République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Équations différentielles et modélisation

Présenté par :

M^lle BENZAID Meriem Imane

Étude de l'indice de point fixe

Encadrant :

M^me BELATTAR Zokha

Maitre de Conférence "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le : 10/06/2019

Devant le jury composé de :

Présidente :	M^me SAKHI Hanane (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinatrice :	M^me MEKHALFI Kheira (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Mme. BELATTAR Zokha (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2018–2019

REMERCIEMENT

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon **DIEU** le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon encadreur **Mme BELATTAR ZOKHA** qui m'a accompagné à faire ce modeste travail. Je vous remercie pour votre accueille et vos conseils.

Ma sincère reconnaissance aux membres du jury :

- **Présidente du jury** :Mme SAKHI HANANE.
- **Examinatrice** : Mme MEKHALFI KHEIRA.

Mesdames les jurys, vous me faites un grand honneur en acceptant de juger ce travail.

Je remercie infiniment mes parents qui m'ont encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.

Mes remerciements vont à tous mes enseignants à tous les niveaux de l'école primaire, moyen, secondaire et université.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles et sans limite de **mes chers parents** qui n'ont cessé de me donner avec amour le nécessaire soutien, sacrifice, tendresse et prière tout au long de mes études pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui. Que **Dieu** vous protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.

Je dédie aussi ce travail à...

A mes grands-parents maternelle et une pensée à mes grands-parents paternel.

A mes frères Youcef et Younes, je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A mon fiancé Ahmed, ta gentillesse, tes conseils et tes encouragements m'ont permis de réussir.

A ma tante, mes oncles, tous mes cousins et cousines et ma futur belle famille.

A tous mes amies et collègues du département, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de santé et bonheur.

A tous ceux qui m'estiment.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le degré topologique et l'indice de point fixe sont des théories importantes dans l'analyse fonctionnelle non linéaire, car ils permettent d'obtenir des résultats sur l'existence et le nombre de solutions des équations différentielles (voir [17]) et de systèmes dynamiques (voir [7],[3]).

L'étude de l'indice de point fixe s'applique à une équation de la forme

$$f(x) = x,$$

qui est liée à la théorie des points fixes. D'après le théorème d'extension de Dugundji (2) nous nous permettons de définir un entier $i_A(f, \Omega)$ appelé l'indice de point fixe de f sur Ω par rapport à A, où A est un rétracté de l'espace de Banach qui le contient, Ω un ouvert borné dans A et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ une application complètement continue sans points fixes sur $\partial\Omega$ (voir [10]). Cet indice de point fixe qui est unique est une extension du degré topologique de Leray-Schauder. L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'indice de point fixe appliqué à une k-contraction d'ensembles grâce à l'indice de point fixe d'une application complètement continue (voir [8]).

Le plan de ce travail se décompose en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats qui concernent : les applications compactes, la convexité, le degré topologique en dimension finie (Brouwer) et le degré topologique en dimension infinie (Schauder).

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la théorie de k-contraction d'ensembles, pour cela nous nous intéressons à la mesure de non compacité qui joue un rôle très important dans la théorie des points fixes et a de nombreuses applications dans diverses branches dans l'analyse non linéaire. D'une façon générale, une mesure de non compacité est une fonction définie sur la famille de tous les sous-ensembles non vides et bornés d'un espace métriques, de sorte qu'elle est égale à zéro pour toute la famille d'ensemble relativement compacte. Le concept de la mesure de non compacité a été introduit pour la première fois par Kuratowski en 1930. En 1955, le mathématicien italien Darbo a utilisé la mesure de non compacité de Kuratowski pour étudier une classe d'application (k-contraction d'ensembles, $0 \leq k < 1$). Le théorème de point fixe de Darbo qui est une généralisation du théorème de Schauder est utile pour assurer l'existence de point fixe d'une k-contraction d'ensembles (voir [18]).

La première section du troisième chapitre est consacrée à l'étude de l'indice de point fixe d'une application complètement continue dans un espace rétracté d'un espace de Banach, cet indice de point fixe est défini par le degré topologique de Schauder (voir [10]). Dans la deuxième section, l'indice de point fixe d'une application complètement continue est prolongé à l'indice de point fixe d'une contraction d'ensembles par le théorème d'extension de Dugundji.
Finalement, dans la troisième section nous donnons une application sur l'existence d'un point fixe positif appliquée aux cônes pour les contractions strictes d'ensembles en utilisant l'indice de point fixe.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

La première partie de ce chapitre est consacrée de rappeler quelques notions et théorèmes qui seront utilisées dans la suite. Dans la deuxième partie, nous étudions les définitions et les théorèmes du degré topologique en dimension finie et en dimension infinie que nous aurons besoin dans l'étude de l'indice du point fixe.

