République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :
BELMECHRI Sabrina

Existence et Multiplicité des solutions pour un problème différentiel d'ordre 2.

Soutenu le 10/06/2019

Devant le jury composé de :

Président :	M^{me}. BENDIMRED Lamia	M.A.A	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	M. BENTOUT Soufiane	M.C.B	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	M^{elle}. HELLAL Meryem	M.C.B	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2018 – 2019

Dédicace

A*vec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie.*

Q*ue je dédie ce mémoire*

A *mes très chers, respectueux et magnifiques parents ma mère et mon père,*

Q*ui m'ont soutenu tout au long de ma vie.*

P*ar leur patience, leur amour et leur encouragement.*

A *mes sœur :Hayat, Naziha,*

A *toute ma famille chacun par son nom,*

A *tout mes chers amis sans exception,*

A *tout mes enseignants, pour leur utiles conseils, leur patience et leur persévérance.*

Remerciements

***M**on premier remerciement va à Allah soubhanahou Wa tahala, qui m'a donné la volonté et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.*

***J**e tenais à remercier vivement mon encadreur de mémoire, M^{elle}. **Meryem Hellal** maitre conférence **"B"** du département de mathématiques au centre universitaire Belhadj Bouchaib Ain Temouchent, pour ces conseils, son encouragement et sa disponibilité dans ce travail.*

***M**es remerciements vont également à M^{me}. **Lamia Bendimred** maitre assistante **"A"** du département de mathématiques au centre universitaire Belhadj Bouchaib Ain Temouchent, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.*

***M**es remerciements vont aussi à M. **Soufiane Bentout** maitre conférence **"B"** du département de mathématiques au centre universitaire Belhadj Bouchaib Ain Temouchent, pour sa participation au jury.*

***J**e remercie tous les enseignants du département de mathématiques au centre universitaire Belhadj Bouchaib Ain Temouchent.*

***I**l est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère et mes sœurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.*

***U**n grand merci aussi à tous mes collègues de l'option master Équation Différentielle Ordinaire et Modélisation.*

***J**e tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribués d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.*

Notation

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres *réels* .
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres *réels positifs.*
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n foi.
$\mathcal{C}([0,1])$	Espace des fonctions continues sur $[0,1]$
$\max$	Maximum.
$\min$	Minimum.
$\sup$	Borne supérieure.
Ω	Ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$\lim$	La limite.
$x' = \frac{dx}{dt}$	La dérivée de la variable x par rapport au temps t.
$\vert . \vert$	la valeur absolue d'un nombre réel où module d'un nombre complexe.
$\Vert . \Vert$	La norme sur $\mathbb{R}^n$.

Table des matières

INTRODUCTION

Les équations différentielles remontent à l'invention du calcul différentiel et intégral, faite indépendamment par le Britannique Newton et l'Allemand Leibniz dans les années 1670-1680. Au début, ces équations servaient à résoudre des problèmes géométriques, comme la détermination d'une courbe dont les tangentes sont soumises à une condition donnée. C'est seulement vers 1730 que le mathématicien suisse Leonhard Euler a commencé à les utiliser pour traiter des problèmes de dynamique. Aujourd'hui elles apparaissent dans plusieurs domaines de la science et de la technique : mathématiques, ingénierie, économie.
L'étude des équations différentielles ordinaires se trouve à l'interface de nombreux problèmes scientifiques. En effet, la plupart des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et une modélisation par des équations linéaires risque, dans certains cas, d'effacer des événements que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte.
Dans les domaines de la physique, de la chimie, ou de la biologie, de nombreux modèles sont régis par des problèmes aux limites associés à des équations différentielles considérées avec différentes conditions aux bords. Ces problèmes avec des solutions non négatives sont des problèmes très intéressants et importants classe des problèmes mathématiques car ils décrivent beaucoup des phénomènes dans la science appliquée et ils sont utilisés dans divers domaines comme la chimie, biologie,..... etc voir par exemple [14, 27, 28, 33, 36, 40].

l'une des questions qui sont posées par les mathématiciens consiste à montrer l'existence des solutions par rapport aux données initiales d'un système d'équations différentielles ordinaires . D'une manière générale, nous ne disposons d'aucune méthode d'investigation assez puissante pour répondre à ces questions. Les méthodes existantes sont de plusieurs sortes, nous citerons à titre d'exemples les méthodes variationnelles [7], la méthode du degré topologique [29] et la méthode des sur, sous-solutions [15] la méthode du point fixe [16].

La méthode du point fixe est associée aux noms de plusieurs mathématiciens célèbres tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz et Picard. En fait, les précurseurs de la théorie du point fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématiciens polonais Stefan Banach, qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite. Le premier théorème du point fixe de Banach en 1920, assure l'existence d'un unique point fixe pour une application contractante d'un espace métrique complet dans lui même. Le point fixe est la limite d'un procédé itératif défini à partir d'une répétition d'image par cette application contractante d'un point initial arbitraire dans cet espace, puis ce théorème évoluée par plusieurs mathématiciens dont nous citons Brouwer et Schauder en 1930 ainsi que Krasnosel'skii en 1955, ce dernier théorème a connu plusieurs développements, des variantes et des généralisations comme par exemple, le théorème de Krasnosel'skii dans double cônes [38], le théorème Leggett et Williams [17], théorème de Avery et Peterson [6], ils sont des théorèmes importants qui donnes l'existence et la multiplicité des solutions positives.

L'organisation de notre mémoire est la suivante :

Premier chapitre : porte des préliminaires et des rappels.

Deuxième chapitre : a pour objectif de présenter quelques théorèmes du point fixe : Théorème de Banach, Théorème de Brouwer, Théorème de Shauder, Théorème de Krasnosel'skii et le Théorème de legget-Williams.

Troisième chapitre : est dédié à l'étude de l'existence de solutions positives du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_1''(t) + f_1(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\ u_2''(t) + f_2(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\ u_1(0) = u_2(0) = 0 \\ u_1(1) = \displaystyle\int_0^1 g_1(s)u_1(s)ds, u_2(1) = \int_0^1 g_2(s)u_2(s)ds \end{cases},$$

où f_i, g_i pour $i = 1, 2$ avec des conditions convenable.

Chapitre 1
Préliminaires

Dans ce chapitre nous introduisons certains notions et concepts essentiels utilisés dans les autres chapitres, premièrement nous rappelons quelques définitions dans l'analyse fonctionnelle.

1.1 Définitions dans l'analyse fonctionnelle

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. On note X l'espace de Banach des fonctions réelle définie et continue sur I, i.e :

$$X = \{f : I \to \mathbb{R} \quad \textit{est continue}\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

Définition 1.1.1. une partie B de X est dite uniformément bornée dans X si

$$\exists M > 0, \ \forall f \in B \quad \|f\| \leqslant M.$$

Définition 1.1.2. une partie B de X est équicontinue dans I si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0, \ \forall x \in I, \ y \in I : |x - y| < \delta\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \textit{pour toute } f \in B.$$

Définition 1.1.3. Une partie B est relativement compact si sa fermeture $\overline{B}$ est compacte

Lemme 1.1.1. [22] **(Lemme d'Ascoli-Arzéla)**
soit B une partie de X, B est relativement compact si :

i) B est équicontinue dans I.

ii) B est uniformément bornée dans X.

Définition 1.1.4. Soit X et Y deux espaces de Banach l'application $f : X \to Y$ est dite complètement continue si :

i) f est continue sur E

ii) $\forall B \subset X$, B un borné $\Rightarrow f(B)$ est relativement compact dans Y.

Définition 1.1.5. Soit $f : X \to X$ une application. Un élément x_0 de X est dit point fixe de f si :

$$f(x_0) = x_0.$$

Définition 1.1.6. une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ est dit concave si :

$$u(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \geqslant \lambda u(t_1) + (1-\lambda)u(t_2). \ \ \forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Définition 1.1.7. Soient (X, d) un espace métrique complet et T une application de X dans X. On dit que T est une application $k-$*Lipschitzienne* s'il existe une constante positive k telle que on a

$$\forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leqslant k\ d(x, y).$$

Si $k < 1$, alors T est appelée contraction.

Définition 1.1.8. [25] Un sous ensemble non vide P est dit cône dans un espace de Banach E s'il est fermé et vérifie les conditions suivantes :

1. $x \in P$ et $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in P$
2. $x \in P$ et $y \in P \Rightarrow x + y \in P$
3. $x \in P$ et $-x \in P \Rightarrow x = 0$

1.2 Degré topologique

Dans cette section, nous développons la notion de degré topologique, qui intervient dans la preuve du théorème de krasnosel'skii dans double cônes, l'outil essentiel de notre travail.
Récemment le degré topologique s'est révélé un outil important permettant la résolution de certains problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles ordinaires.

1.2.1 Le Degré de Brouwer

Dans cette partie nous présentons la théorie du degré topologique de dimension fini c'est le degré de Brouwer et ses propriétés principales.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On note le jacobien de f en point x par $J_f(x)$ et la frontière de Ω par $\partial\Omega$.
Le degré topologique de Brouwer est un outil qui permet d'assurer que l'équation de la forme $f(x) = y_0$ admet aux moins une solution $x \in \Omega$, où $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.1. [30] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et f une application de $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ avec $D_f(x_0) = \left(\frac{df_i}{dx_j}\right)(x) \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$
On désignera le Jacobienne de f en x_0 par $J_f(x_0) = det\ D_f(x_0)$.

a) x_0 est dite point régulier si $J_f(x_0) \neq 0$
b) x_0 est dite point singulier si $J_f(x_0) = 0$.
   On note l'ensemble des points singulier de f sur Ω par :

$$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega,\ J_f(x_0) = 0\}.$$

Définition 1.2.2. [30] si $y_0 \notin [f(\partial\Omega) \cup S_f(\Omega)]$, on définit le degré topologique de Brouwer de f en y_0 relativement à Ω l'entier défini par :

$$d(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \Omega \cap f^{-1}(y_0)} sign\ J_f(x) & si\ \ \Omega\ \cap f^{-1}(y_0) \neq \emptyset, \\ 0 & si\ \ \Omega \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset. \end{cases}$$

Propriétés du degré topologique de Brouwer

Dans tout ce qui suit, on désignera par I_d l'application identité sur $\mathbb{R}^n$. Alors on a les propriétés suivantes :

Propriété 1.2.1. [30](Normalisation)

$$d(I_d, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1 & si \quad y_0 \in \Omega, \\ 0 & si \quad y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Propriété 1.2.2. [30](Additivité)
Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(\Omega_i)_{i \in I} \subset \Omega$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des conditions suivantes :

i) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$

ii) $\bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i \subset \Omega$ et $y_0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i)$

Alors

$$d(f, \Omega, y_0) = \sum_{i \in I} d(f, \Omega_i, y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

Propriété 1.2.3. [30](Invariance sur le bord)
Soient f, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions sur Ω, si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et $f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$ alors

$$d(f, \Omega, y_0) = d(g, \Omega, y_0).$$

Propriété 1.2.4. [30](Invariance par homotopie)
Soit $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue supposons $y_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$, $y_0(t) \neq H_t(x)$, alors

$$d(H_0, \Omega, y_0) = d(H_1, \Omega, y_0).$$

Avec

$$\begin{aligned} H_0 &= H(0, .) \\ H_1 &= H(1, .) \end{aligned}$$

1.2.2 Degré de Shauder

Dans cette partie, on veut construire un degré de façon qu'il ait la même conclusion que celui de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire un outil qui permette d'assurer l'existence d'au moins une solution pour l'équation de la forme $f(x) = y$, où f est continue d'un Banach E dans lui-même.

Le degré topologique en dimension infinie n'est pas défini pour toutes les applications continues d'un Banach E dans lui-même. Aussi, il faut restreindre les fonctions que l'on considère, ce degré dit le degré de Leray-Schauder, on construit ce degré topologique sur les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte.

Propriétés du degré topologique de Leray-Schauder

On cite les propriétés les plus importantes du degré de Leray-Schauder. Soit donc Ω un ouvert borné d'un espace de Banach X.

