الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيـة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمـــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Mathématique et Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Équations différentielles et Modélisation

Thème

Les espaces de Hölder et Applications

Présenté par

BECHIKR Chaimaa

Devant le jury composé de :

Dr. BENIANI Abderrahmane	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. BELLATAR Zokha	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr. HARIRI Mohamed	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. TCHOUAR Fatima Zahra	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire : 2021-2022

Remerciements

Je remercie tout d'abord ALLAH tout puissant pour m'avoir donné la santé, la patience et le courage pour mener à bien ce mémoire.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie ma sœur et mes frères pour leurs encouragements.

Je tiens à témoigner ma plus profonde gratitude à mon encadrante Madame TCHOUAR Fatima Zahra qui a dirigé ce travail, de m'avoir encadré et proposé un sujet aussi passionnant et intéressant. Sa disponibilité permanente et son aide m'ont été d'un soutien dont je lui suis particulièrement reconnaissante. Sa compétence et ses conseils m'ont été d'un grand secours. Encore merci !

Par ailleurs, je tiens à exprimer mes vifs remerciements au président du jury Monsieur BENIANI Abderrahmane. Je remercie très respectueusement Monsieur Hariri Mohamed et Madame SAIAH Zokha qui ont consacré leur temps à bien examiner et juger mon travail d'une façon minutieuse.

D'autre part, j'adresse une chaleureuse pensée à toute l'équipe pédagogique du Département de Mathématiques et Informatique surtout la Cheffe de département Madame Hellal Meriem.

Enfin, un grand merci à toute personne m'ayant aidée et guidée pour la réalisation de ce travail.

Dédicaces

A

Tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

A

Mes Parents Adda et Meriem qui m'ont encouragée et soutenue

A

Ma sœur Maroua et mes frères Farouk et Abdelwaheb

A

Mes grand pères Mohammed et Abdelkader et mes grand mères Bekhta et Maghniya

A

Mes cousines Djehene et Ismahene et mes tantes qui m'ont soutenues

A

Tous les membres des deux familles BECHIKR et Ahmed El-Mezouar

A

Mes amies surtout Akila, Amina, Romaissae et Imen

A

Mes Professeurs et toutes les filles de ma promotion

Bechikr Chaimaa

TABLE DES MATIÈRES

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	L'intervalle $[0, +\infty[$.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres naturels strictement positives.
$\emptyset$	L'ensemble vide.
$[a, b]$	Intervalle fermé sur $\mathbb{R}$.
$\lvert\cdot\rvert$	Norme sur $\mathbb{R}^n$.
$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{N}$	Multi-indice.
$\lvert\beta\rvert = \beta_1 + ... + \beta_n$	La longueur de β.
$\frac{\partial f}{\partial x}$	La dérivée partielle de f par rapport à x.
∂^α	La dérivée d'ordre α, où α est un multi-indice.
∇f	Le gradient de la fonction f.
$\partial\Omega$	La frontière de l'ensemble Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de l'ensemble Ω.

Introduction

Les espaces de Hölder sont des espaces intermédiaires définis entre les deux espaces C^k et C^{k+1}, nous avons introduit ces espaces car dans la plupart des cas nous constatons que les propriétés des espaces C^k sont insuffisantes.

Ces espaces sont très importants dans plusieurs domaines surtout dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles. De plus, les espaces de Hölder ont des propriétés de compacité très élémentaires et favorables et tous les fonctions de ces espaces sont uniformément continues.

Le travail accompli dans ce mémoire a pour objectif d'étudier certains théorèmes et propositions sur ces espaces, on va étudier leur topologie, à savoir l'inclusion, l'injection, la compacité,...etc. Puis à l'aide des exemples et d'applications, on montre à quoi ils peuvent servir.

Ce mémoire se divise en trois chapitres, le premier chapitre est consacré aux définitions et théorèmes dont nous avons besoin pour prouver certaines propriétés des espaces de Hölder. Parmi ces définitions se trouve les définitions et les propriétés des espaces vectoriels normés, le notion de continuité et de compacité, etc. Pour le deuxième chapitre on va définir les espaces de Hölder et leurs propriétés principales, et finalement le dernier chapitre donne une présentation simple de la théorie des semi-groupes et une étude détaillée du problème de Cauchy abstrait dans le cadre de cet espace.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Tout au long de ce travail, on désigne par $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps commutatif où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Espaces vectoriels normés

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1. *[3]Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur l'espace E est l'application définie par*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

qui possède les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

2. *Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.*

3. *Pour tous* $x, y \in E$, $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$. *Cette inégalité est appelée inégalité triangulaire.*

Définition 1.1.2. *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel* E *muni d'une norme* $\|\cdot\|$ *et de la topologie associée à cette norme. Il est noté* $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.1.3. *Si* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* E*, alors on a pour tous* $x, y \in E$.

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \tag{1.1}$$

Définition 1.1.4. *[7]Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé*

1. *Une partie* A *de* E *est bornée, s'il existe* $M > 0$*, tel que*

$$\|x\| \leq M, \, pour \, tout \, x \in A.$$

2. *Si* $r > 0$ *et* $x_0 \in E$.

   (*i*) *On appelle boule ouverte de centre* x_0 *et de rayon* r *le sous-ensemble de* E *défini par*

$$B_E(x_0, r) = \{x \in E, \ \|x - x_0\| < r\},$$

   (*ii*) *On appelle boule fermée le sous-ensemble de* E *défini par*

$$\overline{B}_E(x_0, r) = \{x \in E, \ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

   (*iii*) *On appelle sphère de centre* x_0 *et de rayon* r *le sous-ensemble défini par*

$$S_E(x_0, r) = \{x \in E, \ \|x - x_0\| = r\},$$

On note par $B(0,1) = B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon 1.

Définition 1.1.5. *[7]Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sur* E *sont dites équivalentes s'il existe* $\alpha, \beta > 0$ *tels que pour tout* $x \in E$*, on ait*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 .$$

Définition 1.1.6. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé et* $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E*.*

1. *On dit que* $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est convergente s'il existe* $u \in E$ *tel que*

$$\lim_{i\to\infty} \|u_i - u\| = 0.$$

Autrement dit

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \|x_i - x\| \leq \varepsilon.$$

2. *On dit que* $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0,\ \forall p, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.7. *[7]Un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace complet si toute suite de Cauchy de* E *est convergente dans* E*. Un tel espace est appelé espace de Banach.*

1.1.2 Continuité et convergence

Définition 1.1.8. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés et* f *une application de* $(E, \|\cdot\|_E)$ *dans* $(F, \|\cdot\|_F)$. *Soit* $x_0 \in E$, *on dit que* f *a pour limite* l *quand* x *tend vers* x_0, *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x - x_0\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.9. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés et* f *une application de* $(E, \|\cdot\|_E)$ *dans* $(F, \|\cdot\|_F)$.

1. f *est continue en* $x_0 \in E$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x - x_0\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$

2. f *est continue sur* $A \subset E$ *si et seulement si* f *est continue en tout point de* A.

Définition 1.1.10. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés et* f *une application définie sur une partie* A *non vide de* E. *On dit que* f *est uniformément continue sur* A *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|x - y\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

1.1.3 Compacité

Définition 1.1.11. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* K *un sous-ensemble de* E.

1. *On dit que* K *est compact si et seulement si de toute suite de* K, *on peut extraire une sous-suite convergente dans* K.

2. *On dit que* K *est relativement compact si et seulement si de toute suite de* K, *on peut extraire une sous-suite convergente dans* E.

Définition 1.1.12. *Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue. On dit que T est compact si, et seulement si, $\overline{T(B(0,1))}$ est une partie compacte de F. Cela revient à dire que, pour toute suite $(x_k)_{k\geq 1}$ bornée dans E, il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que la suite $(T(x_{\varphi(k)}))_{k\geq 1}$ converge dans F.*

Définition 1.1.13. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.*

1. *On dit que E s'injecte continûment dans F et on note $E \hookrightarrow F$, s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$*

$$\|x\|_F \leq C \|x\|_E .$$

2. *On dit que l'injection $E \hookrightarrow F$ est compacte si toute suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée de E admet une sous-suite $(u_{i_k})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente dans F.*
3. *On dit que E et F sont équivalents, et on note $E \sim F$ si $E = F$ et s'il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que pour tout $x \in E$*

$$C_1 \|x\|_E \leq \|x\|_F \leq C_2 \|x\|_E .$$

1.2 Espaces fonctionels

Si Ω est un compact de $\mathbb{R}^n$, on note par $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, continues. On sait que toute fonction f continue sur Ω est bornée et atteint ses bornes, ce qui permet de définir la norme uniforme de la fonction f en posant

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| .$$

Muni de cette norme, $\mathcal{C}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Définition 1.2.1. *Une partie H de $\mathcal{C}(\Omega)$ est dite équicontinue en un point x_0 de Ω si elle satisfait la condition suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{x_0} > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \|x - x_0\| \leq \eta \Rightarrow \forall h \in H,\ |h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.2.2 (Théorème d'Ascoli). *Soit Ω un compact de $\mathbb{R}^n$. Une partie H de $\mathcal{C}(\Omega)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\Omega)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.*

Définition 1.2.3. *Soit D_f le domaine de définition de la fonction f et a un point d'accumulation de D_f qui n'appartient pas à D_f. Si f admet une limite finie en a, alors on appelle le prolongement par continuité de f la fonction $\tilde{f}$ définie par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in D_f \\ \lim_{x\to a} f(x) & si \quad x = a \end{cases}.$$

A présent considérons Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ non nécessairement borné et k un entier. Rappelons que si une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ est différentiable, on note $df(x)$ sa différentiable au point x et on a le résultat suivant.

Proposition 1.2.4. *[1][7] Une application $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ est continûment différentiable si et seulement si ses n dérivées partielles existent et sont continues sur Ω.*

On voit que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$df(x) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \cdots, n$ est la dérivée partielle de f.

Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, l'entier $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est appelé hauteur de α et on note par

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

en supposant évidemment que f est $|\alpha|$-différentiable et que les dérivées partielles commutent. Si $\gamma, \alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $\gamma \leq \alpha$ signifie $\gamma_i \leq \alpha_i$, pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note par $C^k(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions k fois différentiables dans Ω dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω. L'espace $C^0(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues. On peut définir cet espace par récurrence sur k pour $k \geq 1$

$$f \in C^k(\Omega) \Leftrightarrow f \in C^{k-1}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega),\ i = 1, \cdots, n. \tag{1.2}$$

On note par $C_b^k(\Omega)$ l'espace vectoriel des éléments de $C^k(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées sur Ω. Cet espace muni de la norme

$$\|f\|_{C_b^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

est un espace de Banach.

Définition 1.2.5. *[7]Soient f et g deux fonctions $C^k(\Omega)$, la fonction fg est dans $C^k(\Omega)$ et on a la formule de Leibniz*

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma f \ \partial^{\alpha - \gamma} g$$

où $\binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}$.

Si $f \in C^1(\Omega)$, on note ∇f le gradient de la fonction f défini par le vecteur

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Rappelons maintenant l'inégalité des accroissements finis, pour plus de détails voir [3].

Définition 1.2.6 (**Inégalité des accroissements finis**). *Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $C^1(\Omega)$. On a alors pour tous $x, y \in \Omega$*

$$|f(x) - f(y)| \leq |\nabla f((1-c)\,x + cy)| \; |x - y|\,,$$

tel que $c \in \,]0, 1[$.

