Université de Aïn Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Polycopié pédagogique

Kheira MEKHALFI

Titre

Equations Différentielles d’Ordre Fractionnaire

Cours et Exercices destiné aux étudiants de

2ème Année Master Mathématiques

Année : 2021-2022

Université de Aïn Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Polycopié pédagogique

Code :

Titre

Equations Différentielles d'Ordre Fractionnaire

Cours et Exercices destiné aux étudiants de

2ème Année Master Mathématiques

Année : 2021-2022

Avant-propos

Ce polycopié est le support du cours des *Équations Différentielles D'Ordre Fractionnaire* enseigné à l'université Belhadj Bouchaib d'Ain Témouchent pour les étudiants de deuxième année Master de mathématiques par Kheira Mekhalfi. Il a été transcrit tout au long de l'année et ne saurait en aucun cas remplacer le cours.

Ce document est très proche du cours enseigné, et excepté quelques infimes modifications, il retranscrit le cours tel qu'il a été donné à tous les étudiants.

Pour toutes remarques, suggestions ou corrections concernant ce document, merci de me contacter pour que je puisse modifier et corriger ce polycopié.

Auteur : K. Mekhalfi

Introduction

Au tournant de ce siècle, de nombreux simulateurs ont la conviction étrange que les équations différentielles décrivent tout ce qui se passe dans le monde réel. Cette approche de la modélisation peut donner lieu à des tentatives de modification de la réalité pour s'adapter aux outils de simulation, alors que la méthode correcte devrait être complètement opposée. Le défi consiste à rechercher de nouveaux outils ou à utiliser ceux qui sont connus depuis longtemps, mais qui sont simplement oubliés.
Les équations différentielles sont d'une grande importance car elles modélisent les performances de divers dispositifs mécaniques et électriques ainsi que le comportement des systèmes de contrôle automatique, comme nous voyons que l'incertitude inhérente à la modélisation du système dynamique conduit toujours à des équations différentielles en tant qu'outil mathématique correspondant.

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire jouent un rôle très important dans la description de certains problèmes du monde réel. Les ingénieurs trouvent dans les équations différentielles d'ordre fractionnaire un outil précieux pour la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science. En effet, on peut trouver de nombreuses applications en viscoélasticité, électrochimie, électromagnétique, etc.
La théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire a récemment reçu beaucoup d'attention et constitue aujourd'hui une branche importante de l'analyse non linéaire. Nombreux articles de recherche et de monographies ont paru et sont consacrés aux équations différentielles fractionnaires, voir par exemple Miller et Ross[13], Podlubny [16], Kilbas, Srivastava et Trujillo[10], Oldham et Spanier[14]. Dans une série de documents (voir [5, 6, 4, 12]) les auteurs ont considéré certaines classes de problèmes aux valeurs initiales

pour les équations différentielles fonctionnelles impliquant les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo.

Dans ce plycopié on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.
Notre travail est reparti en trois chapitres qui sont organisé selon le plan suivant :

Le premier chapitre intitulé "**Calcul Fractionnaire**", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles dans la suite de cette étude. Ce chapitre est partagé en trois sections :
La première section, présente un rappelle de quelques définitions et propriétés des fonctions spéciales (Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Liffler).
La deuxième section, est consacré aux intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo.
La troisième section, présente une série d'exercices corrigés pour le but d'enrichir le cours.

Le deuxième chapitre intitulé "**Équation différentielle d'ordre fractionnaire**", on traitera l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites pour les équations différentielle d'ordre fractionnaire suivant :

$$
\begin{gathered}
{}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \text{pour tout } \ t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \\
ay(0) + by(T) = c.
\end{gathered}
$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.
Ces résultats sont obtenus à l'aide des théorèmes du point fixe de Banach et de Leray-Schauder.
On termine par une série d'exercices corrigés.

Le Troisième chapitre intitulé "**Équation différentielle semi-linéaire d'ordre fractionnaire**", ce chapitre est partagé en quatres sections :
La première section, présente un rappelle de quelques définitions et propriétés de la théorie de C_0-semi-groupes.
La deuxième section, est consacré a l'étude des équations différentielles semi-linéaire de

type :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)),\ t \in J = [0, b] & ; \\ u(0) = u_0, & . \end{cases}$$

où $A : D(A) \subseteq E \to E$ est un opérateur densement défini, $f \in L^1(J, E)$ et $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.

La troisième section, est consacré a l'étude des équations différentielles semi-linéaire d'ordre fractionnaire de type :

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y(t)),\ t \in J = [0, b], 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

Avec A un opérateur linéaire fermé et non borné de E, $f \in C(J, E)$ et D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

La quatrième section, présente une série d'exercices corrigés pour enrichir le cours.

Chapitre 1

Calcul Fractionnaire

1.1 Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la différenciation et l'intégration ordinaire à l'ordre non-entier arbitraire réel ou complexe. On croit généralement que le concept de calcul fractionnel découle d'une question posée en 1695 par M. Hôpital (1661-1704) à G.Leibniz (1646-1716), qui cherchait le sens de celui de Leibniz actuellement populaire notation $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ pour la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sur la possibilité que n soit une fraction (Et si $n = \frac{1}{2}$?). Dans sa réponse, datée du 30 septembre 1695, Leibniz écrit à L'Hôpital comme suit : "Cela conduira à un paradoxe". Mais il a ajouté prophétiquement :

"De cet apparent paradoxe, des conséquences utiles d'un jour seront tirées."

De ces paroles là, on voit un développement important des équations différentielles fractionnaires ces dernières années.
Pour plus de détails sur l'interprétation géométrique et physique de la dérivation fractionnaire voir [17] on peut consulté aussi le site web http ://people.tuke.sk/igor.podlubny/, rédigé par Igor Podlubny.

1.2 Fonctions Spéciales

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler.

1.2.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est fonction d'Euler Gamma $\Gamma(z)$, qui généralise la factorielle $n!$ et permet n de prendre aussi les non entiers et même des valeurs complexes.
Nous allons rappeler quelques résultats sur la fonction Gamma.

Définition 1.2.1 *La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est généralement définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{1.1}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, si $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Proposition 1.2.1 *L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

En particulier :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma, est qu'elle a des pôles simples aux points $z = -n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Preuve. On démontre cette proposition par une intégration par partie de (1.1)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \;\; t^{(z+1)-1} \; dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \;\; t^{z} \; dt \\
&= \left[-e^{-t} \;\; t^z\right]_{+\infty}^{0} + z \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \;\; t^{z-1} \; dt}_{\Gamma(z)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \;\; t^{1-1} \; dt = 1.$$

et en utilisant (1.2), on obtient pour $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rclclcl}
\Gamma(2) & = & 1.\Gamma(1) & = & 1.1 & = & 1! \\
\Gamma(3) & = & 2.\Gamma(2) & = & 2.1! & = & 2! \\
\Gamma(4) & = & 3.\Gamma(3) & = & 3.2! & = & 3! \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\Gamma(n+1) & = & n.\Gamma(n) & = & n(n-1)! & = & n!.
\end{array}$$

Par conséquent

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

■

Proposition 1.2.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\ \sqrt{\pi}}{4^n\ \ n!}. \tag{1.3}$$

avec

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve. On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

En effet, On pose le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \quad \text{et} \quad dt = 2u\ du.$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\ du.$$

D'après l'intégral de Gauss on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Calculons maintenant (1.3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\,\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\left(n+\frac{3}{2}\right).\,\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\left(n+\frac{3}{2}\right)\ \ldots\ \frac{1}{2}.\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right).\left(\frac{2n-3}{2}\right)\ \ldots\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{1}{2^n}.(2n-1).(2n-3)\ \ldots\ 3.1.\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

En multipliant et divisant par $(2n-2).(2n-4)\ \ldots\ 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1).(2n-2)\ \ldots\ 3.2.1}{2^n.(2n-2).(2n-4)\ \ldots\ 2}.\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^n.2^{n-1}.(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}.(n-1)!}.
\end{aligned}$$

En multipliant et divisant par $2n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n.(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}.2n.(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{4^n\ n!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent (1.3) est prouvée. ■

Théorème 1.2.1 *La fonction Gamma est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t)^k \ dt.$$

1.2.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.2.2 *La fonction Bêta est définie par l'intégral d'Euler de seconde espèce*

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}\ (1-t)^{\omega-1}\ dt, \quad \mathfrak{Re}(z) > 0,\ \mathfrak{Re}(\omega) > 0. \tag{1.4}$$

Cette intégrale est convergente pour tout $z, \omega \in \mathbb{C}$ *si* $\mathfrak{Re}(z) > 0$ *et* $\mathfrak{Re}(\omega) > 0$.

Proposition 1.2.3 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0, \mathfrak{Re}(\omega) > 0. \tag{1.5}$$

D'où il résulte que Bêta est symétrique :

$$B(z,\omega) = B(\omega, z), \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0, \mathfrak{Re}(\omega) > 0.$$

Preuve. Soient $(z,\omega) \in \mathbb{C}^2$, avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$ et $\mathfrak{Re}(\omega) > 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{z-1}\ e^{-t}\ x^{\omega-1}\ e^{-x}\ dt\ dx$$

On effectue le changement de variable $r = t + x$

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^\infty t^{z-1}\Big[\int_0^\infty (r-t)^{\omega-1}\ e^{-r}\ dr\Big]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-r}\Big[\int_0^\infty t^{z-1}(r-t)^{\omega-1}\ dt\Big]dr \end{aligned}$$

On pose $t = rs$ et on aboutit à

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^\infty e^{-r} \int_0^1 r(1-s)^{\omega-1} r^{\omega-1} s^{z-1} r^{z-1}\ dsdr \\ &= \int_0^\infty e^{-r} r^{z+\omega-1} \int_0^1 (1-s)^{\omega-1} s^{z-1}\ dsdr \\ &= \int_0^\infty e^{-r} r^{z+\omega-1} dr B(z,\omega) \\ &= \Gamma(z+\omega)B(z,\omega) \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.4 *Pour tout* $p, q \in \mathbb{C}$ *;* $Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$ *on a les propriétés suivantes :*

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$

3. $B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$
4. $B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt$

Démonstration.

1.
$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\ (1-t)^{q-1}\ dt = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^q\ dt = B(q,p).$$

2.
$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)q\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{q}{p+q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{q}{p+q}B(p,q) \end{aligned}$$

on obtient
$$(p+q)B(p,q+1) = qB(p+q)$$

et ceci implique
$$\begin{aligned} B(p,q) &= \frac{p}{q}B(p,q+1) + B(p,q+1) \\ &= \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{q\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1) \\ &= \frac{p\Gamma(p)q\Gamma(q)}{q\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1) \end{aligned}$$

D'où
$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$$

3.
$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)q\Gamma(q)}{q\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q}{p}\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q}{p}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q}{p}B(p+1,q) \end{aligned}$$

D'où
$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$$

4. On a

$$B(p,q) = B(q,p) = \int_0^1 t^{q-1}\ (1-t)^{p-1}\ dt = \int_0^1 t^{q-1}t^{p-1}\big(\frac{1}{t}-1\big)^{p-1}\ dt.$$

Posons $\frac{1}{t}-1 = r \Rightarrow t = \frac{1}{r+1}$ et $dt = -t^2 dr$, donc

$$\begin{aligned} B(p,q) &= -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(r+1)^{p+q-2}}\frac{r^{p-1}}{(r+1)^2}dr \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{r^{p-1}}{(r+1)^{p+q}}dr \end{aligned}$$

D'où

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt$$

• Montrons que $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt$

on a $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\ (1-t)^{q-1}\ dt$, alors par le changement de variable

$$t = \sin^2\alpha \Rightarrow dt = 2\cos\alpha\sin\alpha d\alpha$$

Alors

$$\begin{aligned} B(p,q) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha)^{2p-2}(1-\sin^2\alpha)^{q-1}\cos\alpha\sin\alpha d\alpha \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha)^{2p-1}(\cos\alpha)^{2q-2}\cos\alpha d\alpha \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha)^{2p-1}(\cos\alpha)^{2q-1}d\alpha \end{aligned}$$

■

1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.2.3 *On appelle fonction de Mittag-Leffler la fonction définie par*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \qquad z\in\mathbb{C}, \alpha,\beta>0.$$

Pour $\beta = 1$

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad z\in\mathbb{C}, \alpha>0.$$

Et pour $\beta = 1, \alpha = 1$ *on a*

$$E_{1,1}(z) = e^z.$$

Cette dernière joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

Propriétés 1.2.1 *1.* $E_{1,1}(z) = e^z$

2. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$

3. $E_{1,3}(z) = \frac{e^z-1-z}{z^2}$

4. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$

5. $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$

6. $\forall m \in \mathbb{N}, E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\Big[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\Big]$

Démonstration.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

2. On a :
$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}$$
Comme $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ on obtient $e^z = z\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} + 1$
et alors $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = \frac{e^z-1}{z}$ d'où $E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$

3. On a $E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}$
Puisque
$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + z^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-2}}{k!} \Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-2}}{k!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = E_{1,3}(z)$$

4.
$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

5.
$$\begin{aligned} E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\sinh(z)}{z} \end{aligned}$$

6. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé on a
$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\Big[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\Big]$$

Montrons que $E_{1,m+1}(z) = \frac{1}{z^m}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!}\right]$

$$\begin{aligned}
E_{1,m+1}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+m+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+m)\Gamma(k+m)} \\
&= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^{k-m}}{k\Gamma(k)} = \frac{1}{z^m}\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^k}{k\Gamma(k)} \\
&= \frac{1}{z^m}\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{1}{z^m}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!}\right] \\
&= \frac{1}{z^m}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!}\right]
\end{aligned}$$

■

1.3 Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

Dans cette section on va présenter les notions de la dérivée et l'intégrale fractionnaire. Il existe beaucoup d'approches différentes qui ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation d'ordre non entiers, par exemple on a : la formule de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et de Caputo, on s'intèresse seulement sur les deux dernier.