Propriété 1.2.5. [26] (Normalisation)

$$d(I_d, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1 & si \quad y_0 \in \Omega, \\ 0 & si \quad y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Propriété 1.2.6. [26](Additivité)
si Ω est un ouvert borné de X et $y_0 \in X$, $f : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to X$ un opérateur compact et Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints inclus dans Ω tel que $y_0 \notin (I_d - f)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(I_d - f, \Omega, y) = d(I_d - f, \Omega_1, y) + d(I_d - f, \Omega_2, y).$$

.

Propriété 1.2.7. [26](Invariance par homotopie)
Soit $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ une fonction compact supposons $y_0 : [0.1] \to X$ et $\forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$, $y_0(t) \neq (I_d - H_t(x))$, alors $d(I_d - H_t(x)$ est constant pour tout $t \in [0.1]$, c.à.d :

$$d(I_d - H_0, \Omega, y_0) = d(I_d - H_1, \Omega, y_0).$$

Propriété 1.2.8. [26] (Existence)
Si $d(I_d - f, \Omega, y_0) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ telle que $x - f(x) = y_0$.

Propriété 1.2.9. [26](Invariance par translation)
Pour tout $z \in X$, $d(I_d - f, \Omega, y_0) = d(I_d - f - z, \Omega, y_0 - z)$.

1.3 Fonction de Green

Les fonctions de Green ont été introduites par George Green en 1828. Ces fonctions interviennent dans la résolution des équations linéaires à coefficients constants qu'elles soient différentielles ou aux dérivées partielles.

1.3.1 Détermination de la fonction de Green

Soit le problème aux limites non non homogène avec des conditions aux limites non homogènes suivant :

$$(PP) \begin{cases} x'' = a_0 x + a_1 x' + b(t) & \\ \alpha_a x'(a) + \beta_a x(a) = \gamma_a & ...(c_1) \qquad t \in [a,b] \\ \alpha_b x'(b) + \beta_a x(b) = \gamma_b & ...(c_2) \end{cases}$$

Avec $b(t)$ et γ_a, γ_b des paramètre non nuls.

Soit le problème aux limites homogène avec des conditions homogènes suivant :

$$(HH)\begin{cases} x'' = a_0x + a_1x' \\ \alpha_a x'(a) + \beta_a x(a) = 0 & ...(c_1) \qquad t \in [a,b] \\ \alpha_b x'(b) + \beta_a x(b) = 0 & ...(c_2) \end{cases}$$

Soit **L** l'opérateur définit par :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}: \quad \mathcal{C}^2(I) &\to \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \mathbf{L}(x) = \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{d}{dt}x(t)\right] - q(t)x(t). \end{aligned}$$

avec $p(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $q(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions tels que

$$\frac{p(t)}{p'(t)} = -a_1(t) \quad et \quad \frac{q(t)}{q'(t)} = a_0(t)$$

Soit le problème aux limites suivant :

$$(HH)'\begin{cases} \mathbf{L}(x(t)) = 0 \\ p(a)x'(a)\tan(\theta_a) = x(a) & ...(c_1') \\ p(b)x'(b)\tan(\theta_b) = x(b) & ...(c_2') \end{cases}$$

Proposition 1.3.1. Le problème (HH) est équivalent au problème $(HH)'$ tels que :

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \omega \;\; p(a) \;\; \sin\theta_a \\ \beta_a &= -\omega \;\; \cos\theta_a \\ \alpha_b &= \omega \;\; p(b) \;\; \sin\theta_b \\ \beta_b &= -\omega \;\; \cos\theta_b \\ \omega &= \frac{\alpha_a}{p(a)^2} + \beta_a^2 = \frac{\alpha_b}{p(b)^2} + \beta_b^2 \end{aligned}$$

Définition 1.3.1. [5] Soit l'équation $\mathbf{L}(x) = 0$ vérifiant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} p(a)x'(a)\tan(\theta_a) = x(a) \qquad ...(c_1') \\ p(b)x'(b)\tan(\theta_b) = x(b) \qquad ...(c_2') \end{aligned}$$

Soient $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ deux fonctions indépendantes vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{L}[\varphi_1(t)] &= 0 \\ \varphi_1(a) &= p(a)\varphi_1'(a)\tan(\theta_a) \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \mathbf{L}[\varphi_2(t)] &= 0 \\ \varphi_2(b) &= p(b)\varphi_2'(b)\tan(\theta_b) \end{cases} \tag{1.2}$$

Si le problème $(HH)'$ admet une solution unique $x = 0$ sur (a,b) alors la fonction de Green existe et définie par l'application :

$$\begin{aligned} G : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,\tau) &\longmapsto G(t,\tau) \end{aligned}$$

telle que

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\varphi_1(t)\varphi_2(\tau) & a<t<\tau<b\\ \\ \dfrac{1}{k}\varphi_1(\tau)\varphi_2(t) & a<\tau<t<b\end{cases}$$

avec $k=p(t)W(t,\varphi_1,\varphi_2)$ et

$$W(t,\varphi_1,\varphi_2)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{vmatrix}=\varphi_1(t)\varphi_2'(t)-\varphi_2(t)\varphi_1'(t)$$

Exemple 1.3.1. Considérons le problème aux limites suivant :

$$(PP)\begin{cases}x''(t) & =1\\ x(0) & =\alpha_0\\ x(1) & =\beta_0\end{cases}$$

Soit le problème homogène avec des conditions homogènes suivant :

$$(HH)\begin{cases}x''(t) & =0\\ x(0) & =0\\ x(1) & =0\end{cases}$$

La solution du problème (HH) :

$$\begin{array}{ll}x''(t)=0 & \Rightarrow x(t)=c_1t+c_2\\ x(0)=0 & \Rightarrow c_2=0\\ x(1)=0 & \Rightarrow c_1=0\end{array}$$

Donc $x=0$ est l'unique solution de (HH) et d'après la définition 1.3.1 on obtient l'existence de la fonction de Green.
Soit $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ deux fonctions indépendantes vérifiant :

$$\begin{cases}\varphi_1''(t) & =0,\\ \varphi_1(0) & =0.\end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases}\varphi_2''(t) & =0,\\ \varphi_2(1) & =0.\end{cases} \tag{1.4}$$

Les solutions des problèmes (1.3) et (1.4) sont données par :

$$\varphi_1(t)=c_1t,\quad \varphi_2(t)=c_2(-t+1)$$

On a $p(t)=1$ car

$$x''(t)=\frac{d}{dt}\left[x'(t)\right],$$

et

$$\begin{aligned} k &= p(t)w(t,\varphi_1,\varphi_2) \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \\ &= \quad -c_1c_2. \end{aligned}$$

Donc la fonction de Green est donnée par la formule suivante :

$$G(t,\tau) = \begin{cases} t(\tau-1), & 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant 1, \\ \tau(t-1), & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Chapitre 2

Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont des outils mathématiques de base qui permettent de montrer l'existence des solutions pour divers genres d'équations .
Dans ce chapitre, nous présenterons les théorèmes du point fixe apparus avant le théorème de krasnosel'skii à savoir, Banach, Brouwer et Schauder.
Étant donnés un ensemble M et une application $f : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur f et M pour que f a un point fixe.
Ces résultats théoriques permettront de montrer l'existence des solutions sans les déterminer explicitement.

2.1 Théorème de Banach

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922, c'est la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

Théorème 2.1.1. [31] Soit E un espace métrique complet (non vide). Si $f : E \to E$ est une contraction, alors f admet un unique point fixe dans E,

$$\exists! x \in X : Tx = x.$$

2.2 Théorème de Brouwer

Le théorème de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe, ce théorème garantit l'existence d'un point fixe d'une application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Théorème 2.2.1. [39] Soit M un compact, convexe, non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \to M$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans M.

2.3 Théorème de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer, il affirme qu'une application continue sur un convexe compact d'un espace de Banach admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 2.3.1. [39] Soit F un ensemble fermé, convexe, sur un espace de Banach X et soit $T : F \to F$ une application continue telle que $T(F)$ est un sous-ensemble relativement compacte de F, alors T admet au moins un point fixe.

Théorème 2.3.2. [39](*Alternative non linéaire de Leray-Schauder*)
Soit E un espace de Banach et U un ouvert borné de E, tel que $0 \in U$. Si $f : U \to E$ est une application compacte, alors

i) f admet un point fixe dans U,
ou bien

ii) $\exists x \in \partial U, \quad \exists t \in [0,1] : x = tf(x)$.

2.4 Théorème de Krasnosel'skii

On a vu précédemment deux théorèmes principaux a savoir le théorème de Banach et le théorème de Schauder, Kranosel'skii a combiné ces deux théorèmes, ce dernier a élaboré son premier théorème du point fixe en 1955, qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème a été utilisé dans la résolution des équations différentielles non linéaires.
Son énoncé est le suivant :

Théorème 2.4.1. [4] Soit K un fermé, borné et convexe non vide de l'espace de Banach $(E, \|.\|)$. Si $S, T : K \to E$ sont deux applications telles que :

i) S est continue et compacte.

ii) T est une contraction.

iii) $Sx + Ty \in K, \ \forall (x,y) \in K \times K$.

Alors :
$$\exists x^* \in K; \ Sx^* + Tx^* = x^*.$$

2.4.1 Développement du théorème de Krasnosel'skii

Le théorème de Krasnosel'skii a connue plusieurs développements, des variantes, des généralisations et des modification surtout dans les hypothèses (i),(ii) et (iii) tels que de nombreux auteurs se sont attelés à essayer de généraliser ce théorème [9], [24], [35], la plupart ont manipulé ces hypothèses.
L'hypothèse (i) été modifiée en considérant la continuité et la compacité faibles (topologie faible), Burton dans son travail [11] il a remplacé l'hypothèse (iii) par la suivante :

$$x = Tx + Sy, y \in K \Rightarrow x \in K.$$

Barroso [8], il a pris l'hypothèse suivante :

$$\lambda \in [0,1], \ x = \lambda Tx + Sy, \ y \in K \Rightarrow x \in K,$$

au lieu de (iii). D'autres part des auteurs ont considéré E localement convexe [9], [12].

2.4.2 Théorème de Krasnosel'skii dans un cône (1960)

La version la plus utilisée du théorème de Krasnoselskii, est celle dans un cône, elle se présente en deux parties. La première dite forme compressive a beaucoup de ressemblance avec les théorèmes de Brouwer et Schauder. La deuxième partie dite expansive, complète la première.
Soient $(E, K, \|.\|)$, un espace de Banach, K un cône fermé et convexe de E, a, b deux réels tels que $0 < a < b$.
Notons :

$$K_a = \{x \in K; \quad \|x\| = a\},$$
$$K_b = \{x \in K; \quad \|x\| = b\},$$
$$K(a, b) = \{x \in K; \quad a \leqslant \|x\| \leqslant b\}.$$

Théorème 2.4.2. [25] Soit $T : K \to K$ un opérateur complètement continu telle que :

1. **(La forme compressive)** T admet un point fixe dans $K(a, b)$ si :

$$\|T(x)\| \geqslant \|x\| \textit{ pour tout } x \in K_a, \tag{2.1}$$

et

$$\|T(x)\| \leqslant \|x\| \textit{ pour tout } x \in K_b. \tag{2.2}$$

2. **(La forme expansive)** T admet un point fixe dans $K(a, b)$ si :

$$\|T(x)\| \leqslant \|x\| \textit{ pour tout } x \in K_a, \tag{2.3}$$

et

$$\|T(x)\| \geqslant \|x\| \textit{ pour tout } x \in K_b. \tag{2.4}$$

Remarques 2.4.1. [25]

- Les adjectifs "compressive", "expansive" sont conventionnels et ne décrivent pas le comportement de T dans tous les cas.

- On dit que T est strictement compressive, si l'inégalité (2.1) ou (2.2) est stricte. Et de même, on dit que T est strictement expansive, si l'inégalité (2.3) ou (2.4) est stricte.

- La technique conventionnelle pour appliquer ce théorème du point fixe pour obtenir un résultat d'existence aux problèmes aux limites différentiels est de faire une formulation abstraite du problème, en précisant les espaces de Banach qui interviennent (passer aux opérateurs intégraux associés en utilisant la fonction de Green).

