sigma(t))$.
D'après (3.4) et $(\mathcal{H}_2)$, nous obtenons (3.16).

On majore $x^{\Delta}(\xi)$ de (3.29) par le second membre de l'inégalité (3.16), on trouve

$$\begin{aligned}
\omega^{\Delta} &\leq -L\Phi q + \Phi(r\phi)^{\Delta} + \frac{\Phi^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta}\left[\frac{\left[r(x^{\Delta})^{\gamma}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}{(x\circ\tau)^{\gamma+1}}\right]^{\sigma}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}} \\
&= -L\Phi q + \Phi(r\phi)^{\Delta} + \frac{\Phi^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta}\left[\frac{\omega^{\sigma}}{\Phi^{\sigma}} - r^{\sigma}\phi^{\sigma}\right]^{1+\frac{1}{\gamma}}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}} \\
&= -L\Phi q + \Phi(r\phi)^{\Delta} + \frac{\Phi^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta}\left[\frac{\omega^{\sigma} - (r\phi\Phi)^{\sigma}}{\Phi^{\sigma}}\right]^{1+\frac{1}{\gamma}}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}} \\
&= -L\Phi q + \Phi(r\phi)^{\Delta} + \frac{\Phi^{\Delta}}{\Phi^{\sigma}}\omega^{\sigma} - \gamma\Phi\tau^{\Delta}(r^{*})^{-\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma})^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}(\omega^{\sigma} - (r\phi\Phi)^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne (3.26).

On multiplie l'inégalité obtenue (3.26) par $H(t,s) \in \mathbb{R}^{+}$, on l'intègre par rapport à s de T à $t \geq T \geq t_1$ en utilisant la règle de l'intégration par partie (7). Par les conditions (i) et (iii), on trouve :

$$\begin{aligned}
H(t,s)\omega^{\Delta}(s) \leq &- H(t,s)\Phi(s)\left[Lq(s) - (r(s)\phi(s))^{\Delta}\right] + H(t,s)\frac{\Phi^{\Delta}(s)}{\Phi^{\sigma}(s)}\omega^{\sigma}(s) \\
&- \frac{\gamma H(t,s)\Phi(s)\tau^{\Delta}(s)}{(r^{*}(s))^{\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma}(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}\left[\omega^{\sigma}(s) - (r(s)\phi(s)\Phi(s))^{\sigma}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}},
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_T^t H(t,s)\omega^{\Delta}(s)\Delta s \leq &- \int_T^t H(t,s)\Phi(s)\left[Lq(s) - (r(s)\phi(s))^{\Delta}\right]\Delta s + \int_T^t H(t,s)\frac{\Phi^{\Delta}(s)}{\Phi^{\sigma}(s)}\omega^{\sigma}(s)\Delta s \\
&- \int_T^t \frac{\gamma H(t,s)\Phi(s)\tau^{\Delta}(s)}{(r^{*}(s))^{\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma}(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}\left[\omega^{\sigma}(s) - (r(s)\phi(s)\Phi(s))^{\sigma}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\int_T^t H(t,s)\Phi(s)\left[Lq(s) - (r(s)\phi(s))^{\Delta}\right]\Delta s \leq &- \int_T^t H(t,s)\omega^{\Delta}(s)\Delta s + \int_T^t H(t,s)\frac{\Phi^{\Delta}(s)}{\Phi^{\sigma}(s)}\omega^{\sigma}(s)\Delta s \\
&- \int_T^t \left[\frac{\gamma H(t,s)\Phi(s)\tau^{\Delta}(s)}{(r^{*}(s))^{\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma}(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}\left(\omega^{\sigma}(s) - (r(s)\phi(s)\Phi(s))^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\Delta s \\
&\overset{(7)}{=} -\left[H(t,s)\omega(s)\right]_T^t + \int_T^t \left[\left(H^{\Delta_s}(t,s) + H(t,s)\frac{\Phi^{\Delta}(s)}{\Phi^{\sigma}(s)}\right)\omega^{\sigma}(s)\right. \\
&\left. - \frac{\gamma H(t,s)\Phi(s)\tau^{\Delta}(s)}{(r^{*}(s))^{\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma}(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}\left(\omega^{\sigma}(s) - (r(s)\phi(s)\Phi(s))^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\Delta s.
\end{aligned}$$

Alors d'après les conditions (i) et (iii), on obtient

$$\int_T^t H(t,s)\Phi(s)\left[Lq(s)-(r(s)\phi(s))^{\Delta}\right]\Delta s \leq H(t,T)\omega(T)+\int_T^t \left[-\frac{h(t,s)}{\Phi^{\sigma}(s)}(H(t,s)\Phi(s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\omega^{\sigma}(s)\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma H(t,s)\Phi(s)\tau^{\Delta}(s)}{(r^*(s))^{\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma}(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}\left(\omega^{\sigma}(s)-(r(s)\phi(s)\Phi(s)))^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\Delta s. \tag{3.30}$$