1.3.1 Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\mathfrak{Re}(\alpha) > 0)$ au sens de Riemann-Liouville généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale répété n-fois,

$$\begin{aligned}
I_a^n f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

D'après la généralisation du factoriel par la fonction Gamma ; $(n-1)! = \Gamma(n)$. Observent que le second membre de (1.6) pourrait avoir un sens même pour des valeurs non-entières de n, il était donc naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suite :

Définition 1.3.1 (intégrale de Riemann-Liouville) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville* *de* f *notée* I_a^α*, l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\ dt, \qquad (x > a, \Re e(\alpha) > 0). \tag{1.7}$$

Où Γ *est la fonction Gamma et on note* I_0^α *par* I^α*.*

En particulier, pour $\alpha = 1$*, on a :*

$$I_a^1 f(x) = I f(x).$$

Exemple 1.3.1 *On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0.$$

On a alors

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta\ dt. \tag{1.8}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$t = a + (x-a)\tau, \quad \text{avec} \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \text{donc} \quad dt = (x-a)d\tau. \tag{1.9}$$

Donc, (1.8) devient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1} (a+(x-a)\tau-a)^\beta (x-a)\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left[(x-a)(1-\tau)\right]^{\alpha-1} \left[(x-a)\tau\right]^\beta (x-a)\ d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^{(\beta+1)-1} (1-\tau)^{\alpha-1}\ d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.4) puis de la relation (1.5), on aura :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient l'intégrale fractionnaire d'ordre α *de la fonction* f*, telle que :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.10}$$

Cas particulier,

Si $\alpha = 1$*. D'après (1.2) on déduit que*

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \frac{1}{\beta+1} (x-a)^{1+\beta}.$$

Si $\beta = 0$*. On a dans ce cas*

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha.$$

Proposition 1.3.1 *Soit* $f \in \mathcal{C}([a,b])$. *Pour* α *et* β *des nombres complexe où* $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ *et* $\mathfrak{Re}(\beta) > 0$, *alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{1.11}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, On a par définition de I_a^α

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[I_a^\beta f\right](t)\ dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1}\ f(s)\ ds\right]\ dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on aura :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{s-1}\ f(s)\ ds\ dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \underbrace{\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\ dt}_{\mathcal{I}}\ ds. \end{aligned} \tag{1.12}$$

En effectuant le changement de variable suivant dans l'intégrale $\mathcal{I}$, telle que :

$$t = s + (x-s)\tau, \quad \text{avec} \quad (0 \le \tau \le 1), \quad \text{donc} \quad dt = (x-s)d\tau.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 (x-s-(x-s)\tau)^{\alpha-1}(s+(x-s)\tau-s)^{\beta-1}(x-s)\ d\tau \\ &= \int_0^1 \left[(x-s)(1-\tau)\right]^{\alpha-1} \left[(x-s)\tau\right]^{\beta-1} (x-s)\ d\tau \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}\ d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de Bêta (1.4) puis de la relation (1.5), on aura :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\beta,\alpha) \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

En retournant à la formule (1.12), on obtient alors

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \left[(x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]\ ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\ ds \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Définition 1.3.2 (Dérivée de Riemann-Liouville) *Soit* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}([a,b])$. *On appelle dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *au sens de Riemann-Liouville d'une fonction* f *notée* D_a^α, *la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= D^n \left[I_a^{n-\alpha} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, x > a). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Où $[\ .\ ]$ *la partie entière d'un nombre réel et* $D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$.
En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{N}$ *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique ;*

- *Si* $\alpha = 0$, *on a :*

$$D_a^0 f(x) = D^1 [I_a^1 f(x)] = f(x).$$

- *Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$D_a^n f(x) = D^{n+1} [I_a^{n+1-n} f(x)] = D^{n+1} [I_a^1 f(x)] = D^n f(x).$$

Exemple 1.3.2 *On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \geq 0$ *tel que* $\alpha \in]n-1, n[$, *Nous avons*

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = D^n \left[I_a^{n-\alpha} (x-a)^\beta \right].$$

D'après (1.10), on obtient :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= D^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha+\beta} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} \right]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1) \cdots (n-\alpha+\beta-n+1)(x-a)^{n-\alpha+\beta-n} \\ &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1) \cdots (\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Par substitution de (1.15) dans (1.14), on aura :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left[\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \right].$$

Alors, on obtient la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f, telle que :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Cas particulier,

Si $\alpha = 1$. D'après (1.2) on déduit que

$$D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^\beta.$$

Remarque 1.3.1 a) *Il est important de noter que la dérivée au sens de (R-L) d'une constante n'est ni nulle ni constante, car si on prend le même exemple précédant pour $\beta = 0$ on obtient :*

$$D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \neq 0.$$

b) *Par contre la dérivée de (R-L) d'une fonction non identiquement nulle peut être nulle ; Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-1}{2}, a = 0$ nous avons :*

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{-1}{2}}) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\ t^{-\frac{1}{2}}\ dt\Big), \\ &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{-\frac{1}{2}}\ t^{-\frac{1}{2}}\ dt\Big), \end{aligned}$$

On fait un changement de variable $u = \frac{t}{x}$ on obtient :

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{-1}{2}}) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\ x^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\ xdu\Big), \\ &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}\ u^{-\frac{1}{2}}\ du\Big), \\ &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\Big) \\ &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}\Big) \\ &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Big) = 0 \end{aligned}$$

Lemme 1.3.1 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$ et $f[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $D_a^\alpha f = 0$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n},$$

où c_k sont des constantes quelconques.

Preuve. Comme $\mathrm{D}_a^\alpha f = 0$ alors

$$(D^n \mathrm{I}_a^{n-\alpha} f)(x) = 0 \Rightarrow (\mathrm{I}_a^{n-\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

Par composition avec I_a^α on obtient

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_a^n f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I_a^\alpha (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}\end{aligned}$$

En rempalaçant $(I_a^n f)(x)$ par son expression, on trouve

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}$$

Puis, par une dérivation classique d'ordre n par rapport à x, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}$$

■

Remarque 1.3.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non-commutative, i.e :*

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta \neq D_a^{\alpha+\beta} \neq D_a^\beta \circ D_a^\alpha$$

Exemple 1.3.3 *On considère la fonction f définie par :*

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 1 \end{aligned}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}} f$, $D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f$ et $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f$

Solution. On a $D_0^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$ ceci nous donne

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

on sait que

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt &= \int_0^1 r^{-\frac{1}{2}} (1-r)^{-\frac{1}{2}} dr \\ &= \int_0^1 r^{\frac{1}{2}-1} (1-r)^{\frac{1}{2}-1} dr = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Donc $D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 = 0 = D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} 1$ ■

Exemple 1.3.4 *Soit la fonction f définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f:[a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}}f$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ *et* $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f$

Solution. De la même manière que l'exemple précédent, on trouve que $(D_0^{\frac{1}{2}}f)(x)=0$, de plus on a

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f)(x)=(D^1f)(x)=\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

D'où $(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x)=0\neq-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ■

Exemple 1.3.5 *Soient* $\alpha_1=\frac{1}{2}$ *et* $\alpha_2=\frac{3}{2}$, *la fonction f définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f:[a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}}f$, $D_0^{\frac{3}{2}}f$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}f$, $D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ *et* $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}f$

Solution. On a

$$D_0^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

et alors

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt &= \int_0^1 r^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dr \\ &= x\int_0^1 r^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}dr=x\int_0^1 r^{\frac{3}{2}-1}(1-r)^{\frac{1}{2}-1}dr \\ &= xB(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\end{aligned}$$

Alors

$$D_0^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}})=\frac{B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}=\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$D_0^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dx^2}[xB(\frac{3}{2},\frac{1}{2})]=0$$

D'où

$$(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}f)(x)=0 \tag{1.16}$$

$$(D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x)=D_0^{\frac{3}{2}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2}]=\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} \tag{1.17}$$

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}f)(x)=(D^2f)(x)=-\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} \tag{1.18}$$

Alors d'après (1.16), (1.17)et (1.18) on a

$$D_0^{\alpha_1} D_0^{\alpha_2} f \neq D_0^{\alpha_2} D_0^{\alpha_1} f \neq D_0^{\alpha_1+\alpha_2} f$$

■

Propriété 1.3.1 (Linéarité) *Soit* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in \,]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et soient les deux fonctions* f *et* g *pour laquelle les dérivées fractionnaires d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *de Riemann-Liouville existent. Alors pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$D_a^\alpha (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda (D_a^\alpha f)(x) + \mu (D_a^\alpha g)(x)$$

1.3.2 Relation entre intégrale et dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Lemme 1.3.2 *Si* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in \,]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}([a,b])$, *alors on a l'égalité*

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

Preuve. En se basant sur la propriété classique :

$$(D^n I_a^n f)(x) = f(x),$$

Et en utilisant la définition 1.3.2 et de proposition 1.3.1, on déduit

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) &= D^n \left[I_a^{n-\alpha} \left(I_a^\alpha f(x) \right) \right] \\ &= D^n \left[I_a^n f(x) \right] \\ &= f(x).\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Propriété 1.3.2 *Si* $n > \mathfrak{Re}(\alpha) > \mathfrak{Re}(\beta) > n-1 > 0$, *alors pour* $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$, *on a la relation*

$$\left(D_a^\beta I_a^\alpha f \right)(x) = I^{\alpha-\beta} f(x).$$

En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$ *et* $\mathfrak{Re}(\alpha) > k$, *alors*

$$\left(D_a^k I_a^\alpha f \right)(x) = I^{\alpha-k} f(x). \tag{1.19}$$

Preuve. En utilisant la définition 1.3.2 et de proposition 1.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}\left(D_a^\beta I_a^\alpha f\right)(x) &= D^n\left[I_a^{n-\beta}\left(I_a^\alpha f(x)\right)\right]\\ &= D^n\left[I_a^{n+\alpha-\beta} f(x)\right]\\ &= D^n\left[I_a^n\left(I_a^{\alpha-\beta} f(x)\right)\right]\\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x).\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 1.3.3 *Si* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}([a,b])$, *alors on a l'égalité*

$$\left(I_a^\alpha D_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^{(n-k)}(I_a^{n-\alpha} f(a))}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a)^{\alpha-k}.$$

En particulier , si $0 < \alpha < 1$ *alors :*

$$\left(I_a^\alpha D_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \frac{I_a^{1-\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\left(I_a^\alpha D_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Remarque 1.3.3 *pour* $n-1 < \alpha < n$ *on a :*

$$\left(I_a^\alpha D_a^\beta f\right)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^{(\beta-k)}(f(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a)^{\alpha-k}.$$

On déduit alors que la dérivée et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général, c'est-à-dire :

$$\left(I_a^\alpha D_a^\beta\right) f(x) \neq \left(D_a^\alpha I_a^\beta\right) f(x)$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

La notion de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire. Cependant, les demandes de la technologie moderne exigent une certaine révision de l'approche mathématique pure bien établie, car les problèmes appliqués nécessitent l'utilisation des conditions initiales $f(a), f'(a)$, etc. Ces besoins ont bientôt conduit à la naissance d'une définition alternative des dérivées fractionnaires qui a été introduit par M.Caputo à la fin des années soixante.

Définition 1.3.3 (Dérivée de Caputo) *Soient* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. *On appelle dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *au sens de Caputo de* f *notée* ${}^cD_a^\alpha$, *la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, x > a). \end{aligned} \tag{1.20}$$

On note ${}^cD_0^\alpha$ *par* ${}^cD^\alpha$.

Remarque 1.3.4 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in]m-1, m[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* $m-\alpha$ *suivit d'une dérivation classique d'ordre* m, *alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 1.3.6 *On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta \geq 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \geq 0$ *tel que* $\alpha \in [n-1, n[$, *Nous avons*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n (x-a)^\beta\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[(t-a)^\beta\right]^{(n)} dt \end{aligned}$$

On sait que

$$\left[(t-a)^\beta\right]^{(n)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}.$$

et donc

$${}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n}\, dt}_{\mathcal{I}}. \tag{1.21}$$

En effectuant le changement de variable (1.9) dans l'intégrale $\mathcal{I}$, *On obtient*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{n-\alpha-1} (a+(x-a)\tau-a)^{\beta-n} (x-a)\, d\tau \\ &= \int_0^1 \left[(x-a)(1-\tau)\right]^{n-\alpha-1} \left[(x-a)\tau\right]^{\beta-n} (x-a)\, d\tau \\ &= (x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 \tau^{(\beta-n+1)-1} (1-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de Bêta (1.4) puis de la relation (1.5), on aura :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= (x-s)^{\beta-\alpha} B(\beta-n+1, n-\alpha) \\ &= (x-s)^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.\end{aligned}$$

En retournant à la formule (1.21), on obtient alors

$${}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \left[\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \right].$$

Ainsi, on obtient la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f, telle que :

$${}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

D'où

$${}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} & si \ \ \beta > n-1 \\ \\ 0 & si \ \ \beta \in \{0, \ 1, \ 2, \cdots, \ n-1\} \end{cases}$$

Remarque 1.3.5 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t) = C$ est nulle, autrement dit : ${}^cD_a^\alpha C = 0$.*

Propriété 1.3.3 (Linéarité) *Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les deux fonctions f et g pour laquelle les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Caputo (1.20) existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :*

$${}^cD_a^\alpha (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \ {}^cD_a^\alpha f(x) + \mu \ {}^cD_a^\alpha g(x).$$

Propriété 1.3.4 *Si $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, la relation reliant la dérivée Riemann-Liouville (1.13) et celle de Caputo (1.20) est donnée par :*

$$\begin{aligned}{}^cD_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] \\ &= D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, x > a). \qquad (1.22)\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]0,1[$, on a :

$${}^cD_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha+1)} (x-a)^{-\alpha}. \qquad (1.23)$$

A partir de (1.22), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo, si a est un point zéro d'ordre n de f. Plus précisément, on a :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \quad . \textit{ Alors, } \quad {}^{c}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x). \tag{1.24}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, par définition 1.3.2, on a :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] &= D^n I_a^{n-\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right] dt}_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Par intégration par partie de l'intégrale $\mathcal{I}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} &\left[\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right)(x-t)^{n-\alpha}\right]_{t=a}^{t=x} \\ &+ \int_a^x \frac{((x-t)^{n-\alpha+1)-1}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right] dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathcal{I} = I_a^{n-\alpha+1} D\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right].$$

De même façon pour n fois on aura :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= I_a^{n-\alpha+n} D^n\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x) - D^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, donc :

$$\mathcal{I} = I_a^n I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right].$$

Alors,

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^n I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] \\ &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right]. \end{aligned}$$

En tenant compte de (1.19) de la propriété 1.3.2 et de la définition 1.3.3, on obtient :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right] &= \underbrace{D^n I_a^n}_{Id} I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) \right] \\ &= I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) \right] \\ &= {}^c D_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

En plus par linéarité de l'opérateur D_a^α, on a :

$$D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right] = D_a^\alpha f(x) - D_a^\alpha \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right].$$

Et d'après l'exemple 1.3.2, on aura :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} \; D_a^\alpha (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} \; \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors,

$$D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right] = D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Ce qui montre (1.22). ■