- Il y a beaucoup de généralisations connues du Théorème 2.4.2, la première direction de l'extension de ce théorème doit étendre les conditions de (2.1) et (2.2) tels que ces conditions peuvent être remplacées par :

$$\exists p \in K \textit{ tq} : \ x - T(x) \neq \lambda\, p, \ \forall \lambda \geqslant 0 \ , \forall x \in K_a, \tag{2.5}$$

et
$$T(x) \neq \lambda x,\ \forall \lambda > 1, \quad \forall x \in K_b, \tag{2.6}$$
les conditions (2.3) et (2.4) peuvent être modifiées par :
$$T(x) \neq \lambda x,\ \forall \lambda > 1,\ \forall x \in K_a, \tag{2.7}$$
et
$$\exists p\ \in K\ tq:\ x - T(x) \neq \lambda\ p,\ \forall \lambda \geqslant 0,\ \forall x \in K_b. \tag{2.8}$$
Dans la littérature, la condition (2.6) est appelée la condition de **Leray-Schauder**.

- La deuxième direction d'extension est de chercher une région plus générale que $K(a,b)$, par exemple D. Guo [21], il a remplacé $K(a,b)$ par :
$$J = K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1),$$
où Ω_1 et Ω_2 sont deux ensembles ouverts bornés dans E tel que $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et au lieu de K_a, K_b il a considère $K \cap \partial\Omega_1$ et $K \cap \partial\Omega_2$.

2.4.3 Théorème de Krasnosel'skii dans double cônes

Le théorème de Krasnosel'skii et ses généralisations ont été appliquées avec succès pour obtenir l'existence et la multiplicité des solutions positives pour des problèmes aux limites associées à des équations différentielles, par suit nous utilisons une de ses variantes : "**Théorème du point fixe dans double cônes**". Son énoncé est donné par la formule suivante :
Soit X un espace de Banach avec un norme $\|.\|$ et $K \subset X$ un cône pour une constante $r > 0$, on note
$$K_r = \{x \in K : \|x\| < r\},$$
et
$$\partial K_r = \{x \in K : \|x\| = r\}.$$
Supposons $\alpha : K \to \mathbb{R}^+$ est une fonctionnelle continue croissante c.à.d α est continue et $\alpha(\lambda x) \leqslant \alpha(x)$, pour $\lambda \in (0,1)$
Soit
$$K(b) = \{x \in K : \alpha(x) < b\},$$

$$\partial K(b) = \{x \in K : \alpha(x) = b\},$$
et
$$K_a(b) = \{x \in K : \|x\| > a, \quad \alpha(x) < b\}.$$

Théorème 2.4.3. [38] Soit X un espace de Banach réel avec une norme $\|.\|$ et $K, K' \subset X$ deux cônes avec $K' \subset K$ on suppose que $T : K \to K$ et $T^* : K' \to K'$, sont deux opérateurs complètement continus et $\alpha : K' \to \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle continue croissante vérifiant $\alpha(x) \leqslant \|x\| \leqslant M\alpha(x) \quad \forall x \in K'$, où M est une constante telle que $M \geqslant 1$, s'il existe des constantes $b > a > 0$ telles que

(C1) $\|Tx\| < a$, pour $x \in \partial K_a$;
(C2) $\|T^*x\| < a$, pour $x \in \partial K'_a$ et $\alpha(T^*x) > b$ pour $x \in \partial K'(b)$;

(C3) $\quad Tx = T^*x, \quad$ pour $x \in K_a'(b) \cap \{u : T^*u = u\}$.

Alors T admet au moins deux points fixes x_1 et x_2 dans K tels que

$$0 \leqslant \|x_1\| < a < \|x_2\|, \quad \alpha(x_2) < b.$$

Preuve.
Notons par $\mathbf{d_K}$ le degré topologique de Leray Schauder cité dans la section 1.2.2 du premier chapitre.
La condition (C1) implique

$$\sup_{x \in \partial K_a} \|Tx\| < a,$$

Concéderons l'homotopie suivante :

$$T_t(x) = (I_d - tT)(x) \;\; avec \;\; t \in [0,1].$$

Montrons que le $d_K(T_t, K_a, 0)$ est bien définie c.à.d :

$$T_t(x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial K_a.$$

Par absurde supposons $\exists x \in \partial K_a$ *tel que* $T_t(x) = 0$

$$\begin{aligned} T_t(x) = 0 \quad & \Rightarrow (I_d - tT)(x) = 0 \\ & \Rightarrow x - tT(x) = 0 \\ & \Rightarrow x = tT(x) \\ & \Rightarrow \|x\| = t\|T(x)\| \end{aligned}$$

D'après la condition (C1) on a

$$t\|T(x)\| < ta$$

Puisque $x \in \partial K_a$ on a

$$\|x\| = a$$

En effet $a < ta$ est une contradiction. Alors $T_t(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \partial K_a$ et le $d_K(T_t, K_a, 0)$ est bien définie
D'après la Propriété 1.2.7 on a

$$d_K(T_1, K_a, 0) = d_K(T_0, K_a, 0).$$

Et

$$\begin{aligned} d_K(T_1, K_a, 0) \;\; &= d_K(I_d - T, K_a, 0) \\ d_K(T_0, K_a, 0) \;\; &= d_K(I_d, K_a, 0) \end{aligned}$$

D'après la Propriété 1.2.5 du degrés de Schauder nous obtenons :

$$d_K(I_d - T, K_a, 0) = d_K(I_d, K_a, 0) = 1.$$

Donc d'après la propriété 1.2.8 $\exists x \in K$ telle que $x - T(x) = 0$.
Par conséquent T admet un point fixe x_1 dans K_a vérifiant $0 \leqslant \|x\| < a$.
De même, la première partie de la condition (C2) implique

$$d_{K'}(I_d - T^*, K_a', 0) = 1.$$

Montrons maintenant que
$$d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), 0) = 0.$$

La condition(C2) implique
$$\alpha(T^*x) > b \quad pour \quad x \in \partial K'(b), \tag{2.9}$$
or
$$\alpha(x) \leqslant \|x\| \leqslant M\alpha(x) \qquad \forall x \in K',$$
Alors
$$\|T^*x\| \geqslant \alpha(T^*x) > b > 0 \qquad pour\ x \in \partial K'(b),$$
et donc
$$\inf_{x\in\partial K'(b)} \|T^*x\| \geqslant \alpha(T^*x) > b > 0.$$
Le Théorème de Dugundji's extension [19] assure qu'il existe une extension $\breve{T} : \overline{K'(b)} \to K'$ complètement continue de $T^* : \partial K'(b) \to K'$ $(T^*x = \breve{T}x$ pour $x \in \partial K'(b))$.
Par conséquent
$$\inf_{x\in\overline{K'(b)}} \|\breve{T}x\| > b > 0.$$
Choisissons l'homotopie $H(x, \lambda) = x - \lambda\breve{T}x$ et montrons que
$$H(x, \lambda) \neq 0 \quad pour\ tout\ x \in \partial K'(b),\ \lambda \geqslant 1.$$
On procède par absurde, supposons qu'il existe $\lambda_0 \geqslant 1$ *et* $x_0 \in \partial K'(b)$ telle que
$$x_0 - \lambda_0\breve{T}x_0 = 0,$$
c.à.d
$$x_0 = \lambda_0\breve{T}x_0,$$
Il suit que
$$b = \alpha(x_0) = \alpha(\lambda_0\breve{T}x_0) = \alpha(\lambda_0 T^*x_0).$$
Et puisque la fonction α est croissante donc
$$\alpha(\lambda_0 T^*x_0) \geqslant \alpha(T^*x_0),$$
Et d'après (2.9) on a
$$\alpha(T^*x_0) > b,$$
en effet
$$b = \alpha(x_0) = \alpha(\lambda_0\breve{T}x_0) = \alpha(\lambda_0 T^*x_0) \geqslant \alpha(T^*x_0) > b.$$
Ce qui donne une contradiction. Donc $d_{K'}(H, K'(b), 0)$ est bien définie et
$$d_{K'}(H, K'(b), 0) = constante \quad \forall\lambda \geqslant 1.$$

Puisque $T^*x = \breve{T}x \quad \forall x \in \partial K'(b)$ donc d'après la Propriété 1.2.3 on a

$$d_{K'}(T^*, K'(b), 0) = d_{K'}(\breve{T}, K'(b), 0).$$

Donc

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), 0) = d_{K'}(I_d - \breve{T}, K'(b), 0) = d_{K'}(I_d - \lambda\breve{T}, K'(b), 0). \tag{2.10}$$

Quand $\lambda > M$, *pour tout* $x \in \overline{K'(b)}$, nous avons

$$\|x\| \leqslant bM, \ \|\lambda\breve{T}x\| = \lambda\|\breve{T}x\| \geqslant \lambda b > Mb.$$

Par conséquent l'équation $x - \lambda\breve{T}x = 0$ n'a pas de solution dans $\overline{K'(b)}$, ceci implique que

$$d_{K'}(I_d - \lambda\breve{T}, \ K'(b), 0) = 0 \ \ pour \ \lambda \geqslant 1.$$

De (2.10), nous obtenons

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), 0) = 0.$$

Puisque

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), 0) = d_{K'}(I_d - T^*, K'_a(b), 0) + d_{K'}(I_d - T^*, K'_a, 0).$$

On a

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'_a(b), 0) = d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), 0) - d_{K'}(I_d - T^*, K'_a, 0) = -1$$

Donc T^* admet un point x_2 *dans* $K'_a(b)$ avec

$$\|x_2\| > a, \ \alpha(x_2) < b.$$

La condition (C3) implique

$$x_2 = T^*x_2 = Tx_2 \in K' \subset K$$

Alors T admet au moins deux points fixes x_1 et x_2 tels que

$$0 \leqslant \|x_1\| < a < \|x_2\|, \quad \alpha(x_2) < b.$$

2.5 Théorème de Leggett-Williams

Dans cette partie, on s'intéresse à une extension du théorème de Krasnoselskii la plus fréquemment utilisée pour obtenir la multiplicité des solutions est celle que l'on doit à Leggett et Williams dans leur article [17] et qui peut être formulée comme suit :

On note par

$$K(\phi, a, b) = \{x \in K : \phi(x) \geqslant a, \ \|x\| \leqslant b\}.$$

et

$$\overline{K}_c = \{x \in K, \ \|x\| \leqslant c\}.$$

Soit la fonction $\theta : K \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\phi(u_1, u_2) = \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_1(t) + \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_2(t).$$

Théorème 2.5.1. [17] Soit $T : \overline{K}_c \to \overline{K}_c$ complètement continue et ϕ une fonction non négative continue concave sur K telle que $\phi(x) \leqslant \|x\|,\ \forall x \in \overline{K}_c$, supposons qu'il existe $0 < d < a < b \leqslant c$ telles que

(C4) $\{x \in K(\phi, a, b) : \phi(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\phi(Tx) > a,\ \forall x \in K(\phi, a, b)$;
(C5) $\|Tx\| < d$, pour $\|x\| \leqslant d$;
(C6) $\phi(Tx) > a$, pour $x \in K(\phi, a, c)$ avec $\|Tx\| > b$;

Alors T admet au moins trois points fixes x_1, x_2, x_3 dans $\overline{K}_c$ vérifiant

$$\|x_1\| < d, \quad a < \phi(x_2), \quad \|x_3\| > d, \quad \phi(x_3) < a.$$

Chapitre 3
Étude de l'existence de solutions positives

Le but de ce chapitre est de montrer l'existence et la multiplicité des solutions pour un problème aux limites avec des conditions intégrales associé à des equations différentielle d'ordre 2. A partir de l'application des deux théorèmes du point fixe.

- Le théorème de Krasnosels'kii dans double cônes.
- Le théorème de Legget-Williams.