1.1 Application compacte

Définition 1.1.1 *[15] Soient E et F deux espaces normés, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est compacte si l'image par T de la boule unité de E est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.2 *[15] Soient E et F deux espaces normés, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est compacte si et seulement si l'image de toute suite borné possède une sous-suite convergente.*

Définition 1.1.3 *[20] Soient E et F deux espaces de Banach et $\Omega \subset E$ un ouvert. On dit que $T : \Omega \longrightarrow F$ est complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.*

Remarque 1.1.1 *[15]*

Il est clair que toute application compacte est complètement continue. La réciproque est vraie si Ω est borné, où Ω est un ouvert de E.
$\overline{T(E)}$ compacte $\Longleftrightarrow T(E)$ relativement compacte.

Proposition 1.1.1 *[20] T compacte $\Longleftrightarrow T(E)$ relativement compacte.*

Définition 1.1.4 *Soit (X, d_X) un espace métrique. Soit F une partie de $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans X. Soit x un point de X, on dit que F est équicontinue en x si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \textit{ tel que } \forall y \in X, d(x,y) < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in F.$$

Définition 1.1.5 *Soit (X, d_X) un espace métrique. Soit F une partie de $C(X)$, on dit que F est équicontinue sur X si F est équicontinue en chaque point x de X.*

Théorème 1.1.1 ***(Théorème d'Ascoli Arzela)*** *[4]*
Un sous-ensemble $F \subset C([0,a], E)$(avec $a > 0$) est relativement compact si est seulement si :

(1) F est équicontinue,

(2) Pour tout $t \in [0,a]$, $\quad F(t) = \{x(t) : x(.) \in F\}$ est relativement compact en E.

1.2 La convexité

Définition 1.2.1 *[13] Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble E de X est dit convexe si :*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in E, \quad \forall x, y \in E \quad \textit{et} \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Remarque 1.2.1 *[13] L'intersection de toute famille des ensembles convexes est un ensemble convexe.*

Définition 1.2.2 *[13] Si E est un sous-ensemble de X, alors l'intersection de tous les ensembles convexes contenant E est appelé enveloppe convexe de E, noté par $conv(E)$.*

Lemme 1.2.1 *[13] Si X est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $E, E_1, ..., E_n$ sont des sous-ensembles convexes de X et $F \subset X$, alors :*

$$cvx(E) \subset E, \tag{1.1}$$

où $cvx(E)$ est l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de l'ensemble E.

$$conv(F) = cvx(F), \tag{1.2}$$

$$conv\left(\cup_{i=1}^{n} E_i\right) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad (i = 1, ..., n); n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.3}$$

Lemme 1.2.2 *[13] Soit E un sous-ensemble d'un espace normé X, alors pour tout $x \in X$:*

$$\sup_{y \in conv(E)} \|x - y\| = \sup_{z \in E} \|x - z\|$$

Définition 1.2.3 *[4] Soit (X, d_X) un espace métrique et E un sous-ensemble de X, le diamètre de E est défini par :*

$$diam(E) = \sup_{x,y \in E} d(x, y).$$

Remarque 1.2.2 *[13] $diam(\emptyset) = 0$ et $diam(\{a\}) = 0$, avec $a \in E$.*

Corollaire 1.2.1 *[13] Soit E un sous-ensemble borné d'un espace normé X, alors :*

$$diam(E) = diam(conv(E)).$$

Proposition 1.2.1 *[4] Soit (X, d_X) un espace métrique et E, F deux sous-ensembles de X, si $E \subset F$, alors :*

$$diam(E) \leq diam(F) \text{ et } diam(\overline{E}) = diam(E).$$

Proposition 1.2.2 *[4] Soit X un espace de Banach et $E, F \subset X$, alors on a :*

(1) $diam(\lambda F) = |\lambda| diam(F)$;

(2) $diam(x + F) = diam(F)$;

(3) $diam(E + F) \leq diam(E) + diam(F)$.

1.3 Le degré topologique en dimension finie

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$ (noté $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$), et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. L'idée du degré topologique est d'associer à la fonction f en y_0 relativement à Ω un entier qui est non nul pour avoir l'existence de solution de l'équation de la forme :

$$x \in \Omega, \quad f(x) = y_0.$$

1.3.1 Le degré topologique de Brouwer

Définition 1.3.1 *[16] Soit f une application de classe $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Notons $J_f(x_0)$ le déterminant de la matrice Jacobienne de f en un point x_0 de Ω. Le point x_0 est dit point singulier si $J_f(x_0) = 0$. On désigne par $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points singuliers, c'est à dire :*

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}.$$

Définition 1.3.2 *[16] Un élément $x_0 \in \Omega$ est dit point régulier si $J_f(x_0) \neq 0$.*

Définition 1.3.3 *[16] $y_0 \in f(\overline{\Omega})$ est dite une valeur régulière si :*

$$f^{-1}(y_0) \cap S_f(\Omega) = \emptyset.$$

Dans le cas contraire, y_0 est dite une valeur singulière.

Définition 1.3.4 *:(**Degré topologique de Brouwer**) : [16]*
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application de $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que $y_0 \notin f(\partial\Omega) \cup S_f(\Omega)$. On définit le degré topologique de f en y_0 relativement à Ω par :

$$deg(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\})} sgnJ_f(x) & si \quad \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\}) \neq \emptyset, \\ 0 & si \quad \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset. \end{cases}$$

Remarque 1.3.1 *[16] si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ est une valeur singulière, on pose :*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1),$$

où y_1 une valeur régulière proche de y_0.