On pose

$$a_0=-\frac{h(t,s)}{\Phi^{\sigma}(s)}(H(t,s)\Phi(s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}},\quad b_0=\frac{\gamma H(t,s)\Phi(s)\tau^{\Delta}(s)}{(r^*(s))^{\frac{1}{\gamma}}(\Phi^{\sigma}(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}>0,\quad c_0=(r(s)\phi(s)\Phi(s)))^{\sigma}. \tag{3.31}$$

Alors d'après le lemme (2.4.3), (3.30) et (3.31), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_T^t H(t,s)\Phi(s)\left[Lq(s)-(r(s)\phi(s))^{\Delta}\right]\Delta s\\ &\leq H(t,T)\omega(T)+\int_T^t\left[-(r(s)\phi(s))^{\sigma}h(t,s)(H(t,s)\Phi(s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}+\frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s.\end{aligned} \tag{3.32}$$

De (3.32), en utilisant les conditions (i)−(iii) et la règle de la Δ-dérivée (2.3) et la Δ-intégrabilité (4), on trouve

$$\begin{aligned}H(t,T)\omega(T) &\overset{(3.32)}{\geq} \int_T^t\left[H(t,s)\Phi(s)\left(Lq(s)-(r(s)\phi(s))^{\Delta}\right)+(r(s)\phi(s))^{\sigma}h(t,s)(H(t,s)\Phi(s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s\\ &\overset{(iii)}{=}\int_T^t\left[H(t,s)\Phi(s)\left(Lq(s)-(r(s)\phi(s))^{\Delta}\right)-(r(s)\phi(s))^{\sigma}\left(H(t,s)\Phi(s)\right)^{\Delta_s}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s\\ &\overset{(2.3)}{=}\int_T^t\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s)-(H(t,s)\Phi(s)r(s)\phi(s))^{\Delta_s}-\frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s\\ &\overset{(i)}{=}H(t,T)\Phi(T)r(T)\phi(T)+\int_T^t\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s)-\frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s,\end{aligned}$$

donc pour $T\geq t_0$,

$$\begin{aligned}\int_T^t\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s)-\frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s &\leq H(t,T)\left[\omega(T)-\Phi(T)r(T)\phi(T)\right]\\ &\overset{(ii)}{\leq} H(t,t_0)\left[\omega(T)-\Phi(T)r(T)\phi(T)\right].\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s &\overset{(4)}{=} \int_{t_0}^{T}\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s \\ &+ \int_{T}^{t}\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s \\ &\overset{(ii)}{\leq} H(t,t_0)\int_{t_0}^{T}\left[L\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s \\ &+ H(t,t_0)\left[\omega(T) - \Phi(T)r(T)\phi(T)\right] \\ &\leq H(t,t_0)\int_{t_0}^{T} L\Phi(s)q(s)\Delta s \\ &+ H(t,t_0)\left[\omega(T) - \Phi(T)r(T)\phi(T)\right].\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (3.25) on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^{\Delta}(s))^{\gamma}}\right]\Delta s \\ &\quad\leq \int_{t_0}^{T} L\Phi(s)q(s)\Delta s\,^{5} + \omega(T) - \Phi(T)r(T)\phi(T) < \infty\end{aligned}$$

En introduisant la $\limsup$ dans l'inégalité précédente, on trouve une contradiction avec (3.24). Cela prouve le théorème. □

Pour mieux comprendre notre résultat, on considère l'exemple suivant.

Exemple 3.3.2. [29]. On considère l'équation dynamique à retard de deuxième ordre suivante

$$\left(\frac{1}{t}x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} + \frac{\lambda}{t^3}x(\tau(t)) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \text{ avec } t_0 > 0. \tag{3.33}$$

En faisant correspondre (3.33) à l'équation (3.1), on obtient que

$$r(t) = \frac{1}{t}, \quad \gamma = 1, \quad q(t) = \frac{\lambda}{t^3} \text{ avec } \lambda > 1, \quad f(x(\tau(t))) = x(\tau(t)).$$

On sait que la fonction $t \mapsto r(t) = \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, donc d'après (3.6) elle atteint sa valeur maximale au point $\xi = \tau(t)$ c'est-à-dire $r^*(t) = \dfrac{1}{\tau(t)}$. La condition $(\mathcal{H}_4)$ nous donne $L = 1$.

5. $\int_{t_0}^{T} L\Phi(s)q(s)\Delta s < \infty$ car la fonction $L\Phi q$ est rd-continue donc $\Delta-$intégrable sur $[t_0, T]_{\mathbb{T}}$.