3.1 Introduction

Les problèmes aux limites avec des conditions intégrales ont étés appliquées dans plusieurs domaines comme la conduction de la chaleur [13], l'écoulement souterrain de l'eau et semi conducteur [23].
L'existence de solutions non négatives de ces problèmes a reçu beaucoup d'attention voir par exemple [20, 32, 36].
Ces dernières années, les problèmes aux limites ont étés étudiés largement voir [1, 2, 3], citons quelques travaux, Yang [37] il a étudié l'existence de solutions positives du problèmes aux limites de seconde d'ordre suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f(t,u,v) \\ -v'' = g(t,u,v) \\ u(0) = v(0) = 0 \\ u(1) = H_1\left(\displaystyle\int_0^1 u(\tau)d\alpha(\tau)\right) \\ v(1) = H_2\left(\displaystyle\int_0^1 v(\tau)d\beta(\tau)\right), \end{cases}$$

avec α et β sont des fonctions croissantes non constantes définie sur $[0,1]$, avec $\alpha(0) = 0 = \beta(0)$ et $f, g \in \mathcal{C}((0,1)\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $H_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.
Feng [20] il a étudié l'existence des solutions positives pour le problème aux limites avec des conditions intégrales suivant.

$$\begin{cases} x'' + f(t,x) = 0 \\ x(0) = \displaystyle\int_0^1 g(t)x(t)dt, \quad x(1) = 0 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \displaystyle\int_0^1 g(t)x(t)dt, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}([0,1]\times P, P)$, $g \in L^1[0,1]$ et P est un cône de E.
Dans tout ces dernières années ils ont considérés une non linéarité f non négative.

Dans la partie suivante, nous étudions l'existence et la multiplicité de solutions positives du problème aux limites avec des conditions intégrales suivant :

$$\begin{cases} u_1''(t) + f_1(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\ u_2''(t) + f_2(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\ u_1(0) = u_2(0) = 0 \\ u_1(1) = \displaystyle\int_0^1 g_1(s)u_1(s)ds, u_2(1) = \int_0^1 g_2(s)u_2(s)ds \end{cases}, \tag{3.1}$$

où $f_1, f_2 \in \mathcal{C}((0,1)\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ *et* g_1, g_2 sont des fonctions non négatives dans $L^1[0,1]$.

Nous supposons les conditions suivantes :

$(H1)$ $f_i \in \mathcal{C}((0,1)\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, $g_i \in L^1[0,1]$ est non négative, $i = 1,2$;
$(H2)$ $1 - \int_0^1 sg_i(s)ds > 0$;
$(H3)$ $f_1(t, 0, u_2(t)) \geqslant 0 (\not\equiv 0)$, $f_2(t, u_1(t), 0) \geqslant 0 (\not\equiv 0)$, $t \in [0,1]$.

3.2 Lemmes préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques lemmes qui seront utilisés dans la preuve de notre résultat principal.
Tout d'abord, définissons l'espace X par,

$$X = C([0,1]) \times C([0,1]),$$

avec la norme

$$\begin{aligned} \|(u_1, u_2)\| &:= \|u_1\| + \|u_2\| \\ &= \max_{t\in[0,1]} |u_1(t)| + \max_{t\in[0,1]} |u_2(t)|. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.1. [34] On suppose que $(H2)$ est vérifiée. Alors $\forall y_i \in C([0,1])$ le problème aux limites

$$u_i''(t) + y_i(t) = 0 \tag{3.2}$$

$$u_i(0) = 0,\ u(1) = \int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds, \tag{3.3}$$

admet une solution unique

$$u_i(t) = \int_0^1 H_i(t,s)y_i(s)ds, \quad i = 1,2, \tag{3.4}$$

avec

$$H_i(t,s) = G(t,s) + \frac{t\displaystyle\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1 - \displaystyle\int_0^1 sg_i(s)ds}, \quad i = 1,2,$$

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & si \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & si \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Preuve.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(PP)\begin{cases} -u''(t) &= y_i(t), \\ u_i(0) &= 0, \\ u_i(1) &= \int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds. \end{cases}$$

Et soit le problème homogène suivant :

$$(HH)\begin{cases} -u_i''(t) &= 0, \\ u_i(0) &= 0, \\ u_i(1) &= 0. \end{cases}$$

Et soit le problème $(HH)'$ suivant :

$$(HH)'\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[-u_i'(t)\right] &= 0, \\ u_i(0) &= 0, \\ u_i(1) &= 0. \end{cases}$$

La solution de (HH) :

$$\begin{aligned} -u''(t) = 0 \quad &\Rightarrow u(t) = c_1t + c_2 \\ u(0) = 0 \quad &\Rightarrow c_2 = 0 \\ u(1) = 0 \quad &\Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned}$$

Alors $u = 0$ est l'unique solution du problème (HH) et d'après la Définition 1.3.1, on obtient l'existence de la fonction de Green.
Soit $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ deux fonctions indépendantes vérifiant :

$$\begin{cases} -\varphi_1''(t) &= 0, \\ \varphi_1(0) &= 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} -\varphi_2''(t) &= 0, \\ \varphi_2(1) &= 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Les solutions des problèmes (3.5) et (3.6) sont données par :

$$\varphi_1(t) = c_1t, \quad \varphi_2(t) = c_2(-t + 1.)$$

Puisque (HH) et $(HH)'$ sont équivalents alors $p(t) = -1$ et

$$\begin{aligned} k &= p(t)w(t, \varphi_1\varphi_2) \\ &= -\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \\ &= \quad c_1c_2. \end{aligned}$$

Donc la fonction de Green est donnée par la formule suivante :

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrons que la solution de (3.2) et (3.3) est donnée par la formule suivante :

$$u_i(t) = \int_0^1 H_i(t,s)y_i(s)ds, \quad i = 1,2,$$

où

$$H_i(t,s) = G(t,s) + \frac{t\displaystyle\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1 - \displaystyle\int_0^1 sg_i(s)ds}, \quad i = 1,2,$$

Par (3.2), nous avons

$$u_i''(t) = -y_i(t).$$

Pour $t \in [0,1]$, on a

$$\int_0^t u_i''(s)ds = -\int_0^t y_i(s)ds$$

i.e

$$u_i'(t) - u_i'(0) = -\int_0^t y_i(s)ds.$$

De $t \in [0,1]$, par intégration on trouve

$$u_i(t) - u_i(0) = u_i'(0)t - \int_0^t \int_0^r y_i(s)dsdr$$

On a, pour $0 \leqslant s \leqslant r, \quad 0 \leqslant r \leqslant t$

$$u_i(t) - u_i(0) = u_i'(0)t - \int_0^t y_i(s)ds \int_s^t dr.$$

Par suite

$$u_i(t) - u_i(0) = u_i'(0)t - \int_0^t (t-s)y_i(s)ds,$$

La condition $u_i(0) = 0$ donne

$$u_i(t) = u_i'(0)t - \int_0^t (t-s)y_i(s)ds, \tag{3.7}$$

si $t = 1$ on a

$$u_i(1) = u_i'(0) - \int_0^1 (1-s)y_i(s)ds.$$

Puisque

$$u_i(1) = \int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds,$$

donc

$$\begin{aligned} u_i'(0) &= u_i(1) + \int_0^1 (1-s)y_i(s)ds, \\ &= \int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds + \int_0^1 (1-s)y_i(s)ds. \end{aligned}$$

On remplace $u_i'(0)$ dans (3.7) et on trouve

$$u_i(t) = t\left[\int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds + \int_0^1 (1-s)y_i(s)ds\right] - \int_0^t (t-s)y_i(s)ds$$

alors

$$u_i(t) = t\int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds + t\int_0^1 (1-s)y_i(s)ds - \int_0^t (t-s)y_i(s)ds$$

De $t \in [0,1]$,

$$t\int_0^1 (1-s)y_i(s)ds = t\int_0^t (1-s)y_i(s)ds + t\int_t^1 (1-s)y_i(s)ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} u_i(t) &= t\int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds + t\int_0^t (1-s)y_i(s)ds + t\int_t^1 (1-s)y_i(s)ds - \int_0^t (t-s)y_i(s)ds \\ &= t\int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds + \int_0^t [t(1-s)-(t-s)]y_i(s)ds + t\int_t^1 (1-s)y_i(s)ds \\ &= t\int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds + \int_0^t s(1-t)y_i(s)ds + \int_t^1 t(1-s)y_i(s)ds \\ &= t\int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds + \int_0^1 G(t,s)y_i(s)ds. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds &= \int_0^1 g_i(s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)y_i(\tau)d\tau + s\int_0^1 g_i(\tau)u_i(\tau)d\tau\right]ds \\ &= \int_0^1 g_i(s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)y_i(\tau)d\tau\right]ds + \int_0^1 sg_i(s)ds\int_0^1 g_i(s)u_i(s)ds \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^1 g_i(s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)y_i(\tau)d\tau\right]ds}{1-\displaystyle\int_0^1 sg_i(s)ds}. \end{aligned}$$

Il en résulte, pour $i = 1,2$ *et* $t \in [0,1]$,

$$u_i(t) = \int_0^1 G(t,s)y_i(s)ds + \frac{t}{1-\displaystyle\int_0^1 sg_i(s)ds}\int_0^1 g_i(s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)y(\tau)d\tau\right]ds,$$

avec

$$H_i(t,s) = G(t,s) + \frac{t\displaystyle\int_0^1 g_i(\tau)G(s,\tau)d\tau}{1-\displaystyle\int_0^1 sg_i(s)ds}.$$

Proposition 3.2.1. [20] Soit $\delta \in (0,\frac{1}{2})$, $j_\delta = [\delta, 1-\delta]$ et $\forall t,j \in j_\delta,\ \sigma,s \in (0,1)$ on a

$$G(t,s) \geqslant \delta G(\sigma,s).$$

Preuve.
$\forall t \in [\delta,1-\delta],\ \sigma,s \in [0,1]$ on a
Cas 1 : si $\max\{\sigma,t\} \leqslant s$,

$$\frac{G(t,s)}{G(\sigma,s)} = \frac{t(1-s)}{\sigma(1-s)} = \frac{t}{\sigma} \geqslant t \geqslant \delta.$$

Cas 2 : si $s \leqslant \min\{t,\sigma\}$,

$$\frac{G(t,s)}{G(\sigma,s)} = \frac{s(1-t)}{s(1-\sigma)} = \frac{1-t}{1-\sigma} \geqslant 1-t \geqslant \delta.$$

Cas 3 : si $t \leqslant s \leqslant \sigma$,

$$\frac{G(t,s)}{G(\sigma,s)} = \frac{t(1-s)}{s(1-\sigma)} \geqslant \frac{t}{s} \geqslant t \geqslant \delta.$$

Cas 4 : si $\sigma \leqslant s \leqslant t$,

$$\frac{G(t,s)}{G(\sigma,s)} = \frac{s(1-t)}{\sigma(1-s)} \geqslant \frac{1-t}{1-s} \geqslant 1-t \geqslant \delta.$$

Donc pour $t \in j_\delta$ $\;et\;$ $s,\ \sigma \in (0,1)$ on a

$$\frac{G(t,s)}{G(\sigma,s)} \geqslant \delta, \qquad i.e: \ G(t,s) \geqslant \delta G(\sigma,s).$$

Lemme 3.2.2. [34] On suppose que $(H2)$ est vérifiée, soit $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ alors $\forall t \in [\delta, 1-\delta], \sigma, s \in [0,1]$ on a

$$H_i(\sigma,s) \geqslant 0, \quad H_i(t,s) \geqslant \delta H_i(\sigma,s). \tag{3.8}$$

Preuve.