Théorème 1.2.7. *[3] Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables qui vérifie les hypothèses suivantes :*

1. *Il existe un point $a \in \Omega$ tel que la suite $(f_i(a))_i$ converge dans $\mathbb{K}$.*
2. *La suite $(df_i)_i$ de la différentielle de f_i est uniformément convergente sur Ω.*

Alors la suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction différentiable f sur chaque partie bornée de Ω, et pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$df\,(x) \cdot h = \left(\lim_{i\to\infty} df_i\,(x)\right) \cdot h = \lim_{i\to\infty} (df_i\,(x) \cdot h)$$

1.2.1 Les espaces de Lebesgue L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue et p, p' deux réels de $[1, \infty]$. On dit que p et p' sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Par extension, 1 et $+\infty$ sont conjugués. Voir [2] pour plus de détails.
On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\,dx.$$

Pour $p \in \mathbb{R}$, on définit l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{K}, \text{ mesurable : } \; |f|^p \in L^1(\Omega)\right\}.$$

On le muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K},\ f \text{ mesurable} : \exists C > 0,\ |f(x)| \leq C \ \ p.p. \text{ sur } \Omega\}.$$

On le muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C,\ |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega\}.$$

Rappelons l'inégalité de Hölder

Théorème 1.2.8. *[2]Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq p' \leq +\infty$. Alors $fg \in L^1$ et*

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Théorème 1.2.9. *[2] L'espace L^p muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

1.2.2 Intégrale de Bochner

L'intégrale de Bochner généralise la notion d'intégrale usuelle de Lebesgue pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach. On va donner une petite présentation de cette intégrale.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et considérons les fonctions f définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans E. Notons la mesure de Lebesgue d'un ensemble Lebesgue-mesurable B par $\mu(B)$. La fonction f définie par

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{B_i}$$

est une fonction simple, où pour tout $i = 1, \cdots, k,\ \alpha_i \in E$ et B_i sont disjoints tels que $\mu(B_i) < \infty$ et χ_{B_i} est l'indicatrice de B_i. On peut définir l'intégrale de f au sens de Bochner sur Ω par

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(B_i).$$

Définition 1.2.10. *[8]La fonction f est dite Bochner intégrable, s'il existe une suite de fonctions simples $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f p.p. sur Ω et*

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega \|f(x) - f_i(x)\|\, dx = 0.$$

Proposition 1.2.11. *[8] Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}$ est Bochner-intégrable si et seulement si f est mesurable et*

$$\int_\Omega \|f(x)\|_E\, dx < \infty.$$

De nombreuses propriétés usuelles de l'intégrale de Lebesgue restent vraies pour l'intégrale de Bochner on cite par exemple le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

CHAPITRE 2

LES ESPACES DE HÖLDER

2.1 Les espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$

Définition 2.1.1. *Soient $\alpha \in]0,1]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction à valeur complexe de $L^\infty(\Omega)$ est dite fonction de Hölder d'exposant α ou α-höldérienne, si la condition suivante*

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \tag{2.1}$$

est vérifiée.

La condition (2.1) est équivalente à dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \Omega,\ |f(x)-f(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha\,. \tag{2.2}$$

Si f est α-höldérienne, alors on note par

$$[f]_\alpha(\Omega) = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble Ω, on note tout simplement $[f]_\alpha$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\forall x, y \in \Omega,\ |f(x) - f(y)| \leq [f]_\alpha |x - y|^\alpha .$$

Notation 2.1.2. *Pour $\alpha \in]0,1]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note par $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions α-höldériennes sur Ω.*

Exemple 2.1.3. *1. Pour $\alpha \in]0,1]$, on considère la fonction f définie par*

$$\begin{array}{rccl} f & : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha \end{array}.$$

Elle est α-höldérienne et $[f]_\alpha = 1$. En effet, si $x, y \in [0,\infty[$ et $\alpha - 1 \leq 0$, alors en supposant que $0 \leq y < x$, on aura

$$|f(x) - f(y)| = |x^\alpha - y^\alpha| = \left| \int_y^x \alpha t^{\alpha-1} dt \right| \leq \alpha \int_y^x \left| (t-y)^{\alpha-1} \right| dt = |x - y|^\alpha .$$

Et par conséquent, $[f]_\alpha \leq 1$. D'autre part, si on prend $x = 1$ et $y = 0$ dans $|f(x) - f(y)| \leq [f]_\alpha |x - y|$, on obtient $[f]_\alpha \geq 1$, donc on conclut que

$$[f]_\alpha = 1.$$

De plus, on va montrer que si $\alpha \neq 1$, alors f ne peut être μ-höldérienne pour tout $\mu > \alpha$. Pour cela, supposons que f est μ-höldérienne où $\mu > \alpha$, et prenons $y = 0$ dans

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_\mu |x - y|^\mu ,$$

on obtient alors

$$x^{\alpha-\mu} \leq [f]_\mu ,\ \forall x \geq 0,$$

ce qui est absurde.

2. La fonction f définie sur $B(0,1)$ par

$$f(x) = |x|^{\gamma}\,,\ \gamma \in]0,1]$$

est une fonction de Hölder d'exposant γ. En effet,

- *Pour $\gamma = 1$, c'est évident, on aura $C = 1$ et $\alpha = 1$.*
- *Pour $0 < \gamma < 1$, on considère la fonction définie sur $[0,1[$ par*

$$\phi(s) = \frac{1 - s^{\gamma}}{(1-s)^{\gamma}},\ s \in [0,1[.$$

On a $\phi'(s) = \gamma \frac{1-s^{\gamma-1}}{(1-s)^{\gamma+1}}$, ainsi il est clair que $\phi'(s) < 0$, elle est donc décroissante et on aura $\lim_{s\to 1} \phi(s) < \phi(s) \leq \phi(0)$, c'est-à-dire

$$0 < \phi(s) \leq 1.$$

Dans ce cas,

$$1 - s^{\gamma} \leq (1-s)^{\gamma}. \tag{2.3}$$

A présent, pour $x, y \in B(0,1)$, sans perdre de généralité, on peut supposer que $|x| > |y|$ et on applique l'inégalité (2.3) à $s = \frac{|y|}{|x|}$, on obtient alors

$$|x|^{\gamma} - |y|^{\gamma} \leq (|x| - |y|)^{\gamma}$$

Mais $||x| - |y|| \leq |x - y|$ par (1.1), ainsi

$$|x|^{\gamma} - |y|^{\gamma} \leq |x - y|^{\gamma}\,,$$

et par conséquent $C = 1$ et $\alpha = \gamma$.

Remarque 2.1.4. *Dans l'inégalité (2.2), on peut toujours supposer que* $|x-y| \leq \delta$*, pour* δ *petit, car même si* $|x-y| \geq \delta$*, on aura toujours (2.2).*

En effet, si $x, y \in \Omega$ *et* $\frac{|x-y|}{\delta} \geq 1$*, alors*

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| \leq |f(x)|+|f(y)| &\leq \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x\in\Omega} |f(y)| \\ &\leq 2\,\|f\|_\infty \\ &\leq 2\,\|f\|_\infty \frac{|x-y|^\alpha}{\delta^\alpha}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$|f(x)-f(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha,$$

où $C = \frac{2}{\delta^\alpha}\|f\|_\infty$*. D'où l'inégalité (2.2).*

Proposition 2.1.5. *[4] Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\alpha, \lambda \in]0,1]$*. Si* $f, g \in C^{k,\alpha}(\Omega)$*, alors on a les propriétés suivantes :*

1. $f+g$ *est* α*-höldérienne et*

$$[f+g]_\alpha \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha. \tag{2.4}$$

2. fg *est* α*-höldérienne et*

$$[fg]_\alpha \leq [f]_\alpha \|g\|_\infty + [g]_\alpha \|f\|_\infty. \tag{2.5}$$

3. *Si* $\inf_{x\in\Omega}|g(x)| > 0$*, alors* $\frac{1}{g}$ *est* α*-höldérienne et*

$$\left[\frac{1}{g}\right]_\alpha \leq \frac{[g]_\alpha}{(\inf_{x\in\Omega}|g(x)|)^2}. \tag{2.6}$$

4. *Si* $\inf_{x\in\Omega}|g(x)| > 0$*, alors* $\frac{f}{g}$ *est* α*-höldérienne et*

$$\left[\frac{f}{g}\right]_\alpha \leq \frac{[f]_\alpha \|g\|_\infty + [g]_\alpha \|f\|_\infty}{(\inf_{x\in\Omega}|g(x)|)^2}. \tag{2.7}$$

5. *Si f est α-höldérienne sur $Im(g)$ et g est λ-höldérienne sur Ω, alors la composé $f \circ g$ est $\alpha\lambda$-höldérienne sur Ω et on a*

$$[f \circ g]_{\alpha\lambda} \leq [f]_\alpha \left([g]_\lambda\right)^\alpha. \tag{2.8}$$

Preuve. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$

1. Si $f \in L^\infty(\Omega)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$, alors $f+g \in L^\infty(\Omega)$ et pour tous $x, y \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq [f]_\alpha |x-y|^\alpha + [g]_\alpha |x-y|^\alpha \\ &\leq ([f]_\alpha + [g]_\alpha) |x-y|^\alpha . \end{aligned}$$

Donc $(f+g)$ est α-höldérienne. De plus,

$$\frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha, \ \forall x, y \in \Omega,$$

c'est-à-dire

$$[f+g]_\alpha \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha.$$

2. Si $f, g \in L^\infty(\Omega)$, alors $fg \in L^\infty(\Omega)$ et pour tous $x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |g(x)| \, |f(x) - f(y)| + |f(y)| \, |g(x) - g(y)| \\ &\leq \|g\|_\infty [f]_\alpha |x-y|^\alpha + \|f\|_\infty [g]_\alpha |x-y|^\alpha \\ &\leq ([f]_\alpha \|g\|_\infty + [g]_\alpha \|f\|_\infty) |x-y|^\alpha . \end{aligned}$$

Donc (fg) est α-höldérienne. De plus

$$\frac{|(fg)(x) - (fg)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq ([f]_\alpha \|g\|_\infty + [g]_\alpha \|f\|_\infty), \ \forall x, y \in \Omega,$$

c'est-à-dire

$$[fg]_\alpha \leq [f]_\alpha \|g\|_\infty + [g]_\alpha \|f\|_\infty .$$

3. Si g est α-höldérienne et $\inf\limits_{x\in\Omega} |g(x)| > 0$, alors

$$\frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{1}{\inf_{x\in\Omega} |g(x)|},\ \forall x \in \Omega,$$

c'est-à-dire $g \in L^\infty(\Omega)$. Pour tous $x, y \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| &= \left|\frac{g(y)-g(x)}{g(x)g(y)}\right| \\ &\leq \frac{[g]_\alpha}{(\inf_{x\in\Omega} |g(x)|)^2} |x-y|^\alpha . \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{g}$ est α-höldérienne. De plus

$$\frac{\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{[g]_\alpha}{(\inf_{x\in\Omega} |g(x)|)^2},\ \forall x, y \in \Omega,$$

c'est-à-dire

$$[\frac{1}{g}]_\alpha \leq \frac{[g]_\alpha}{(\inf_{x\in\Omega} |g(x)|)^2}.$$

4. Si on applique 2. et 3. aux fonctions f et $\frac{1}{g}$, on obtient

$$\begin{aligned} \left[\frac{f}{g}\right]_\alpha &= \left[f\frac{1}{g}\right]_\alpha \\ &\leq [f]_\alpha \left\|\frac{1}{g}\right\|_\infty + [\frac{1}{g}]_\alpha \|f\|_\infty \\ &\leq [f]_\alpha \frac{1}{\inf_{x\in\Omega} |g(x)|} + \frac{[g]_\alpha}{(\inf_{x\in\Omega} |g(x)|)^2} \|f\|_\infty \\ &\leq \frac{[f]_\alpha \inf_{x\in\Omega} |g(x)| + \|f\|_\infty [g]_\alpha}{(\inf_{x\in\Omega} |g(x)|)^2} \\ &\leq \frac{[f]_\alpha \|g\|_\infty + \|f\|_\infty [g]_\alpha}{(\inf_{x\in\Omega} |g(x)|)^2}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{f}{g}$ est α-höldérienne et (2.7) est vérifiée.

5. Pour tous $x, y \in \Omega$, $g(x), g(y) \in Im(g)$, donc

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - f(g(y))| &\leq [f]_\alpha |g(x) - g(y)|^\alpha \\ &\leq [f]_\alpha([g]_\lambda |x-y|^\lambda)^\alpha \\ &\leq [f]_\alpha([g]_\lambda)^\alpha |x-y|^{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ g$ est $\alpha\lambda$-höldérienne et $[f \circ g]_{\alpha\lambda} \leq [f]_\alpha([g]_\lambda)^\alpha$.