Lemme 1.3.4 *Soient* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in \,]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, *alors l'équation différentielle d'ordre fractionnaire*

$${}^c D_a^\alpha f(x) = 0,$$

Admet une solution

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1).$$

Où les $c_k \in \mathbb{R}$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ *sont des constantes arbitraires.*

Preuve. Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$, on a l'équation différentielle d'ordre fractionnaire ;

$${}^c D_a^\alpha f(x) = 0.$$

D'après la définition 1.3.3, on a :

$$I^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] = 0.$$

On applique l'opérateur ${}^{c}D_a^{n-\alpha}$ àă cette formule, on aura :

$${}^{c}D_a^{n-\alpha} I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] = 0.$$

D'après le Lemme 1.3.5, il résulte que :

$${}^{c}D_a^{n-\alpha} I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] = D^n f(x) = 0.$$

Alors, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k\right) = 0, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ce qui montre que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k.$$

■

1.3.4 Relation entre intégrale et dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Lemme 1.3.5 *Soient* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in \left]n-1, n\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, *alors*

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x). \tag{1.25}$$

Preuve. Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in \left]n-1, n\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, La relation (1.22) de propriété 1.3.4 permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(I_a^{\alpha} f\right)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Puis d'après le lemme 1.3.2, on a

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(I_a^{\alpha} f\right)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Et comme $k \leq n-1 < \mathfrak{Re}(\alpha)$, pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$, alors les dérivées

$$\left(I_a^{\alpha} f\right)^{(k)}(a) = 0.$$

Ce qui donne

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x).$$

■

Lemme 1.3.6 *Soient* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, *alors*

$$\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1).$$

Preuve. Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, d'après la définition 1.3.3, on a :

$$\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) = I_a^\alpha[I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x)].$$

Et d'après la proposition 1.3.1, il résult que

$$\begin{aligned}
\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) &= (I_a^n f^{(n)})(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt}_{(I_1)}.
\end{aligned}$$

Par intégration par partie de l'intégrale (I_1), on aura

$$\begin{aligned}
\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left[(x-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t)\right]_a^x + \frac{(n-1)}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-2)}(t)\, dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-2)}(t)\, dt}_{(I_2)}.
\end{aligned}$$

En faisant le même pour (I_2), on aura

$$\begin{aligned}
\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) = &-\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-2)} \int_a^x (x-t)^{n-3} f^{(n-3)}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

En poursuivant par une intégration par partie successive, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\
&\quad - \ldots + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f^{(1)}(t)\, dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\
&\quad - \ldots + f(x) - f(a) \\
&= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k.
\end{aligned}$$

■

1.4 Exercices

Dans cette partie, nous exposons une série d'exercices d'application dans le but d'enrichir le cours.

1.4.1 Énoncés

Exercice 1.4.1 *Calculer a l'aide de la fonction Gamma les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$
2. $\int_0^{+\infty} 3^{-4z^2} dz$
3. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^{\frac{1}{2}}} dx$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} dx$

Exercice 1.4.2 *Donner la preuve de la formule de duplication*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

ou de manière équivalente :

$$B(z, \frac{1}{2}) = 2^{2z-1} B(z, z)$$

Exercice 1.4.3

1. *Vérifier que pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la propriété suivante est vérifiée :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z)$$

2. **a-** *Montrer que*

$$\frac{d}{dz} E_{\frac{1}{n},1}(z) = n z^{n-1} E_{\frac{1}{n},1}(z) + n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})}$$

b- *Sachant que $E_{\frac{1}{n},1}(0) = 1$, calculer $E_{\frac{1}{n},1}(z)$.*

Exercice 1.4.4 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = x^\beta$$

1. *Calculer $I^\alpha f(x)$*
2. *En particulier, calculer $I^\alpha f(x)$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0, 1, 2$.*

Exercice 1.4.5 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^4$$

1. *Calculer $I_a^\alpha f(x)$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{2}$*
2. *Calculer ${}^cD_a^\alpha f(x)$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{11}{2}$*
3. *Calculer $D_a^\alpha f(x)$ pour $\alpha = \frac{3}{2}$*

Exercice 1.4.6 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \exp(kx); \qquad k > 0$$

1. *Calculer $I_{-\infty}^\alpha f(x)$*
2. *Calculer $D_{-\infty}^\alpha f(x)$*

Exercice 1.4.7 *Montrer qu'on peut écrire I_a^α sous la forme suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)dt$$

Exercice 1.4.8
1. *Calculer $I_a^{\alpha+1}[Df(t)]$*
2. *Montrer que*

$$I_a^\alpha[D_a^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D_a^{\alpha-k} f(a)(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

Exercice 1.4.9 *Soient $\lambda > 0$ et $\beta > 0$. En utilisant la définition de l'exponentielle comme la somme d'une série entière.*

1. *Montrer que*

$$I_a^\alpha[e^{\lambda x}(x-a)^{\beta-1}] = e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha+\beta-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda(x-a))^k}{k!} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}$$

2. *Calculer $D_a^\alpha[e^{\lambda x}]$*

1.4.2 Correction des exercices

Solution 1.4.1
1. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$
2.

$$\int_0^{+\infty} 3^{-4z^2} dz = \int_0^{+\infty} (e^{\ln 3})^{(-4z^2)} dz = \int_0^{+\infty} e^{-(4\ln 3)z^2} dz$$

Soit $x = (4\ln 3)z^2$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} d(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\ln 3}}) &= \frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2\sqrt{4\ln 3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}\end{aligned}$$

3. *Posons que* $y = 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} \Rightarrow dx = \frac{y}{2}dy$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^{\frac{1}{2}}}dx &= \frac{1}{2(4^3)}\int_0^{+\infty} y^7 e^{-y}dy \\ &= \frac{1}{2(4^3)}\Gamma(8) = \frac{7!}{2(4^3)} = \frac{315}{8}\end{aligned}$$

4. *Soit* $-\ln x = u \Rightarrow x = e^{-u}$, *alors quand* $x = 1 \Rightarrow u = 0$ *et quand* $x = 0 \Rightarrow u = \infty$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du \\ &= \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

5. *Puisque* $f(x) = f(-x)$, *alors par le changement de variable* $(2x = y)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}dy = 1$$

Solution 1.4.2 *Nous avons*

$$\begin{aligned}B(z,z) &= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1}dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{z-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 [t(1-t)]^{z-1}dt\end{aligned}$$

On pose $s = 1-t \Rightarrow ds = -dt$, *alors*

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 [t(1-t)]^{z-1}dt = -\int_{\frac{1}{2}}^0 [s(1-s)]^{z-1}ds = \int_0^{\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{z-1}dt$$

Donc

$$B(z,z) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{z-1}dt$$

On effectue alors le changement de variable $s = 4t(1-t) \Rightarrow (1-s)^{\frac{1}{2}} = 1-2t$ *et on obtient*

$$\begin{aligned}B(z,z) &= 2\int_0^1 \frac{s^{(z-1)}}{2^{(2z-2)}}\frac{ds}{4(1-2t)} \\ &= \frac{1}{2^{(2z-1)}}\int_0^1 s^{(z-1)}(1-s)^{-\frac{1}{2}}ds \\ &= \frac{1}{2^{(2z-1)}}B(z,\frac{1}{2})\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{(2z-1)}}\frac{\Gamma(z)\frac{1}{2}}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}.$$

Finalement on trouve :

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

Solution 1.4.3 *1.*

$$E_{\alpha,\beta+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta+1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \quad & \Rightarrow \quad \alpha z\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \\
& \Rightarrow \quad \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha k+\beta)z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \\
& = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha k+\beta)z^k}{(\alpha k+\beta)\Gamma(\alpha k+\beta)} \\
& = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} = E_{\alpha,\beta}(z)
\end{aligned}$$

2. **a-**

$$\begin{aligned}
E_{\frac{1}{n},1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{n}+1)} \\
\frac{d}{dz}E_{\frac{1}{n},1}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n}+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{\frac{k}{n}\Gamma(\frac{k}{n})} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{nz^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})} \\
&= n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})} + n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})}
\end{aligned}$$

on pose $k' = k-n$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}E_{\frac{1}{n},1}(z) &= n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})} + n\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{z^{k'+n-1}}{\Gamma(\frac{k'}{n}+1)} \\
&= nz^{n-1}E_{\frac{1}{n},1}(z) + n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})}
\end{aligned}$$

b- *On a :*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = nz^{n-1}y + n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})} & ; \\ y(0) = 1 & . \end{cases}$$

une équation différentielle du 1er ordre avec second membre.

$$\frac{dy}{dz} = nz^{n-1}y \Rightarrow \ln|y| = z^n + c \Rightarrow y = ce^{z^n}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad c'(z)e^{z^n} + nz^{n-1}c(z)e^{z^n} = nz^{n-1}c(z)e^{z^n} + n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})} \\
&\Rightarrow \quad c'(z) = n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{n})}e^{-z^n}z^{k-1} \\
&\Rightarrow \quad c(z) = n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{n})}\int_0^z e^{-x^n}x^{k-1}dx \\
&\Rightarrow \quad y(z) = ce^{z^n} + ne^{z^n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{n})}\int_0^z e^{-x^n}x^{k-1}dx
\end{aligned}$$

on a $y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$$E_{\frac{1}{n},1}(z) = e^{z^n} + ne^{z^n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{n})}\int_0^z e^{-x^n}x^{k-1}dx$$

Solution 1.4.4 *1.* $I^\alpha f(x) = I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^\beta dt$

En faisant le changement de variable : $u = \frac{t}{x} \Rightarrow du = \frac{dt}{x}$

On obtient :

$$\begin{aligned}
I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}x^{\alpha-1}(xu)^\beta x du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\beta}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^\beta du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\beta}B(\beta+1,\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

2. pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = 0, 1, 2.$ *on a :*

$$\begin{aligned}
I^{\frac{1}{2}}x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\
I^{\frac{1}{2}}x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\
I^{\frac{1}{2}}x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{3})}x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}
\end{aligned}$$

Solution 1.4.5 *On a :*

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta} \\
D_a^\alpha(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
{}^cD_a^\alpha(x-a)^\beta &= \begin{cases} 0 & \beta = \{1,2,...,n-1\}\,; \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} & \beta > n-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors :

1.
$$I_1^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}(x-1)^4=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4+1+\frac{1}{2})}(x-1)^{4+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1+\frac{9}{2})}(x-1)^{\frac{9}{2}}$$
$$I_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}(x-1)^4=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4+1+\frac{3}{2})}(x-1)^{4+\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1+\frac{11}{2})}(x-1)^{\frac{11}{2}}$$

2.
$${}^cD_1^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}(x-1)^4=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4+1-\frac{1}{2})}(x-1)^{4-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1+\frac{7}{2})}(x-1)^{\frac{7}{2}}$$
$${}^cD_1^{\frac{11}{2}}\frac{1}{3}(x-1)^4=0$$

3.
$$D_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}(x-1)^4=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4+1-\frac{3}{2})}(x-1)^{4-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1+\frac{5}{2})}(x-1)^{\frac{5}{2}}$$

Solution 1.4.6 *1.*

$$\begin{aligned}I_{-\infty}^{\alpha}f(x)=I_{-\infty}^{\alpha}\exp(kx) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\exp(k(x-t))dt\\ &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\exp(-kt)dt\end{aligned}$$

Posons : $y=kt\Rightarrow dy=kdt$ *et*

$$\begin{aligned}I_{-\infty}^{\alpha}\exp(kx) &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}(\frac{y}{k})^{\alpha-1}\exp(-y)\frac{dy}{k}\\ &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}y^{\alpha-1}\exp(-y)dy\frac{k^{-\alpha+1}}{k}\\ &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha)k^{-\alpha}=k^{-\alpha}\exp(kx)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}D_{-\infty}^{\alpha}\exp(kx) &= D^nI_{-\infty}^{n-\alpha}\exp(kx)\\ &= \frac{d^n}{dx^n}k^{\alpha-n}\exp(kx)\\ &= k^{\alpha-n}k^n\exp(kx)=k^{\alpha}\exp(kx)\end{aligned}$$

Solution 1.4.7 *On pose* $s=x-t\Rightarrow ds=-dt$, *quant* $t=x\Rightarrow s=0$ *et quant* $t=a\Rightarrow s=x-a$ *alors ;*

$$\begin{aligned}I_a^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-a}^0 s^{\alpha-1}f(x-s)(-ds)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}s^{\alpha-1}f(x-s)ds\end{aligned}$$

Solution 1.4.8 *1.*

$$I_a^{\alpha+1}[Df(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^\alpha f'(s)ds$$

Par intégration par partie avec $\begin{cases} u=(t-s)^\alpha \Rightarrow & u'=-\alpha(t-s)^{\alpha-1}ds\ ; \\ v'=f'(s)ds \Rightarrow & v=f(s). \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha+1}[Df(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[(t-s)^\alpha f(s)]_a^t + \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= I_a^\alpha f(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha[D_a^\alpha f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}[D_a^\alpha f(s)]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t \frac{d}{dt}(t-s)^\alpha [D_a^\alpha f(s)]ds \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^\alpha [D_a^\alpha f(s)]ds\right] \end{aligned}$$

En faisant des intégrations par parties répétés, nous ontenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^\alpha [D_a^\alpha f(s)]ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^\alpha \frac{d^n}{ds^n}[I_a^{n-\alpha} f(s)]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-n}[I_a^{n-\alpha} f(s)]ds \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} I_a^{n-k} f(a)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-n}[I_a^{n-\alpha} f(s)]ds \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left[D_a^{\alpha-k} f(a)\right] \\ &= I_a^{\alpha-n+1}(I_a^{n-\alpha} f(t)) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left[D_a^{\alpha-k} f(a)\right] \\ &= If(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left[D_a^{\alpha-k} f(a)\right] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_a^\alpha[D_a^\alpha f(t)] &= \frac{d}{dt}\left[If(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left[D_a^{\alpha-k} f(a)\right]\right] \\ &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left[D_a^{\alpha-k} f(a)\right] \end{aligned}$$

Solution 1.4.9

$$I_a^\alpha[e^{\lambda x}(x-a)^{\beta-1}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}e^{\lambda t}(t-a)^{\beta-1}dt \tag{1.26}$$

On pose $t = a + r(x-a) \Rightarrow dt = (x-a)dr$ *alors :*

$$\begin{aligned}
(1.26) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 e^{\lambda a}e^{(x-a)\lambda r}(x-a)^{\alpha+\beta-1}(1-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}dr \\
&= \frac{e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 e^{(x-a)\lambda r}(1-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}dr
\end{aligned}$$

avec

$$e^z = \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!} \Rightarrow e^{(x-a)\lambda r} = \sum_{k\geq 0}\frac{((x-a)\lambda)^k r^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
(1.26) &= \frac{e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k\geq 0}\frac{((x-a)\lambda)^k}{k!}\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}r^{\beta+k-1}dr \\
&= \frac{e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k\geq 0}\frac{((x-a)\lambda)^k}{k!}B(\beta+k,\alpha) \\
&= \frac{e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k\geq 0}\frac{((x-a)\lambda)^k}{k!}\frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+k+\alpha)} \\
&= e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\sum_{k\geq 0}\frac{((x-a)\lambda)^k}{k!}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k+\alpha)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha[e^{\lambda x}] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha}(e^{\lambda x}) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[e^{\lambda a}(x-a)^{n-\alpha}\sum_{k\geq 0}\frac{((x-a)\lambda)^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\right] \\
&= e^{\lambda a}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k\Gamma(k+1)}{k!\Gamma(n-\alpha+k+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n+k-\alpha} \\
&= e^{\lambda a}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k\Gamma(k+1)}{k!\Gamma(n-\alpha+k+1)}\frac{\Gamma(n+k-\alpha+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \\
&= e^{\lambda a}(x-a)^{-\alpha}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda(x-a))^k\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}
\end{aligned}$$

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les définitions et les propriétées des fonctions spéciales, l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo et à la fin de ce chapitre on a présenté une série d'exercices corrigés.