Ici, on pose $H(t,s)=(t-s)^2$ et $\Phi(s)=s^2$ alors d'après (3.24) de théorème (3.3.2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s)-\frac{r^*(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^\Delta(s))^\gamma}\right]\Delta s\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^2s^2\frac{\lambda}{s^3}-\frac{(h(t,s))^2}{4\tau(s)\tau^\Delta(s)}\right]\Delta s. \qquad (3.34)\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^2\frac{\lambda}{s}-\frac{(h(t,s))^2}{4\tau(s)\tau^\Delta(s)}\right]\Delta s
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ et $\tau(t)=t$ alors les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ et (3.2) sont tous vérifiées.

En effet,

- $*$ Il est supposé que $\gamma=1$, alors $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.
- $*$ la fonction τ est continue donc rd-continue sur $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$, elle est strictement croissante (car $\tau^\Delta(t)=1>0$) et tend vers l'infini quand t tend vers $+\infty$.
- $*$ On a $r(t)=\dfrac{1}{t}$ positive et continue donc rd-continue sur $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ avec $t_0>0$ ainsi $q(t)=\dfrac{\lambda}{t^3}$ est positive car $\lambda>0$ et $t>0$.
- $*$ On a $f(x)=x$ continue et satisfait $\dfrac{f(x)}{x^\gamma}\geq L$ avec $L>0$ et $x\neq 0$.
- $*$ $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}r(s)\Delta s=\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{s}ds=+\infty.$ [6]

La condition (iii) de théorème (3.3.2) nous donne $h(t,s)=-2(t-2s)$ pour $(t,s)\in\mathbb{D}_0$. D'après (3.34) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^2\frac{\lambda}{s}-(t-2s)^2\frac{1}{s}\right]ds\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^2\frac{\lambda}{s}-((t-s)-s)^2\frac{1}{s}\right]ds\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^2\frac{\lambda}{s}-(t-s)^2\frac{1}{s}+\underbrace{2s(t-s)\frac{1}{s}}_{=2(t-s)}-\underbrace{s^2\frac{1}{s}}_{=s}\right]ds\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\lambda-1}{s}(t-s)^2+2t-3s\right]ds\\
&=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\lambda-1}{s}t^2+2(2-\lambda)t+(\lambda-4)s\right]ds=+\infty.
\end{aligned}$$

Alors on conclut que l'équation (3.33) admet une solution oscillante sur $[t_0,+\infty)_{\mathbb{R}}$ si $\lambda>1$.

Remarque 3.3.1. [29]. D'après la preuve de théorème (3.3.2), il est facile de voir que le terme $\phi(t)$ apparaissant dans (1.15) n'est pas important, et on peut obtenir le même résultat sans ce

6. $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{s}ds=\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s}ds=\lim_{t\to+\infty}\ln(s)|_{t_0}^{t}=\lim_{t\to+\infty}\ln(t)-\ln(t_0)=+\infty.$

terme. On suppose que $\phi(t)=0$, puis en remplaçant l'inégalité (3.26) par (3.17), nous pouvons prouver le théorème suivant, ce qui améliore le théorème (3.3.2) lorsque $h(t,s)$ est oscillante ou $h(t,s)\geq 0$.

Théorème 3.3.3. [29]. Supposons que toutes les conditions soient identiques au théorème (3.3.2). On suppose aussi que

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[LH(t,s)\Phi(s)q(s)-\frac{r^*(s)(h_-(t,s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^\Delta(s))^\gamma}\right]\Delta s=+\infty, \tag{3.35}$$

où $r^*(s)$ est définie par (3.6) et $h_-(t,s)=\max\{-h(t,s),0\}$. Alors (3.1) a une solution oscillante.

Preuve. Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de l'équation (3.1). Supposons que x est éventuellement positive, la substitution $y=-x$ transforme (3.1) en une équation de la même forme. Alors il existe $t_1\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(\tau(t))>0$ pour $t\in[t_1,+\infty)_{\mathbb{T}}$. Pour $T\geq t_1$ suffisamment assez grand, on définit w comme (1.15) avec $\phi(t)=0$ c'est-à-dire

$$\omega(t):=\Phi(t)r(t)\left(\frac{x^\Delta(t)}{x(\tau(t))}\right)^\gamma,\quad t\in[T,+\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Alors (3.3) de lemme (3.2.1) implique que

$$\omega(t)>0,\qquad \text{pour tout}\quad t\in[T,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.36}$$

On multiplie (3.17) par $H(t,s)\in\mathbb{R}^+$, on trouve

$$\begin{aligned}H(t,s)\omega^\Delta(s)\leq{}&-LH(t,s)\Phi(s)q(s)+H(t,s)\frac{\Phi^\Delta(s)}{\Phi^\sigma(s)}\omega^\sigma(s)\\&-H(t,s)\gamma\Phi(s)\tau^\Delta(s)(r^*(s))^{-1/\gamma}(\Phi^\sigma(s))^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}(\omega^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.\end{aligned}$$