1. Montrons que

$$H_i(\sigma,s) = G(\sigma,s) + \frac{\sigma \displaystyle\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1 - \displaystyle\int_0^1 s g_i(s)ds} > 0.$$

On a

$$G(\sigma,s) = \begin{cases} \sigma(1-s), & si \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-\sigma), & si \quad 0 \leqslant s \leqslant \sigma \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow G(\sigma,s) > 0.$$

Pour $\forall \sigma \in [0,1]$

$$\sigma \int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr > 0.$$

Et d'après $(H2)$ on a

$$1 - \int_0^1 s g_i(s)ds > 0.$$

Donc

$$H_i(\sigma,s) \geqslant 0.$$

2. Montrons que $H_i(t,s) \geqslant \delta H_i(\sigma,s)$

De la Proposition 3.2.1, on a

$$G(t,s) > \delta G(\sigma,s), \quad t \in [\delta, 1-\delta], \quad \sigma, s \in [0,1].$$

Alors

$$\begin{aligned}
H_i(t,s) &= G(t,s) + \frac{t\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1-\int_0^1 sg_i(s)ds} \\
&\geqslant \delta G(\sigma,s) + \frac{\delta\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1-\int_0^1 sg_i(s)ds} \qquad (car \quad \delta \leqslant t \leqslant 1-\delta) \\
&\geqslant \delta G(\sigma,s) + \frac{\delta\sigma\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1-\int_0^1 sg_i(s)ds} \quad (car \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1) \\
&= \delta H_i(\sigma,s).
\end{aligned}$$

A partir du résultat précédent, nous présentons le lemme suivant qui est très utile pour la construction des cônes K et K' cités dans le Théorème 2.4.3.

Lemme 3.2.3. [34] On suppose que $(H2)$ est vérifiée, si $y_i \in C([0,1])$, $y_i \geqslant 0$, alors l'unique solution $u_i(t)$ du problème aux limites (3.2)- (3.3) vérifie

$$u_i(t) \geq 0 \ et \ \min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_i(t) \geq \delta\|u_i\|, \quad i=1,2.$$

Preuve.

1. Montrons que

$$u_i(t) = \int_0^1 H_i(t,s)y_i(s)ds \geqslant 0, \quad \forall t \in [0,1] \quad i=1,2.$$

Puisque

$$y_i(s) \geqslant 0 \quad et \quad H_i(t,s) \geqslant 0.$$

Donc

$$u_i(t) \geqslant 0, \ \forall t \in [0,1], \quad i=1,2$$

2. Montrons que

$$\min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_i(t) \geq \delta\|u_i\|, \quad i=1,2.$$

D'après le Lemme 3.2.2 et pour $\forall t \in [\delta, \ 1-\delta]$, s, $\sigma \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \int_0^1 H_i(t,s)y_i(s)ds \\
&\geqslant \int_0^1 \delta H_i(\sigma,s)y_i(s)ds \\
&= \delta u_i(\sigma).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$u_i(t) \geqslant \delta \max_{0\leqslant\sigma\leqslant 1} |u_i(\sigma)| = \delta\|u_i\|,$$

et

$$\min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_i(t) \geqslant \delta\|u_i\|.$$

3.3 Application du théorème de Krasnosel'skii dans double cônes

3.3.1 Formulation théorique du problème

Pour préparer l'application du Théorème 2.4.3, nous prouvons quelques lemmes permettant de vérifier toutes les conditions du théorème.

Tout d'abord, définissons les ensembles K et K' dans X par :

$$K = \{(u_1, u_2) \in X : u_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2\},$$

$$K' = \left\{ \begin{array}{c} (u_1, u_2) \in K : u_i(t) \ \ est \ \ concave \ \ dans \ [0,1], \\ \min\limits_{t \in [\delta, 1-\delta]} u_i(t) \geqslant \delta \|u_i\|, \quad i = 1, 2, \ où \ \delta \in (0, \frac{1}{2}) \end{array} \right\}.$$

On a $K, K' \subset X$ sont deux cônes dans X, avec $K' \subset K$.
Nous utilisons la notation $\preceq$ pour l'ordre sur X, défini par

$$(u_1, u_2) \preceq (v_1, v_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} u_1(t) & \leqslant v_1(t) \\ u_2(t) & \leqslant v_2(t) \end{array} \right. \ \forall t \in [0, 1],$$

De plus, nous notons $(.)^+$ la partie positive, c.à.d pour tout B dans $\mathbb{R}$

$$B^+ := \max(B; 0)$$

Et nous définissons les opérateurs suivants :
Soit $T_i : K \to K, \quad i = 1, 2$ est définie par

$$T_1(u_1, u_2)(t) = \left(\int_0^1 H_1(t, s) f_1(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right)^+, \quad t \in [0, 1],$$

$$T_2(u_1, u_2)(t) = \left(\int_0^1 H_2(t, s) f_2(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right)^+, \quad t \in [0, 1],$$

$$T(u_1, u_2)(t) = (T_1(u_1, u_2)(t), T_2(u_1, u_2)(t)).$$

Soit $A_i : K \to X, \quad i = 1, 2$ est définie par

$$A_1(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 H_1(t, s) f_1(s, u_1(s), u_2(s)) ds, \quad t \in [0, 1],$$

$$A_2(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 H_2(t, s) f_2(s, u_1(s), u_2(s)) ds, \quad t \in [0, 1],$$

$$A(u_1, u_2)(t) = (A_1(u_1, u_2)(t), A_2(u_1, u_2)(t)).$$

Pour $(u_1, u_2) \in X$, on définie $\theta : X \to K$ par

$$\theta(u_1, u_2)(t) = (\max\{u_1(t), 0\}, \max\{u_2(t), 0\}).$$

Nous avons,

$$T = \theta \circ A.$$

Soit $T_i^* : K' \to K', \quad i = 1,2$ définie par

$$T_1^*(u_1,u_2)(t) = \int_0^1 H_1(t,s) f_1^+(s,u_1(s),u_2(s))ds, \quad t \in [0,1],$$

$$T_2^*(u_1,u_2)(t) = \int_0^1 H_2(t,s) f_2^+(s,u_1(s),u_2(s))ds \quad t \in [0,1],$$

$$T^*(u_1,u_2)(t) = (T_1^*(u_1,u_2)(t), T_2^*(u_1,u_2)(t))$$

Lemme 3.3.1. [34] Soit $\alpha : K' \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\alpha(u_1,u_2) = \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_1(t) + \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_2(t).$$

Alors α est une fonction continue croissante vérifiant

$$\alpha(u_1,u_2) \leqslant \|(u_1,u_2)\| \leqslant \frac{1}{\delta}\alpha(u_1,u_2).$$

Preuve.

1. Montrons que la fonction α est continue i.e :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall U, V \in K',\ \|U - V\| < \delta \Rightarrow |\alpha(U) - \alpha(V)| < \varepsilon.$$

où $U = (u_1,u_2)$ *et* $V = (v_1,v_2)$ tel que

$$\|U - V\| = \sum_{i=1}^{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u_i(t) - v_i(t)|.$$

Soient $U,\ V \in K'$ telle que

$$\begin{aligned}
\alpha(U) - \alpha(V) &= \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_1(t) + \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_2(t) - \left(\min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} v_1(t) + \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} v_2(t)\right)\\
&\leqslant \max_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_1(t) + \max_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_2(t) - \left(\min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} v_1(t) + \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} v_2(t)\right)\\
&= \left(\max_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_1(t) - \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} v_1(t)\right) + \left(\max_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_2(t) - \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} v_2(t)\right)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|\alpha(U) - \alpha(V)| &\leqslant \left|\max_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta}(u_1(t) - v_1(t)) + \max_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta}(u_2(t) - v_2(t))\right|\\
&\leqslant |\max_{0 \leqslant t \leqslant 1}(u_1(t) - v_1(t)) + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}(u_2(t) - v_2(t))|\\
&\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u_1(t) - v_1(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u_2(t) - v_2(t)|\\
&= \|U - V\| < \delta.
\end{aligned}$$

Alors il suffit de prendre $\varepsilon \geqslant \delta$, pour que α soit une fonction continue .

2. Montrons que α est une fonction croissante i.e : $\forall (u_1,u_2)\in K', (v_1,v_2)\in K'$ tel que
$$(u_1,u_2)\preceq(v_1,v_2)\Rightarrow \alpha(u_1,u_2)\leq\alpha(v_1,v_2)$$
on a
$$(u_1,u_2)\preceq(v_1,v_2)\Rightarrow\begin{cases} u_1(t) & \leqslant v_1(t)\\ u_2(t) & \leqslant v_2(t)\end{cases}\ \forall t\in[0,1],$$
alors
$$\begin{cases}\min\limits_{t\in[\delta,1-\delta]} u_1(t) & \leqslant \min\limits_{t\in[\delta,1-\delta]} v_1(t)\\ \min\limits_{t\in[\delta,1-\delta]} u_2(t) & \leqslant \min\limits_{t\in[\delta,1-\delta]} v_2(t)\end{cases}$$
par conséquent
$$\min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_1(t)+\min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_2(t)\leqslant \min_{t\in[\delta,1-\delta]} v_1(t)+\min_{t\in[\delta,1-\delta]} v_2(t)$$
donc
$$\alpha(u_1,u_2)\leq\alpha(v_1,v_2).$$
D'où la fonction α est croissante.
3. Montrons que la fonction α vérifie :
$$\alpha(u_1,u_2)\leqslant\|(u_1,u_2)\|\leqslant\frac{1}{\delta}\alpha(u_1,u_2).$$
$\forall (u_1,u_2)\in K'$ on a
$$\begin{aligned}\alpha(u_1,u_2) &= \min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta} u_1(t)+\min_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta} u_2(t)\\ &\leqslant \max_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta} u_1(t)+\max_{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta} u_2(t).\\ &\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} u_1(t)+\max_{0\leqslant t\leqslant 1} u_2(t)\\ &\leqslant \|u_1\|+\|u_2\|\\ &= \|(u_1,u_2)\|.\end{aligned}$$
Par le Lemme 3.2.3 on a
$$\min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_i(t)\geq\delta\|u_i\|$$
alors
$$\begin{aligned}\min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_1(t)+\min_{t\in[\delta,1-\delta]} u_2(t) &\geq \delta\|u_1\|+\delta\|u_2\|\\ &= \delta\|(u_1,u_2)\|,\end{aligned}$$
donc
$$\alpha(u_1,u_2)\geqslant\delta\|(u_1,u_2)\|.$$
Par conséquent,
$$\alpha(u_1,u_2)\leqslant\|(u_1,u_2)\|\leqslant\frac{1}{\delta}\alpha(u_1,u_2).$$

Nous présentons dans la suite des propriétés des opérateurs A, T et T^*

Lemme 3.3.2. [34] Soit $A: K\longrightarrow X$ un opérateur complètement continu .

Preuve.
A est un opérateur complètement continu implique que A est continu et tout borné de K est relativement compact de X.
étape1 : Montrons que A est continu

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite des éléments de K tel que $U_n = (u_n^1, u_n^2)$, où $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} U$ tel que $U = (u^1, u^2)$, montrons que

$$\|A_i(U_n) - A_i(U)\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0; \quad i = 1, 2.$$

On a

$$U_n \underset{n\to\infty}{\to} U \Rightarrow \begin{cases} u_n^1 \underset{n\to+\infty}{\to} u^1 \\ u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\to} u^2 \end{cases}$$

alors

$$|A_i(U_n)(t) - A_i(U)(t)| \leqslant \int_0^1 H_i(t,s)\,|f_i(s,U_n) - f_i(s,U)|\,ds$$

sachant que

$$H_i(t,s) = G(t,s) + \frac{t\displaystyle\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1 - \displaystyle\int_0^1 sg_i(s)ds}, \quad i = 1, 2.$$

Et

$$G(t,s) < 1, \quad \forall t, s \in [0,1].$$

D'après $(H2)$ on a

$$1 - \int_0^1 sg_i(s)ds > 0, \quad i = 1, 2$$

Et puisque $G(r,s) < 1$ et $g_i(r) \in L^1[0,1]$ alors

$$\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr < \infty, \quad i = 1, 2$$

i.e $\exists M_1$ une constante tel que

$$\frac{t\displaystyle\int_0^1 g_i(r)G(r,s)dr}{1 - \displaystyle\int_0^1 sg_i(s)ds} < M_1, \quad i = 1, 2,$$

donc

$$H_i(t,s) < 1 + M_1 = M_2, \quad i = 1, 2.$$

D'autre part $f_i(s,U)$; $i = 1, 2$ est continue par rapport à U alors

$$\|f_i(U_n) - f_i(U)\| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0; \quad i = 1, 2.$$

D'où

$$\begin{aligned}\|A_i(U_n) - A_i(U)\| &\leqslant M_2\,\|f_i(U_n) - f_i(U)\| \int_0^1 ds \\ &\leqslant M_2\|f_i(U_n) - f_i(U)\|\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|A_i(U_n) - A_i(U)\| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0; \quad i = 1, 2.$$

Donc A est un opérateur continu.