Chapitre 2

Équations Différentielles d'Ordre Fractionnaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle des outils de base et des résultats préliminaires essentiels. Nous consédérons le problème à valeur initiale d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, nous nous intéresserons à l'existence et l'unicité de la solution.

2.2 Notations et Définitions

Dans cette section, nous présentons les notations et définitions nécessaire pour ce chapitre.

Soit $J = [0, T],\ T > 0$, Notons $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)|/t \in J\},$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

1. **Définition 2.2.1** *Soit E un espace de Banach et $A : E \to E$, un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que :*
   $\|Ax - Ay\|_E \leq K\|x - y\|_E$, pour tout $x, y \in E$.

Proposition 2.2.1 *Soit $C(J, E)$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de*

Banach E et $\mathcal{M} \subset C(J, E)$.

$\mathcal{M}$ est relativement compact ssi

(i) *$\mathcal{M}$ est borné i.e. $\exists b \geq 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq b \; \forall f \in \mathcal{M}$,*

(ii) *$\mathcal{M}$ est équicontinu i.e*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in J : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \; \forall f \in \mathcal{M},$$

(iii) *$\forall x \in J$, $\{f(x) \in E, f \in \mathcal{M}\}$ est relativement compact dans E.*

Définition 2.2.2 *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une fonction ;*

- *f est dite compacte si l'image $f(E)$ est relativement compacte dans F,*
- *f est dite complètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de E est relativement compacte dans F.*

Théorème 2.2.1 (Arzelà-Ascoli) *Soit F une famille des fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$. Alors F est relativement compacte (précompact) dans $C[a, b]$ si F est équicontinu et uniformément bornée.*

2.3 Théorèmes du Point Fixe

Dans cette section nous présentons deux théorèmes du point fixe qui sont utilisés pour démontrer l'existence et l'unicité de solution pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Théorème 2.3.1 (Contraction de Banach) *Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.*

Théorème 2.3.2 (L'Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder) *Soit E un espace de Banach, et $U \subset E$ convexe avec $0 \in U$. Soit $F : U \to U$ est un opérateur complètement continu. Alors ou bien*

(i) *F a un point fixe*

ou bien

(ii) *L'ensemble $\mathcal{E} = \{x \in U : x = \lambda F(x), \; 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.*

2.4 Problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \qquad avec \;\; t \in J = [0, T], \; 0 < \alpha < 1, \tag{2.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{2.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.
On va présenter deux résultats d'existences, on va utiliser le théorème de point fixe de Banach dans le premier résultat et dans le deuxième on va utiliser le théorème de point fixe de Leray Schauder.

Lemme 2.4.1 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} h(s) ds. \tag{2.3}$$

Si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t), t \in J = [0, T], \tag{2.4}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2.5}$$

Preuve. Soit y solution du problème $(2.4) - (2.5)$.
On appliquant l'opérateur I^{α} aux deux membres de l'égalité dans l'équation (2.4), on aura :

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = I^{\alpha}h(t)$$

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} h(s) ds, \tag{2.6}$$

d'après le lemme 1.3.6 et pour $a = 0$, et $n = 1$,
on aura

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = y(t) - y(0), \tag{2.7}$$

de (2.6) et (2.7) on aura :

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

et on a

$$y(t)) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Lemme 2.4.2 *soit* $0 < \alpha < 1$, *et soit* $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, une fonction* y *est une solution de l'équation integrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c\right]. \tag{2.8}$$

Si et seulement si y *est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire*

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0,T], \tag{2.9}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{2.10}$$

Preuve. D'après le lemme 2.4.1 on a l'équation intégrale (2.3), et on utilise la condition (2.10) pour calculer la constante y_0, donc

$$ay(0) = ay_0,\ by(T) = by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds.$$

On aura :

$$ay_0 + by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds = c, \quad avec \;\; a+b \neq 0,$$

par suite, on aura :

$$y_0 = \frac{-1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c\right].$$

On obtient alors l'équation (2.8).

Inversement

On va appliquer l'opérateur $^cD^\alpha$ a l'équation (2.8), comme il est linéaire on aura :

$$\begin{aligned} ^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds\right] -^c D^\alpha \left[\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c\right)\right] \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t), \end{aligned}$$

d'après le lemme 1.3.5, on aura

$$^cD^\alpha y(t) = h(t),$$

et

$$\begin{aligned}
ay(0) + by(T) &= a\left[-\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right)\right] \\
&+ b\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right. \\
&- \left.\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right)\right] \\
&= -\frac{a}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right] \\
&+ \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&- \frac{b}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right] \\
&= \left[\frac{-ab}{(a+b)\Gamma(\alpha)} + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} - \frac{b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&+ c(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}) \\
&= \frac{-ab + (a+b)b - b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + c \\
&= c,
\end{aligned}$$

et on obtient l'équation (2.10). ■

Définition 2.4.1 *Une fonction $y \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution du problème $(2.1)-(2.2)$ si y verifie l'équation integrale suivante :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - c\right].$$

2.5 Résultats Principaux

On va énoncer un premier résultat sur l'unicité de la solution du problème $(2.1)-(2.2)$ on utilisons le théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.5.1 (H_1) *Supposons qu' il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u-v|, \qquad \textit{pour tout}\, t \in J\, \textit{et tout}\, u,v \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Si

$$\frac{kT^{\alpha}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{2.12}$$

alors le problème $(2.1)-(2.2)$ *admet une solution unique sur* $[0,T]$.

Preuve. Transformons le problème $(2.1)-(2.2)$ en un problème du point fixe.
Considérons l'opérateur : $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$. Définie par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - c\right]. \tag{2.13}$$

Il est clair que les points fixes de l'opération F sont solution du problème $(2.1)-(2.2)$.
F est bien défini, en effet : si $y \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors $(Fy) \in C([0,T],\mathbb{R})$. Pour montrer que F admet un unique point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction.
En effet.
Si $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$ alors pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\\
&\quad \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds - c\right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\\
&\quad \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds + \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - c\right]\Bigg|,\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s)|ds\\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s)|ds\\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|b|k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds\\
&\leq \left[\frac{kT^{\alpha}(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0,T]$, nous avons

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{KT^{\alpha}(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|x-y\|_\infty,$$

par la condition (2.12), l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui donne une solution intégrale unique au problème $(2.1)-(2.2)$. ∎

Le deuxième résultat pour le problème $(2.1)-(2.2)$ est basée sur le théorème de point fixe de Leray-Schauder.

Théorème 2.5.2 *Supposons que :*

(H_2) $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *une fonction continue*

(H_3) *Il existe une constante* $M>0$ *telle que :*

$$|f(t,u)|\leq M \qquad \textit{pour tout } t\in[0,T], \textit{ et tout } u\in\mathbb{R}.$$

Alors le problème $(2.1)-(2.2)$ *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va montrer que F défini par (2.13) admet un point fixe, on va utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder. La preuve est donnée en quatre étapes.

Etape 1 : F est continu.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $y_n\to y$ dans $C([0,T]),\mathbb{R})$ i.e $\lim\limits_{n\to+\infty}\|y_n-y\|_\infty=0$, on va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|G(y_n)-G(y\|_\infty=0$, pour tout $t\in J$.

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t)-F(y)(t)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y_n(s))ds\\
&- \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y_n(s))ds-c\right)\\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\\
&+ \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-c\right)\Bigg|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.)),f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|b|}{|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds\right]\\
&\leq \frac{(1+\frac{|\mathrm{b}|}{|\mathrm{a+b}|})T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0,T]$, on obtient

$$\|F(y_n)-F(y)\|_\infty \leq \frac{(1+\frac{|\mathrm{b}|}{|\mathrm{a+b}|})T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty.$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons :

$$\|F(y_n)-F(y)\|_\infty \leq \frac{(1+\frac{|\mathrm{b}|}{|\mathrm{a+b}|})T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty \to \quad 0 \ \ quand \ \ n\to\infty,$$

donc F est continu.

Etape 2 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans $C(J,\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta>0$, il existe une constante strictement positif l tel que pour chaque $y\in B_\eta=\{y\in C([0,T],\mathbb{R}):\|y\|_\infty\leq\eta\}$.

On veut montrer que $\|F(y)\|_\infty\leq l$.

On a pour tout $t\in[0,T]$

$$|F(y)(t)|\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|+\frac{|c|}{|a+b|}$$

de (H_3) on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|b|M}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|c|}{|a+b|}\\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha+\frac{|b|M}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha+\frac{|c|}{|a+b|}\\
\|F(y)\|_\infty &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha+\frac{|b|M}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}T^\alpha+\frac{|c|}{|a+b|}=l,
\end{aligned}$$

et donc $F(B_\eta)$ est uniformement borné.

Etape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soit $t_1,t_2\in[0,T],\ t_1<t_2,\ B_\eta$ un ensemble borné de $C([0,T],\ \mathbb{R})$ de l'étape deux et soit $y\in B_\eta$.

Alors

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2)-F(y)(t_1| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]f(s,y(s))ds\right.\\
&+ \left.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\right|\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}]ds\\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^{\alpha}+t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}]+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha}\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha}+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}),
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.
Alors, l'ensemble $Y(t) = \{F(y)(t) : y \in B_\eta\}$ est précompact dans $\mathbb{R}$. D'après les étapes précédentes et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que F est un opérateur complètement continu.

Etape 4 : Estimations à priori des solutions.
Maintenant reste à montrer que :
$\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \quad pour \quad 0 < \lambda < 1\}$ est borné.
Soit $y \in \varepsilon$, alors

$$y = \lambda\ F(y)\ ,\ pour\ 0 < \lambda < 1,$$

donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - c\right)\right],$$

pour $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds\\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}|y(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|b|M}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|c|}{|a+b|}\\ &\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|},\end{aligned}$$

on a

$$\|y\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R,$$

avec R une constante strictement positif. Cela montre que ε est uniformement borné par conséquence du théorème 2.3.2 du point fixe de Leray-Schauder.

On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème de $(2.1)-(2.2)$. ■

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème $(2.1)-(2.2)$. Le lemme suivant est essentiel pour la preuve de notre résultat principal.

Lemme 2.5.1 (Lemme de Gronwall) *Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a.b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité.*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds \qquad \forall\ t \in [a,b]. \tag{2.14}$$

Alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)exp\Big(\int_s^t \Psi(u)du\Big)ds \qquad \forall\ t \in [a,b].$$

Preuve. Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$.

En multipliant les deux membres de (2.14) par $\psi(t)$, on obtient :

$$F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t).$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t)exp(-\int_a^t \psi(s)ds),\ avec$$

$$G(t) = F(t)exp(-\int_a^t \psi(s)ds),$$

comme $G(a) = F(a) = 0$, on déduit par intégration :

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)exp(-\int_a^s \psi(u)du)ds.$$

Or, d'après 2.14, on aura

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t)exp(\int_a^t \psi(s)ds),$$

d'où le résultat voulu. ■

Maintenant on va présenté un théorème d'unicité des solutions du probleme $(2.1) - (2.2)$.

Théorème 2.5.3 *Supposons que les conditions du théorème* 2.5.2 *sont vérifiées et supposons que de plus qu'il existe une constante positive K telle que :*

$$|f(t, u(t)) - f(t, v(t))| \leq K\|u - v\|_\infty, \quad \forall \quad t \in J \quad et \quad \forall u, v \in C(J, \mathbb{R}).$$

Alors le problème $(2.1) - (2.2)$ *admet une unique solution sur J.*

Preuve. L'existence d'au moins une solution $y(t)$ du problème $(2.1) - (2.2)$ est assurée par le théorème 2.5.2. Pour prouver l'unicité de $y(t)$, on suppose que le problème $(2.1) - (2.2)$ admet une autre solution.

Soit $z(t)$ cette autre solution du problème $(2.1) - (2.2)$ alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|(y)(t) - z(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - c\right]\right. \\
&- \left. \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, z(s))ds + \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, z(s))ds - c\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\left[\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds\right] \\
&\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|y - z\|_\infty ds + \frac{|b|K}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y - z\|_\infty ds \\
&\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y - z\|_\infty ds + \frac{|b|K}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y - z\|_\infty ds \\
&\leq \frac{K(1 + \frac{|b|}{|a+b|})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y - z\|_\infty ds.
\end{aligned}$$

Maintenant, on va utiliser le lemme de Gronwall 2.5.1, avec $\varphi(t) \equiv 0$ et $u(t) = |y(t) - z(t)|$, on obtient $y(t) = z(t)$, où l'unicité de la solution du probleme$(2.1) - (2.2)$.

■

2.6 Exercices

Dans cette section, nous exposons une série d'exercices d'application pour illuster l'utilité de nos principaux résultats.