Définition 1.3.5 *[14] Soient $\alpha > 0$, $\varphi : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$, on dit que φ est une fonction poids d'indice α s'il existe $\delta \in [0, \alpha]$ tel que :*

$$\varphi(t) = 0, \quad \forall t \notin [\delta, \alpha],$$

on note W_α l'ensemble des fonctions poids d'indice α.

Remarque 1.3.2 *[14] On note $W^1_\alpha = \left\{ \varphi \in W_\alpha \quad tel \quad que \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|_2)dx = 1 \right\}$.*

Définition 1.3.6 *[14] Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et y_0 un point de $\mathbb{R}^n$ tel que : $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ alors le degré de f en y_0 dans Ω est définit par :*

$$deg_\varphi(f, \Omega, y_0) = \int_\Omega \varphi\left(\|f(x) - y_0\|_2\right) J_f(x)dx,$$

où $\varphi \in W^1_\alpha$ une fonction poids d'indice α tel que :

$$0 < \alpha < \gamma = \min\left\{\|f(x) - y_0\|_2, x \in \partial\Omega\right\}.$$

Définition 1.3.7 *[20] Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, il existe une suite de fonction $f_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|f_k - f\|_\Omega = 0$ alors pour tout $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, on a :*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \lim_{k \to +\infty} deg(f_k, \Omega, y_0).$$

Proposition 1.3.1 *[14] Soient Ω un ouvert borné, $f_1, f_2 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions continues telles que $y_0 \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\|f_1 - f_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{4} dist(y_0, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)),$$

on a

$$deg(f_1, \Omega, y_0) = deg(f_2, \Omega, y_0).$$

1.3.2 Propriétés principales du degré topologique de Brouwer

Nous présentons les propriétés les plus importantes du degré topologique de Brouwer. Dans la suite, I désigne l'application identité sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.1 *([4] ,[14]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue, si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, alors il existe un entier $deg(f, \Omega, y_0)$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(1) ***(Normalisation)***

i) $deg(I, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1 & si \quad y_0 \in \Omega, \\ 0 & si \quad y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

ii) $deg(-I, \Omega, y_0) = \begin{cases} (-1)^n & si \quad y_0 \in \Omega, \\ 0 & si \quad y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

(2) ***(Additivité)*** *Supposons que Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles ouverts disjoints de Ω et $y_0 \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, alors :*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega_1, y_0) + deg(f, \Omega_2, y_0).$$

(3) ***(Invariance par homotopie)*** *Si $f_t(x) : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ est continue et $y_0 \notin f(\partial\Omega \times [0,1])$, alors $deg(f_t, \Omega, y_0)$ est constant pour tout $t \in [0,1]$.*

(4) ***(Invariance sur le bord)*** *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et deux fonctions $f, g \in (\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, on suppose que $f = g \quad sur \quad \partial\Omega$ et que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors, on a :*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

(5) ***(Propriété d'excision)*** *Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω, alors pour tout ensemble fermé $K \subset \overline{\Omega}$ tel que $y_0 \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$, on a :*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega - K, y_0).$$

(6) ***(Existence)*** *Si $deg(f, \Omega, y_0) \neq 0$, alors $f(x) = y_0$ a une solution dans Ω.*

Preuve

(1) *i) Si $y_0 \in \Omega$, on a $deg(I, \Omega, y_0)$ est bien défini et $\Omega \cap I^{-1}(\{y_0\}) \neq \emptyset$, donc :*

$$\begin{aligned} deg(I, \Omega, y_0) &= sgnJ_I(y_0), \\ &= 1. \end{aligned}$$

Si $y_0 \notin \overline{\Omega}$, on a $deg(I, \Omega, y_0)$ est bien défini et $\Omega \cap I^{-1}(y_0) = \emptyset$, donc :

$$deg(I, \Omega, y_0) = 0.$$

ii) Si $y_0 \in \Omega$, on a $deg(-I, \Omega, y_0)$ est bien défini et $\Omega \cap (-I)^{-1}(y_0) \neq \emptyset$, donc :

$$\begin{aligned} deg(-I, \Omega, y_0) &= signJ_{-I}(x), \\ &= sign(-1)^n, \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Si $y_0 \notin \overline{\Omega}$, on a $deg(-I, \Omega, y_0)$ est bien défini et $\Omega \cap (-I)^{-1}(y_0) = \emptyset$, donc :

$$deg(-I, \Omega, y_0) = 0.$$

(2) *Soit f_k une suite de fonctions de $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que :*

$$\lim_{k \to +\infty} \|f_k - f\|_\Omega = 0.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, y_0) &= \lim_{k \to +\infty} deg(f_k, \Omega, y_0), \\ &= \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{f_k}(x) dx, \\ &= \lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{f_k}(x) dx, \\ &= \lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega_1} \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{f_k}(x) dx + \lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega_2} \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{f_k}(x) dx, \\ &= deg(f, \Omega_1, y_0) + deg(f, \Omega_2, y_0). \end{aligned}$$