étape 2 : Montrons que l'image d'un borné par l'opérateur A est borné .

Soit $B \subset K$ un borné alors $\exists r > 0$ tel que $\forall U \in B$, On a $\|U\| \leqslant r$.
Comme la fonction f est continue alors $\exists C_1 > 0$ tel que $\forall U \in B$ on a $|f_i(s, U| < C_1$, $i = 1, 2$ et puisque $H(t, s) < M_2$.
On a

$$\begin{aligned} |A_i(U)(t)| &= \left| \int_0^1 H_i(t,s) f_i(s,U) ds \right| \\ &\leqslant \int_0^1 H_i(t,s) |f_i(s,U)| ds \\ &\leqslant M_2 C_1 \int_0^1 ds \\ &= M_2 C_1 \end{aligned}.$$

Ce qui implique que $A_i(B)$ est borné.

étape 3 : Montrons que $A_i(B)$ est un ensemble équicontinue i.e :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$,

$$|t_2 - t_1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |A_i(u_1, u_2)(t_2) - A(u_1, u_2)(t_1)| < \varepsilon, \quad \forall (u_1, u_2) \in B$$

$$|A_i(u_1, u_2)(t_2) - A_i(u_1, u_2)(t_1)| \leqslant | \int_0^1 |f_i(s, u_1, u_2)| \, |H_i(t_2, s) - H_i(t_1, s)| ds$$

puis

$$|H_i(t_2, s) - H_i(t_1, s)| \leqslant |G(t_2, s) - G(t_1, s)| + |t_2 - t_1| \frac{\int_0^1 g_i(r) G(r, s) dr}{1 - \int_0^1 s g_i(s) ds}$$

La continuité de la fonction de Green nous donne :

$$|G(t_2, s) - G(t_1, s)| \underset{t_2 \to t_1}{\to} 0$$

Puisque

$$|f_i(s, U| < C_1, \quad i = 1, 2$$

et

$$\frac{\int_0^1 g_i(r) G(r, s) dr}{1 - \int_0^1 s g_i(s) ds} < M_2.$$

Alors

$$|A_i(u_1, u_2)(t_2) - A_i(u_1, u_2)(t_1)| \underset{t_2 \to t_1}{\to} 0 .$$

Donc $A(B)$ est un ensemble équicontinue et d'après le Lemme d'A'scoli Arzéla 1.1.1 l'ensemble $A_i(B)$ est relativement compact et par suite A est un opérateur complètement continu.

Lemme 3.3.3. [34] Si $A : K \to X$ est complètement continu alors $T = (\theta \circ A)$ est un opérateur complètement continu.

Preuve.
$(\theta \circ A)$ est un opérateur complètement continu implique que $(\theta \circ A)$ est continu et tout borné de K est relativement compact de K.
étape 1 : Montrons que $(\theta \circ A)$ est continu i.e $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ tel que,

$$\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| < \eta \Rightarrow \|(\theta \circ A)(x_1, y_1) - (\theta \circ A)(x_2, y_2)\| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
&\|(\theta \circ A)(x_1, y_1) - (\theta \circ A)(x_2, y_2)\| \\
&= \| (\max\{A_1(x_1, y_1), 0\} - \max\{A_1(x_2, y_2), 0\}, \\
&\quad \max\{A_2(x_1, y_1), 0\} - \max\{A_2(x_2, y_2), 0\}) \| \\
&\leqslant \|(A_1(x_1, y_1) - A_1(x_2, y_2), A_2(x_1, y_1) - A_2(x_2, y_2))\| \\
&= \|(A(x_1, y_1) - A(x_2, y_2))\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

on a $\|(\theta \circ A)(x_1, y_1) - (\theta \circ A)(x_2, y_2)\| < \varepsilon,$ pour $\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| < \eta.$
Donc $(\theta \circ A)$ est un opérateur continu dans K.

étape 2 : Montrons que l'image d'un borné par l'opérateur $(\theta \circ A)$ est borné

Soit $D \subset K$ est un ensemble Borné $\forall \varepsilon > 0, \exists P_i = (x_i, y_i) \in X,\ \ i = 1, 2, ...m$ telle que

$$AD \subset \cup_{i=1}^{m} B(P_i, \varepsilon),$$

où

$$B(P_i, \varepsilon) := \{(u_1, u_2) \in K : \|u_1 - x_i\| + \|u_2 - y_i\| < \varepsilon\}.$$

alors

$$\forall Q^* = (x^*, y^*) \in (\theta \circ A)(D),\ \exists Q = (x_Q, y_Q) \in AD.$$

telle que

$$(x_Q^*, y_Q^*) = (\max\{x_Q, 0\}, \max\{y_Q, 0\}).$$

On choisi $P_i \in \{P_1, P_2, ...P_m\}$, telle que

$$\|x_Q - x_i\| + \|y_Q - y_i\| < \varepsilon.$$

De puis

$$\|x_Q^* - x_i^*\| + \|y_Q^* - y_i^*\| \leqslant \|x_Q - x_i\| + \|y_Q - y_i\| < \varepsilon.$$

On a $Q(x_Q^*, y_Q^*) \in B(P_i^*, \varepsilon)$, donc $(\theta \circ A)(D)$ est bornée .

étape 3 : Montrons que l'ensemble $(\theta \circ A)(D)$ est équicontinue i.e :

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall t_1, t_2 \in [0,1] \; tq \; t_2 > t_1$ on a ,

$$|t_2 - t_1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |(\theta \circ A)(x_1, x_2)(t_2) - (\theta \circ A)(x_1, x_2)(t_1)| < \varepsilon, \; \forall (x_1, x_2) \in D$$

$$\begin{aligned}
&|(\theta \circ A)(x_1, x_2)(t_2) - (\theta \circ A)(x_1, x_2)(t_1)| \\
&= |(\max\{A_1(x_1, x_2)(t_2), 0\} - \max\{A_1(x_1, x_2)(t_1), 0\}, \\
&\quad \max\{A_2(x_1, x_2)(t_2), 0\} - \max\{A_2(x_1, x_2)(t_1), 0\})|, \\
&\leqslant |A_1(x_1, x_2)(t_2) - A_1(x_1, x_2)(t_1), A_2(x_1, x_2)(t_2) - A_2(x_2, y_2)(t_1)| \\
&= |(A(x_1, x_2)(t_2) - A(x_1, x_2)(t_1))| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble $(\theta \circ A)(D)$ est équicontinue, d'après le Lemme d'Ascoli Arzéla 1.1.1 $(\theta \circ A)$ relativement compact. D'où $(\theta \circ A)(x_1, x_2)$ est complètement continu.

Lemme 3.3.4. Soit $T^* : K \to K$ un opérateur complètement continu.

Preuve.
En utilisant la continuité de f et la définition de f^+, nous pouvons facilement montrer que T^* est complètement continu par le théorème d'Ascoli-Arzela 1.1.1.

Lemme 3.3.5. [34] si (u_1, u_2) est un point fixe de T, alors (u_1, u_2) est un point fixe de A.

Preuve.
Supposons que (u_1, u_2) est un point fixe de T, évidement nous juste le besoin de montrer que

$$A_i(u_1, u_2) \geqslant 0, i = 1, 2 \; pour \; t \in [0,1].$$

Par absurde, $\exists t_0 \in (0,1)$ et $\forall i (i = 1, 2)$ tel que $u_i(t_0) = T_i(u_1, u_2)(t_0) = 0$ mais $A_i(u_1, u_2)(t_0) < 0$.
Soit $i = 1$ et par la continuité de A_1, il existe un voisinage de t_0 tel que $A_i(u_1, u_2)(t) < 0$.
Soit (t_1, t_2) l'intervalle maximal qui contient t_0 tel que $A_1(u_1, u_2)(t) < 0 \; \forall t \in (t_1, t_2)$
Pour $(t_1, t_2) \neq (0, 1)$ et $A_1(u_1, u_2)(t_i) = 0$
où bien $T_1(u_1, u_2)(t) = u_1(t) = 0 \; \forall t \in (t_1, t_2)$.
cas i : Si $t_2 < 1$, on a $A_1(u_1, u_2)(t_2) = 0$. Ainsi, $A_1'(u_1, u_2)(t_2) \geqslant 0$.
On obtient

$$A_1''(u_1, u_2)(t) = -f(t, 0, u_2) \leqslant 0, \quad pour \; t \in (t_1, t_2)$$

Donc

$$A_1'(u_1, u_2)(t) \geqslant 0, \quad pour \; t \in [t_1, t_2].$$

On obtient $t_1 = 0$ et $A'{}_1(u_1, u_2)(0) \geqslant 0$, *donc* $A_1(u_1, u_2)(0) < 0$, est une contradiction avec $A_1(u_1, u_2)(0) = 0$.
cas ii : Si $t_1 > 0$, on a $A_1(u_1, u_2)(t_1) = 0$. Ainsi $A_1'(u_1, u_2)(t_1) \leqslant 0$. On obtient

$$A_1''(u_1, u_2)(t) = -f_1(t, 0, u_2) \leqslant 0, \quad pour \; t \in (t_1, t_2)$$

Donc

$$A_1'(u_1,u_2)(t) \leqslant 0, \quad pour \quad t \in [t_1,t_2].$$

On obtient $t_2 = 1, \quad A_1'(u_1,u_2)(1) \leqslant 0$.
D'autre part, $A_1(u_1,u_2)(t) < 0$, pour $t \in (t_1,t_2)$, $A_1'(u_1,u_2)(1) \leqslant 0$ cela implique que $A_1(u_1,u_2)(1) < 0$. Par $(H1)$, $A_1(u_1,u_2)(1) = \int_0^1 g_1(s)u_1(s)ds \geqslant 0$, est une contradiction.

Lemme 3.3.6. [34] (u_1,u_2) est une solution du problème (3.1) si et seulement si (u_1,u_2) est un point fixe de l'opérateur A.

3.3.2 Existence et multiplicité

Par l'application du Théorème 2.4.3, nous montrons l'existence d'au moins deux solutions positives pour le problème aux limites (3.1).
Notre résultat est formulé comme suit :

On note

$$M_i = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 H_i(t,s)ds, \quad m_i = \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \int_\delta^{1-\delta} H_i(t,s)ds, \quad i = 1,2$$

Théorème 3.3.1. [34] Supposons que les conditions $(H1)-(H3)$ sont vérifiées et il existe des nombres positives $\delta, a, b, \lambda_i, \mu_i, \ i = 1,2$ tel que $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $0 < a < \delta b < b$, $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$, $\mu_1 + \mu_2 > 1$ avec f satisfait les conditions suivantes :

$(H4)$ $f_i(t,u_1,u_2) \geqslant 0$, pour $t \in [0,1]$, $u_1 + u_2 \in [0,b]$;
$(H5)$ $f_i(t,u_1,u_2) < \frac{\lambda_i a}{M_i}$, pour $t \in [0,1]$, $u_1 + u_2 \in [0,a]$;
$(H6)$ $f_i(t,u_1,u_2) \geqslant \frac{\mu_i \delta b}{m_i}$, pour $t \in [\delta, 1-\delta]$, $u_1 + u_2 \in [\delta b, b]$;

Alors le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives (u_1,u_2) et (u_1^*,u_2^*) telles que

$$0 \leqslant \|(u_1,u_2)\| < a < \|(u_1^*,u_2^*)\|, \ \alpha(u_1^*,u_2^*) < \delta b.$$