2.6.1 Énoncés

Exercice 2.6.1 *Soit le problème aux limites suivant :*

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, \qquad t \in J = [0,1],\ \alpha \in (0,1], \tag{2.15}$$

avec

$$y(0) + y(1) = 0. \tag{2.16}$$

Montrer que le problème (2.15)-(2.16) *admet une solution unique par le théorème de contraction de Banach.*

Exercice 2.6.2 *Soit le problème aux limites suivant :*

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{2}{19+e^t}|y(t)|, \qquad t \in J = [0,1], 0 < \alpha < 1 \tag{2.17}$$

$$y(0) + y(1) = 1 \tag{2.18}$$

1. *Déterminer la solution générale du problème* $(2.17) - (2.18)$.
2. *Montrer que le problème* $(2.17) - (2.18)$ *admet une solution unique par le théorème de contraction de Banach.*

Exercice 2.6.3 *Soit le problème non linéaire d'équation différentielle d'ordre fractionnaire avec la condition integrale :*

$$D_a^\alpha y(t) = f(x, y(x)), \qquad t \in J = [0,b], 0 < \alpha < 1 \tag{2.19}$$

$$(I_a^{1-\alpha} y)(a) = b \tag{2.20}$$

ou : D_a^α *est la derivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.*
$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction non linéaire borné.*

1. *Déterminer la solution générale du problème* $(2.19) - (2.20)$.
2. *Montrer l'existence de la solution par le théorème de Leray-Schauder pour* $(I_a^{1-\alpha} y)(a) = 0$.

3. *Montrer l'unicité de solution.*

Exercice 2.6.4 *Soit le problème aux limites avec conditions non locales suivant :*

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{pour tout } t \in J = [0, T], 1 < \alpha < 2 \tag{2.21}$$

$$y(0) = g(y), \;\; y(T) = y_T \tag{2.22}$$

1. *Déterminer la solution générale du problème* $(2.21) - (2.22)$.
2. *Donner des conditions pour que le problème* $(2.21) - (2.22)$ *soit admet une solution unique par le théorème de contraction de Banach.*

Exercice 2.6.5 *Soit le problème aux limites non locales :*

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, \qquad \text{pour tout } t \in J = [0, 1], 1 < \alpha < 2 \tag{2.23}$$

$$y(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i), \;\; y(1) = 0 \tag{2.24}$$

où $0 < t_1 < t_2 <, , , < t_n < 1$ *et* $c_i, i = 1, ..., n$ *sont des costantes positives avec* $\sum_{i=1}^{n} c_i < \frac{4}{5}$. *Montrer que le problème* $(2.23) - (2.24)$ *admet une solution unique par le théorème de contraction de Banach.*

2.6.2 Correction des exercices

Solution 2.6.1 *Posons :*

$$f(t, x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)}, (t, x) \in J \times [0, \infty).$$

Soit $x, y \in [0, \infty)$ *et* $t \in J$ *alors on a :*

$$\begin{aligned}
|f(t, x) - f(t, y)| &= \frac{e^{-t}}{9+e^t}\left|\frac{x}{(x+1)} - \frac{y}{(y+1)}\right| \\
&= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^t)(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

D'où la condition (H_1) *est vérifiée avec* $k = \frac{1}{10}$*, nous vérifions la condition* (2.12) *est satisfaite pour des valeurs appropriées de* $\alpha \in (0,1]$ *avec* $a = b = T = 1$.
En effet,

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{3k}{2} = 0,15. \tag{2.25}$$

Alors par le théorème 2.5.1 *le problème* (2.15) − (2.16) *a une solution unique sur* $[0,1]$ *pour les valeurs de* α *satisfaisant* (2.25).

Solution 2.6.2 *1. Soit*

$$f(t,y(t)) = \frac{2}{19+e^t}|y(t)|$$

On a :

$$I^{\alpha}\,{}^cD^{\alpha} = I^{\alpha} f(t,y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds$$

et

$$I^{\alpha}\,{}^cD^{\alpha} = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

et pour $a = 0$, $n = 1$ *on aura :*

$$I^{\alpha}\,{}^cD^{\alpha} = y(t) - y(0)$$

donc

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds$$

pour les conditions aux limites on a : $y(0) + y(1) = 1$

$$y(0) + y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds = 1$$
$$y(0) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds\right)$$

donc la solution est :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds\right]$$

2. *Soient* $x, y \in [0,\infty[$ *et* $t \in J$*, alors on a :*

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq \frac{2}{19+e^t}|x-y| \\ &\leq \frac{2}{20}|x-y| \leq \frac{1}{10}|x-y|. \end{aligned}$$

Alors la fonction f *est lipschitzienne de rapport* $k = \frac{1}{10} < 1$.

On transforme le problème $(2.17)-(2.18)$ *en un problème du point fixe :*

Considérons l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} F: C([0,1],\mathbb{R}) & \rightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ y(t) & \mapsto & F(y)(t) \end{array}$$

avec :

$$F(y)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\right].$$

Si $x,y\in C([0,1],\mathbb{R})$*, alors,* $\forall t\in J$ *nous avons :*

$$\begin{aligned} |F(x)(t)-F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s)|ds \\ &+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s)|ds \\ &\leq \frac{\frac{1}{10}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{\frac{1}{10}\|x-y\|_\infty}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{t^\alpha\|x-y\|_\infty}{10\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\|x-y\|_\infty}{20\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq \frac{3}{20\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty\leq \frac{3}{20\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty.$$

Alors l'opérateur F *admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème* $(2.17)-(2.18)$ *si pour* $\alpha\in[0,1]$ *et satisfaisant la condition suivante*

$$\frac{3}{20\Gamma(\alpha+1)}<1\Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1)>\frac{3}{20}.$$

Solution 2.6.3 *1. Nous avons :* $(D_a^\alpha y)(x)=f(x,y(x))$.

En appliquant l'opérateur I_a^α *sur les deux membre de l'équation* (2.19)

$$\begin{aligned} I_a^\alpha D_a^\alpha y(x) &= I_a^\alpha f(x,y(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \end{aligned}$$

d'autre part comme $I_a^{1-\alpha}y=D_a^{\alpha-1}y$*, nous avons*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha D_a^\alpha y(x) &= y(x)-\frac{D_a^{\alpha-1}y(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \\ &= y(x)-\frac{b}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Alors la solution générale du problème (2.19)-(2.20) *est s'écrit comme se suite :*

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt$$

2. *Supposons maintenant que :*

H1) *La fonction* $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *continue bornée*

H2) *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$|f(x,y)| \leq M \qquad \text{pour tout } x \in J, \text{ et tout } y \in \mathbb{R}.$$

Alors le problème $(2.19) - (2.20)$ *admet au moins une solution sur* J.

Transformons le problème $(2.19) - (2.20)$ *avec* $(I_a^{1-\alpha}y)(a) = 0$ *en un problème du point fixe.*

Considérons l'opérateur $F : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ *défini par :*

$$F(y(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt$$

On va utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder. La preuve est donnée en quatre étapes.

Etape 1 *:* F *est continu.*

Soit $\{y_n\}$ *une suite dans* $C(J, \mathbb{R})$ *qui converge vers* y *i.e* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0$, *on va montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|F(y_n) - F(y\|_\infty = 0$, *pour tout* $x \in J$.

$$\begin{array}{rcl} |F(y_n)(x) - F(y)(x)| & \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))|dt \\ & \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sup\limits_{t\in J}|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))|dt \\ & \leq & \frac{\|f(., y_n(.)), f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\ & \leq & \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty. \end{array}$$

Puisque f *est une fonction continue, nous avons alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$$

D'où la continuité de F.

Etape 2 *:*F *transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans* $C(J, \mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\rho > 0$, il existe une constante strictement positif η tel que pour chaque $y \in B_\rho = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \rho\}$ on obtient $\|F(y)\|_\infty \leq \eta$.

On a pour tout $x \in J$

$$\begin{aligned} |F(y)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t,y(t))| dt \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \eta. \end{aligned}$$

Alors $F \subset B_\eta$ et $F(B_\eta)$ est uniformement borné.

***Etape 3** : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C(J,\mathbb{R})$.*

Soit $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, B_ρ un ensemble borné de $C(J, \mathbb{R})$ et soit $y \in B_\rho$. Alors :

$$\begin{aligned} |F(y)(x_2) - F(y)(x_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} f(t,y(t)) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1-t)^{\alpha-1} f(t,y(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} [(x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1}] dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} dt \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left((x_2-x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha \right) + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (x_2-x_1)^\alpha \\ &\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (x_2-x_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (x_1^\alpha - x_2^\alpha) \end{aligned}$$

Quand $x_1 \to x_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.

D'où la continuité de F. D'après les étapes 2 et 3 et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que $F(B_\rho)$ est relativement compacte pour tout B_ρ borné i.e F est complètement continu.

***Etape 4** : Estimations à priori*

Maintenant, il reste à montrer que :

$\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \quad pour \quad 0 < \lambda < 1\}$ est borné.

Soit $y \in \varepsilon$, alors

$$y = \lambda\, F(y)\ ,\ pour\ 0 < \lambda < 1,$$

donc pour chaque $x \in J$ nous avons :

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y(t))| dt \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = C = Constante \end{aligned}$$

Cela montre que ε est uniformement borné par conséquence du théorème 2.3.2 du point fixe de Leray-Schauder.

On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème de $(2.19) - (2.20)$ *avec* $(I_a^{1-\alpha} y)(a) = 0$.

3. *Supposons que les conditions H1 et H2 sont vérifiées et supposons que de plus qu'il existe une constante positive k telle que :*

$$|f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \leq k \|x - z\|_\infty, \quad \forall \quad x \in J \quad et \quad \forall y, z \in C(J, \mathbb{R}).$$

Supposons que $y(x)$ et $z(x)$ deux solution du problème $(2.19) - (2.20)$, *alors pour tout $x \in J$, nous avons :*

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \|y - z\|_\infty dt. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall avec $\varphi(t) \equiv 0$, on obtient l'unicité de $y(x)$

Solution 2.6.4 1. *On a :*

$$I^\alpha \, {}^cD^\alpha y(t) = I^\alpha f(t, y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

et

$$I^\alpha \, {}^cD^\alpha y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

et pour $a = 0$, $1 < \alpha < 2 \Rightarrow n = 2$ on aura :

$$I^\alpha \, {}^cD^\alpha y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{1} \frac{y^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} = y(t) - y(0) - ty'(0)$$

Donc ;

$$y(t) = y(0) + ty'(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

on a les conditions non locale :

$$\begin{aligned} y(0) &= g(y) \ \ et \\ y(T) &= g(y) + Ty'(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds = y_T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{1}{T} y_T - \frac{1}{T} g(y) - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

Donc ;

$$y(t) = g(y) + \frac{t}{T} y_T - \frac{t}{T} g(y) - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

et alors ;

$$y(t) = (1 - \frac{t}{T}) g(y) + \frac{t}{T} y_T - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

2. *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

H1 : *La fonction f est continue et $\exists k_1 > 0$ tel que*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k_1 |u - v|, \quad \forall t \in J, \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

H2 : *La fonction g est continue et $\exists k_2 > 0$ tel que*

$$|g(t, u) - g(t, v)| \leq k_2 |u - v|, \quad \forall t \in J, \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

On transforme le problème $(2.21) - (2.22)$ en un problème du point fixe, on considère l'opérateur $A : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ défini par :

$$A(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + (1 - \frac{t}{T}) g(y) + \frac{t}{T} y_T.$$

Soient $x, y \in C(J,\mathbb{R})$*, alors* $\forall t \in J$ *nous avons :*

$$\begin{aligned}
|A(x)(t)-A(y)(t)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&\quad +(1-\frac{t}{T})g(x)+\frac{t}{T}y_T - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \\
&\quad +\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-(1-\frac{t}{T})g(y)-\frac{t}{T}y_T.\Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\
&\quad +\frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds+|1-\frac{t}{T}||g(x)-g(y)|. \\
&\leq \frac{k_1\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad +\frac{k_1\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds+|g(x)-g(y)| \\
&\leq \left(\frac{k_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{k_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\|x-y\|_\infty + k_2\|x-y\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{2k_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+k_2\right)\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|A(x)-A(y)\|_\infty \leq \left(\frac{2k_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+k_2\right)\|x-y\|_\infty.$$

Alors A *est une contraction et donc* A *a un unique point fixe qui donne une solution au problème* $(2.21)-(2.22)$ *si*

$$\left(\frac{2k_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+k_2\right)<1.$$

Solution 2.6.5 *Le problème possède une solution unique sur [0,1].*
Soit

$$f(t,x)=\frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)}, \qquad \textit{pour tout}\,(t,x)\,\in J\times[0,\infty[,$$

et

$$g(y)=\sum_{i=1}^n c_i y(t_i).$$

Soient $x, y \in [0, +\infty[$ *et* $t \in J$, *on a :*

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \left|\frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)} - \frac{e^{-t}y}{(9+e^t)(1+y)}\right| \\
&= \frac{e^{-t}}{9+e^t}\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \\
&= \frac{e^{-t}}{9+e^t}\left|\frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}\right| \\
&= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^t)(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

Donc la condition (H_1) *de l'exercice précédent est satisfaite avec* $k_1 = \frac{1}{10}$.
Soient $x, y \in [0, +\infty[$

$$|g(x) - g(y)| = |\sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} c_i |x-y|.$$

Ainsi la condition (H_2) *de l'exercice précédent est satisfaite avec* $k_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \leq \frac{4}{5}$.
On va vérifier la condition (2.12) *avec* $T = 1$

$$\frac{2K_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + k_2 = \frac{1}{5\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i < \frac{4}{5}$, *donc*

$$\frac{1}{5\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > 1.$$

Qui est satisfait pour $\alpha \in]1, 2[$. *D'après le théorème de contraction de Banach le problème* $(2.23) - (2.24)$ *admet une unique solution sur* $[0, 1]$.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté un rappel sur quelques résultats de l'analyse fonctionnelle puis on a traité l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites pour les équations différentielle d'ordre fractionnaire, Ces résultats sont obtenus à l'aide des théorèmes du point fixe de Banach et de Leray-Schauder. On a terminé ce chapitre par une série d'exercices corrigés.

Chapitre 3

Équations Différentielles Semi-Linéaire d'Ordre Fractionnaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle des résultats préliminaires essentiels de la théorie des C_0-semi-groupes. Nous consédérons le problème d'équations différentielles semi linéaire d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, nous nous intéresserons à l'existence et l'unicité de la solution.

3.2 Théorie des C_0-semi-groupes

Dans cette section, nous donnons un bref aperçu de la théorie des C_0-semi-groupes, qui est très important dans l'étude des équations différentielles semi-linéaires.

Dans la suite, on note par E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$, et par $B(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans E. On note par I l'opérateur identité dans $B(E)$.

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ on note par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\lambda I - A \ \ \textit{est inversible dans } B(E)\}$$

L'ensemble resolvante de A et par

$$\begin{array}{rcl} R(.,A) : \rho(A) & \rightarrow & B(E) \\ \lambda & \mapsto & R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{array}$$

la resolvante de l'opérateur A.