(3) *Soit $\varepsilon = \frac{1}{4} dist(y_0, f_t(\partial\Omega \times [0,1]))$; d'après la continuité uniforme de f_t sur $\overline{\Omega} \times [0,1]$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on ait :*

$$|f(x, t_1) - f(x, t_2)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, d'après la proposition (1.3.1), on a :

$$deg(f(.,t_1),\Omega,y_0) = deg(f(.,t_2),\Omega,y_0) \text{ pour tout } t_1,t_2 \in [0,1] \text{ tel que } |t_1-t_2| \leqslant \delta.$$

Puisque $[0,1]$ *est un compact, on peut trouver un recouvrement d'intervalles finis* $]t_i,t_{i+1}[$ *de longueur* δ*, donc* $\forall t_i,t_{i+1} \in [0,1]$*, on a :*

$$deg(f(x,t_i),\Omega,y_0) = deg(f(x,t_{i+1}),\Omega,y_0),$$

alors :

$$deg(f_t,\Omega,y_0) \text{ est constant pour tout } t \in [0,1].$$

(4) Considérons l'homotopie suivante :

$$H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x), \quad \forall t \in [0,1].$$

On a : $H_t(x) \neq y_0$*, c'est à dire :* $y_0 \notin H_t(\partial\Omega)$*, donc* $deg(H_t,\Omega,y_0)$ *est bien défini. Par homotopie, on a* $deg(H_t,\Omega,y_0)$ *est constant* $\forall t \in [0,1]$*, c'est à dire :*

$$deg(H_0,\Omega,y_0) = deg(H_1,\Omega,y_0),$$

donc

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(g,\Omega,y_0).$$

(5) On a : $\Omega = K \cup (\Omega - K)$*, alors :*

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,K,y_0) + deg(f,\Omega-K,y_0).$$

Comme $deg(f,K,y_0)$ *est bien défini et* $K \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$*, donc :*

$$deg(f,K,y_0) = 0.$$

Ainsi

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,\Omega-K,y_0).$$

(6) Supposons que $f(x) = y_0$ *n'admet pas une solution dans* Ω*, donc* $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$*. D'après la propriété (5), on a :*

$$deg(f,\Omega,y_0) = 0.$$

Ce qui est absurde. ■

1.3.3 Théorèmes fondamentaux du degré topologique de Brouwer

Théorème 1.3.2 ***:(Théorème de point fixe de Brouwer)*** *[4]*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non-vide et $f : \Omega \to \Omega$ une fonction continue, alors f admet un point fixe.

Preuve

Etape 1 *Considérons Ω comme une boule $B(0, r) = \{x, \|x\|_2 \leq r\}$.*

a) S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$, le résultat est prouvé.

b) Sinon, introduisons l'homotopie suivante : $f_t(x) = (I - tf)(x)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
On a : $0 \notin f_t(\partial\Omega)$, c'est à dire : le $deg(f_t, \Omega, 0)$ est bien défini. D'après la propriété (3), on a :

$$deg(f_t, \Omega, 0) \text{ est constant pour tout } t \in [0, 1],$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} deg(f_0, \Omega, 0) &= deg(f_1, \Omega, 0), \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$deg(f_1, \Omega, 0) = deg(I - f, \Omega, 0).$$

Ainsi,

$$deg(I - f, \Omega, 0) \neq 0.$$

D'après la propriété (6), on a :

$$\exists x_0 \in \Omega, \text{ tel que } (I - f)(x_0) = 0,$$

c'est à dire,

$$f(x_0) = x_0.$$

Etape 2 *Soit Ω un convexe, compact, non-vide. Soit $B(0, r)$ tel que $\Omega \subset B(0, r)$ et soit $R : \mathbb{R}^n \to \Omega$ une rétraction. L'application $f \circ R$ est continue, d'après l'étape (1) :*

$$\exists x_0 \in B(0, r) \text{ tel que } (f \circ R)(x_0) = x_0.$$

Puisque

$$f(\Omega) \subset \Omega \quad et \quad R(x_0) \in \Omega,$$

donc $x_0 \in \Omega$. *Comme*

$$R(x_0) = x_0,$$

alors :

$$(f \circ R)(x_0) = f(x_0) = x_0,$$

ainsi

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tel que } f(x_0) = x_0.$$

■

Théorème 1.3.3 ***(Théorème de Borsuk)*** *[16]*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine et* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application continue, impaire telle que* $0 \notin f(\partial\Omega)$. *Alors :*

a) Si $0 \notin \overline{\Omega}$, *le degré* $deg(f, \Omega, 0)$ *est pair,*

b) si $0 \in \Omega$, *le degré* $deg(f, \Omega, 0)$ *est impair.*

Preuve Dans le cas où $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, et 0 est une valeur régulière.