On l'intègre l'inégalité obtenue par rapport à s de T à $t\in[T,+\infty)_{\mathbb{T}}$ en utilisant la règle de l'intégration par partie (7), on trouve

$$\begin{aligned}\int_T^t H(t,s)\omega^\Delta(s)\Delta s\leq{}&-\int_T^t LH(t,s)\Phi(s)q(s)\Delta s+\int_T^t H(t,s)\frac{\Phi^\Delta(s)}{\Phi^\sigma(s)}\omega^\sigma(s)\Delta s\\&-\int_T^t\frac{H(t,s)\gamma\Phi(s)\tau^\Delta(s)}{(r^*(s))^{1/\gamma}(\Phi^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}(\omega^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_T^t LH(t,s)\Phi(s)q(s)\Delta s &\leq -\int_T^t H(t,s)\omega^\Delta(s)\Delta s + \int_T^t H(t,s)\frac{\Phi^\Delta(s)}{\Phi^\sigma(s)}\omega^\sigma(s)\Delta s \\
&\quad - \int_T^t \frac{H(t,s)\gamma\Phi(s)\tau^\Delta(s)}{(r^*(s))^{1/\gamma}(\Phi^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}(\omega^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s \\
&= -[H(t,s)\omega(s)]_T^t + \int_T^t \left[\left(H^{\Delta_s}(t,s) + H(t,s)\frac{\Phi^\Delta(s)}{\Phi^\sigma(s)}\right)\omega^\sigma(s)\right. \\
&\quad \left. - \frac{H(t,s)\gamma\Phi(s)\tau^\Delta(s)}{(r^*(s))^{1/\gamma}(\Phi^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}(\omega^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\Delta s
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions (i) et (iii) dans l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_T^t LH(t,s)\Phi(s)q(s)\Delta s &\leq H(t,T)\omega(T) + \int_T^t \left[\frac{-h(t,s)}{\Phi^\sigma(s)}(H(t,s)\Phi(s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\omega^\sigma(s)\right. \\
&\quad \left. - \frac{H(t,s)\gamma\Phi(s)\tau^\Delta(s)}{(r^*(s))^{1/\gamma}(\Phi^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}(\omega^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\Delta s \\
&\leq H(t,T)\omega(T) + \int_T^t \left[\frac{h_-(t,s)}{\Phi^\sigma(s)}(H(t,s)\Phi(s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\omega^\sigma(s)\right. \\
&\quad \left. - \frac{H(t,s)\gamma\Phi(s)\tau^\Delta(s)}{(r^*(s))^{1/\gamma}(\Phi^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}(\omega^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\Delta s \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

On pose

$$a_0 = \frac{h_-(t,s)}{\Phi^\sigma(s)}(H(t,s)\Phi(s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}, \quad b_0 = \frac{\gamma H(t,s)\Phi(s)\tau^\Delta(s)}{(r^*(s))^{\frac{1}{\gamma}}(\Phi^\sigma(s))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} > 0, \quad c_0 = 0. \qquad (3.38)$$

Donc, d'après le lemme (2.4.3), (3.37) et (3.38), on trouve

$$\int_T^t LH(t,s)\Phi(s)q(s)\Delta s \leq H(t,T)\omega(T) + \int_T^t \frac{r^*(s)(h_-(t,s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^\Delta(s))^\gamma}\Delta s,$$

pour $T \geq t_0$, la condition (ii) nous donne

$$\begin{aligned}
\int_T^t \left[LH(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)(h_-(t,s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^\Delta(s))^\gamma}\Delta s\right] &\leq H(t,T)\omega(T) \\
&\leq H(t,t_0)\omega(T)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_T^t \left[LH(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r^*(s)(h_-(t,s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\tau^\Delta(s))^\gamma}\Delta s\right] \leq \omega(T) < \infty.$$

En introduisant la lim sup dans l'inégalité ci-dessus, on trouve une contradiction avec (3.35). □

Remarque 3.3.2. [29]. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nous avons $r^*(t) = r(\tau(t))$. D'une manière similaire à la preuve des théorèmes (3.3.1) et (3.3.2) nous pouvons prouver les résultats suivants pour l'oscillation de la solution de l'équation (1.13) présentée par Hassan qu'est l'équation (3.1) avec $f(x) = x^\gamma$.

Théorème 3.3.4. [29]. Supposons que $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et $r(t) > 0$. On suppose aussi qu'il existe une fonction $\Phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\limsup_{t\to+\infty}\left[\Phi(t)\int_t^{+\infty} q(s)ds + \int_{t_0}^t\left(\Phi(s)q(s) - \frac{r(\tau(s))(\Phi_+'(s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\Phi^\gamma(s)}\right)ds\right] = +\infty,$$

où $\Phi_+'(s) = \max\{\Phi'(s), 0\}$. Alors (1.13) admet une solution oscillante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{R}}$.