□

Corollaire 2.1.6. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$, l'espace $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Lemme 2.1.7. *L'application définie sur $C^{0,\alpha}(\Omega)$ par*

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha, \ \forall f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \tag{2.9}$$

est une norme sur $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Preuve. On vérifie les critères de la norme.

1. Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} \|f\|_\alpha = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sup_{x\in\Omega} |f(x)| = 0 \\ \text{et} \\ \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

2. Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, et $a \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\|af\|_\alpha &= \sup_{x\in\Omega}|af(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|af(x)-af(y)|}{|x-y|^\alpha}\\ &= |a|\sup_{x\in\Omega}|f(x)| + |a|\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\\ &= |a|\,\|f\|_\alpha .\end{aligned}$$

3. Si $f, g \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, alors par (2.4) et le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, on obtient

$$\|f+g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha$$

$\square$

Proposition 2.1.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$, l'espace $C^{0,\alpha}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ i,j \geq N \Rightarrow \|f_i - f_j\|_\alpha \leq \varepsilon \tag{2.10}$$

Par (2.2), on a

$$\left|\|f_i\|_\alpha - \|f_j\|_\alpha\right| \leq \|f_i - f_j\|_\alpha\,,$$

on en déduit de (2.10) que la suite $(\|f_i\|_\alpha)_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et puisque l'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, alors la suite $(\|f_i\|_\alpha)_{i\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, puisque toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée, c'est-à-dire

$$\exists M > 0,\ \ \|f_i\|_\alpha \leq M\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

En particulier

$$|f_i(x)| \leq M,\ \forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \Omega \tag{2.12}$$

D'autre part, pour $i, j \geq N$, on a

$$\|f_i - f_j\|_\alpha = \sup_{x \in \Omega} |f_i(x) - f_j(x)| + [f_i - f_j]_\alpha \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire,

$$\forall i, j \geq N\,,\ |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in \Omega.$$

Ce qui implique que pour tout $x \in \Omega$, la suite $(f_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ qui est complet. Nous en déduisons alors qu'il existe une limite notée $f(x)$ de la suite $(f_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$. Cette fonction f est mesurable sur Ω, il reste à montrer qu'elle appartient à $C^{0,\alpha}(\Omega)$ et qu'elle est bien la limite de $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Pour cela, on a d'aprés (2.12),

$$|f_i(x)| \leq M,\ \forall x \in \Omega,$$

et en passant à la limite on en déduit que $f \in L^\infty(\Omega)$.
D'autre part on a $[f_i - f_j]_\alpha \leq \|f_i\|_\alpha$ donc $\forall x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f_i(y)| &\leq \|f_i\|_\alpha |x - y|^\alpha \\ &\leq M |x - y|^\alpha . \end{aligned}$$

En faisant tendre i vers $+\infty$, on voit que $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Ensuite, on observe que le "N" dans (2.10) ne dépend pas de x et y. En conséquence, on fixe x et y et $j \geq N$, et on fait tendre $i \to \infty$ pour obtenir la convergence de $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vers f dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$. □

Proposition 2.1.9. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0, 1]$, on a les inclusions suivantes*

$$C_b^1(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C_b^0(\Omega). \tag{2.13}$$

De plus, toute fonction α-höldérienne est uniformément continue.

Preuve. Commençons par la première inclusion, si $f \in C_b^1(\Omega)$, alors f ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égale à 1 sont continues et bornées sur Ω. Par l'inégalité des accroissements finis, il résulte qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \, |\nabla f(c)| \, , \; \forall x, y \in \Omega \tag{2.14}$$

Et par la remarque 2.1.4, on peut supposer que $|x - y| \leq 1$, ainsi

$$|x - y| \leq |x - y|^{\alpha} \, ,$$

et on aura finalement

$$|f(x) - f(y)| \leq M \, |x - y|^{\alpha} \, .$$

C'est-à-dire $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Passons à deuxième inclusion, si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, alors $f \in L^{\infty}(\Omega)$ et il existe $C > 0$, tel que

$$\forall x, y \in \Omega, \; |f(x) - f(y)| \leq C \, |x - y|^{\alpha} \, .$$

Ainsi si pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\delta = (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.15}$$

on aura pour tous $x, y \in \Omega$, tel que

$$|x - y| < \delta, \; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve la continuité de f, autrement dit $f \in C_b^0(\Omega)$.
On remarque au fait que le δ choisi dans (2.15) ne dépend pas de x et y, ce qui prouve que f est uniformément continue. $\square$

Une fonction continue n'est pas nécessairement dans $C^{0,\alpha}(\Omega), \; \alpha > 0$. On va voir cela dans l'exemple suivant.

Remarque 2.1.10. *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$ *mais n'appartient à aucun espace* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *pour* $\alpha \in]0,1]$. *En effet, supposons l'inverse, c'est-à-dire qu'il existe* $C > 0$, *telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

et prenons, dans cette inégalité $y = 0$ *et* $x \neq 0$, *on obtient alors*

$$\left|\frac{1}{\ln(|x|)}\right| \leq C\,|x|^{\alpha}\,,$$

c'est-à-dire

$$1 \leq C\,|x|^{\alpha}\,|\ln|x||\ \text{ pour } x \neq 0$$

et en passant à la limite quand $x \to 0$, *on aboutit à une contradiction car* $\lim_{x\to 0} |x|^{\alpha} \ln|x| = 0$ *pour tout* $\alpha > 0$.

Il faut noter que toute fonction continue et bornée de Ω à valeurs complexes ne se prolonge pas nécessairement en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, par exemple, la fonction $f(x) = sin\frac{1}{x}$ définie sur $\Omega =]0,1]$, est bornée et continue sur Ω, mais elle n'admet même pas une limite au point 0 donc elle ne se prolonge pas.

Par contre on a la proposition suivante pour les fonctions höldériennes.

Proposition 2.1.11. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in]0,1]$.
Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, *alors il existe une fonction* $\tilde{f}$, *bornée sur* $\overline{\Omega}$ *et vérifie l'inégalité (2.2) pour tous* x, y *dans* $\overline{\Omega}$, *qui prolonge* f.

Preuve. Si $\partial\Omega = \emptyset$, alors il y a rien à démontrer, supposons alors que $\partial\Omega \neq \emptyset$ c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \partial\Omega$. Puisque Ω est un ouvert, alors tout point de $\partial\Omega$ est un point d'accumulation pour Ω, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ qui converge vers x_0 dans $\mathbb{R}^n$. En appliquant l'inégalité (2.2) aux points x_i et x_m, on obtient

$$|f(x_i) - f(x_m)| \leq C\,|x_i - x_m|^\alpha$$

et puisque $(x_i)_i$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$, alors la suite $(f(x_i))_i$ est aussi une suite de Cauchy dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ qui est complet, ainsi la suite $(f(x_i))_i$ converge vers $l \in \mathbb{C}$.

Montrons ensuite que l'élément l est au fait indépendant de la suite $(x_i)_i$. Pour cela, considérons une autre telle suite $(y_i)_i$ et par le même raisonnement, on obtient $(f(y_i))_i \to l'$. Appliquons l'inégalité (2.2) à x_i et y_i, on obtient

$$|f(x_i) - f(y_i)| \leq C\,|x_i - y_i|^\alpha .$$

D'autre part on a

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - x_0| + |y_i - x_0|$$

Donc

$$|f(x_i) - f(y_i)| \leq C(|x_i - x_0| + |y_i - x_0|)^\alpha$$

et en faisant tendre $i \to \infty$, on trouve $l' = l$.

Définissons la fonction $\tilde{f}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ l & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$ et $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i) = l$. La fonction $\tilde{f}$ est évidemment bornée sur $\overline{\Omega}$, il reste à montrer alors qu'elle vérifie (2.2). Pour se faire, on distinguera trois cas :

1. Si $x, y \in \Omega$, alors (2.2) est vérifiée par hypothèse.

2. Si $x \in \partial\Omega$ et $y \in \Omega$, alors il existe $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ tel que $x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$ donc

$$|f(x_i) - f(y)| \leq C\,|x_i - y|^{\alpha}\,,$$

Ensuite, par continuité de f et par passage à la limite quand $i \to \infty$, on obtient $|l - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\alpha}$. Autrement dit,

$$\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right| \leq C\,|x - y|^{\alpha}\,.$$

3. Si $x, y \in \partial\Omega$, alors il existe $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ tels que $x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$ et $y = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$. Il s'en suit, alors que

$$|f(x_i) - f(y_i)| \leq C\,|x_i - y_i|^{\alpha}\,,$$

et en passant à la limite quand $i \to \infty$, on aura le résultat.

□

Remarque 2.1.12. *On pourra grâce à la proposition 2.1.11 affirmer que* $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *et avoir* $[f]_{\alpha}(\Omega) = [f]_{\alpha}(\overline{\Omega})$

A présent, on va voir la relation entre $C^{0,\alpha}(\Omega)$ et $C^{0,\alpha'}(\Omega)$ pour cela, on aura besoin des lemmes suivants

Lemme 2.1.13. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\alpha, \alpha' \in]0,1]$ *tels que* $\alpha \geq \alpha'$. *Si* $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a l'inégalité suivante*

$$\|f\|_{\alpha'} \leq (\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}} + 1)\,\|f\|_{\infty} + \varepsilon^{\alpha-\alpha'}\,\|f\|_{\alpha}\,. \tag{2.16}$$

Preuve. Soient $\alpha, \alpha' \in]0,1]$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, commençons par supposer que $|x-y| \geq \varepsilon$, $x, y \in \Omega$, dans ce cas, on aura

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} &\leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha'}}(|f(x)|+|f(y)|)\\ &\leq \frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}}\|f\|_\infty\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} \leq \frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}}\|f\|_\infty ,$$

et

$$\|f\|_{\alpha'} \leq (1+\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}})\|f\|_\infty \leq (\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}}+1)\|f\|_\infty + \varepsilon^{\alpha-\alpha'}\|f\|_\alpha . \tag{2.17}$$

Ensuite supposons que $|x-y| \leq \varepsilon$ et puisque $\alpha - \alpha' \geq 0$, en écrivant

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}|x-y|^{\alpha-\alpha'} ,$$

on obtient

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\varepsilon^{\alpha-\alpha'} \leq \|f\|_\alpha \varepsilon^{\alpha-\alpha'}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|f\|_{\alpha'} &\leq \varepsilon^{\alpha-\alpha'}\|f\|_\alpha + \|f\|_\infty \qquad (2.18)\\ &\leq (\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}}+1)\|f\|_\infty + \varepsilon^{\alpha-\alpha'}\|f\|_\alpha . \qquad (2.19)\end{aligned}$$

D'aprés (2.17) et (2.18), on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|f\|_{\alpha'} \leq (\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}}+1)\|f\|_\infty + \varepsilon^{\alpha-\alpha'}\|f\|_\alpha .$$

$\square$

Si on ajoute une condition sur l'ouvert Ω, l'injection (2.13) devient compacte, comme cela est démontré dans le lemme suivant

Lemme 2.1.14. *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$, alors l'injection*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \tag{2.20}$$

est compacte.

Preuve. On a déjà vu dans la proposition 2.1.11 que $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, et par la Proposition 2.1.9, $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^0(\overline{\Omega})$ donc $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, de plus

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \leq \|f\|_\alpha ,$$

pour tout $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, d'où l'injection

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

Montrons ensuite que cette injection est compacte, c'est-à-dire qu'on doit montrer que si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$, alors $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $C^0(\overline{\Omega})$.

Pour se faire, on utilise le théorème d'Ascoli Arzéla car $\overline{\Omega}$ qui est un compact. Autrement dit, on montre que $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ est borné et équicontinu. En effet, puisque $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors $\exists M > 0,\ \forall i \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|f_i(x) - f_i(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M$$

En particulier

$$|f_i(x)| \leq M,\ \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \overline{\Omega},$$

autrement dit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^0(\overline{\Omega})$. D'autre part pour tous $\varepsilon > 0$, $i \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \overline{\Omega}$, on a

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq M\,|x-y|^\alpha$$

donc si on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ tel que $|x - y| \leq \delta$, on obtient

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$. $\square$

Proposition 2.1.15. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha, \alpha' \in]0,1]$ tels que $\alpha \geq \alpha'$, alors l'injection*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha'}(\Omega) \text{ est continue.}$$

Si de plus, Ω est borné et $\alpha \neq \alpha'$, alors l'injection devient compacte.