a) Si $0 \notin \overline{\Omega}$, il y' a deux possibilités :

i) $f^{-1}(0) = \emptyset$, donc $deg(f, \Omega, 0) = 0$,

ii) $f^{-1}(0) \neq \emptyset$; f étant impaire, on a :

$$x \in f^{-1}(0) \Rightarrow -x \in f^{-1}(0),$$

et donc

$$f^{-1}(0) = \{x_1, x_2, ..., x_N, -x_1, -x_2, ..., -x_N\}.$$

D'autre part,

$$Df(-x) = Df(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} deg(f,\Omega,0) &= \sum_{x\in\Omega\cap f^{-1}(0)} sgnJ_f(x), \\ &= \sum_{i=1}^{N} sgnJ_f(x_i) + \sum_{i=1}^{N} sgnJ_f(-x_i), \\ &= 2\sum_{i=1}^{N} sgnJ_f(x_i). \end{aligned}$$

Donc le degré $deg(f,\Omega,0)$ est pair.

b) $0 \in \overline{\Omega}$. Comme f est impaire, $f(0)=0$, alors on a :

i) $f^{-1}(0)=\{0\}$, donc $deg(f,\Omega,0) = sgnJ_f(0) = 1$,

ii) $f^{-1}(0)=\{0\}\cup\{x_1,...,x_N,-x_1,...,-x_N\}$, et alors :

$$deg(f,\Omega,0) = sgnJ_f(0) + 2\sum_{i=1}^{N} sgnJ_f(x_i),$$

donc le degré $deg(f,\Omega,0)$ est impair.

■

1.4 Le degré topologique en dimension infinie

Le degré topologique en dimension infinie ne pourra donc pas être défini pour toutes les applications continues d'un Banach X dans lui- même : il faut restreindre les fonctions que l'on considère. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont justement pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique ; le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de Leray-Schauder, est construit sur les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte.

Exemple [14] Soient $l^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites $x := (x_n)_{n\geq 0}$ de carré sommable et B la boule unité fermée de $l^2(\mathbb{N})$. On désignera par $\|x\|$ la norme de x, c'est à dire :

$$\|x\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2.$$

Si $x \in B$ on définit Tx par :

$$Tx := \left(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ...\right).$$

Évidemment, on a T est continue, $Tx \in B$ et $\|Tx\| = 1$. Cependant, T n'admet pas un point fixe sur B. En effet, si $x = Tx$, on a :

$$\text{pour tout } n \geq 0, x_{n+1} = x_n \text{ et } x_0 = \sqrt{1 - \|x\|^2}.$$

Or,

$$\|x\| = \|Tx\| = 1.$$

Par conséquent, $x_0 = 0$, donc $x = 0$. Ce qui contredit $\|x\| = 1$.

1.4.1 Le degré topologique de Leray-Schauder

Lemme 1.4.1 *[14] Soit Ω un ouvert borné de X. Si $T : \overline{\Omega} \to X$ est compact tel que $0 \notin T(\partial\Omega)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 \in \partial\Omega$ on ait : $\| u - Tu \| \geqslant \varepsilon$.*

Lemme 1.4.2 *[14] Soit Ω un ouvert borné de X, $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact tel que $0 \notin T(\partial\Omega)$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que $\| u - Tu \| \geqslant 4\varepsilon$ pour tout $u \in \partial\Omega$, il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie E_ε de X et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$, tel que :*

$$\forall u \in \overline{\Omega}, \quad \| T_\varepsilon u - Tu \| \leqslant \varepsilon,$$

$$\forall u \in \partial\Omega, \quad \| u - T_\varepsilon u \| \geqslant 3\varepsilon.$$

Définition 1.4.1 *[14] Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X, $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact tel que $0 \notin T(\partial\Omega)$. Soient $\varepsilon > 0, E_\varepsilon \subset X$ et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ étant donnés par le lemme* (1.4.2)*, on considère F un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant E_ε et tel que $\Omega_F := F \cap \Omega \neq \emptyset$. On définit le degré topologique de Leray-Schauder par :*

$$deg(I - T, \Omega, 0) := deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Remarque 1.4.1 *1) Cette définition ne dépend que de T et de Ω.*

2) Si dimension $X < \infty$, degré de Brouwer et de Leray-Schauder coïncident.

1.4.2 Propriétés du degré topologique de Leray-Schauder

Dans toute la suite, supposons que X est un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X et $T : \Omega \to X$ un opérateur compact. La démonstration de ces résultats découle de la définition du degré de Leray-Schauder, ainsi que des propriétés analogues du degré de Brouwer. C'est pour ça nous allons énoncer les résultats sans démonstration.

Proposition 1.4.1 *:(**Normalisation**) [14]*

$$deg(I,\Omega,y_0)=\begin{cases}1 & si \quad y_0\in\Omega,\\ 0 & si \quad y_0\notin\overline{\Omega}.\end{cases}$$