Théorème 3.3.5. [29]. Supposons que $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et $r(t) > 0$. Soient $\mathbb{D}_0 = \{(t, s) : t > s \geq t_0, t, s \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{D} = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0, t, s \in \mathbb{R}\}$. De plus, on suppose qu'il existe des fonctions $H \in C(\mathbb{D}, \mathbb{R}^+)$, $h \in C(\mathbb{D}_0, \mathbb{R}^+)$ et $\Phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telles que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $H(t, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, $H(t, s) > 0$ pour tout $(t, s) \in \mathbb{D}_0$;

(ii) H admet une dérivée partielle première continue et négative sur $\mathbb{D}_0$ par rapport à s;

(iii) $-[H(t, s)\Phi(s)]' = h(t, s)\,[H(t, s)\Phi(s)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$, pour tout $(t, s) \in \mathbb{D}_0$.

Si

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t, t_0)}\int_{t_0}^t\left[H(t, s)\Phi(s)q(s) - \frac{r(\tau(s))(h_-(t, s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right]ds = +\infty, \tag{3.39}$$

où $h_-(t, s) = \max\{-h(t, s), 0\}$, alors (1.13) admet une solution oscillante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{R}}$.

Remarque 3.3.3. [29]. A partir des théorèmes (3.3.1), (3.3.2) et (3.3.3), nous pouvons présenter des conditions suffisantes pour l'oscillation de la solution de l'équation (3.1) par différents choix de $\Phi(s)$ et $H(t, s)$. Par exemple, nous pouvons choisir $\Phi(s)$ d'être $1, s$, etc ; nous pouvons choisir $H(t, s) = (t - s)^k$ ou $H(t, s) = [R(t) - R(s)]^k$, pour $t \geq s \geq t_0$, où $k > 1$ est une constante et $R(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{1}{r(s)}\Delta s$ pour $t \geq t_0$.

Remarque 3.3.4. [29]

- Si on prend $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $r(t) = 1$, $f(x) = x$, $\tau(t) = t$, $\gamma = 1$, $H(t, s) = (t - s)^k$ et $\Phi(s) = 1$, alors le théorème (3.3.5) réduit au théorème (1.2.1).
- Si on prend $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $\tau(t) = t$, $\gamma = 1$ et $\Phi(s) = 1$, alors le théorème (3.3.5) réduit au théorème (1.2.2).

- Si on prend $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $\tau(t) = t$ et $\gamma = 1$, alors le théorème (3.3.5) réduit au théorème (1.2.3). Il est particulièrement intéressant que nous pouvons obtenir la condition (1.10) de (3.39). En effet, soit $\Phi(s) = a(s) = \exp\{-2\int^s g(\xi)d\xi\}$ alors $a'(s) = -2g(s)a(s)$. D'après (3.39) et la condition (iii) de théorème (3.3.5), on a

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r(\tau(s))(h_-(t,s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)\Phi(s)q(s) - \frac{r(s)(h_-(t,s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{r(s)(h(t,s))^{2}}{2^2}\right] ds \\
&\overset{(iii)}{=} \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{1}{4}r(s)\frac{\left[(H(t,s)a(s))'\right]^2}{H(t,s)a(s)}\right] ds \\
&\overset{(2.3)}{=} \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{1}{4}r(s)\frac{\left[H_s(t,s)a(s) + H(t,s)a'(s)\right]^2}{H(t,s)a(s)}\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)} - \frac{1}{2}r(s)H_s(t,s)a'(s)\right. \\
&\quad \left. - \frac{H(t,s)r(s)(a'(s))^2}{4a(s)}\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)} - \frac{1}{2}r(s)H_s(t,s)(-2g(s)a(s))\right. \\
&\quad \left. - \frac{H(t,s)r(s)(-2g(s)a(s))^2}{4a(s)}\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)} + r(s)a(s)g(s)H_s(t,s)\right. \\
&\quad \left. - H(t,s)r(s)a(s)(g(s))^2\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)} + r(s)a(s)g(s)H_s(t,s)\right. \\
&\quad \left. - H(t,s)r(s)a(s)(g(s))^2 + (H(t,s)a(s)r(s)g(s))' - (H(t,s)a(s)r(s)g(s))'\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)} + r(s)a(s)g(s)H_s(t,s)\right. \\
&\quad - H(t,s)r(s)a(s)(g(s))^2 - [H(t,s)a(s)]' r(s)g(s) - H(t,s)a(s)[r(s)g(s)]' \\
&\quad \left. + [H(t,s)a(s)r(s)g(s)]'\right] ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)a(s)q(s) - H(t,s)r(s)a(s)(g(s))^2 - H(t,s)a(s)[r(s)g(s)]'\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)} + r(s)g(s)\left(-a'(s)H(t,s)\right) + [H(t,s)a(s)r(s)g(s)]'\right] ds \qquad (*)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(*) &= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \Big[H(t,s)a(s)q(s) + H(t,s)a(s)r(s)(g(s))^2 - H(t,s)a(s)[r(s)g(s)]' \\
&\quad -\frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)} + [H(t,s)a(s)r(s)g(s)]'\Big]\, ds \\
&= \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left(H(t,s)a(s)\left[q(s) + r(s)(g(s))^2 - (r(s)g(s))'\right] - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)}\right) ds \\
&\quad + \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} [H(t,s)a(s)r(s)g(s)]'\, ds \\
&\overset{(i)}{=} \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left(H(t,s)a(s)\left[q(s) + r(s)(g(s))^2 - (r(s)g(s))'\right] - \frac{1}{4}r(s)a(s)\frac{H_s^2(t,s)}{H(t,s)}\right) ds \\
&\quad - a(t_0)r(t_0)g(t_0).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, le théorème (3.3.5) unifie le théorème d'oscillation de type Li.