Preuve. Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha, \alpha' \in]0,1]$ tels que $\alpha \geq \alpha'$

1. Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, alors par (2.16) , on a

$$\|f\|_{\alpha'} \leq (\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}} + 1) \|f\|_\infty + \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \|f\|_\alpha \leq C \|f\|_\alpha$$

   d'où la continuité de l'injection $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha'}(\Omega)$.

2. Supposons de plus, que Ω est borné et $\alpha \neq \alpha'$ et prenons $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\exists M > 0,\ \forall i \in \mathbb{N},\ \|f_i\|_\alpha \leq M.$$

   Montrons que l'ensemble $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $C^{0,\alpha'}(\Omega)$, c'est-à-dire qu'on peut extraire une sous-suite $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^{0,\alpha'}(\Omega)$. Par le lemme 2.1.14, il existe une sous-suite $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une certaine fonction f dans $C^0(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0 \Rightarrow \|f_{i_k} - f\|_\infty \leq \varepsilon'.$$

   D'autre part, on a $\forall x, y \in \Omega,\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$|f_{i_k}(x) - f_{i_k}(y)| \leq \|f_{i_k}\|_\alpha |x - y|^\alpha \leq M |x - y|^\alpha ,$$

en passant à la limite quand $k \to \infty$, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq M\, |x - y|^{\alpha}\,,\ \forall x, y \in \Omega.$$

Autrement dit, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, ainsi $f_{i_k} - f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, et en appliquant le lemme 2.1.13 à cette fonction, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|f_{i_k} - f\|_{\alpha'} \leq \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \|f_{i_k} - f\|_{\alpha} + (1 + \frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}}) \|f_{i_k} - f\|_{\infty}$$

Par conséquent pour $k \geq k_0$ et $\varepsilon' = \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}
\|f_{i_k} - f\|_{\alpha'} &\leq \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \|f_{i_k} - f\|_{\alpha} + (1 + \frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}}) \|f_{i_k} - f\|_{\infty} \\
&\leq \varepsilon^{\alpha-\alpha'} (\|f_{i_k}\|_{\alpha} + \|f\|_{\alpha}) + (1 + \frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}})\varepsilon \\
&\leq \varepsilon^{\alpha-\alpha'} 2M + (1 + \frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}})\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $(f_{i_k})_i$ converge vers f dans $C^{0,\alpha'}(\Omega)$ puisque $1 - \alpha' \geq \alpha - \alpha' > 0$. □

A présent on va voir qu'il n'y a aucune relation entre une fonction absolument continue et $\alpha-$höldérienne, dans le sens où il existe des fonctions α-höldérienne qui ne sont pas absolument continues, et il existe des fonctions absolument continues qui ne sont pas α-höldérienne.

On va illustrer ces propos avec les exemples ci-dessous, mais avant cela rappelons la définition sur $\mathbb{R}$ d'une fonction absolument continue.

Définition 2.1.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est absolument continue si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute suite finie $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-intervalles de I d'intérieurs disjoints, on a*

$$\sum_{n\geq 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon. \tag{2.21}$$

Examples 2.1.17. *[4]*

1. *La fonction f introduite dans la remarque 2.1.10 est absolument continue sur l'intervalle $I =]0, \frac{1}{2}]$. Mais elle n'appartient à aucun espace $C^{0,\alpha}(I)$ où $\alpha \in]0, 1]$.*

2. *Considérons la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si \quad x \in]0, \frac{1}{\pi}] \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

(i) *Soient $x, y \in]0, \frac{1}{\pi}]$, sans perdre de généralité, on peut supposer que $y < x$, on aura alors*

$$|x - y|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \; et \; \left|\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y}\right|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}$$

D'autre part on peut écrire

$$x \sin \frac{1}{x} - y \sin \frac{1}{y} = (x - y) \sin \frac{1}{x} + y(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y})$$

Donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x - y|^{\frac{1}{2}} + y\sqrt{2} \left|\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Et en appliquant l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$\left|\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y}\right|^{\frac{1}{2}} \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|^{\frac{1}{2}} = \frac{|x - y|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}.$$

Finalement, on aura

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x - y|^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{x}} |x - y|^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{2}) |x - y|^{\frac{1}{2}},$$

Ce qui veut dire que f est une fonction de Hölder d'exposant $\frac{1}{2}$.

(ii) *Montrons ensuite que f n'est pas absolument continue. Considérons pour chaque $h \in \mathbb{N}$, la partition de l'intervalle $[0, \frac{1}{\pi}]$ donnée par les $2h+1$ points*

$$x_i = \frac{2}{(i+1)\pi} \textit{ pour } i = 1, \cdots, 2h \textit{ et } x_{2h+1} = 0,$$

Le fait que $f(x_{2j}) > 0$ et $f(x_{2j-1}) = 0$ pour $j = 1, \cdots, h$, implique que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2h} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \sum_{j=1}^{h} |f(x_{2j})| &= \sum_{j=1}^{h} \frac{2}{(2j+1)\pi} \left|\sin(2j+1)\frac{\pi}{2}\right| \\ &= \sum_{j=1}^{h} \frac{2}{(2j+1)\pi} \\ &> \sum_{j=1}^{h} \frac{2}{(2j+2)\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{j+1}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{h\to\infty} \sum_{i=1}^{2h} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = +\infty$, de sorte que f n'est pas absolument continue.

Remarque 2.1.18. *[4] L'inverse d'une fonction α-höldérienne, s'il existe n'est pas forcément une fonction α-höldérienne.*

En effet, considérons la fonction définie sur $I = [0, 1]$ par $f(x) = x^3$ et appliquons l'inégalité des accroissements finis

$$\left|x^3 - y^3\right| \leq 3\,|x - y|\,.$$

c'est-à-dire $f \in C^{0,1}(I)$. D'autre part, sa fonction inverse est définie sur $[0, 1]$ par

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

est $\frac{1}{3}$-höldérienne et ne pourra pas être 1-höldérienne d'après l'exemple 1.

2.2 Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Soit k un entier positif.

Définition 2.2.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$, pour $k \in \mathbb{N}$, on note par $C^{k,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $C_b^k(\Omega)$ qui sont α-höldériennes et dont la dérivée jusqu'à l'ordre k est une fonction α-höldérienne aussi.*

Autrement dit,

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \Leftrightarrow f \in C_b^k(\Omega) \text{ et } \partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega), \text{ pour tout } |\beta| \leq k \quad (2.22)$$

et qui s'écrit de manière équivalente aussi comme suit

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \Leftrightarrow f \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega), \text{ pour tout } i = 1, \cdots, n \quad (2.23)$$

La preuve de la proposition suivante est facile, on l'a omis.

Proposition 2.2.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in]0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$, les ensembles $C^{k,\alpha}(\Omega)$ sont des sous-espaces vectoriels des espaces $C^k(\Omega)$.*

Lemme 2.2.3. *L'application définie par*

$$\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{|\beta| \leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha \quad (2.24)$$

est une norme sur $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Preuve. On utilise le fait que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur $C^{0,\alpha}(\Omega)$

1. Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors
$\|f\|_{k,\alpha} = 0 \Leftrightarrow \sum_{|\beta| \leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \|f\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

2. Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$\|af\|_{k,\alpha} = \sum_{|\beta| \leq k} \left\|\partial^\beta (af)\right\|_\alpha = |a| \, \|f\|_{k,\alpha}.$$

3. Si $f, g \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f+g\|_{k,\alpha} = \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f + \partial^\beta g\right\|_\alpha \leq \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha + \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta g\right\|_\alpha$$

$\square$

Proposition 2.2.4. *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1]$, l'application définie par*

$$\|f\|'_{k,\alpha} = \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha}, \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \tag{2.25}$$

est une norme sur $C^{k,\alpha}(\Omega)$ équivalente à $\|\cdot\|_{k,\alpha}$.

Preuve. On peut facilement vérifier que $\|\cdot\|'_{k,\alpha}$ est une norme sur $C^{k,\alpha}(\Omega)$, montrons l'équivalence, soit $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{k,\alpha} &= \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha} + \sum_{|\beta|<k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \|f\|'_{k,\alpha} + \sum_{|\beta|<k} \sup_{x\neq y} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|'_{k,\alpha} \leq \|f\|_{k,\alpha}$$

D'autre part pour $|\beta| \leq k-1$, on a

$$\left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha = \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha}$$

En prenant $|x-y| \leq 1$ et en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\partial^\beta f$, on obtient

$$\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right| \leq |x-y| \sum_{|\gamma|<k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\gamma f(x)|$$

Par conséquent, on aura

$$\left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha \leq C \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sum_{|\gamma|\leq k} \|\partial^\gamma f\|_\infty \leq C_1 \sum_{|\gamma|\leq k} \|\partial^\gamma f\|_\infty ,$$

donc

$$\sum_{|\beta|\leq k-1} \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha \leq C_2 \sum_{|\gamma|\leq k} \|\partial^\gamma f\|_\infty$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|f\|_{k,\alpha} &\leq C_2 \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha \\
&= C_2 \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq C_3 \|f\|'_{k,\alpha}
\end{aligned}$$

Finalement, $\exists C_3 > 0$ tel que

$$\|f\|'_{k,\alpha} \leq \|f\|_{k,\alpha} \leq C_3 \|f\|'_{k,\alpha} , \ \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$$

$\square$

Proposition 2.2.5. *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1]$, l'application définie par*

$$\|f\|_* = \|f\|_{k-1,\alpha} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{k-1,\alpha} , \ \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \tag{2.26}$$

est une norme sur $C^{k,\alpha}(\Omega)$, équivalente à $\|\cdot\|_{k,\alpha}$.

Preuve. C'est évident que c'est une norme sur $C^{k,\alpha}(\Omega)$ et par de simple calculs sur les dérivées, on arrive à montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\|f\|_* \leq C_1 \|f\|_{k,\alpha}, \ \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \tag{2.27}$$

En effet, $\partial^\beta f$ peut être écrite sous la forme $\partial^\alpha(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ avec $|\alpha| < |\beta|$, donc en particulier $|\alpha| \leq k-1$, Ensuite, on utilise le fait que

$$\|f\|_{k-1,\alpha} \leq \|f\|_{k,\alpha}$$

pour avoir $C_2 > 0$ tel que

$$\|f\| \leq C_2 \|f\|_* .$$

$\square$

Puisqu'on a démontré que les trois normes $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_{k,\alpha}$ et $\|\cdot\|'_{k,\alpha}$ sont des normes équivalentes, alors dans la suite, on utilise la même notation $\|\cdot\|_{k,\alpha}$.

Proposition 2.2.6. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in]0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$, l'espace $C^{k,\alpha}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{k,\alpha}$ est un espace de Banach.*

Preuve. On utilise le raisonnement par récurrence sur k, en utilisant la définition (2.23) .

- Si $k = 1$, alors par la proposition (2.1.8) , $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'espace de Hölder complet.
- Supposons, à présent que $C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ est un espace de complet et montrons que c'est le cas pour $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$f_i \in C^{k-1,\alpha}(\Omega), \ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega), \ \forall j = 1, \cdots, n$$

et pour $\varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ tels que pour $i, p > N$, on a

$$\|f_i - f_p\|_{k-1,\alpha} + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_p}{\partial x_j} \right\|_{k-1,\alpha} \leq \varepsilon. \tag{2.28}$$

Donc $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et pour tout $j = 1, \cdots, n$, $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans l'espace $C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ qui est complet par hypothèse, donc elles sont convergentes. Autrement dit, il existe $f \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ et $g_j \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ telles que

$$f_i \to f \text{ et } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \to g_j \text{ dans } C^{k-1,\alpha}(\Omega).$$

Par le lemme 2.1.14, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \to g_j$ dans $C^0(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ converge uniformément vers g_i et par le théorème 1.2.7, $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$.