Définition 3.2.1 *On appelle C_0-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(E)$ vérifiant les conditions suivantes :*

i) $T(0) = I$ *(où I est l'opérateur identité de E)*

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$ *;*

iii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$, $\forall x \in E$

Définition 3.2.2 *On appelle générateure infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un opérateur A défini sur l'ensemble :*

$$D(A) = \{x \in E / \lim_{t\to 0} \frac{T(x)-x}{t} existe\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(x)-x}{t}, \forall x \in D(A)$$

Exemple 3.2.1 *Soit*

$$C = \{f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \boldsymbol{f\ est\ uniformement\ continue\ et\ born\acute{e}e}\}$$

Avec la norme :

$$\|f\|_c = \sup_{\alpha\in[0,+\infty[} |f(\alpha)|.$$

L'espace C est un espace de Banach.

Définissons :

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \quad \forall t \geqslant 0 \quad \alpha \in [0, +\infty[$$

Évidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et en plus on a :

Soit $f \in C$

$$\left\|T(t)f\right\|_c = \sup_{\alpha\in[0\ \infty[} \left|T(t)f(\alpha)\right| = \sup_{\alpha\in[0\ \infty[} \left|f(t+\alpha)\right|$$

on pose $\alpha + t = \beta$ si $\alpha = 0$ alors $\beta = t$ et si $\alpha = \infty$ alors $\beta = \infty$

$$\left\|T(t)f\right\|_c = \sup_{\beta\in[t\ \infty[} \left|f(\beta)\right| \leq \sup_{\beta\in[0\ \infty[} \left|f(\beta)\right| = \left\|f\right\|_c$$

Alors $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est linéaire borné et $\left\|T(t)\right\|_c = 1$ $\forall t \geq 0$

. *De même, nous avons :*

i) $T(0)f = f(0+\alpha) = f(\alpha)$ *donc* $T(0) = I$

ii) Pour $s, t \geq 0$ *:*

$$(T(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = T(t)f(s+\alpha) = T(t)T(s)f(\alpha)$$

Donc :

$$T(t+s)f = T(t)T(s)f \qquad \forall\ f \in C$$

iii)

$$\lim_{t\to 0} \big\|T(t)f - f\big\|_c = \lim_{t\to 0} \sup_{\alpha\in[0\ \infty[} \big|f(\alpha+t) - f(\alpha)\big| = 0$$

Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe.*

Soit $A\ : D(A) \subset C \longrightarrow C$ *le générateur infinitésimal de* C_0*-semi-groupe*

i) Si $f \in D(A)$ *,* $\forall \alpha \in [0\ \infty[$ *alors :*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha) = Af(\alpha)$$

Par conséquent :

$$D(A) \subset \{f \in C/f' \in C\}$$

ii) Si $f \in C$ *et* $f' \in C$ *alors :*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right| &= \left|\frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right| \\
&= \left|\frac{1}{t}\left[f(\tau)\right]_{\alpha}^{t+\alpha} - \frac{1}{t}\left[f'(\alpha)\tau\right]_{\alpha}^{t+\alpha}\right| \\
&\leq \frac{1}{t}\int_{\alpha}^{t+\alpha} |f'(\tau) - f'(\alpha)|\, d\tau \longrightarrow_{t\to 0} 0
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α *pour* $t \to 0$*. Par suite*

$$\left\|\frac{T(t)f - f}{t} - f'\right\|_c = 0$$

D'où $f \in D(A)$ *et* $\{f \in C/f' \in C\} \subset D(A)$*, par conséquent*

$$D(A) = \{f \in C/f' \in C\} \textit{ Et : } Af = f'$$

Remarque.

Dans le cas où $D(A) = E$ et $A \in B(E)$, la famille d'opérateurs linéaires bornés $\{e^{At}\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe uniformément continu de générateur infinitésimal A.

Théorème 3.2.1 *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur E, alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :*

$$\|T(t)\|_{B(E)} \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

On note $SG(M,\omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupe exponentiellement bornés.

Définition 3.2.3 *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur E.*

1. *$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est dit **uniformément borné** sur E s'il existe $M \geq 1$ telle que :*

$$\left\|T(t)\right\|_{B(E)} \leq M \quad \forall t \geq 0$$

2. *$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est dit un C_0**-semi-groupe de contraction** . Si*

$$\left\|T(t)\right\|_{B(E)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

Proposition 3.2.1 *Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité :*

$$T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Preuve.

Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geqslant 0$ on a :

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in D(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geqslant 0$.

Remarque. On voit que :

$$T(t)D(A) \subseteq D(A), \quad \forall t \geqslant 0.$$

Proposition 3.2.2 *Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$\begin{aligned} T(.)x : [0,+\infty[&\longrightarrow E \\ t &\longmapsto T(t)x \end{aligned}$$

est dérivable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x \in D(A)$ et on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Preuve.

Soient $x \in D(A), \quad t \geqslant 0 \; et \; h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\left\|\tfrac{T(t+h)x-T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| &= \left\|\tfrac{T(t)T(h)x-T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| \\ &\leqslant \left\|T(t)\right\|\left\|\tfrac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| \\ &\leqslant Me^{\omega t}\left\|\tfrac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\|\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

d'où :

$$\tfrac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Si $t-h>0$, alors on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} - T(t)Ax\right\| &= \left\|\frac{T(t-h)x-T(t-h+h)x}{-h} - T(t-h+h)Ax\right\| \\ &= \left\|\frac{T(t-h)x-T(t-h)T(h)x}{-h} - T(t-h)T(h)Ax\right\| \\ &\leqslant \left\|T(t-h)\right\|\left\|\frac{x-T(h)x}{-h} - T(h)Ax\right\| \\ &\leqslant Me^{\omega(t-h)}\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax\right\| \\ &\leqslant Me^{\omega(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \left\|Ax - T(h)Ax\right\|\right)\end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} = T(t)Ax,$$

i.e :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geqslant 0$$

Alors l'application considérée dans l'énonce est dérivable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x \in D(A)$. De plus, on a l'égalité :

$$\tfrac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0,$$

Remarque.

Si $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0-semi-groupe différentiable de générateur infiniésimal A, alors pour tout $x \in D(A)$:

1. $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$ pour t > 0

2. $t \longmapsto AT(t)x$ est lipschitzienne pour t >0

Lemme 3.2.1 *Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur E. Alors, on a :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x$$

quels que soient $x \in E$ et $t \geqslant 0$.

Preuve.

En effet, soient $x \in E$ et $h > 0$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds - T(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x - T(t)x\ ds\right\|\\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|T(s)x - T(t)x\right\|\ ds\\ &\leqslant \frac{1}{h}\sup_{s\in[t,t+h]}\left\|T(s)x - T(t)x\right\|\left(\int_t^{t+h} ds\right)\\ &\leqslant \frac{1}{h}.h\sup_{s\in[t,t+h]}\left\|T(s)x - T(t)x\right\|\\ &\leqslant \sup_{s\in[t,t+h]}\left\|T(s)x - T(t)x\right\| \to_{h\searrow 0} 0\end{aligned}$$

Par la continuité de l'application $[0,+\infty[\ni t \mapsto T(t)x \in E$. On a alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x$$

Théorème 3.2.2 *Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :*

1. *Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in E$, $\int_0^t T(s)x\ ds \in D(A)$ et :*

$$A\int_0^t T(s)x\ ds = T(t)x - x \tag{3.1}$$

2. *$x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\ ds, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{3.2}$$

3. *Pour tout $x \in D(A)$:*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\ d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\ d\tau \tag{3.3}$$

Preuve.

1. Soient $x \in E$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h)T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds\\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds\end{aligned}$$

On pose $u = h+s$ alors $du = ds$. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} u = h & si \quad s = 0 \\ u = h+t & si \quad s = t \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(u)x\,du - \int_0^t T(u)x\,du\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} T(u)x\,du - \int_0^h T(u)x\,du - \int_0^t T(u)x\,du\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(u)x\,du - \int_0^h T(u)x\,du\right)\end{aligned}$$

Par passage a la limite quand $h \to 0$ et compte tenu du lemme (3.2.1), nous obtions :

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x, \quad \forall t \geqslant 0 \quad \text{ et } \int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$$

2. $\Longrightarrow$) si $x \in D(A)$ et $Ax = y$, alors nous avons :

$$\tfrac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y, \quad \forall s \in [0,t], t \geqslant 0$$

Par intégration sur [0,t] :

$$\int_0^t T(s)y\,ds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x\,ds = T(t)x - x.$$

$\Longleftarrow$) Soient $x, y \in$ E tel que :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Alors nous avons :

$$\frac{T(t)x-x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds, \quad \forall t \geqslant 0.$$

d'où

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds, \quad \forall t \geqslant 0.$$

et d'après le lemme (3.2.1) on a :

$$Ax = T(0)y = y, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Finalement on voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

3. Soit $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \int_s^t T(u)Ax\ du &= \int_s^t AT(u)x\ du \\ &= \int_s^t \frac{d}{du} T(u)x\ du \\ &= T(t)x - T(s)x \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.3 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal, alors :*

1. $\overline{D(A)} = E$
2. *A est un opérateur fermé.*

Preuve.

1. Soient $x \in E$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} t_n = 0$ alors pour :

$$x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x\ ds\ \in D(A),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x\ ds \\ &= T(0)x = x \end{aligned}$$

Par conséquent : $\overline{D(A)} = E$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset\ D(A)$ tel que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = y$. Alors Par (3.3) de Théorème (3.2.2) on a :

$$T(t)x_n - T(s)x_n = \int_s^t T(\tau)Ax_n\ d\tau,\ \forall n\ \in \mathbb{N},\ \forall t, s \geq 0.$$

Pour $s = 0$ on a :

$$T(t)x_n - T(0)x_n = T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\tau)Ax_n\ d\tau,\ \forall n\ \in \mathbb{N},.$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} T(t)x_n - x_n = \lim_{n \to \infty} \int_0^t T(\tau)Ax_n\ d\tau,\ \forall n\ \in \mathbb{N},.$$

et :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)y\ d\tau.$$

car :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t T(\tau)Ax_n \, d\tau - \int_0^t T(\tau)Ay \, d\tau \right\| &= \left\| \int_0^t T(\tau)(Ax_n - y) \, d\tau \right\| \\
&\le \int_0^t \|T(\tau)\| \|Ax_n - y\| \, d\tau \\
&\le M \int_0^t e^{\omega\tau} \, \|Ax_n - y\| \, d\tau \\
&\le M \left[\frac{e^{\omega}\tau}{\omega} \right]_0^t \|Ax_n - y\| \\
&\le M \left(\frac{e^{\omega t} - 1}{\omega} \right) \|Ax_n - y\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Pour $t > 0$ on a :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y \, d\tau$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y \, d\tau \;\Rightarrow Ax = T(0)y = y$$

d'où $x \in D(A)$ et $Ax = y$, on résulte que A est un opérateur fermé

■

Théorème 3.2.4 (Unicité de l'engendrement) *Soient deux C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ et $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors*

$$T(t) = S(t), \quad t \ge 0$$

Preuve. Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. On définit l'application :

$$[0, t] \;\ni s \mapsto U(s) = T(t - s)S(s)x \in D(A)$$

D'après la proposition (3.2.2) U est dérivable . Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}U(s)x &= -\frac{d}{ds}T(t - s)S(s) + T(t - s)\frac{d}{ds}S(s)x \\
&= -AT(t - s)S(s)x + T(t - s)AS(s)x \\
&= -T(t - s)AS(s)x + T(t - s)AS(s)x = 0.
\end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$. Par intégration sur $[0, t]$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{ds}U(s)x \, ds = 0 \;&\Rightarrow\; U(s)x - U(0)x = 0 \\
&\Rightarrow\; U(t)x = U(0)x, \quad \forall x \in D(A)
\end{aligned}$$

d'où :

$$U(0)x = T(t)x = U(t)x = S(t)x$$

Alors :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A) \text{ et } t \geq 0.$$

puisque $\overline{D(A)} = E$, on obtient que :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in E \text{ et } t \geq 0.$$

■

Dans la suite pour $\omega \geqslant 0$ on désigne par : $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / Re\lambda > \omega\}$.
Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M, \omega)$. Nous avons :

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \ \forall t \geqslant 0$$

et on voit que :

$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \leqslant e^{-Re\lambda t}\|T(t)\|\|x\| \leqslant Me^{-(Re\lambda-\omega)}t\|x\|, \forall x \in E.$$

Définissons l'application :

$$R(\lambda) : \ E \longrightarrow E,$$

Par :

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \ dt.$$

Il est claire que $R(\lambda)$ est un opérateur linéaire. De plus, on a :

$$\|R(\lambda)x\| \leqslant \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\| \ dt \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|x\|, \forall x \in E$$

d'où il résulte que $R(\lambda)$ est un opérateur linéaire borné et on a les définitions suivantes :

Définition 3.2.4 *L'application :*

$$\begin{aligned} R(., A) : \rho(A) &\longrightarrow B(E) \\ \lambda &\longrightarrow R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

S'appelle la résolvante de A

Définition 3.2.5 *Soit l'application :*

$$\begin{aligned} R_\lambda : \Lambda_\omega &\longrightarrow B(E) \\ \lambda &\longrightarrow R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \ dt \end{aligned}$$

qui vérifie la propriété $R_\lambda - R_\mu = (\lambda-\mu)R_\lambda.R_\mu \ \forall \lambda, \mu \in \Lambda_\omega$ s'appelle une pseudo-résolvante.

Définition 3.2.6 *L'opérateur :*

$$\begin{aligned} R : \Lambda_\omega &\longrightarrow B(E) \\ \lambda &\longrightarrow R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \ dt \end{aligned}$$

S'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0} \in SG(M, \omega)$.