Remarque 3.3.5. [29]. Le théorème (3.3.2) améliore les résultats établis par Yan [30] et Chen [8]. On outre, il améliore aussi les résultats de Thandapani [27] lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{N}$.

Comme nous avons vu précédemment, nous pouvons obtenir des corollaires différents à partir du théorème (3.3.5) par des choix différents de $\Phi(t)$. On remarque aussi que le but des théorèmes (3.3.1) et (3.3.2) est de monter que les solutions non oscillante de l'équation (3.1) c'est-à-dire qui sont éventuellement positive et strictement croissante (respectivement éventuellement négative et strictement décroissante) n'existe pas.

3.4 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous présentons le comportement asymptotique de toute solution de l'équation (3.1), on suppose que la condition (3.2) n'est pas vérifiée c'est-à-dire

$$
\int_{t_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{r(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s < \infty \tag{3.40}
$$

Théorème 3.4.1. [29]. On suppose que les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ sont vérifiées. Soit Φ définie comme dans le théorème (3.3.1) telle que (3.7) est vérifiée. On suppose aussi que

$$
\int_{t_0}^{+\infty} q(s)\Delta s = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{+\infty} \left[\frac{1}{r(s)} \int_{t_0}^{s} q(u)\Delta u\right]^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s = +\infty. \tag{3.41}
$$

Alors (3.1) admet une solution oscillante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ ou converge vers zero.

Preuve. Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de (3.1). Alors x est éventuellement positive ou éventuellement négative. Nous supposons seulement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{T}$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, la substitution $y = -x$ transforme (3.1) en une équation de la même forme. On a alors deux cas :
Soit $y = r(x^{\Delta})^{\gamma}$. S'il existe $t_1 \geq t_0$ tel que $y(t_1) < 0$, alors

$$y(t) \leq y(t_1) < 0, \quad \text{pour tout} \;\; t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}},$$

car d'après (3.4), y est décroissante. Alors d'après $(\mathcal{H}_1)$ et le signe de la fonction r,

$$x^{\Delta}(t) < 0 \quad \text{pour} \;\; t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.42}$$

Si $y(t) > 0$ pour tout $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, alors d'après $(\mathcal{H}_1)$ et le signe de la fonction r on a

$$x^{\Delta}(t) > 0 \quad \text{pour} \;\; t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.43}$$

- Si (3.43) est vérifiée, alors nous pouvons utiliser la preuve de théorème (3.3.1) en trouvant une contradiction avec l'hypothèse (3.7).
- Si x satisfait (3.42), alors x converge vers une limite finie (car x est strictement décroissante et éventuellement positive donc minoré) notée M c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} x(t) = M \geq 0$. Nous montrons que $M = 0$. On suppose le contraire, c'est-à-dire $M > 0$.

Puisque x est strictement décroissante, on a $x(t) \geq M$ pour $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$, alors d'après $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$, il existe $t_2 \geq t_1$ tel que $q(t)f(x(\tau(t))) \geq Lq(t)x^{\gamma}(\tau(t)) \geq q(t)M^{\gamma}$ pour $t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Par conséquent, de (3.1) on obtient

$$\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} = -q(t)f(x(\tau(t))) \leq -q(t)M^{\gamma} \leq 0 \quad \text{pour } t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

On intègre l'inégalité ci-dessus de t_2 à $t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}$, on trouve

$$r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma} \leq r(t_2)\left(x^{\Delta}(t_2)\right)^{\gamma} - M^{\gamma}\int_{t_2}^{t} q(u)\Delta u \leq -\frac{M^{\gamma}}{2}\int_{t_2}^{t} q(u)\Delta u.$$

Par conséquent,

$$x^{\Delta}(t) \leq -\frac{M}{2^{1/\gamma}}\left[\frac{1}{r(t)}\int_{t_2}^{t} q(u)\Delta u\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus de $t_3 \geq t_2$ à $t \in [t_3, +\infty)_{\mathbb{T}}$, de (3.41) on obtient

$$x(t) \leq x(t_3) - \frac{M}{2^{1/\gamma}} \int_{t_1}^{t} \left[\frac{1}{r(s)} \int_{t_1}^{s} q(u)\Delta u \right]^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

contradiction car x est supposé éventuellement positive, donc (3.1) converge vers zero. □

D'une manière similaire à la preuve de théorème (3.4.1), nous pouvons prouver le résultat suivant.