Finalement $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ et en passant à la limite quand $p \to \infty$ pour i fixé dans (2.28), on aura

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ i > N \Rightarrow \|f_i - f\|_{k,\alpha} \leq \varepsilon.$$

□

Proposition 2.2.7. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in]0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $f, g \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors $fg \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{k,\alpha} \leq C \|f\|_{k,\alpha} \|g\|_{k,\alpha} \tag{2.29}$$

Preuve. Soient $f, g \in C^{k,\alpha}$, alors par définition $\partial^\beta f \in C^{0,\alpha}$ et $\partial^\beta g \in C^{0,\alpha}$ pour tout $|\beta| \leq k$. Appliquons la formule de Leibniz à (fg),

$$\partial^\alpha (f\ g) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma f\ \partial^{\alpha-\gamma} g$$

Par la proposition 2.1.5, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est stable par multiplication et par addition, ainsi $\partial^{\beta}(f\ g) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, pour tout $|\beta| \leq k$, c'est-à-dire $fg \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Enfin

$$\|fg\|_{k,\alpha} = \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^{\beta}(fg)\right\|_{\alpha} \leq \sum_{|\beta|\leq k} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\alpha}{\gamma} \left\|\partial^{\gamma} f\ \partial^{\beta-\gamma} g\right\|_{\alpha}$$

par conséquent

$$\|fg\|_{k,\alpha} \leq \sum_{|\beta|\leq k} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\alpha}{\gamma} \left[\|\partial^{\gamma} f\|_{\infty} \left\|\partial^{\beta-\gamma} g\right\|_{\alpha} + \|\partial^{\gamma} f\|_{\alpha} \left\|\partial^{\beta-\gamma} g\right\|_{\infty}\right]$$

qui peut être écrit comme $\|fg\|_{k,\alpha} \leq C \|f\|_{k,\alpha} \|g\|_{k,\alpha}$ où C est une constante qui dépend de $\binom{\alpha}{\beta}$. $\square$

Proposition 2.2.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in]0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors toutes ses dérivées d'ordre inférieure ou égale k se prolongent par continuité en des fonctions de Hölder d'exposant α sur $\overline{\Omega}$.*

***Preuve*.** Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors pour tout $|\beta| \leq k$, $\partial^{\beta} f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ et par la proposition 2.1.11, $\partial^{\beta} f$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. $\square$

Si $\alpha, \alpha' \in]0,1]$ et $k, k' \in \mathbb{N}$, alors la condition $k+\alpha \geq k'+\alpha'$ est équivalente à

$$k > k' \text{ et } \alpha \geq \alpha' \text{ ou } k = k' \text{ et } \alpha \geq \alpha'.$$

En effet, si $k < k'$ *et* $\alpha \geq \alpha'$, alors puisque k et k' sont des entiers, on aura

$$k + \alpha \leq k + 1 \leq k' < k' + \alpha$$

d'où la contradiction.

Proposition 2.2.9. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha, \alpha' \in]0,1]$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $k+\alpha \geq k'+\alpha'$. L'injection*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k',\alpha'}(\Omega) \text{ est continue.} \tag{2.30}$$

Si de plus, Ω est borné et $k+\alpha \neq k'+\alpha'$, alors l'injection (2.30) devient compacte.

Preuve.

- Commençons par le cas $k = k'$ et $\alpha \geq \alpha'$:

  Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors $\partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, pour tout $|\beta| \leq k$ et par la proposition 2.1.15, $\partial^\beta f \in C^{0,\alpha'}(\Omega)$ et il existe $C > 0$ tel que

  $$\left\|\partial^\beta f\right\|_{\alpha'} \leq C \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha,$$

  c'est-à-dire

  $$\|f\|_{k,\alpha'} \leq C \|f\|_{k,\alpha}.$$

  D'où la continuité de l'injection (2.30).

- A présent le cas $k > k'$ et $\alpha \geq \alpha'$:

  Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors $\partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, pour tout $|\beta| \leq k$, en particulier $\partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, pour tout $|\beta| \leq k'$, c'est-à-dire $f \in C^{k',\alpha}(\Omega)$ et on revient au premier cas.

À présent, si Ω est un ouvert borné et $k+\alpha \neq k'+\alpha'$, prenons $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors par définition $(\partial^\beta f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$ pour tout $|\beta| \leq k$ et puisque $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte, alors :

- Pour $\beta = 0$, de la suite $(f_i)_i$ on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi_0(i)})_i$ qui converge dans $C^{0,\alpha'}(\Omega)$ vers une certaine fonction f_0.

  De la suite bornée $(\frac{\partial f_{\phi_0(i)}}{\partial x_1})_i$ de $C^{0,\alpha}(\Omega)$, on peut extraire aussi une sous-suite qu'on note $(\frac{\partial f_{\phi_1(i)}}{\partial x_1})_i$ qui converge dans $C^{0,\alpha'}(\Omega)$ vers une certaine fonction f_1. Or $(f_{\phi_1(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f_{\phi_0(i)})_i$. Donc

$$\lim_{i\to\infty} f_{\phi_1(i)} = \lim_{n\to\infty} f_{\phi_0(i)} = f_0 \text{ dans } C^{0,\alpha'}(\Omega)$$

et vu que la convergence dans $C^{0,\alpha'}(\Omega)$ n'est autre que la convergence uniforme sur Ω. Alors par le théorème 2.3, on aura

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = f_1$$

et dans ce cas $(f_{\phi_1(i)})_i$ converge vers f_0 dans $C^{\beta_1,\alpha'}(\Omega)$ pour $\beta_1 = (1, 0, \cdots, 0)$.

- En utilisant le procédé d'extraction de Cantor, on trouvera une sous-suite $(f_{\phi_i(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ de la suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{i\to\infty} \partial^\beta f_{\phi_i(i)} = f_\beta, \text{ pour } |\beta| \leq k \text{ et } f_\beta = \partial^\beta f_0.$$

Notons cette sous suite $(f_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$. On dira alors que $(f_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers f_0 dans $C^{k,\alpha'}(\Omega)$, en particulier dans $C^{k',\alpha'}(\Omega)$.

□

Proposition 2.2.10. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\alpha, \alpha' \in]0,1]$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $k+\alpha \neq k'+\alpha'$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que*

$$\|f\|_{k',\alpha'} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C(\varepsilon) \|f\|_\infty, \ \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega).$$

Preuve. Pour montrer cette inégalité, on utilise le raisonnement par absurde pour cela supposons que

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall C > 0, \ \exists f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \text{ tel que } \|f\|_{k',\alpha'} > \varepsilon_0 \|f\|_{k,\alpha} + C \|f\|_\infty.$$

Choisissons $C = i, \ i \in \mathbb{N}$, on trouveras alors une suite $(f_i)_i \subset C^{k,\alpha}(\Omega)$ telle que

$$\|f_i\|_{k',\alpha'} > \varepsilon_0 \|f_i\|_{k,\alpha} + n \|f_i\|_\infty, \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

De cette inégalité, on aura $\|f_i\|_{k',\alpha'} > 0$, c'est-à-dire

$$f_i \neq 0,\ \forall i \in \mathbb{N},$$

de cette manière, on peut poser

$$g_i = \frac{f_i}{\|f_i\|_{k,\alpha}},$$

donc $\|g_i\|_{k,\alpha} = 1$, c'est-à-dire $(g_i)_i$ est bornée dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$ et puisque l'injection $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte, alors on peut extraire une sous-suite $(g_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une certaine fonction $g \in C^{k',\alpha'}(\Omega)$. D'autre part, $C^{k',\alpha'}(\Omega) \subset C_b^0(\Omega)$, ainsi $(g_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers g aussi. De (2.31), on obtient

$$\frac{1}{i_p}\left\|g_{i_p}\right\|_{k',\alpha'} > \frac{\varepsilon_0}{i_p} + \left\|g_{i_p}\right\|_{\infty}. \tag{2.32}$$

En passant à la limite quand $p \to \infty$ on aura $0 > \|g\|_{\infty}$, c'est-à-dire $g = 0$, ce qui est absurde car $\|g\|_{k,\alpha} = 1$. $\square$

Proposition 2.2.11. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ et $\alpha \geq \alpha'$. Si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(f_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^{k,\alpha'}(\Omega)$ vers une fonction de l'espace $C^{k,\alpha}(\Omega)$.*

***Preuve*.** On a déjà montré dans la proposition 2.2.9 que si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(f_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $C^{k,\alpha'}(\Omega)$, autrement dit pour tout $|\beta| \leq k$, $(\partial^\beta f_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur Ω. Il reste seulement à montrer que $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Puisque $(f_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors

$$\exists M > 0, \forall p \in \mathbb{N}\ \textit{tel que}\ \left\|f_{i_p}\right\|_{k,\alpha} \leq M,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^{\beta} f_{i_p}\right\|_{\alpha} \leq M, \tag{2.33}$$

de cette façon,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall |\beta| \leq k,\ \forall x, y \in \Omega,\ \left|\partial^{\beta} f_{i_p}(x) - \partial^{\beta} f_{i_p}(y)\right| \leq M\,|x-y|^{\alpha},$$

et en passant à la limite quand $p \to \infty$, on obtient

$$\left|\partial^{\beta} f(x) - \partial^{\beta} f(y)\right| \leq M\,|x-y|^{\alpha},\ \forall |\beta| \leq k. \tag{2.34}$$

Autrement dit $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. □

2.3 Les espaces de Hölder généralisés

Dans la section suivante, on va définir une généralisation des espaces de Hölder dans le cadre particulier de $\mathbb{R}$. Cet espace est établi à l'aide d'une « norme höldérienne » employant une fonction à valeurs réelles que nous noterons φ.

Tout au long de cette section, on considère Ω l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.1. *[5] Soit H l'espace des fonctions φ qui vérifient les conditions suivantes*

1. $\varphi : \Omega \to [0, +\infty[$ *et croissante sur* Ω.
2. $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$,
3. $\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$.

Pour $\varphi \in H$ et f une fonction définie sur Ω , on pose

$$|f|_{\varphi} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\varphi(|x-y|)} \tag{2.35}$$

Définition 2.3.2. *[5] On note par $C^{\varphi}(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions f définies sur Ω qui vérifie $|f|_{\varphi} < \infty$.*

On l'appelle l'espace des fonctions φ-höldériennes

Proposition 2.3.3. *[5] Pour $\varphi \in H$, l'espace $C^{\varphi}(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|\cdot\|_{\varphi} = \|\cdot\|_{\infty} + |\cdot|_{\varphi} \tag{2.36}$$

est un espace de Banach.

Preuve. Il est évident de voir que $C^{\varphi}(\Omega)$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_{\varphi}$ est une norme, il reste alors à prouver qu'il est complet. Soit la suite de Cauchy $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de l'espace $C^{\varphi}(\Omega)$, en utilisant les mêmes arguments considérés dans la preuve de la proposition 2.1.8, on montre que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^{\varphi}(\Omega)$. □

Théorème 2.3.4. *Pour $\varphi, \psi \in H$, on pose*

$$C_1 = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \text{ et } C_2 = \limsup_{t\to 0^+} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}.$$

On a alors les injections suivantes :

1. *Si $C_1 > 0$, alors $C^{\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\psi}(\Omega)$.*
2. *Si $C_2 < \infty$, alors $C^{\psi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\varphi}(\Omega)$.*
3. *Si $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, alors $C^{\varphi}(\Omega) \sim C^{\psi}(\Omega)$.*

Preuve. Soient $\varphi, \psi \in H$,

1. Puisque $C_1 = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$, alors par définition de la limite inférieure, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$C_1 \leq \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},\ \forall x \in [0, \delta] \tag{2.37}$$

Si $f \in C^{\varphi}(\Omega)$, alors $\frac{|f(x)-f(y)|}{\varphi(|x-y|)} \leq |f|_{\varphi}$ pour tous $x, y \in \Omega$.