Théorème 3.2.5 *Soient* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ *un opérateur linéaire fermé densement définit et* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset B(E)$ *une famille d'opérateurs fortement continus pour laquelle il existe* $M \geqslant 0$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \ , \forall t \geqslant 0$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe exponentiellement borné ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur* A.
2. $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *et tout* $x \in E$ *on a :*

$$R(\lambda)x = R(\lambda, A)x.$$

Preuve

1) $\Longrightarrow$ 2) pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, et tout $x \in X$ nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h)T(t)x \ dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \ dt\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h+t)x \ dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \ dt\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h+t)x \ dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \ dt \end{aligned}$$

On pose $s = h + t$ alors $ds = dt$. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} s = h & si \ t = 0 \\ s = \infty & si \ t = \infty \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)x \ ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \ dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)x \ ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \ dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt \end{aligned}$$

Par passage a la limite, on obtient :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} = \lambda R(\lambda)x - x$$

Il résulte que $R(\lambda)x \in D(A)$ et :

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \quad \forall x \in E$$

c'est à dire :

$$(\lambda I - A)\, R(\lambda)x = x, \quad \forall x \in E. \tag{3.4}$$

D'autre part, si $x \in D(A)$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)x\, dt \\ &= \left[e^{-\lambda t} T(t)x\right]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\ &= x + \lambda R(\lambda)x \end{aligned}$$

d'où :

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in D(A)$$

Puisque $\overline{D(A)} = E$:

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in E$$

Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda)x = R(\lambda, A)x, \quad \forall x \in E$

$ii) \Rightarrow i)$ Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $R(\lambda, A)x = R(\lambda)x$. On a :

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geqslant 0$$

De plus, si $T(0)x = 0$, alors $T(t)T(0)x = T(t)0 = 0$, pour tout $t > 0$. Par conséquent $R(\lambda)x = 0$, d'où il résulte $x = 0$ et par suite, $T(0) = I$. il en découle $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Alors , en appliquant la première partie de la preuve, on a :

$$R(\lambda, B) = R(\lambda) = R(\lambda, A)$$

d'où il s'ensuit que $B = A$

Dans la suite, nous présentons l'un des résultats les plus importants concernant les C_0-semi-groupes. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupe.

Théorème 3.2.6 (Hille-Yosida) . *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ si et seulement si :*

1. $\overline{D(A)} = E$ *et A un opérateur fermé*
2. $\exists\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a :*

$$\left\|R(\lambda, A)^n\right\|_{B(E)} \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3.5}$$

3.3 Equations Différentielles Semi-Linéaire

On s'intéresse aux équations différentielles semi-linéaire de type

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \ t \in J = [0, b], & ; \\ u(0) = u_0, & . \end{cases}$$

où $A : D(A) \subseteq E \to E$ est un opérateur densement défini, $f \in L^1(J, E)$ et $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.
On commence par considérer le problème de Cauchy linéaire non homogène :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \ t \in J & ; \\ u(0) = u_0 & . \end{cases}$$

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ alors la fonction $t \mapsto u(t) = T(t)u_0$ est la seule solution du problème de Cauchy homogène :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \in J\,; \\ u(0) = u_0, & pour\ u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{3.6}$$

il est tout a fait naturel de continuer à considérér pour $u_0 \in E$ la fonction $u(t) = T(t)u_0$ comme solution du problème (3.6) mais dans un sens généralisé considérons le problème :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in J\,; \\ u(0) = u_0 & . \end{cases} \tag{3.7}$$

A et f comme précédement et $u_0 \in E$, on a les définitions suivantes :

Définition 3.3.1 (Solution classique) *Une fonction $u : J \to E$ est dite solution classique ou C^1 solution de problème (3.7), si u est continue sur J, continuement différentiable sur $]0, b]$, $u(t) \in D(A)$ $\forall t \in]0, b]$ et elle vérifie l'équation (3.7).*

Définition 3.3.2 (Solution forte) *Une fonction $u : J \to E$ est dite solution absolument continue où solution forte de problème (3.7), si u est absolument continue sur J, $u' \in \mathcal{L}^1(J, E)$, $u(t) \in D(A)$ pp tout $t \in]0, b]$ et elle satisfait $u'(t) = Au(t) + f(t)$ pp tout $t \in]0, b]$ et $u(0) = u_0$.*

Remarque 3.3.1 *Toute solution classique est une solution forte (l'inverse n'est pas toujours vrais).*

Théorème 3.3.1 (Principe de Duhamel) *Toute solution forte du problème (3.7) est donnée par la formule :*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.8}$$

en particulier toute solution classique est donnée par la formule (3.8).
La formule (3.8) est dite formule de variation des constantes.

Preuve. Si u est une solution forte de (3.7), $t \in [0, b]$, on défini $g : [0, t] \to E$ par :

$$g(s) = T(t-s)u(s), \quad s \in [0, t]$$

alors g est p.p différentiable sur $[0, t]$ et sa dérivée appartient à $L^1([0, t], E)$ et

$$\begin{aligned} g'(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \quad \textit{pptout } s \in [0, t] \end{aligned}$$

or $f \in L^1([0, b], E)$ donc l'application $s \mapsto T(t-s)f(s)$ est intégrable sur $[0, t]$.
En intégrant sur $[0, t]$ on obtient la formule (3.8). ■

Définition 3.3.3 (Mild solution) *Une fonction $u : J \to E$ est dite mild solution où C_0-soluion de problème (3.7), si u est continue sur J, $u(0) = u_0$ et satisfait l'équation intégrale :*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Théorème 3.3.2 *Soit $A : D(A) \subseteq E \to E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, soit $f \in L^1([0, b], E)$ continue sur $[0, b]$ et soit*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, b].$$

Si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) *v est continuement différentiable sur* $[0, b]$

ii) $v(t) \in D(A)$, $\forall t \in [0, b]$ *et* $t \mapsto Av(t)$ *est continue sur* $[0, b]$.

Alors :

• $\forall u_0 \in D(A)$, *le problème (3.7) admet une unique solution classique.*

Et

• *S'il existe* $u_0 \in D(A)$ *tel que le problème (3.7) admet une solution classique alors* v *satisfait i) et ii).*

Preuve. Pour tout $t \in [0, b]$ et $h > 0$, on a :

$$\frac{1}{h}\Big(T(h) - I\Big)v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.$$

• Supposons $i)$ satisfaite, f étant continue et v continuement différentiable sur $[0, b]$ alors le côté droit de l'égalité précédente admet une limite, par conséquant $v(t) \in D(A)$ et on a :

$$Av(t) = v'(t) - f(t) \;\; ou \; bien \;\; v'(t) = Av(t) + f(t)$$

• Supposons $ii)$ satisfaite, alors v est différentiable (à droite) et sa dérivée est continue, v étant continue donc continuement différentiable et satisfait

$$v'(t) = Av(t) + f(t) \;\; comme \;\; v(0) = 0$$

On a partout $u_0 \in D(A)$, $t \mapsto u(t) = T(t)u_0 + v(t)$, $t \in [0, b]$ est une solution classique de (3.7).

• Supposons maintenant qu'il existe un $u_0 \in D(A)$ tel que l'équation (3.7) admet une solution classique u, elle est donc donnée par la formule :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

donc la fonction $t \mapsto v(t) = u(t) - T(t)u_0$ est différentiable sur $[0, b]$ et on a :
$v'(t) = u'(t) - T(t)Au_0$ continue sur $[0, b]$ donc v' satisfait $i)$.
Si $u_0 \in D(A)$ alors $T(t)u_0 \in D(A)$, $\forall t \in [0, b]$. Par suite $v(t) = u(t) - T(t)u_0 \in D(A)$, $\forall t \in [0, b]$ et

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)u_0 = u'(t) - f(t) - T(t)Au_0.$$

Donc $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $[0, b]$ par suite v satisfait $ii)$. ■

Corollaire 3.3.1 *Si $A : D(A) \to E$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et f est de classe C^1 sur $[0,b]$ alors pour tout $u_0 \in D(A)$ le problème (3.7) admet une unique solution classique.*

Preuve. L'application $t \mapsto v(t)$ est continuement différentiable, en effet

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t T(s)f(t-s)ds \\ v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds \end{aligned}$$

la conclusion suit d'après le théorème (3.3.2), i). ■

Corollaire 3.3.2 *Si $A : D(A) \subseteq E \to E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, soit $f \in L^1([0,b],E)$ continue sur $[0,b]$, $f(s) \in D(A)$ $\forall s \in [0,b]$ et $Af(.) \in L^1([0,b],E)$ alors pour tout $u_0 \in D(A)$ le problème (3.7) admet une unique solution classique.*

Preuve. En effet : pour tout $t \in [0,b]$ et tout $s \in [0,t]$ on a : $T(t-s)f(s) \in D(A)$, de plus la fonction : $t \mapsto AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ est intégrable par suite $v(t) \in D(A)$, $t \in [0,b]$, de plus la fonction

$$\begin{aligned} t \mapsto Av(t) &= A\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t T(t-s)Af(s)ds \end{aligned}$$

est continue sur $[0,b]$, la conclusion suit à partir du théorème (3.3.2), ii). ■

Théorème 3.3.3 *Soit $A : D(A) \subseteq E \to E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, soit $f \in L^1([0,b],E)$ continue sur $[0,b]$ et soit*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,b].$$

Si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite :

i) *v est p.p différentiable sur $[0,b]$ et $v' \in L^1([0,b],E)$*

ii) *$v(t) \in D(A)$, $\forall t \in [0,b]$ et $Av(.) \in L^1([0,b],E)$.*

Alors :

• $\forall u_0 \in D(A)$, *le problème (3.7) admet une unique solution forte.*

Et

• *S'il existe* $u_0 \in D(A)$ *tel que le problème (3.7) admet une solution forte alors* v *satisfait i) et ii).*

Preuve. La même preuve de théorème (3.3.2) ∎

Corollaire 3.3.3 *Si* $A : D(A) \subseteq E \to E$ *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *soit* f *est p.p différentiable sur* $[0, b]$ *et* $f' \in C([0, b], E)$ *alors pour tout* $u_0 \in D(A)$ *le problème (3.7) admet une unique solution forte.*

Preuve. La même preuve de corollaire (3.3.2) ∎

Nous intéressons maintenant à un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t \in J\,; \\ u(0) = u_0 & . \end{cases} \tag{3.9}$$

Avec $(E, \|.\|)$ espace de Banach, $A : D(A) \subset E \to E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Soit D un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E$ et $f : D \to E$ continue. Par intégrée avec le cas non homogène, on adapte la définition suivante :

Définition 3.3.4 *Une fonction* $u : J \to E$ *est dite mild solution où* C_0*-soluion de problème (3.7), si* $(t, u(t)) \in D$, $\forall t \in J$ *et satisfait l'équation intégrale :*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds$$

Définition 3.3.5 *une fonction* $f : D \to E$ *est dite :*

i) *Localement lipscitzienne par rapport à sa 2ème variable s'il existe* $r > 0$ *et* $L > 0$ $(L = L_{u_0})$ *tel que* $J \times B(u_0, r) \subset D$ *et*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in B(u_0, r) \text{ et } t \in J.$$

ii) *Localement lipscitzienne par rapport à ses deux variables s'il existe* $\alpha > 0$, $r > 0$ *et* $L > 0$ $(L = L_{u_0})$ *tel que* $[0, \alpha] \times B(u_0, r) \subset D$ *et*

$$\|f(t, u) - f(s, v)\| \leq L(\|u - v\| + \|t - s\|), \quad \forall u, v \in B(u_0, r) \text{ et } t, s \in [0, \alpha].$$

iii) *Globalement lipscitzienne par rapport à sa 2ème variable s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall (t,u),(t,v) \in D.$$

iv) *Globalement lipscitzienne par rapport à ses deux variables s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\|f(t,u) - f(s,v)\| \leq L(\|u - v\| + \|t - s\|), \quad \forall (t,u),(t,v) \in D.$$

Théorème 3.3.4 *Si $A : D(A) \subseteq E \to E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $f : D \to E$ continue et localement lipscitzienne par rapport à sa 2ème variable, Alors :*
Il existe $b > 0$ tel que le problème de Cauchy (3.9) admet une unique C_0-solution définie sur $[0,b]$.

Nous énnonçons le lemme suivant qui est lui même un résultat intéressant.

Lemme 3.3.1 *Si $A : D(A) \subseteq E \to E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $f : D \to E$ continue, bornée et globalement lipscitzienne par rapport à sa 2ème variable, Alors :*
pour tout $u_0 \in E$ le problème (3.9) admet une unique C_0-solution définie sur J

Preuve.[Lemme 3.3.1] Soit $u_0 \in E$, on définit l'opérateur $F : C(J,E) \to C(J,E)$ par :

$$F(u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad \forall u \in C(J,E) \text{ et } t \in J.$$

Alors pour tout $u, v \in C(J,E)$ et tout $t \in J$ on a :

$$|F(u)(t) - F(v)(t)| \leq Lt\|u - v\|_{C(J,E)}$$

par induction on obtient

$$|F^n(u)(t) - F^n(v)(t)| \leq \frac{L^n t^n}{n!}\|u - v\|_{C(J,E)}$$

d'où

$$\|F^n(u) - F^n(v)\| \leq \frac{L^n b^n}{n!}\|u - v\|_{C(J,E)}$$

On fait le sup sur t pour n assez grand, F^n est une contraction stricte par le théorème de Banach, alors F^n admet un unique point fixe $u \in C(J,E)$ et

$$\|Fu - u\| = \|F(F^n u) - F^n(u)\| = \|F^n(Fu) - F^n(u)\| \leq q\|Fu - u\|, \quad \textit{avec } q < 1$$

d'où $Fu = u$ est u est alors le seul point fixe de F car tout point fixe de F est un point fix de F^n. Ce point fixe est alors solution du problème (3.9). ■

Preuve.[Théorème 3.3.4] D étant ouvert, il existe alors $b > 0$ et $r > 0$ tel que : $[0,b] \times B(u_0, r) \subset D$, f est continue et localement lioschitzienne par rapport à sa 2ème variable, en diminuant b et/ou r si nécessaire, il existe $M > 0$ tel que : $\|f(t,u)\| \leq M$, $\forall (t,u) \in [0,b] \times B(u_0, r)$ et

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall (t,u), (t,v) \in [0,b] \times B(u_0, r)$$

Soit $\rho : E \to E$ définie par :

$$\rho(y) = \begin{cases} y, & si \;\; y \in B(u_0, r)\,; \\ \frac{r}{\|y-u_0\|}(y - u_0) + u_0, & si \;\; y \in E \backslash B(u_0, r). \end{cases}$$

ρ envoie alors E dans $B(u_0, r)$ et elle est lipschitzienne de constante 2.
On définit : $g : [0,b] \times E \to E$ par $g(t,y) = f(t, \rho(y))$, $(t,y) \in J \times E$.
f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable sur $[0,b] \times B(u_0, r)$, donc g satisfait les même propriétés.
D'après le Lemme 3.3.1, le problème de Cauchy :

$$u' = Au + g(t,u); \quad u(0) = u_0$$

à une unique C_0-solution $u : [0,b] \to E$. Comme $u(0) = u_0$ et u est continue en $t = 0$, diminuant b si nécessaire pour avoir $u(t) \in B(u_0, r)$ pour $t \in [0,b]$. Dans ce cas on a : $\rho(y) = y$ et donc $g(t,y) = f(t,y)$ et le problème (**??**)-(3.9) admet alors une unique C_0-solution. ■

3.4 Equations Différentielles Semi-Linéaire d'ordre Fractionnaire

On considère le problème d'équations différentielles semi-linéaire avec ordre fractionnaire

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y(t)),\; t \in J = [0,b], 0 < \alpha < 1 \tag{3.10}$$

$$y(0) = 0, \tag{3.11}$$

Avec A un opérateur linéaire fermé et non borné de E un espace de Banach, $f \in C(J, E)$ et D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

L'équation (3.10) est équivalente à l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} A \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \tag{3.12}$$

Définition 3.4.1 *On dit que la fonction continue y est mild solution du problème (3.10)-(3.11), $\forall t \in [0, b]$, $y(0) = 0$ et y satisfait la formule de variation des constantes :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t T(t-s)(t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad t \geq 0 \tag{3.13}$$

Soit $B_\lambda = \lambda R(\lambda, A) = \lambda(\lambda I - A)^{-1}$. Alors pour tout $x \in D(A)$, $B_\lambda x \mapsto x$ quand $\lambda \mapsto \infty$.