Proposition 1.4.2 *:(**Additivité**) [14]*

Si Ω_1,Ω_2 sont deux ouverts bornés disjoints et $T:\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\to X$ est un opérateur compact tel que $0\notin T(\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2)$, alors :

$$deg(I-T,\Omega_1\cup\Omega_2,0)=deg(I-T,\Omega_1,0)+deg(I-T,\Omega_2,0).$$

Proposition 1.4.3 *[14] Si $y_0\in X$ tel que pour tout $u\in\overline{\Omega}$ on a : $u-Tu\neq y_0$, alors :*

$$deg(I-T,\Omega,y_0)=0.$$

Corollaire 1.4.1 *:(**Existence**)[14]*

Si $y_0\in X$ tel que pour tout $u\in\partial\Omega$ on a : $u-Tu\neq y_0$ et $deg(I-T,\Omega,y_0)\neq 0$, alors :

$$il\ existe\ u\in\Omega\ tel\ que\ u-Tu=y_0.$$

Proposition 1.4.4 *:(**Invariance du degré par translation**) [14]*

Si $y_0\in X$ tel que $y_0\neq(I-T)(\partial\Omega)$, alors :

$$deg(I-T,\Omega,y_0)=deg(I-T-y_0,\Omega,0).$$

Corollaire 1.4.2 *:(**Invariance par homotopie**) [14]*

Soient $y_0\in X$ et $H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$ une application compacte telle que pour tout $(u,t)\in\partial\Omega\times[0,1]$ on ait : $u-H(u,t)\neq y_0$, alors $deg(I-H(.,t),\Omega,y_0)$ est constant pour tout $t\in[0,1]$:

$$deg(I-H(.,t),\Omega,y_0)=deg(I-H(.,0),\Omega,y_0).$$

1.4.3 Théorèmes fondamentaux du degré topologique de Leray-Schauder

Théorème 1.4.1 *(**Théorème de point fixe de Schauder**)[4] Soient Ω un sous-ensemble convexe, fermé, borné non-vide d'un espace de Banach X et $T:\Omega\to\Omega$ une application compacte, alors T admet au moins un point fixe.*

Preuve

Etape 1 *Considérons $\Omega=\overline{B}(0,R)=\{x,\|x\|_2\leq R\}$.*

i) S'il existe $x_0\in\partial\Omega$, tel que $T(x_0)=x_0$ alors le résultat est prouvé.

ii) Sinon, considérons l'homotopie suivante : $T_t(x) = (I - tT)(x)$ *pour tout* $t \in [0,1]$. *On a,* $0 \notin T(\partial\Omega)$, *donc* $deg(T_t, \Omega, 0)$ *est bien défini. D'après le corollaire* (1.4.2), *on a :*

$$deg(T_t, \Omega, 0) \text{ est constant pour tout } t \in [0,1],$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} deg(T_1, \Omega, 0) &= deg(I - T, \Omega, 0), \\ &= deg(T_0, \Omega, 0), \\ &= deg(I, \Omega, 0), \\ &= 1. \end{aligned}$$

Alors, d'après le corollaire (1.4.1), *on a :*

$$\exists x_0 \in \Omega \quad \text{tel que :} \quad (I - T)(x_0) = 0,$$

c'est à dire :

$$T(x_0) = x_0.$$

Etape 2 *Soit* Ω *un convexe, fermé, borné, non-vide. On considère l'application continue* $r : X \to \Omega$ *et* $B(0,R)$ *une boule contenant* Ω. *L'application* $T \circ r$ *est compacte, d'après l'étape* (1), *on a :*

$$\exists x_0 \in B(0,R) \text{ tel que : } (T \circ r)(x_0) = x_0,$$

c'est à dire :

$$\exists x_0 \in B(0,R) \text{ tel que : } T[r(x_0)] = x_0.$$

Or, $r(x_0) \in \Omega$ *et par hypothèse* $T(\Omega) \subset \Omega$, *alors* $x_0 \in \Omega$ *et donc* $T(x_0) \in \Omega$. *Par conséquent,*

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tel que : } T(x_0) = x_0.$$

■

Théorème 1.4.2 ***(Théorème de Borsuk)*** *[16]*

Soient Ω *un ouvert borné de* X *contenant l'origine et symétrique par rapport à celui-ci, on considère une application compacte* T *définie sur* $\overline{\Omega}$ *est impaire alors, si* $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$ *le degré* $deg(I - T, \Omega, 0)$ *est impair.*

Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.4.3 *[4] Soient Ω un ouvert borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte, alors l'une des propriétés est satisfaite :*

(1) f admet un point fixe dans Ω,

(2) $\exists x \in \partial\Omega, \exists t \in [0,1]$ tel que : $x = tf(x)$.

Preuve Supposons que (2) n'est pas satisfaite, c'est à dire :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,1], \quad (I - tf)(x) \neq 0,$$

donc :

$$deg(I - tf, \Omega, 0) \text{ est bien défini,}$$

d'après la proposition d'homotopie (1.4.2), on a :

$$deg(I, \Omega, 0) = deg(I - f, \Omega, 0) = 1.$$

Par la proposition d'existence (1.4.1), on a :

$$\exists x \in \Omega \text{ tel que : } f(x) = x,$$

donc :

$$f \text{ admet un point fixe dans } \Omega.$$

■

CHAPITRE 2

LES CONTRACTIONS D'ENSEMBLES

Dans la première partie de ce chapitre, nous étudions la mesure de non compacité de Kuratowski et ses propriétés. La deuxième partie est consacrée à étudier les contractions d'ensembles qui sont nécessaire dans notre étude de l'indice de point fixe.