- Supposons que $\delta \leq |x-y| < 1$, puisque φ et ψ sont croissantes, alors

$$\varphi(\delta) < \varphi(|x-y|) < \varphi(1) \text{ et } \psi(\delta) < \psi(|x-y|) < \psi(1)$$

Ainsi en écrivant

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\psi(|x-y|)} = \frac{|f(x)-f(y)|}{\varphi(|x-y|)} \frac{\varphi(|x-y|)}{\psi(|x-y|)} \tag{2.38}$$

on obtient

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\psi(|x-y|)} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{\varphi(|x-y|)} \frac{\varphi(1)}{\psi(\delta)}$$

et par suite

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|\geq\delta}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\psi(|x-y|)} \leq \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|\geq\delta}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\varphi(|x-y|)} \frac{\varphi(1)}{\psi(\delta)}.$$

- Supposons maintenant que $|x-y| \leq \delta$, alors par (2.37) on a

$$\frac{\varphi\left(|x-y|\right)}{\psi(|x-y|)} \leq \frac{1}{C_1}$$

Ainsi (2.38) devient

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|\leq\delta}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\psi(|x-y|)} \leq \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|\leq\delta}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\varphi(|x-y|)} \frac{1}{C_1}$$

Posons $M = \max\left(\frac{1}{C_1}, \frac{\varphi(1)}{\psi(\delta)}\right)$. Finalement, $|f|_{\psi} \leq M\,|f|_{\varphi}$.

2. Soit $C_2 = \limsup_{t\to 0^+} \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ tel que $C_2 < \infty$, on sait que

$$0 < \frac{1}{C_2} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)},$$

et vu que φ et ψ sont positives, on applique alors 1. en changement les rôles de φ et ψ et on obtient alors

$$C^{\psi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\varphi}(\Omega).$$

3. Si $0 \leq C_1 \leq C_2 < \infty$, alors on aura les deux injections

$$C^{\psi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\varphi}(\Omega) \text{ et } C^{\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\psi}(\Omega)$$

et les deux inégalités

$$|f|_{\psi} \leq M_1 |f|_{\varphi} \text{ et } |f|_{\varphi} \leq M_2 |f|_{\psi}$$

c'est-à-dire $C^{\psi}(\Omega) \sim C^{\varphi}(\Omega)$.

□

On remarque que dans tout ce qu'on vient de faire jusqu'à ici, on n'a pas utilisé la condition 3. de la définition 2.3.1 ainsi dire si on la supprime on peut obtenir une certaine classe de fonctions mais qui ne généralise proprement dit pas l'espace de Hölder. Ceci va être pointé dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.5. *Soit φ une fonction qui vérifie les conditions* 1. *et* 2. *de la définition 2.3.1 et la condition* $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\varphi(t)}{t} = C > 0$, *alors*

$$C^{\varphi}(\Omega) \sim C^{0,1}(\Omega).$$

Preuve. On applique le théorème 2.3.4 à la fonction φ donnée par hypothèse et ψ la fonction définie par $t \mapsto \psi(t) = t$. D'aprés ce qu'on vient de dire au-dessus, ces deux fonctions n'ont pas besoin de vérifier la condition 3.

Puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\varphi(t)}{t}$ existe, alors

$$\lim_{t\to 0^+} \sup \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \inf \frac{\varphi(t)}{t} = C > 0$$

ainsi $0 < C < \infty$, et on applique la troisième assertion du théorème 2.3.4 pour obtenir $C^{\varphi}(\Omega) \sim C^{0,1}(\Omega)$. $\square$

Dans le théorème suivant, on montre que les implications dans le théorème 2.3.4 peuvent être en faite des équivalences, on y ajoutant d'autres conditions.

Théorème 2.3.6. *Pour $\varphi, \psi \in H$, on a*

1. *Si $\varphi \in C^{\varphi}(\Omega)$, alors $C^{\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\psi}(\Omega)$ si et seulement si $C_1 > 0$,*
2. *Si $\psi \in C^{\psi}(\Omega)$, alors $C^{\psi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\varphi}(\Omega)$ si et seulement si $C_2 < \infty$,*
3. *Si $\varphi \in C^{\varphi}(\Omega)$ et $\psi \in C^{0,\psi}(\Omega)$, alors $C^{\varphi}(\Omega) \sim C^{\psi}(\Omega)$ si et seulement si $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$*

Preuve. Les conditions suffisantes de ce théorème ont été établies dans le théorème 2.3.4. On va montrer à présent, les conditions suffisantes.

- Montrons que si

$$\varphi \in C^{\varphi}(\Omega) \text{ et } C^{\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^{\psi}(\Omega), \text{ alors } C_1 > 0.$$

On va faire celà par contraposé, c'est-à-dire, on suppose que $C_1 = 0$ et on montre qu'il existe une fonction $f \in C^{\varphi}(\Omega)$ tel que $f \notin C^{\psi}(\Omega)$.

Le bon candidat pour f n'est autre que la fonction φ elle-même car $\varphi \in C^{\varphi}(\Omega)$. Ensuite si on pose

$$C_1 = \lim_{t\to 0^+} \inf \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 0,$$

alors par définition de la limite inférieure, il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset]0,1[$ tel que

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0 \text{ et } \lim_{i\to\infty} \frac{\psi(x_i)}{\varphi(x_i)} = 0.$$

Ainsi

$$\frac{|\varphi(x_i) - \varphi(0)|}{\psi(|x_i - 0|)} = \frac{|\varphi(x_i)|}{\psi(|x_i|)} \tag{2.39}$$

car $\varphi(0) = 0$, par conséquent

$$[\varphi]_\psi = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\psi(|x-y|)} \geq \frac{|\varphi(x_i)|}{\psi(|x_i|)}$$

et en passant à la limite, on trouve que $[\varphi]_\psi$ converge vers ∞, c'est-à-dire $\varphi \notin C^\psi(\Omega)$.

- Les assertions 2. et 3. se déduisent de 1. comme on l'a déjà établi dans le théorème 2.3.4.

□

Dans la proposition suivante, on va montrer que la condition $\varphi \in C^\varphi(\Omega)$ ajoutée dans le théorème précédent, peut avoir en effet lieu.

Proposition 2.3.7. *Si $\varphi \in H$ est fonction concave sur Ω, alors $\varphi \in C^\varphi(\Omega)$.*

Preuve. Puisque φ est croissante, concave et $\varphi(0) = 0$, alors

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(|x-y|) - \varphi(0) = \varphi(|x-y|),$$

Ainsi $|\varphi|_\varphi < \infty$. □

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Tout au long de ce chapitre E sera un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$. On note par $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des opérateurs bornés de E dans E.

3.1 Théorie des semi-groupes

Définition 3.1.1. *[6]Une famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de E dans E est dite un semi-groupe sur E si*

1. $S(0) = I$,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

Définition 3.1.2. *[6] Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe sur E. L'opérateur linéaire A définie par*

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \left.\frac{dS(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \ \forall x \in D(A)$$

est le générateur infinitésimal du semi groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ *où* $D(A)$ *est le domaine de* A*.*

Définition 3.1.3. *[6] Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe sur* E*. On dit que le semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est*

1. *Uniformément continu si*

$$\lim_{t \to 0} \|S(t) - I\| = 0$$

2. *Fortement continu ou* C_0*-semi-groupe si*

$$\lim_{t \to 0} S(t)x = x, \ \forall x \in E$$

Théorème 3.1.4. *[6]Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe, alors ils existent deux constantes* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \textit{pour tout } t \geq 0$$

Corollaire 3.1.5. *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe, alors pour tout* $x \in E$*, l'application* $t \mapsto S(t)x$ *est une fonction continue de* $\mathbb{R}^+$ *dans* E*.*

Théorème 3.1.6. *[6] Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$*. Alors on a les propriétés suivantes*

1. *Pour tout* $x \in E$*,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)xds = S(t)x. \tag{3.1}$$

2. *Pour tous* $x \in E$ *et* $t \geq 0$*,* $\int_0^t S(s)xds \in D(A)$ *et*

$$A\left(\int_0^t S(s)xds\right) = S(t)x - x. \tag{3.2}$$

3. *Si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, et*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{3.3}$$

4. *Pour tous $x \in D(A)$ et $t > s \geq 0$*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Axd\tau = \int_s^t AS(\tau)xd\tau. \tag{3.4}$$

Définition 3.1.7. *[6] Un opérateur A est fermé, si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in E.$$

On a

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y$$

Corollaire 3.1.8. *[6] Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, alors*

1. *Le domaine $D(A)$ est dense dans E.*

2. *A est un opérateur linéaire fermé.*

Définition 3.1.9. *[6] Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe défini sur E. On dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est différentiable pour $t > t_0$ si pour tout $x \in E$ l'application $t \mapsto S(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$.*

Proposition 3.1.10. *[6] Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe différentiable $(S(t))_{t\geq 0}$, alors*

$$S^{(n)}(t) = \left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(S'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n, \quad n \geq 1 \tag{3.5}$$

Définition 3.1.11. *[6]Soient $\delta_1, \delta_2 \in]0, \pi[$, on note Δ_δ le secteur*

$$\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C}^* : Re(z) > 0 \text{ et } \delta_1 < arg(z) < \delta_2\}.$$

On dit que le C_0-semi-groupe $\{S(z)\}_{z \in \Delta_\delta}$ est un semi-groupe analytique si

1. $S(0) = I$ *et* $\lim_{z \to 0} S(z)x = x, \ \forall x \in E,$
2. $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2), \ \forall z_1, z_2 \in \Delta_\delta,$
3. *L'application* $z \in \Delta_\delta \mapsto S(z)$ *est analytique dans* Δ_δ.

Rappelons que si A est un opérateur linéaire, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est l'ensemble des nombres complexes λ pour lesquels $(\lambda I - A)$ est inversible. On note la résolvante de A par

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Théorème 3.1.12. *[6] Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe uniformément borné et A son générateur infinitésimal. Supposons que $0 \in \rho(A)$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists \delta > 0$ *tel que* $(S(t))_{t \geq 0}$ *est un semi-groupe analytique dans le secteur* Δ_δ *et* $(S(z))\ z \in \Delta_\delta$ *est uniformément borné dans tout secteur fermé* $\overline{\Delta_{\delta'}}$, *de* Δ_δ *où* $\delta' < \delta$.
2. $\exists C > 0$ *tel que pour tout* $\sigma > 0, \ \tau \neq 0$
$$\|R(\sigma + i\tau, A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}. \tag{3.6}$$
3. *L'application* $t \in]0, \infty[\mapsto S(t) \in \mathcal{B}(E)$ *est différentiable et* $\exists C > 0$ *tel que*
$$\|AS(t)\| \leq \frac{C}{t}, \ \forall t > 0 \tag{3.7}$$

3.2 Problème de Cauchy homogène

Dans un premier temps, on considère le problème abstrait de Cauchy homogène de la forme suivante

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.8}$$

Où u est une fonction à valeur dans l'espace vectoriel E,
$A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire et $x \in E$ est la condition initiale.
Commençons par définir ce que c'est une solution du problème (3.8).

Définition 3.2.1. *La fonction u est dite une solution classique du problème (3.8) si elle est continue pour tout* $t \geq 0$, *, continûment différentiable et* $u(t) \in D(A)$ *pour* $t > 0$, *et elle satisfait (3.8).*

Si u est solution du problème (3.8), alors $u(t) \in D(A)$, pour tout $t > 0$ et u est continue pour $t = 0$. Par conséquent, le problème n'admet pas de solution si $x \notin \overline{D(A)}$.

Théorème 3.2.2. *Soit A un opérateur linéaire à domaine dense. Si* $R(\lambda, A)$ *existe pour tout réel* $\lambda \geq \lambda_0$ *et*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup \lambda^{-1} \log \|R(\lambda, A)\| \leq 0, \tag{3.9}$$

alors le problème (3.8) admet au plus une solution pour tout $x \in E$.

Théorème 3.2.3. *Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dont l'ensemble résolvant* $\rho(A)$ *est non vide. Le problème (3.8) admet une unique solution u qui est continûment différentiable pour tout* $t \geq 0$, *et pour tout* $x \in D(A)$ *si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t \geq 0}$.