Aussi de la condition de Hille-Yosida (avec $n = 1$), il est facile de voir que $\lim_{\lambda \to \infty} |B_\lambda x| \leq M|x|$, depuis

$$|B_\lambda| = |\lambda(\lambda I - A)^{-1}| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - \omega}$$

Ainsi $\lim_{\lambda \to \infty} |B_\lambda| \leq M$.

Notons aussi que, si y satisfait (3.13), alors

$$y(t) \quad = \quad \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t T'(t-s)(t-s)^{\alpha-1} B_\lambda f(s, y(s)) ds \quad , t \geq 0.$$

Théorème 3.4.1 *Soit $f : J \times C(J, E) \to E$ continue. Supposons qu'il existe une constante positive k telle que*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k\|u - v\|, \quad \textit{pour} \quad t \in J \quad \textit{et} \quad u, v \in C(J, E)$$

Si

$$kM^* b^\alpha E_{1,\alpha+1}(|\omega|b) < 1. \tag{3.14}$$

où $M^* = M^2 max\{e^{\omega b}, 1\}$. Alors il existe une mild solution unique du problème (3.10)-(3.11) sur J.

Preuve. Transformons le problème (3.10)-(3.11) en un problème de point fixe.

On considère l'opérateur $F : C(J, E) \to C(J, E)$ défini par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0, b].$$

Soient $y, z \in C(J, E)$, alors pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|F(y)(t) - F(z)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}T(t-s)[f(s,y(s)) - f(s,z(s))]ds\right| \\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}T'(t-s)B_\lambda[f(s,y(s)) - f(s,z(s))]ds\right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}T'(t-s)[f(s,y(s)) - f(s,z(s))]ds\right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Me^{\omega(t-s)}|f(s,y(s)) - f(s,z(s))|ds\right| \\
&\leq \frac{kM^2e^{\omega t}}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-\omega s}\|y(s) - z(s)\|_C ds\right| \\
&\leq kM^2e^{\omega t}\|y-z\|_\infty\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-\omega s}ds\right|
\end{aligned}$$

On pose

$$I_1 = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-\omega s}ds$$

On calcule I_1 par intégration par partie nous avons :

$$\begin{cases} u = e^{-\omega s} & , \\ v' = (t-s)^{\alpha-1}ds & , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\omega e^{-\omega s}ds \\ v = -\frac{1}{\alpha}(t-s)^\alpha \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[-\frac{1}{\alpha}(t-s)^\alpha e^{-\omega s}\right]_0^t - \frac{\omega}{\alpha}\int_0^t (t-s)^\alpha e^{-\omega s}ds \\
&= \frac{1}{\alpha}t^\alpha - \frac{\omega}{\alpha}\int_0^t (t-s)^\alpha e^{-\omega s}ds
\end{aligned}$$

On pose

$$I_2 = \int_0^t (t-s)^\alpha e^{-\omega s}ds,$$

par intégration par partie, on obtient :

$$I_2 = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1} - \frac{\omega}{\alpha+1}\int_0^t (t-s)^{\alpha+1}e^{-\omega s}ds.$$

Alors ,

$$I_1 = \frac{1}{\alpha}t^\alpha - \frac{\omega}{\alpha(\alpha+1)}t^{\alpha+1} + \frac{\omega^2}{\alpha(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+1}e^{-\omega s}ds$$

Puis, on pose

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^t (t-s)^{\alpha+1}e^{-\omega s}ds \\
&= \frac{1}{\alpha+2}t^{\alpha+2} - \frac{\omega}{\alpha+2}\int_0^t (t-s)^{\alpha+2}e^{-\omega s}ds.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\alpha}t^{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha(\alpha+1)}t^{\alpha+1} + \frac{\omega^2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}t^{\alpha+2} \\
&\quad -\frac{\omega^3}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+2}e^{-\omega s}ds \\
&\quad \vdots \\
&= t^{\alpha}\Big[\frac{1}{\alpha} - \frac{\omega t}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{\omega^2 t^2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \cdots \frac{\omega^k t^k}{\alpha!}\Big]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(I_1) &= t^{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{\omega t}{\alpha\Gamma(\alpha)(\alpha+1)} + \frac{\omega^2 t^2}{\alpha\Gamma(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)} \cdots \frac{\omega^k t^k}{\alpha!\Gamma(\alpha)}\right] \\
&= t^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\omega t}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{\omega^2 t^2}{\Gamma(\alpha+3)} \cdots \frac{\omega^k t^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}\right] \\
&= t^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega t)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&= t^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(-\omega t)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t) - F(z)(t)| &\leq kM^2 e^{\omega t}t^{\alpha}|E_{1,\alpha+1}(-\omega t)|\|y-z\|_{\infty} \\
&\leq kM^2 e^{\omega t}t^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(|\omega|t)\|y-z\|_{\infty}
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,b]}|F(y)(t) - F(z)(t)| &\leq \sup_{t\in[0,b]}(kM^2 e^{\omega t}t^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(|\omega|t)\|y-z\|_{\infty}) \\
\|F(y) - F(z)\|_{\infty} &\leq kM^* b^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(|\omega|b)\|y-z\|_{\infty}
\end{aligned}$$

où $M^* = M\max\{e^{\omega b}, 1\}$. Par la condition (3.14) l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui donne une mild solution unique au problème (3.10)-(3.11). ■

3.5 Exercices

Dans cette section, nous exposons une série d'exercices d'application pour illuster l'utilité de nos principaux résultats.

3.5.1 Énoncés

Exercice 3.5.1 *Etudier l'existence de la solution de l'équation semi-linéaire avec condition périodique sous la forme :*

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \qquad t \in J = [0, b], \tag{3.15}$$

$$u(0) = u(b), \tag{3.16}$$

Où $A : D(A) \subset E \to E$ *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *sur un espace de Banach* E *et* $f : J \times E \to E$ *est une fonction continue,* $u(b) \in E$.

Exercice 3.5.2 *Etudier l'existence de la solution de l'équation semi-linéaire avec condition périodique sous la forme :*

$$u''(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \qquad t \in J = [0, b], \tag{3.17}$$

$$u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1 \tag{3.18}$$

Où A *est le générateur infinitésimal de la famille cosinus fortement continue d'opérateurs linéaires bornés* $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *dans l'espace de Banach* E *et* $f : J \times E \to E$ *est une fonction continue avec données initiales* $u_0, u_1 \in E$.

3.5.2 Correction des exercices

Solution 3.5.1 *La solution du problème (3.15)-(3.16) est défini par :*

$$u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds \tag{3.19}$$

et on a :

$$u(b) = T(b)u(0) + \int_0^b T(b-s)f(s, u(s))ds$$

En utilisant la condition (3.16), en effet : $u(0) = u(b)$

$$\begin{aligned} u(0) - T(b)u(0) &= \int_0^b T(b-s)f(s, u(s))ds \\ u(0)[I - T(b)] &= \int_0^b T(b-s)f(s, u(s))ds \\ u(0) &= [I - T(b)]^{-1} \int_0^b T(b-s)f(s, u(s))ds \end{aligned}$$

D'où la solution

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds + T(t)[I - T(b)]^{-1} \int_0^b T(b-s)f(s, u(s))ds$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de solution, on suppose que les hypothèses suivantes sont verifier :

H1) $\exists M > 0,\ \|T(t)\|_{B(E)} \leq M,\ \forall t \in J.$

H2) $\exists K > 0,\ |f(t,u) - f(t,v)| \leq K|u - v|,\ \forall t \in J$ *et* $\forall u, v \in E.$

Transformons le problème (3.15)-(3.16) en un problème de point fixe. On considère l'opérateur $F : C(J,E) \to C(J,E)$ *défini par :*

$$F(u)(t) = \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds + T(t)[I - T(b)]^{-1}\int_0^b T(b-s)f(s,u(s))ds$$

Montrons que F *est un opérateur de contraction. En effet, Soient* $u, v \in C(J,E)$*, alors pour tout* $t \in J$*, on a*

$$\begin{aligned}
|F(u)(t) - F(v)(t)| &\leq \int_0^t |T(t-s)||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\quad + |T(t)[I - T(b)]^{-1}| \int_0^b |T(b-s)||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq \|T(t-s)\|_{B(E)} \int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\quad + \|T(t)[I - T(b)]^{-1}\|_{B(E)} \|T(b-s)\|_{B(E)} \int_0^b |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq MK \int_0^t |u(s) - v(s)|ds + MK\|T(t)[I - T(b)]^{-1}\|_{B(E)} \int_0^b |u(s) - v(s)|ds
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$*, nous avons*

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq MKb\|u - v\|_\infty + MKb\|T(b)[I - T(b)]^{-1}\|_{B(E)}\|u - v\|_\infty$$

Alors

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq MKb(1 + \|T(b)[I - T(b)]^{-1}\|_{B(E)})\|u - v\|_\infty$$

l'opérateur F *est une contraction si*

$$MKb(1 + \|T(b)[I - T(b)]^{-1}\|_{B(E)}) < 1.$$

Dans ce cas là, on dit que l'opérateur F *admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème (3.15)-(3.16) par le principe de contraction de Banach.*

Solution 3.5.2 *Si* u *est une solution du problème (3.19)-(3.18) alors*

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \qquad \forall t \in J$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de solution, on suppose que les hypothèses suivantes sont verifier :

H1) $\exists M,\ M = sup\{\|S(t-s)\|_{B(E)} : \forall (t,s) \in J\}$.

H2) $\exists K > 0,\ |f(t,u) - f(t,v)| \leq K|u-v|,\ \forall t \in J\ et\ \forall u, v \in E$.

Transformons le problème (3.19)-(3.18) en un problème du point fixe. On considère l'opérateur $F : C(J,E) \to C(J,E)$ défini par :

$$F(u)(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds$$

Montrons que F est un opérateur de contraction. En effet, Soient $u, v \in C(J,E)$, alors pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|F(u)(t) - F(v)(t)| &= \left| \int_0^t S(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]ds \right| \\
&\leq \int_0^t |S(t-s)||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq \|S(t-s)\|_{B(E)} \int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq \|S(t-s)\|_{B(E)} \int_0^t K|u(s) - v(s)|ds
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq MKb\|u - v\|_\infty.$$

l'opérateur F est une contraction si $MKb < 1$. Dans ce cas là, on dit que l'opérateur F admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème (3.19)-(3.18) par le principe de contraction de Banach.

3.6 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre un rappelle de quelques définitions et propriétés de la théorie de C0-semi-groupes, étude de deux type des équations différentielles semi-linéaire d'ordre fractionnaire et on a terminé ce chapitre par une série d'exercices corrigés.

Conclusion

Dans ce polycopié on a présenté quelques résultat d'existence et d'unicité des solution d'un problème aux limites d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo cas où $\alpha \in]0,1[$.

On a présenté aussi quelques résultat d'existence et d'unicité des solutions d'un problème d'équations différentielles semi-linéaire d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville où $\alpha \in]0,1[$.

Ces résultats sont obtenus à l'aide des notion de l'analyse fonctionnelle, la théorie des C_0 semi-groupes, calcule fractionnaire et l'argument du point fixe.

Nous espérons, dans l'avenir appliquer les méthodes cités dans ce polycopié à d'autres équations et développer d'autres méthodes numériques de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires, moins couteuse et plus précises que celles proposées dans ce texte.

Table des matières

Bibliographie

[1] M. Adimy, K. Ezzinbi ,The Basic Theory Of Abstract Semilinear Functional Differential Equations With Nondense Domain, *in "Delay Differential Equations with Applications", ed by O. Arino, M.L. Hbid and E. Ait Dads, NATO Science Series II : Mathematics, Physics and Chemistry,* Vol. 205 (2006), Springer, Berlin, pp.347-407.

[2] W. Arendt, Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems, *Israel J. Math.* 59 (1987), 327-352.

[3] W. Arendt, Resolvent positive operators, *Proc. London Math. Soc.* 54(1987), 321-349.

[4] M. Belmekki and K. Mekhalfi, On fractional differential equations with State-dependent delay via Kuratowski measure of noncompactness, *Filomat*, vol. 31, no. 2, pp. 451Ű460, 2017.

[5] M. Belmekki, K. Mekhalfi and S.K. Ntouyas, Semilinear functional differential equations with fractional order and finite delay, *Malaya Journal of Matematik* 1 (2012), 73–81.

[6] M. Belmekki, K. Mekhalfi and S.K. Ntouyas, Existence and uniqueness for semilinear fractional differential equations with infinite delay via resolvent operators, *Journal of Fractional Calculus and Applications,* Vol. 4(2) (2013), 267-282.

[7] A. Granas, J. Dugundji *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[8] J. Hale , *Theory of Functional Differential Equations.* Applied mathematical sciences ; vol.3 Springer-Verlag, New york, 1977.

[9] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag,New York/Berlin, 1981.

[10] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[11] Ludovic Dan Lemle,Une étude comparative concernat les semi-groupes de classe C_0 et les semi-groupes intégrés.*Lecturas Matematicas* Volumen 26 (2005), pages 27-88.

[12] Mekhalfi K, Torres DFM. Generalized fractional operators on time scales with applications to dynamic equations. *Eur Phy J Spec Top.* (2019) 226 :3489Ũ99. doi : 10.1140/epjst/e2018-00036-0

[13] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.

[14] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, London, 1974.

[15] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[16] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego, 1999.

[17] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fract. Calculus Appl. Anal.*, 5 (2002), 367-386.

[18] H. Ye, J. Gao, Y. Ding, A generalized Gronwall inequality and its app lication to a fractional differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* 328 (2007), 1075-1081.