Théorème 3.4.2. [29]. On suppose que les conditions $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$ et (3.40) sont vérifiées. Soient $H \in C(\mathbb{D}, \mathbb{R})$, $h \in C(\mathbb{D}_0, \mathbb{R})$ et Φ définies comme dans le théorème (3.3.2) telle que (3.24) est vérifiée. On suppose aussi que

$$\int_{t_0}^{+\infty} q(s)\Delta s = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{+\infty} \left[\frac{1}{r(s)} \int_{t_0}^{s} q(u)\Delta u \right]^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s = +\infty. \tag{3.44}$$

Alors (3.1) admet une solution oscillante ou converge vers zero.

Preuve. Supposons le contraire, c'est-à-dire (3.1) a une solution x non oscillante sur $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Alors x est éventuellement positive ou éventuellement négative. Nous supposons seulement le premier cas, la substitution $y = -x$ transforme (3.1) en une équation de la même forme.
Soit $y = r(x^{\Delta})^{\gamma}$, on a alors deux cas :

- Si $y(t) > 0$ pour tout $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ alors d'après le signe de la fonction r et la parité de γ (voir les conditions $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_1)$), $x^{\Delta}(t)$ est éventuellement positive. Dans ce cas, nous pouvons utiliser la preuve de théorème (3.3.2) en trouvant une contradiction avec la condition (3.24).
- S'il existe $t_1 \geq t_0$ tel que $y(t_1) < 0$, alors

$$y(t) \leq y(t_1), \quad \text{pour} \;\; t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}},$$

car y est décroissante d'après (3.4), donc $x^{\Delta}(t)$ est éventuellement négative sur $[t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$ et par suite x converge vers une limite finie notée M c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} x(t) = M \geq 0$, car x est éventuellement positive et strictement décroissante donc minoré. Nous montrons que $M = 0$. En effet, on suppose le contraire que $M > 0$. Puisque x est strictement décroissante, $x(t) \geq M > 0$ pour tout $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$. D'après les conditions $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$, il existe $t_2 \geq t_1$ tel que $q(t)f(x(\tau(t)) \geq q(t)M^{\gamma}$ pour $t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Par conséquent, de (3.1) nous avons

$$\left(r(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} \right)^{\Delta} = -q(t)f(x(\tau(t))) \leq -q(t)M^{\gamma} \leq 0, \quad \text{pour } t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus de t_2 à $t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}$, on obtient

$$r(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} \leq r(t_2)(x^{\Delta}(t_2))^{\gamma} - M^{\gamma} \int_{t_2}^{t} q(u)\Delta u$$

D'après (3.44), il est possible de choisir t_3 suffisamment grand telle que pour tout $t \in [t_3, +\infty)_{\mathbb{T}}$,

$$r(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma} \leq -\frac{M^{\gamma}}{2} \int_{t_3}^{t} q(u)\Delta u. \tag{3.45}$$

Par conséquent,

$$x^{\Delta}(t) \leq -\frac{M^{\gamma}}{2^{1/\gamma}} \left[\frac{1}{r(t)} \int_{t_3}^{t} q(u)\Delta u\right]^{1/\gamma}.$$

En intégrant les deux membres de l'inégalité ci-dessus de $t_4 \geq t_3$ à $t \in [t_4, +\infty)_{\mathbb{T}}$, nous obtenons

$$x(t) \leq x(t_4) - \frac{M}{2^{1/\gamma}} \int_{t_4}^{t} \left[\frac{1}{r(s)} \int_{t_3}^{t} q(u)\Delta u\right]^{1/\gamma} \Delta s \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Il s'ensuit de (3.44) que $x(t)$ est éventuellement négative, contradiction. Ce qui complète la preuve. $\square$

Conclusion

Ce travail consiste à étudier l'oscillation d'une solution de l'équation dynamique de second ordre semi-linéaire à retard de la forme suivante

$$\left(r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+q(t)f(x(\tau(t)))=0,\qquad t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{E}$$

Notre but ici est d'établir des théorèmes d'oscillation de la solution de l'équation (E) dans des conditions très faibles.