Si la condition initiale $x \in E$, on a le résultat suivant

Théorème 3.2.4. *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe différentiable $(S(t))_{t\geq 0}$, alors pour tout $x \in E$ le problème (3.8) admet une unique solution.*

Preuve. Si $x \in D(A)$, alors l'existence et l'unicité de la solution provient des théorèmes 3.2.2 et 3.2.3. Si $x \in E$, alors le fait que $(S(t))_{t\geq 0}$ est différentiable pour $t > 0$, implique que

$$S'(t)x = AS(t)x, \ \forall t > 0, \ \forall x \in E$$

donc si on pose $u(t) = S(t)x$, alors par les propriétés du semi-groupe différentiable u' est continue pour tout $t > 0$ et u est la solution du problème (3.8). L'unicité est aussi une conséquence du théorème 3.2.2. □

Corollaire 3.2.5. *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(z))_{z\in\Delta_\delta}$, alors pour tout $x \in E$ le problème (3.8) admet une unique solution.*

Preuve. Puisque tout semi-groupe analytique est différentiable, on applique alors le théorème 3.2.4. □

3.3 Problème de Cauchy non homogène

On considère à présent le problème abstrait de Cauchy non homogène suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ \qquad u(0) = x \end{cases} \tag{3.10}$$

Où $f : [0, T[\to E$ et A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$.

Définition 3.3.1. *Une fonction* $u : [0,T[\to E$ *est dite une solution classique du problème (3.10) sur* $[0,T[$ *si* u *est continue sur* $[0,T[$, *continûment différentiable sur* $]0,T[$, *et* $u(t) \in D(A)$ *pour tout* $0 < t < T$. *De plus,* u *satisfait le problème (3.10) sur* $[0,T[$.

Proposition 3.3.2. *Si* $f \in L^1(]0,T[,E)$, *alors pour tout* $x \in E$ *le problème (3.10) admet au moins une solution. Cette solution si elle existe, ne peut être que sur la forme*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{3.11}$$

Preuve. Soit u une solution de (3.10) et posons

$$v(s) = S(t-s)u(s),\ 0 < s < t.$$

Puisque $u(s) \in D(A)$, alors par le théorème 3.1.6, on a

$$\begin{aligned}\frac{dv}{ds} &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s)\\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)Au(s) + S(t-s)f(s)\\ &= S(t-s)f(s)\end{aligned} \tag{3.12}$$

La condition $f \in L^1(]0,T[,E)$ implique que $v(s)$ est intégrable et par intégration de (3.12) sur $]0,t[$ on obtient

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Par continuité du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $[0,+\infty[$ on déduit que $u \in C([0,T],E)$. $\square$

Définition 3.3.3. *Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, $x \in D(A)$ et $f \in L^1(]0,T[,E)$. La fonction $u \in C([0,T],E)$ donnée par*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

est appelée mild solution du problème (3.10) sur $[0,T]$.

Cherchons à présent des conditions sur f pour que la mild solution devient une solution classique.

Théorème 3.3.4. *Soient A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, $f \in L^1(]0,T[,E)$ une fonction continue sur $]0,T]$ et*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.13}$$

Le problème (3.10) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite

(i) v est continûment différentiable sur $]0,T[$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et Av est continue sur $]0,T[$.

Si pour $x \in D(A)$ le problème (3.10) admet une solution u sur $]0,T[$, alors v satisfait les deux conditions (i) et (ii).

Preuve. Supposons que le problème (3.10) admet une solution u pour $x \in D(A)$, alors la solution est donnée par

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Ainsi, $v(t) = u(t) - S(t)x,\ t \in [0,T]$, et puisque u est différentiable, on déduit du théorème 3.1.6 que v est différentiable aussi pour $t > 0$ et

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t) - \frac{d}{dt}S(t)x \\ &= u'(t) - S(t)Ax \end{aligned}$$

qui est continue sur $]0,T[$ car u est continue sur $]0,T[$, d'où (i).
D'autre part, par le théorème 3.1.6 si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ pour $t \geq 0$ et par suite pour tout $t > 0$

$$v(t) = u(t) - S(t)x \in D(A),$$

car $u(t) \in D(A)$. Ainsi par le théorème 3.1.6,

$$\begin{aligned} Av(t) &= Au(t) - AS(t)x \\ &= u'(t) - f(t) - S(t)Ax \end{aligned}$$

donc elle est continue sur $]0,T[$, d'où (ii).
Inversement, pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{S(h)-I}{h}v(t) &= \frac{1}{h}\left(S(h)v(t) - v(t)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(h+t-s)f(s)ds - v(t)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} S(h+t-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} S(h+t-s)f(s)ds - v(t)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[v(t+h) - v(t)\right] - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \qquad (3.14) \end{aligned}$$

Notons

$$I\left(h\right) = \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds.$$

Puisque f est continue, alors

$$\left\|I\left(h\right)\right\| \leq C_1 \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|f(s) - f(t)\right\| ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+1} \left\|S(t+h-s)f(t) - f(t)\right\|.$$

S'il existe $\delta > 0$ tel que $|h| < \delta$, alors pour tout $t < s < t+h$, on aura

$$s - t < h < \delta \text{ et } t + h - d < h < \delta$$

et par continuité de f et $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$, on aura

$$\|I\| \leq C_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

c'est à dire $\lim_{h\to 0} I\,(h) = f(t)$.

(i) Commençons par supposer que v est continûment différentiable sur $]0,T[$, (3.14) devient alors

$$v'(t) = Av(t) + f(t)$$

où $v(t) \in D(A), 0 < t < T$ et $v(0) = 0$. En posant

$$u(t) = S(t)x + v(t),$$

on obtient une solution de (3.10) pour $x \in D(A)$.

(ii) Ensuite, si on suppose que $v(t) \in D(A)$, alors par (3.14), on déduit que v est différentiable à droite de t, si on note D^+v cette dérivée, on aura

$$D^+v(t) = Av(t) + f(t),$$

et par suite D^+v sera continue, donc v sera continûment différentiable et $v'(t) = Av + f$, puisque $v(0) = 0$, alors la fonction

$$u(t) = S(t)x + v(t)$$

est une solution de (3.10) pour $x \in D(A)$.

□

Corollaire 3.3.5. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$. Si f est continûment différentiable sur $[0,T]$ alors le problème (3.10) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$.*

***Preuve*.** On va utiliser le théorème 3.3.4, en montrant que l'assertion (i) est vérifiée. En effet, par un changement de variable dans l'équation (3.13), on obtient

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(s)f(t-s)ds \tag{3.15}$$

et puisque f est différentiable, alors v est différentiable pour $t > 0$ et dans ce cas, on aura en appliquant le règle de dérivation sous le signe intégrale

$$\begin{aligned} v'(t) &= S(t)f(0) + \int_0^t S(s)f'(t-s)ds \\ &= S(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds \end{aligned}$$

Ainsi, v' est continue sur $]0, T[$, d'où (i). Finalement le problème (3.10) admet une solution. $\square$

Corollaire 3.3.6. *Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ et $f \in L^1(]0, T[, E)$ continue sur $]0, T[$. Si $f \in D(A)$ pour $0 < s < T$ et $Af \in L^1(]0, T[, E)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (3.10) admet une solution sur $[0, T[$.*

Preuve. On va montrer que l'assertion (ii) du théorème 3.3.4 est vérifiée. Puisque $f(s) \in D(A)$ pour $0 < s < T$, alors par le théorème 3.1.6,

$$T(t-s)f(s) \in D(A),$$

et

$$AS(t-s)f(s) = S(t-s)Af(s)$$

qui est intégrable, v est la fonction définie par (3.13) et

$$Av(t) = A\int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(t-s)Af(s)ds$$

Ainsi, Av est continue, d'où (ii) et le problème (3.10) admet une solution. $\square$

3.4 Régularité de la mild solution

Dans cette section, on va voir que si on impose d'autres conditions sur f, alors la mild solution devient une solution classique suivant la définition 3.2.1. Mais avant introduisons la définition d'une fonction höldérienne à valeur dans l'espace de Banach E.

Définition 3.4.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}_+$ et $\alpha \in]0,1[$, la fonction $f : I \mapsto E$ est une fonction höldérienne d'exposant α sur I s'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq C\,|t-s|^{\alpha}\,,\ \textit{pour tout}\ t, s \in I \tag{3.16}$$

On note par $C^{0,\alpha}(I, E)$ l'espace de ces fonctions et

$$[f]_\alpha = \sup_{t,s\in I} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{|t-s|^{\alpha}}.$$

La condition 3.16, peut être écrite sous la forme

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leq C\,|h|^{\alpha}\,,\ \text{pour tout}\ h > 0.$$

Théorème 3.4.2. *Soient A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(t))_{t\geq 0}$ et $f \in L^p([0,T], E)$ avec $1 < p < \infty$, si u est la mild solution du problème (3.10), alors u est une fonction Hölderienne d'exposant $\frac{p-1}{p}$ sur $[\varepsilon, T]$ pour tout $\varepsilon > 0$.*
Si de plus $x \in D(A)$, alors u est une fonction Hölderienne avec le même exposant sur $[0, T]$.

Preuve. Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe analytique, alors

$$\exists M > 0\ \textit{tel que}\ \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\ \textit{pour}\ t \in [0,T],$$

$(S(t))_{t\geq 0}$ est différentiable pour $t>0$ et il existe $C>0$ tel que

$$\exists C>0,\ \|AS(t)\|\leq Ct^{-1} \text{ si } t>0 \tag{3.17}$$

Soit u une mild solution du problème (3.10), alors u est de la forme

$$u(t)=S(t)x+\int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Montrons que u est höldérienne d'exposant $\frac{p-1}{p}$ sur $[\varepsilon,T]$ pour tout $\varepsilon>0$. Soit $h>0$ et $t\in[\varepsilon,T]$, on a

$$u(t+h)-u(t)=[S(t+h)x-S(t)x]+[v(t+h)-v(t)]$$

Or par les propriétés des semi-groupes et (3.17), pour $t,t+h\in[\varepsilon,T]$, on a

$$S(t+h)x-S(t)x=\int_t^{t+h}AS(\tau)d\tau,$$

c'est-à dire

$$\begin{aligned}
\|S(t+h)x-S(t)x\| &\leq \int_t^{t+h}\|AS(\tau)\|\,d\tau\leq\int_t^{t+h}\frac{C}{\tau}d\tau\\
&\leq C\ln\left|1+\frac{h}{t}\right|\\
&\leq C\frac{h}{t}\\
&\leq \frac{C}{\varepsilon}h\\
&\leq \frac{C}{h^{\frac{p-1}{p}-1}\varepsilon}h^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leq \frac{C}{\varepsilon(\varepsilon-T)^{-\frac{1}{p}}}h^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $h>0$

$$\begin{aligned}
v(t+h)-v(t) &= \int_0^t\left(S(t+h-s)-S(t-s)\right)f(s)ds+\int_t^{t+h}S(t+h-s)f(s)ds\\
&= I_1+I_2
\end{aligned}$$

Commençons par majorer I_2 en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \|I_2\| &\leq \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)f(s)\| \, ds \leq M \int_t^{t+h} \|f(s)\| \, ds \\ &\leq M h^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_t^{t+h} \|f(s)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M \|f\|_{L^p} h^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

Passons à présent à I_1, pour $h > 0$, on a

$$\|I_1\| \leq \int_0^t \|(S(t+h-s) - S(t-s)) f(s)\| \, ds$$

On a déjà montré que pour $t-s, t-s+h \in]0,T]$,

$$\|S(t-s+h) - S(t-s)\| \leq C \frac{h}{t-s}$$

et d'un autre coté, on a

$$\|S(t-s+h) - S(t-s)\| \leq 2M,$$

Si on pose $C_1 = \max(C, 2M)$ et $\mu(h, t-s) = \min\left(1, \frac{h}{t-s}\right)$, alors

$$\|S(t-s+h) - S(t-s)\| \leq C_1 \mu(h, t-s)$$

et par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq C_1 \int_0^t \mu(h, t-s) \|f(s)\| \, ds \\ &\leq C_1 \|f\|_{L^p} \left(\int_0^t \mu(h, t-s)^{\frac{p}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} . \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^t \mu(h,t-s)^{\frac{p}{p-1}}ds = \int_0^t \mu(h,\tau)^{\frac{p}{p-1}}d\tau \leq \int_0^\infty \mu(h,\tau)^{\frac{p-1}{p}}d\tau$$
$$= \int_0^h 1d\tau + \int_h^\infty \left(\frac{h}{\tau}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\tau$$
$$= h + (1-p)h = ph$$

Finalement

$$\|I_1\| \leq C_1 \|f\|_{L^p} p^{\frac{p-1}{p}} h^{\frac{p-1}{p}},$$

donc v est höldérienne d'exposant $\frac{p-1}{p}$. □

Théorème 3.4.3. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(t))_{t\geq 0}$, $f \in L^1(]0,T[,E)$ et supposons que pour tout $0 < t < T$ il existe $\delta_t > 0$ et une fonction réelle continue $\phi_t : [0,\infty[\to [0,\infty[$ telle que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \phi_t(|t-s|) \tag{3.18}$$

et

$$\int_0^{\delta_t} \frac{\phi_t(\tau)}{\tau} d\tau < \infty. \tag{3.19}$$

Alors pour tout $x \in E$, la mild solution du problème (3.10) est une solution classique.