2.1 La mesure de non compacité de Kuratowski

Définition 2.1.1 *[21] Soit X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ la famille de tous sous-ensemble borné de X. Une fonction Φ définie de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty)$ est appelée mesure de non-compacité (MNC) sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1) $\Phi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est relativement compact , $\forall A \in \mathcal{A}$.

2) $\Phi(A) = \Phi(\overline{A}), \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

3) $\Phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\Phi(A_1), \Phi(A_2)\}, \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Définition 2.1.2 *[13] Soit (X, d) un espace métrique et Q un sous-ensemble borné de X. Alors la mesure de non compacité de Kuratowski de Q noté par $\alpha(Q)$, avec :*

$$\alpha(Q) = \inf\{d > 0 : Q \text{ admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur ou égal } d\}.$$

C'est à dire :

$$\alpha(Q) = \inf\{d > 0 : Q \subset \cup_{i=1}^{n} S_i : S_i \subset X, diam(S_i) \leq d \quad (i = 1, ..., n); n \in \mathbb{N}\}.$$

2.1.1 Propriétés de la mesure de non compacité de Kuratowski

Lemme 2.1.1 *[13] Soit Q, Q_1 et Q_2 des sous-ensembles bornés d'un espace métrique (X, d), alors :*

(a) $0 \leq \alpha(Q) \leq diam(Q)$.

(b) ***Régularité*** *:* $\alpha(Q) = 0$ *si et seulement si* $\overline{Q}$ *est compact.*

(c) ***Invariance par passage à la fermeture*** *:* $\alpha(Q) = \alpha(\overline{Q})$.

(d) ***Monotonie*** *: Si* $Q_1 \subset Q_2$ *alors* $\alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_2)$ *(*α *est croissante).*

(e) ***Semi-additivité*** *:* $\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.

(f) $\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.

Preuve

(a) Soit $\{S_i\}_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement de l'ensemble Q, alors :

$$\alpha(Q) \leq diam(S_i) \leq diam(Q), \quad \forall i \in [1, n].$$

(b) Comme X est un espace de Banach, alors :

$$\begin{aligned}\overline{Q} \quad compact &\Leftrightarrow Q \quad est \quad relativement \quad compact,\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists S_i, (i = 1, ..., n), \quad tel \quad que \quad Q \subseteq \cup_{i=1}^{n} S_i \quad et \quad diam(S_i) \leq \varepsilon, \forall i,\\ &\Leftrightarrow \alpha(Q) = 0.\end{aligned}$$

(c) D'une part, on a : $Q \subset \overline{Q} \Longrightarrow \alpha(Q) \leq \alpha(\overline{Q})$.

D'autre part, par définition de $\alpha(Q)$, on a :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\{S_i\}_{i=1}^{n} \text{ tel que } Q \subset \cup_{i=1}^{n} S_i,$$

et

$$diam(S_i) \leq \alpha(Q) + \varepsilon \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Comme

$$\overline{Q} \subseteq \cup_{i=1}^{n} \overline{S_i}, \text{ et } diam(\overline{S_i}) = diam(S_i) \leq \alpha(Q) + \varepsilon \quad \forall i = 1, ..., n.$$

On obtient

$$\alpha(\overline{Q}) \leq \alpha(Q).$$

(d) On a $Q_1 \subset Q_2$ donc tout recouvrement de l'ensemble Q_2 est un recouvrement de l'ensemble Q_1. Par conséquent, $\alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_2)$ donc, on a bien monter que α est croissante.

(e) • Montrons que $\max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2)$:

D'après (d), on a :

$$Q_1 \subset (Q_1 \cup Q_2) \Longrightarrow \alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2),$$

et

$$Q_2 \subset (Q_1 \cup Q_2) \Longrightarrow \alpha(Q_2) \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2),$$

donc

$$\max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2).$$

• Réciproquement, montrons que $\alpha(Q_1 \cup Q_2) \leq \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$:

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} = s$. Par définition de $\alpha(Q)$, on a : Q_1 et Q_2 peuvent être recouvert par un nombre fini de sous-ensemble de diamètre inférieur à $s + \varepsilon$. Par conséquent, on a :

$$\alpha(Q_1 \cup Q_2) \leq s + \varepsilon,$$

c'est à dire :

$$\alpha(Q_1 \cup Q_2) \leq \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} + \varepsilon.$$

(f) D'après (d), on a :

$$Q_1 \cap Q_2 \subset Q_1 \Longrightarrow \alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \alpha(Q_1),$$

et

$$Q_1 \cap Q_2 \subset Q_2 \Longrightarrow \alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \alpha(Q_2),$$

donc,

$$\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}.$$

■

Lemme 2.1.2 *[13] Soit Q, Q_1 et Q_2 des sous-ensembles bornés d'un espace métrique (X, d), alors :*

(i) ***Sous-additivité*** *: $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$.*

(ii) ***Invariance par translation*** *: $\alpha(Q + x) = \alpha(Q)$, pour tout $x \in X$.*

(iii) ***Invariance par passage à l'enveloppe convexe*** *: $\alpha(Q) = \alpha(conv(Q))$*