Preuve.
$\forall (u_1,u_2) \in \partial K_a, \quad pour \quad (H5) \quad on\ a$

$$\begin{aligned}
\|T_i(u_1,u_2)\| &= \max_{t\in[0,1]} (\int_0^1 H_i(t,s) f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds)^+ \\
&= \max_{t\in[0,1]} \max\{\int_0^1 H_i(t,s) f_i(s,u_1(s),u_2(s))ds, 0\} \\
&< \frac{\lambda_i a}{M_i} \max_{t\in[0,1]} (\int_0^1 H_i(t,s)ds \\
&= \frac{\lambda_i a}{M_i} M_i \\
&= \lambda_i a.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|T(u_1,u_2)\| &= \|T_1(u_1,u_2)\| + \|T_2(u_1,u_2)\| \\
&\leqslant \lambda_1 a + \lambda_2 a \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2) a \leqslant a \quad car\ \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Donc la condition (C1) du Théorème (2.4.3) est satisfaite .
Pour $(u_1, u_2) \in \partial K'_a$ et de $(H5)$ on a

$$\begin{aligned} \|T_i^*(u_1,u_2)\| &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 H_i(t,s) f_i^+(s,u_1(s),u_2(s))ds \\ &< \frac{\lambda_i a}{M_i} \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 H_i(t,s)ds \\ &= \frac{\lambda_i a}{M_i} M_i \\ &= \lambda_i a. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \|T^*(u_1,u_2)\| &= \|T_1^*(u_1,u_2)\| + \|T_2^*(u_1,u_2)\| \\ &= \lambda_1 a + \lambda_2 a \\ &= (\lambda_1+\lambda_2)a \leqslant a \quad car \lambda_1+\lambda_2 \leqslant 1. \end{aligned}$$

Pour $(u_1, u_2) \in \partial K'(\delta b)$, i.e $\alpha(u_1,u_2) = \delta b$, pour $t \in [\delta, 1-\delta]$ et par le Lemme 3.4.1 on a

$$\alpha(u_1,u_2) \leqslant \|(u_1,u_2)\| \leqslant \frac{1}{\delta}\alpha(u_1,u_2)$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha(u_1,u_2) \leqslant u_1(t)+u_2(t) &\quad \Rightarrow \delta b \leqslant u_1(t)+u_2(t) \\ u_1(t)+u_2(t) \leqslant \|(u_1,u_2)\| &\quad \Rightarrow u_1(t)+u_2(t) \leqslant \frac{1}{\delta}\delta b = b. \end{aligned}$$

i.e :

$$\delta b \leqslant u_1(t)+u_2(t) \leqslant b.$$

Pour $(H6)$ on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(T^*(u_1,u_2)) &= \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 H_i(t,s) f_1^+(s,u_1(s),u_2(s))ds \\ &\quad + \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 H_i(t,s) f_2^+(s,u_1(s),u_2(s))ds \\ &\geqslant \min_{t\in[0,1]} \int_\delta^{1-\delta} H_i(t,s) f_1^+(s,u_1(s),u_2(s))ds \\ &\quad + \min_{t\in[0,1]} \int_\delta^{1-\delta} H_i(t,s) f_2^+(s,u_1(s),u_2(s))ds \\ &\geqslant \frac{\mu_1\delta b}{m_1} \min_{t\in[0,1]} \int_\delta^{1-\delta} H_i(t,s)ds + \frac{\mu_2\delta b}{m_2} \min_{t\in[0,1]} \int_\delta^{1-\delta} H_i(t,s)ds \\ &= \mu_1\delta b + \mu_2\delta b > \delta b \quad (car \quad \mu_1+\mu_2 > 1). \end{aligned}$$

Donc (C2) du Théorème 2.4.3 est satisfaite.

Finalement, on va montrer que la condition (C3) du Théorème 2.4.3 est satisfaite.
Soit $(u_1,u_2) \in K'_a(\delta b) \cap \{(u_1,u_2) : T^*(u_1,u_2) = (u_1,u_2)\}$, on a

$$\alpha(u_1,u_2) < \delta b, \ \|(u_1,u_2)\| > a.$$

De Lemme 3.4.1, on a

$$\|(u_1,u_2)\| \leqslant \frac{1}{\delta}\alpha((u_1,u_2)) < \frac{1}{\delta}\delta b,$$

d'où

$$\|(u_1, u_2)\| < b,$$

et

$$0 \leqslant u_1(t) + u_2(t) < b.$$

De $(H4)$ on obtient

$$f_i^+(s, u_1(s), u_2(s)) = f_i(s, u_1(s), u_2(s)).$$

Alors $T(u_1, u_2) = T^*(u_1, u_2)$, pour

$$(u_1, u_2) \in K'_a(\delta b) \cap \{(u_1, u_2) : T^*(u_1, u_2) = (u_1, u_2)\}.$$

Par le Théorème 2.4.3 et le Lemme 3.3.5, on déduire que le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives (u_1, u_2) et (u_1^*, u_2^*) tels que

$$0 \leqslant \|(u_1, u_2)\| < a < \|(u_1^*, u_2^*)\|, \; \alpha(u_1^*, u_2^*) < b.$$

3.3.3 Exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple pour illustrer notre résultat théorique.

Considérons le problème aux limites d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} u_1''(t) + f_1(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\ u_2''(t) + f_2(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\ u_1(0) = u_2(0) = 0 \\ u_1(1) = \int_0^1 g_1(s)u_1(s)ds, u_2(1) = \int_0^1 g_2(s)u_2(s)ds \end{cases}$$

Où

$$f_1(t, u_1, u_2) = Q(t) \begin{cases} \frac{1}{42}(u_1 + u_2 + 1)(u_1 + u_2 + 2) & 0 \leq u_1 + u_2 \leq 5, \\ (-4 + u_1 + u_2)^2 & 5 \leq u_1 + u_2 \leq 100, \\ 9216[\sin(u_1 + u_2 - 10)] & u_1 + u_2 \geq 100. \end{cases}$$

Et

$$f_2(t, u_1, u_2) = Q(t) \begin{cases} \frac{1}{36}(u_1 + u_2 + 1)^2 & 0 < u_1 + u_2 \leq 5, \\ [2(u_1 + u_2) - 9]^2 & 5 \leq u_1 + u_2 \leq 100, \\ (191)^2[\sin(u_1 + u_2 - 10)] & u_1 + u_2 \geq 100. \end{cases}$$

Soit $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue défini sur $[0; 1]$, par

$$Q(t) = \frac{1}{8}t.$$

$\forall i = 1,2,\ f_i$ est positive sur $[0,100]$ et change de signe sur $[100,+\infty)$.
Soit

$$a = 5,\ b = 100,\ \delta = \frac{1}{5}$$

pour $\lambda_1 = \frac{2}{5},\ \mu_1 = \frac{16}{10},\ M_1 = 8,\ m_1 = 5$, il est facile de voir que

$$f_1(t,u_1,u_2) \geq 0 \textit{ pour tout } u_1 + u_2 \in [0,100],\ \forall t \in [0,1],$$

$$f_1(t,u_1,u_2) < \frac{2}{8} \textit{ pour tout } u_1 + u_2 \in [0,5],\ \forall t \in [0,1],$$

$$f_1(t,u_1,u_2) \geq \frac{32}{5} \textit{ pour tout } u_1 + u_2 \in [20,100],\ \forall t \in \left[\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right].$$

Pour $\lambda_2 = \frac{3}{5},\ \mu_2 = 4.8,\ M_2 = 8,\ m_2 = 4$, il est claire que

$$f_2(t,u_1,u_2) \geq 0 \textit{ pour tout } u_1 + u_2 \in [0,100],\ \forall t \in [0,1],$$

$$f_2(t,u_1,u_2) < \frac{3}{8} \textit{ pour tout } u_1 + u_2 \in [0,5],\quad \forall t \in [0,1],$$

$$f_2(t,u_1,u_2) \geq 24 \textit{ pour tout } u_1 + u_2 \in [20,100],\ \forall t \in \left[\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right].$$

Donc les conditions du Théorème 3.3.1 sont vérifiées et par suite le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives.

3.4 Application du théorème de Leggett-William

3.4.1 Formulation théorique du problème

Pour préparer l'application du Théorème 2.5.1, nous prouvons quelques lemmes permettant de vérifier toutes les conditions du théorème.
Définissons l'ensemble K dans X par :

$$K = \{(u_1,u_2) \in X : u_i \geqslant 0,\quad i = 1,2\}.$$

On a K un cône dans X.
Et nous définissons les opérateurs suivantes :
Soit $T_i : \overline{K}_c \to \overline{K}_c,\quad i = 1,2$ est définie par

$$T_1(u_1,u_2)(t) = \left(\int_0^1 H_1(t,s) f_1(s,u_1(s),u_2(s))ds\right)^+,\quad t \in [0,1],$$

$$T_2(u_1,u_2)(t) = \left(\int_0^1 H_2(t,s) f_2(s,u_1(s),u_2(s))ds\right)^+,\quad t \in [0,1],$$

$$T(u_1,u_2)(t) = (T_1(u_1,u_2)(t), T_2(u_1,u_2)(t)).$$

Soit $A_i : \overline{K}_c \to X,\ i = 1,2$ définie par

$$A_1(u_1,u_2)(t) = \int_0^1 H_1(t,s) f_1(s,u_1(s),u_2(s))ds,\quad t \in [0,1],$$

$$A_2(u_1,u_2)(t) = \int_0^1 H_2(t,s)f_2(s,u_1(s),u_2(s))ds, \quad t \in [0,1],$$
$$A(u_1,u_2)(t) = (A_1(u_1,u_2)(t), A_2(u_1,u_2)(t)).$$

Pour $(u_1,u_2) \in X$, définie $\theta : X \to \overline{K}_c$ par

$$\theta(u_1,u_2)(t) = (\max\{u_1(t),0\}, \max\{u_2(t),0\}).$$

Nous avons,

$$T = \theta \circ A.$$

Lemme 3.4.1. [34] Soit $\phi : K \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\phi(u_1,u_2) = \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_1(t) + \min_{\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta} u_2(t).$$

Alors ϕ est une fonction continue concave vérifiant

$$\phi(u_1,u_2) \leqslant \|(u_1,u_2)\|.$$

Par les Lemmes 3.3.2, 3.3.6, 3.3.3 et 3.3.5 nous avons les résultats suivants :

Lemme 3.4.2. $A : \overline{K}_c \to X$ un opérateur complètement continu.

Lemme 3.4.3. Si $A : K \to X$ complètement continue alors $T = \theta \circ A : \overline{K}_c \to \overline{K}_c$ est complètement continu.

Lemme 3.4.4. Si (u_1,u_2) est un point fixe de T, alors (u_1,u_2) est un point fixe de A.

Lemme 3.4.5. (u_1,u_2) est une solution du problème (3.1) si et seulement si (u_1,u_2) est un point fixe de l'opérateur A.

3.4.2 Existence et multiplicité

Par l'application du Théorème 2.5.1, nous montrons l'existence d'au moins trois solutions positives pour le problème aux limites (3.1).
Notre résultat est formulé comme suit :

Théorème 3.4.1. [34] On suppose que les conditions $(H1)-(H3)$ sont vérifiées. Il existe $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $a, b, \lambda_i, \mu_i > 0$, $i = 1,2$, tels que $0 < a < \delta b < b$, $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$, $\mu_1 + \mu_2 > 1$, et $(H5), (H6)$ sont vérifiées avec f satisfait les conditions suivantes :

$(H7)$ $f_i(t,u_1,u_2) \geqslant 0$, pour $t \in [0,1]$, $u_1 + u_2 \in [\delta b, b]$.
$(H8)$ $f_i(t,u_1,u_2) \leqslant \frac{\lambda_i b}{M_i}$, pour $t \in [0,1]$, $u_1 + u_2 \in [0,b]$.