Nous avons montré que l'équation (E) admet une solution oscillante avec les théorèmes (3.3.1) et (3.3.2) si (3.2) est vérifié. Or si ce dernier n'est pas satisfait, nous allons aux théorèmes (3.4.1) et (3.4.2) qui donnent des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution oscillante ou converge vers zero pour l'équation (E).

Nos résultats étendent, unifient et améliorent les théorèmes d'oscillation de type Kamenev [18], Philos [21] et Li [19].

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. R. Anderson, and A. Zafer. Interval oscillation criteria for second-order forced delay dynamic equations with mixed nonlinearities. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(2) :977–993, 2010.

[2] R. P. Agarwal, S. R. Grace, and D. O'Regan. *Oscillation theory for difference and functional differential equations*. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] R. P. Agarwal, D. O'Regan, and S. H. Saker. Oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay dynamic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 300(1) :203–217, 2004.

[4] M. Bohner and S. G. Georgiev. *Multivariable dynamic calculus on time scales*. Springer, 2016.

[5] M. Bohner and A. Peterson. Dynamic equations on time scales. an introduction with applications, Birkhäuser Boston. *Inc., Boston, MA*, 2001.

[6] M. Bohner and A. Peterson. Advances in dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston. *Inc., Boston, MA*, 2003.

[7] A. Cabada and D. R. Vivero. Expression of the lebesgue δ-integral on time scales as a usual lebesgue integral ; application to the calculus of δ-antiderivatives. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(1-2) :194–207, 2006.

[8] D.-X. Chen. Oscillation of second-order Emden–Fowler neutral delay dynamic equations on time scales. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(9-10) :1221–1229, 2010.

[9] A. B. Cherif. *Contributions topologiques sur les échelles de temps et leurs applications dans les équations différentielles*. PhD thesis, 2015.

[10] A. B. Cherif, F. Ladrani, and A. Hammoudi. Oscillation theorems for higher order neutral nonlinear dynamic equations on time scales.

[11] L. Erbe. *Oscillation theory for functional differential equations*. Routledge, 2017.

[12] L. Erbe, T. S. Hassan, and A. Peterson. Oscillation criteria for nonlinear damped dynamic equations on time scales. *Applied Mathematics and Computation*, 203(1) :343–357, 2008.

[13] L. Erbe, T. S. Hassan, A. Peterson, and S. H. Saker. Oscillation criteria for sublinear half-linear delay dynamic equations. *Int. J. Difference Equ*, 3(2) :227–245, 2008.

[14] L. Erbe, A. Peterson, and S. H. Saker. Oscillation criteria for second-order nonlinear delay dynamic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 333(1) :505–522, 2007.

[15] P. Hartman. On non-oscillatory linear differential equations of second order. *American Journal of Mathematics*, 74(2) :389–400, 1952.

[16] T. S. Hassan. Oscillation criteria for half-linear dynamic equations on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 345(1) :176–185, 2008.

[17] S. Hilger. Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in Mathematics*, 18(1-2) :18–56, 1990.

[18] I. Kamenev. An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 23(2) :136–138, 1978.

[19] H. J. Li. Oscillation criteria for second order linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194(1) :217–234, 1995.

[20] R. M. Mathsen, Q. R. Wang, and H. W. Wu. Oscillation for neutral dynamic functional equations on time scales. *Journal of Difference Equations and Applications*, 10(7) :651–659, 2004.

[21] C. G. Philos. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. *Archiv der Mathematik*, 53(5) :482–492, 1989.

[22] Y. V. Rogovchenko. Note on oscillation criteria for second order linear differential equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 203 :560–563, 1996.

[23] Y. V. Rogovchenko. Oscillation criteria for certain nonlinear differential equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 229(2) :399–416, 1999.

[24] W. Q. Ru. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations [j]. *Acta Mathematica Sinica*, 2, 2001.

[25] S. Saker. *Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales : Second and Third Orders*. LAP Lambert Academic Publishing, 2010.

[26] S. Saker and M. Bohner. Oscillation of second order nonlinear dynamic equations on time scales. 2004.

[27] E. Thandapani, K. Ravi, and J. Graef. Oscillation and comparison theorems for half-linear second-order difference equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 42(6-7) :953–960, 2001.

[28] A. Wintner. A criterion of oscillatory stability. *Quarterly of Applied Mathematics*, 7(1) :115–117, 1949.

[29] H. Wu, L. Erbe, and A. Peterson. Oscillation of solution to second-order half-linear delay dynamic equations on time scales. *Electron. J. Differ. Equ*, 71 :2016, 2016.

[30] J. Yan. Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 276–282, 1986.

[31] C. Zhang and T. Li. Some oscillation results for second-order nonlinear delay dynamic equations. *Applied Mathematics Letters*, 26(12) :1114–1119, 2013.

[32] Q. Zhang. Oscillation of second-order half-linear delay dynamic equations with damping on time scales. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(5) :1180–1188, 2011.