Preuve. On va utiliser le théorème 3.3.4 pour montrer que si u est une mild solution, alors u est une solution classique, pour cela on considère la fonction v définie par

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

et on montre que $v \in D(A)$ et Av est continue sur $]0, T[$. Écrivons

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t S(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int_0^t S(t-s)f(t)ds \\ &= v_1(t) + v_2(t) \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.1.6 on a $v_2(t) \in D(A)$ et

$$Av_2(t) = (S(t) - I)f(t)$$

Or par (3.17), on déduit que f est continue, puisque ϕ_t est continue, donc Av_2 est continue sur $]0, T[$.
Montrons que c'est de même pour v_1, pour cela on utilise le fait que l'opérateur A est fermé en considérant la fonction

$$v_{1,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\varepsilon} S(t-s)(f(s)-f(t))ds, & \text{si} \quad t \geq \varepsilon \\ \quad 0 & \text{si} \quad t < \varepsilon \end{cases}$$

Par le théorème 3.1.6, il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v_{1,\varepsilon}(t) = v_1(t) \ et \ v_{1,\varepsilon}(t) \in D(A),$$

de plus on a

$$Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} AS(t-s)(f(s)-f(t))ds \tag{3.20}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left\|Av_{1,\varepsilon}(t)-\int_0^t AS(t-s)f(s)ds\right\| &\leq \int_t^{t-\varepsilon}\|AS(t-s)(f(s)-f(t))\| \\ &\leq \int_t^{t-\varepsilon}\|AS(t-s)\|\,\|(f(s)-f(t))\| \\ &\leq \int_t^{t-\varepsilon}\frac{C}{t-s}\phi(|t-s|)ds \\ &\leq C\int_t^{t-\varepsilon}\frac{\phi(|t-s|)}{t-s}ds \\ &\leq \int_0^{\varepsilon}\frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau \\ &\leq C_1\varepsilon\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Av_{1,\varepsilon} = \int_0^t AS(t-s)f(s)ds.$$

Finalement,

$$Av_1(t) = \int_0^t AS(t-s)f(s)ds.$$

Pour conclure, il reste la continuité de Av_1 sur $]0,T[$, soit $0<\delta<t$

$$\begin{aligned}Av_1(t) &= \int_0^{\delta} AS(t-s)f(s)ds + \int_{\delta}^t AS(t-s)f(s)ds \\ &= I_3 + I_4\end{aligned}$$

$$\|I_3\| \leq \int_0^{\delta}\frac{C}{t-s}\phi(t-s) \leq C_1\delta$$

et I_4 est continue, donc Av_1 est continue, ce qui achève la preuve. □

Lemme 3.4.4. *Soient A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(t))_{t\geq 0}$ et $f\in C^{0,\alpha}([0,T],E)$. Si on pose*

$$v_1(t) = \int_0^t S(t-s)(f(s)-f(t))ds, \tag{3.21}$$

alors $v_1(t)\in D(A)$ pour $0\leq t\leq T$ et $Av_1(t)\in C^{0,\alpha}([0,T],E)$.

Preuve. On a déjà vu dans la preuve du théorème 3.4.3 que $v_1(t) \in D(A)$ pour $0 \leq t \leq T$. Il reste à montrer que $Av_1 \in C^{0,\alpha}([0,T],E)$.
Puisque $(S(t))_{t\geq 0}$ est analytique, alors il est uniformément borné, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $\|S(t)\| \leq M$ et

$$\|AS(t)\| \leq \frac{C}{t} \text{ pour } 0 < t < T.$$

Soit $t \geq 0$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} Av_1(t+h) - Av_1(t) &= A\int_0^t S(t+h-s) - t(t-s)(f(s)-f(t))ds \\ &+ A\int_0^t S(t+h-s)(f(t)-f(t+h))ds \\ &+ A\int_t^{t+h} S(t+h-s)(f(s)-f(t+h))ds \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Commençons par I_1

$$\|I_1\| \leq \int_0^t \|AS(t+h-s) - AS(t-s)\| \, \|f(s)-f(t)\| \, ds$$

or d'après le théorème (3.1.6),

$$\begin{aligned} \|AS(t+h-s) - AS(t-s)\| &= \left\| \int_s^t A^2 S(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \left\| A^2 S(\tau) \right\| d\tau \\ &\leq 4hC \frac{1}{(t-s+h)(t-s)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

ainsi

$$\|I_1\| \leq 4hC\,[f]_\alpha \int_0^t \frac{ds}{(t-s+h)(t-s)^{1-\alpha}} \leq C_1 h^\alpha \tag{3.24}$$

Passons à I_2, par le théorème (3.1.6), on aura

$$\begin{aligned} \|I_2\| &= \|(S(t+h) - S(h))(f(t) - f(t+h))\| \\ &\leq \|S(t+h) - S(h)\| \, \|f(t) - f(t+h)\| \leq 2M\,[f]_\alpha \, h^\alpha \end{aligned} \tag{3.25}$$

Finalement, pour I_3, on utilise le théorème 3.1.12,

$$\begin{aligned} \|I_3\| &\leq \int_t^{t+h} \|AS(t+h-s)\| \, \|f(s)-f(t+h)\| \, ds \\ &\leq C\,[f]_\alpha \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} ds \leq C_2 h^\alpha \end{aligned} \tag{3.26}$$

En combinant (3.22) avec (3.24),(3.25) et (3.26) on voit que $Av_1(t)$ est une fonction höldérienne d'exposant α sur $[0,T]$. □

Théorème 3.4.5. *Soient A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(t))_{t\geq 0}$ et $f \in C^{0,\alpha}([0,T],E)$. Si u est une solution du problème (3.10) sur $[0,T]$, alors*

1. *Pour tout $\delta > 0$, $Au \in C^{0,\alpha}([\delta,T],E)$ et $\frac{du}{dt} \in C^{0,\alpha}([\delta,T],E)$.*
2. *Si $x \in D(A)$ alors Au et $\frac{du}{dt}$ sont continues sur $[0,T]$.*
3. *Si $x = 0$ et $f(0) = 0$ alors $Au, \frac{du}{dt} \in C^{0,\alpha}([0,T],E)$.*

Preuve. Si u est une solution de (3.10), alors elle est de la forme

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds = S(t)x + v(t).$$

1. Par l'inégalité (3.23) , on a

$$\|AS(t+h-s) - AS(t-s)\| \leq h4C \frac{1}{(t-s+h)(t-s)} \tag{3.27}$$

Il reste à montrer que $Av(t) \in C^{0,\alpha}([\delta,T],E)$. En effet,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ &= \int_0^t S(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int_0^t S(t-s)f(t)ds. \end{aligned}$$

et par le lemme 3.4.4, $Av_1(t) \in C^{0,\alpha}([0,T],E)$. Passons à Av_2, soit $\delta > 0$ et $\delta \leq t \leq T$, on a

$$Av_2(t) = (S(t) - I)f(t)$$

et puisque $f \in C^{0,\alpha}([0,T],E)$, on va seulement montrer que

$$S(t)f(t) \in C^{0,\alpha}([0,T],E).$$

Soit $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|S(t+h)f(t+h) - S(t)f(t)\| &\leq \|S(t+h)\| \, \|f(t+h) - f(t)\| + \\
&\quad \|S(t+h) - S(t)\| \, \|f(t)\| \\
&\leq M \, [f]_\alpha \, h^\alpha + C \ln(1 + \frac{1}{t}) \, \|f\|_\infty \\
&\leq M \, [f]_\alpha \, h^\alpha + C\frac{h}{\delta} \leq C_1 h^\alpha
\end{aligned}$$

2. Si $x \in D(A)$, alors $AS(t)x \in C([0,T],E)$ et d'après le lemme 3.4.4, $Av_1(t) \in C^{0,\alpha}([0,T],E)$. Prouvons que $S(t)f(t)$ est continue sur $[0,T]$, en effet, on a

$$\|S(t)f(t) - f(0)\| \leq \|S(t)f(0) - f(0)\| + M \, \|f(t) - f(0)\|$$

Par conséquent $(S(t)f)_{t\geq 0}$ est continue pour $t = 0$, donc continue sur $[0,T]$. Ce qui achève la preuve.

3. Montrons que $S(t)f(t) \in C^{0,\alpha}([0,T],E)$, en effet

$$\begin{aligned}
\|S(t+h)f(t+h) - S(t)f(t)\| &\leq \|S(t+h)\| \, \|f(t+h) - f(t)\| \\
&\quad + \|(S(t+h) - S(t))f(t)\| \\
&\leq M \, [f]_\alpha \, h^\alpha + \left\| \int_t^{t+h} AS(\tau)f(t)d\tau \right\| \\
&\leq M \, [f]_\alpha \, h^\alpha + \int_t^{t+h} \|AS(\tau)(f(t) - f(0))\| \, d\tau \\
&\leq M \, [f]_\alpha \, h^\alpha + CK \, [f]_\alpha \int_t^{t+h} \tau^{-1} t^\alpha d\tau \\
&\leq M \, [f]_\alpha \, h^\alpha + C \, [f]_\alpha \int_t^{t+h} \tau^{\alpha-1} d\tau \leq Ch^\alpha
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Conclusion

Dans ce travail on a abordé les espaces de Hölder où on a étudié les propriétés principales. On a remarqué que ces espaces sont assez riches, vis-à-vis des injections qu'ils possèdent avec l'espace des fonctions continues. D'autre part, on a introduit la théorie des semi-groupes pour résoudre le problème de Cauchy abstrait et on a pu trouver des conditions sur le second membre de l'équation de telles en sorte à obtenir des fonctions solutions höldérienne.

RÉFÉRENCES

[1] Benzoni-Gavage S., *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, (2016) .

[2] Brezis H., *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Masson, (1987) .

[3] Cartan H., *Calcul Différentiel*, Hermann, (1967) .

[4] Fiorenza R., *Hölder and locally Hölder continuous functions*, Birkhauser, (2016) .

[5] Křepla M., *Embeddings in the spaces of Hölder functions*, Karlova and Praze University, (2009) .

[6] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, (1983) .

[7] Queffélec H., Zuilu C., *Analyse pour l'agrégation*, DUNOD, (2013) .

[8] Yosida K., *Functional analysis*, Springer, (1970) .

Résumé

Le but de ce mémoire est d'introduire les espaces de Hölder, d'étudier les propriétés principales et de chercher les solutions du problème de Cauchy abstrait appartenant à cet espace de Hölder.

Mots-clé : Hölder, condition de Hölder, Problème de Cauchy.

Abstract

The purpose of this work is to introduce Holder spaces, to study its main properties and to solve the abstract Cauchy problem in the context of this Hölder spaces.

Keywords: Hölder spaces, Hölder condition, Cauchy problem.

ملخص

الغرض من هذه المذكرة هو تعريف فضاءات هولدر وخصائصها الرئيسية، ودراسة مسألة كوشي والبحث عن الحلول التي تنتمي الى فضاءات هولدر.

الكلمات المفتاحية : فضاءات هولدر، شرط هولدر، مسألة كوشي.