Alors (3.1) admet au moins trois solutions positives (u_1,u_2), (u_1^*,u_2^*), (u_1^{**},u_2^{**}), tels que

$$0 \leqslant \|(u_1,u_2)\| < a < \|(u_1^{**},u_2^{**})\|, \quad \phi(u_1^*,u_2^*) > b, \quad \phi(u_1^{**},u_2^{**}) < b.$$

Preuve.
Premièrement nous montrons que la condition (C4) du Théorème 2.5.1 est satisfaite
Il est claire que

$$\{(u_1,u_2) \in K(\phi,\delta b,b) : \phi(u_1,u_2) > \delta b\} \neq \emptyset.$$

On suppose que $(u_1, u_2) \in K(\phi, \delta b, b)$, pour tout $t \in [\delta, 1-\delta]$ on a

$$\delta b \leqslant u_1 + u_2 \leqslant b.$$

Pour $(H6)$ et $(H7)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\phi(T(u_1,u_2)) &= \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \left(\int_0^1 H_1(t,s) f_1(s,u_1(s),u_2(s))ds \right)^+ \\
&\quad + \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \left(\int_0^1 H_2(t,s) f_2(s,u_1(s),u_2(s))ds \right)^+ \\
&= \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \int_0^1 H_1(t,s) f_1(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&\quad + \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \int_0^1 H_2(t,s) f_2(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&\geqslant \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \int_\delta^{1-\delta} H_1(t,s) f_1(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&\quad + \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \int_\delta^{1-\delta} H_2(t,s) f_2(s,u_1(s),u_2(s))ds \\
&\geqslant \frac{\mu_1 \delta b}{m_1} \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \int_\delta^{1-\delta} H_1(t,s)ds + \frac{\mu_2 \delta b}{m_2} \min_{t\in[\delta,1-\delta]} \int_\delta^{1-\delta} H_2(t,s)ds \\
&= \mu_1 \delta b + \mu_2 \delta b \\
&> \delta b.
\end{aligned}$$

Pour tout $u_1 + u_2 \in [0, a]$, pour $(H5)$ et le Théorème 3.3.1, la condition (C5) du Théorème 2.5.1 est satisfaite.

Finalement, pour $(u_1, u_2) \in K(\phi, \delta b, b)$ et $\|T(u_1,u_2)\| > b$, il est facile de montrer que

$$\phi(T(u_1,u_2)) \geqslant \delta \|T(u_1,u_2)\| > \delta b.$$

Alors la condition (C6) du Théorème 2.5.1 est satisfaite.

Donc d'après le Théorème 2.5.1 et le Lemme 3.4.4, Le problème (3.1) admet au moins trois solutions positives (u_1, u_2), (u_1^*, u_2^*), (u_1^{**}, u_2^{**}), tels que

$$0 \leqslant \|(u_1,u_2)\| < a < \|(u_1^{**}, u_2^{**})\|, \quad \phi(u_1^*, u_2^*) > b, \quad \phi(u_1^{**}, u_2^{**}) < b.$$

3.4.3 Exemple

Nous proposons l' exemple suivant, en considérant une valeur spécifique de f_i. Précisément soit le problème aux limites d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases}
u_1''(t) + f_1(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\
u_2''(t) + f_2(t, u_1(t), u_2(t)) = 0 \\
u_1(0) = u_2(0) = 0 \\
u_1(1) = \int_0^1 g_1(s) u_1(s) ds, u_2(1) = \int_0^1 g_2(s) u_2(s) ds
\end{cases}$$

Avec

$$f_1(t, u_1, u_2) = L(t) \begin{cases}
\dfrac{16 - \sqrt{(u_1+u_2)}}{8} & 0 \leq u_1 + u_2 \leq 16, \\
\dfrac{3}{2}\cos(u_1 + u_2 - 16) & u_1 + u_2 \geq 16,
\end{cases}$$

Et,

$$f_2(t,u_1,u_2) = L(t)\begin{cases} \dfrac{(u_1+u_2)^2}{64} & 0 < u_1+u_2 \leq 16, \\ \\ 4\cos(u_1+u_2-16) & u_1+u_2 \geq 16, \end{cases}$$

Soit, $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue défini sur $[0;1]$, par

$$L(t) = \frac{1}{9}t.$$

$\forall i = 1,2,\ f_i$ est positive sur [0,16] et change de signe sur $[16,+\infty)$.
Soit

$$a = 2,\ b = 16,\ \delta = \frac{1}{4}$$

pour $\lambda_1 = \frac{1}{8},\ M_1 = 9$, il est facile de voir que

$$f_1(t,u_1,u_2) \geq 0 \textit{ pour tout } u_1+u_2 \in [4,16],\ \forall t \in [0,1],$$

$$f_1(t,u_1,u_2) \leq \frac{2}{9} \textit{ pour tout } u_1+u_2 \in [0,16],\ \forall t \in [0,1].$$

Pour $\lambda_2 = \frac{1}{4},\ M_2 = 9$, il est claire que

$$f_2(t,u_1,u_2) \geq 0 \textit{ pour tout } u_1+u_2 \in [4,16],\ \forall t \in [0,1],$$

$$f_2(t,u_1,u_2) \leq \frac{4}{9} \textit{ pour tout } u_1+u_2 \in [0,16],\ \ \forall t \in [0,1].$$

Donc les conditions du Théorème 3.4.1 sont vérifiées, alors le problème (3.1) admet au moins trois solutions positives.

Conclusion et perspective

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié l'existence et la multiplicité de solutions positives du problème aux limites avec des conditions intégrales associée à des equations différentielles d'ordre 2 et ceci dans le cas où la non-linéarité changent de signe.
Les résultats d'existence et de multiplicité sont prouvés en appliquant une méthode topologique basée sur deux théorèmes du point fixe :

1. Le théorème de Krasnosel'skii dans double cônes
2. Le théorème de Legget-Williams

perspective

Les problèmes aux limites avec des conditions intégrales décrivent beaucoup de phénomènes dans la science appliquée et ils sont utilisés dans divers domaines comme la chimie, biologie,..... etc.
Dans la pratique, seules les solutions positives peuvent être utiles car elles correspondent à des paramètres mesurables telles que la température, la densité... , sont des paramètres qui sont utilisés dans les différentes lois de la physique.
Montrer l'existence d'une solution, qui est de plus positive à ces problèmes se ramène à entrevoir de nombreuses perspectives à notre travail :

- considérer un autre problème mais avec des conditions périodiques

- Problème singulier du second ordre en présence d'impulsions .

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, Nonlinear superlinear singular and nonsingular second order boundary value problems, J. Differential Equations 143 (1998) 60–95.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan, Singular boundary value problems, Nonlinear Anal. 27 (1996) 645–656.

[3] R.P. Agarwal, D. O'Regan, Twin solutions to singular Dirichlet problems, J. Math. Anal. Appl. 240 (1999) 433–445.

[4] R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He, Existence of fractional neutral functional differential équations, Comput. Math. Appl. 59 (3) (2010), 1095-1100.

[5] C. Aslangul, Des mathématiques pour les science 2 :Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes,Bruxelles :De boeck,2013.

[6] R.I.Avery and A.C.Peterson, Three positive fixed points of nonlinear operators in ordered Banach spaces, Comput. Math. Appl., 42 (2001), 313-322.

[7] A.Bahri-H.Berestycki, Existence of Forced oscillations for some nonlinear differential equations, Comm.Pure Appl. Math. 37 (1984), 403-442.

[8] C. S. Barroso, "Krasnoselskii's fixed point theorem for weakly continuous maps", Nonlinear Anal., 55(2003), p. 25-31.

[9] C. S. Barroso, E. V. Teixeira, "topological and geometric approach to fixed points, results for sum of operators and applications", Nonlinear Anal., 60 (2005), p. 625-650.

[10] A.Boucherif, Second-order boundary value problems with integral boundary conditions, Nonlinear Analysis, 70(2009) 364-371.

[11] T. Burton, "A fixed-point theorem of Krasnoselskii", Appl. Math. Lett, 70(2009), p. 364- 371.

[12] G.L. Cain, M. Z. Nashed, "Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces", Pacic J. Math., 39 (1971), p. 581-592.

[13] J.R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math. 21 (2) (1963) 155–160.

[14] Y. Chen, B. Yan, L. Zhang ; Positive solutions for singular three-point boundary-value problems with sign changing nonlinearities depending on x', Electronic Journel of Differential Equations, 63(2007) 1-9.

[15] C.D. Coster and P.Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary values problems : classical and recent results, Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, F.Zanolin, ed., CISM Courses and Lectures, Vol 371, Springer-Verlag, New York (1996) 1-79.

[16] J.Cronin, Fixed Points and Topological Degree in nonlinear Analysis, Mathematical Surveys, no. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, USA (1964).

[17] G. Dajun, S. jingxian, L. Zhaoli ; Functional method for nonlinear ordinary differential equation, seconded, Shandong science and technology press, Jinan, 2006(in Chinese).

[18] N. Daoudi-Merzaguia, Y. Tabetb, Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem with sign changing nonlinearities,Filomat(2013).

[19] J. Dugundji, "An extension of Tietze theorem", Pacific J. Math., 1(1951), p. 353-367.

[20] M.Feng, D. Ji, W. Ge ; Positive solutions for a class of boundary-value problem with integral boundary conditions in Banach spaces, Journal of Computational and Applied Mathematics, 22(2008) 351-363.

[21] D. Guo, V. Lakshmikantham, "Nonlinear problems in abstract cones", Academic press, San Diego, CA, 1988.

[22] J. K. Hale and S. Verduyn, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[23] N. Ionkin, Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differential Equations 13 (1977) 294–304.

[24] M.A. Krasnoselskii, "Translation Along Trajectories of Differential Equations", Amer. Math. Soc, Providence., 1968.

[25] M. K. Kwong, On Krasnoselskii's Cone Fixed Point Theorem, Fixed Point Theory and Applications, 2008(2008), p. 1-18.

[26] J. Leray & J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci, Ecole. Norm. Sup. 51(1934) ; 45 - 78.

[27] B. Liu ; Positive solutions of second-order three-point boundary value problems with changing sign, Computers and Mathematics with Applications, 47(2004) 1351-1361.

[28] H. Lv, H.Yu, Yansheng Liu ; Positive solutions for singular boundary value problems of a coupled system of differential equations, J. Math. Anal. Appl, 302(2005) 14-29.

[29] J.Mawhin-M.Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, Springer Verlag, New York (1989).

[30] E.Outerelo, Mapping degree theory. Amerecan Mathematical Soc,1939.

[31] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[32] Y. Sun ; Nontrivial solution for a three-point boundary-value problem, Electronic Journel of Differential Equations, 111(2004) 1-10.

[33] J. Sun, J. Weei ; Exestence of positive solution for semipositone second-order three-point boundary -value problems, Electronic Journel of Differential Equations, 41(2008) 1-7.

[34] S.Xi, M.jia, H.Ji, Multiple nonnegative solutions for second-order boundary-value problems with sign-changing nonlinearities, Electronoc Journel of Differential Equations, 2009(2009),pp. 1-10.

[35] T. Xiang, R. Yuan, "A class of expansive-type Krasnoselskii fixed point theorems", Nonlinear. Anal., 71 (2009), p. 3229-3239.

[36] L. Xiping, J. Mei ; Multiple nonnegative solutions to boundary value problems with systems of delay functional differential equations, Chinese Journel of Engineering Mathematics, 25(2008) 4, 685-691.

[37] Yang ; Positive solutions to a system of second-order nonlocal boundary value problems, Nonlinear Analysis, 62(2005) 1251-1265.

[38] G. Yangping, G. Weigao, D. Shijie ; Two positive solutions for second order three point boundary value problems with sign changing nonlinearities, Acta Mathematicae Applicate Sinica, 27(2004)3, 522-529(in chinese).

[39] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorems, Springer-Verlag, New york Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[40] Y. Zhou, Y. Xu ; Positive solutions of three-point boundary value problems for systems of nonlinear second order ordinary differential equations, J. Math. Anal. Appl, 320(2006) 578-590.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'existence et la multiplicité de solutions positives pour un problème aux limites, associé à des équations différentielles d'ordre 2, avec des non-linéarités changeant de signe.
La méthode utilisée est topologique : théorème de Krasnosel'skii (théorème du point fixe dans double cônes) et le théorème du point fixe de Legget-Williams.

Mots clés : Théorème du point fixe de Krasnosel'skii, cône, solution positive, problème aux limites, condition intégrale.

Abstarct

In this paper we prove the existence and the multiplicity of positive solutions for boundary value problem associated to differential equations of order 2, with sign-changing nonlinearities.
We use topological methods : Krasnoselskii(fixed point theorem in double cones) and the Leggett-Williams fixed point theorem.

Key words : Krasnosel'skii fixed point theorem, cone, positive solution, boundary value problem, integral condition, .