(iv) ***Semi-homogénéité*** : $\alpha(\lambda Q) = |\lambda|\alpha(Q), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve

(i) Soit S_i un sous-ensemble borné de X avec $diam(S_i) < d$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $Q_1 \subset \cup_{i=1}^{n} S_i$. De plus, soit G_j un sous-ensemble borné de X avec $diam(G_j) < p$ pour tout $j = 1, ..., m$ et $Q_2 \subset \cup_{j=1}^{m} G_j$, alors :

$$Q_1 + Q_2 \subset \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} (S_i + G_j) \text{ et } diam(S_i + G_j) < d + p,$$

donc :

$$\alpha(Q_1 + Q_2) \leq d + p.$$

D'où le résultat $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$.

(ii) Soit $x \in X$, d'après (d) on a :

$$\alpha(Q + x) \leq \alpha(Q) + \alpha(\{x\}) = \alpha(Q),$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned} \alpha(Q) &= \alpha((Q + x) + (-x)), \\ &\leq \alpha(Q + x) + \alpha(\{-x\}), \\ &\leq \alpha(Q + x). \end{aligned}$$

D'où on obtient que $\alpha(Q + x) = \alpha(Q), \quad \forall x \in X$.

(iii) • Montrons que $\alpha(Q) \leq \alpha(conv(Q))$. Comme $Q \subset conv(Q)$, alors $\alpha(Q) \leq \alpha(conv(Q))$.

• Montrons que $\alpha(conv(Q)) \leq \alpha(Q)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini $\{Q_1, ..., Q_k\}$ de Q avec :

$$diam(Q_i) \leq \alpha(Q) + \varepsilon, \text{ pour } i = 1, ..., k.$$

Supposons que S_i est convexe, puisque :

$$diam(conv(S_i)) = diam(S_i) \text{ pour } i = 1, ..., k,$$

On prend :

$$\Lambda = \{(\lambda_i, \lambda_2, ..., \lambda_k) : \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\},$$

et

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_i \text{ pour tout } \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \Lambda.$$

On a :

$$\alpha(S(\lambda)) \leq \alpha(Q) + \varepsilon \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Maintenant, montrons que $\cup_{\lambda\in\Lambda} S(\lambda)$ est convexe. Pour $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k), \mu = (\mu_1, ..., \mu_k) \in \Lambda$ et $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in S(\lambda), y = \sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i \in S(\mu)$ où $x_i, y_i \in S_i$ pour $i = 1, ..., k$. On a :

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{k} (t\lambda_i + (1-t)\mu_i) \left[\frac{t\lambda_i}{t\lambda_i + (1-t)\mu_i} x_i + \frac{(1-t)\mu_i}{t\lambda_i + (1-t)\mu_i} y_i \right].$$

Ainsi, $\cup_{\lambda\in\Lambda} S(\lambda)$ est convexe. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} conv(Q) &\subset conv(\cup_{i=1}^{k} S_i), \\ &\subset \cup_{\lambda\in\Lambda} S(\lambda). \end{aligned}$$

Puisque Λ est compact, il existe $\lambda^1, ..., \lambda^n \in \Lambda$, tel que :

$$\cup_{\lambda\in\Lambda} S(\lambda) \subset \cup_{i=1}^{n} S(\lambda^i) + \varepsilon B(0,1),$$

dons, on a :

$$conv(Q) \subset \cup_{i=1}^{n} S(\lambda^i) + \varepsilon B(0,1).$$

Ce qui implique que :

$$\alpha(conv(Q)) \leq \alpha(Q) + 3\varepsilon,$$

quand $\varepsilon \to 0^+$, on obtient :

$$\alpha(conv(Q)) \leq \alpha(Q).$$

(iv) Pour $\lambda = 0$, c'est évident. Soit S_i un sous-ensemble borné de X avec $diam(S_i) < d$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $Q_1 \subset \cup_{i=1}^{n} S_i$. Alors,

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda Q \subset \cup_{i=1}^{n} \lambda S_i \text{ et } diam(\lambda S_i) = |\lambda| diam(S_i).$$

Par conséquent, on a :

$$\alpha(\lambda Q) \leq |\lambda| \alpha(Q).$$

De même manière, on a :

$$\alpha(Q) = \alpha(\lambda^{-1}(\lambda Q)) \leq |\lambda^{-1}| \alpha(\lambda Q) \text{ avec } \lambda \neq 0,$$

c'est à dire :

$$|\lambda| \alpha(Q) \leq \alpha(\lambda Q).$$

Lemme 2.1.3 ***(Lemme de Kuratowski)*** *[13] Soit (X,d) un espace métrique complet. Si (F_n) une suite décroissante non vide, fermé. (F_n) sont des sous-ensembles bornés de X tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(F_n)=0$, alors l'intersection $F_\infty=\cap_{n=1}^{\infty}F_n$ est un sous-ensemble non vide et compact de X.*

Preuve L'ensemble F_∞ est un sous-ensemble fermé de X. Puisque $F_\infty \subset F_n$ pour tout $n=1,2,...$, d'après (a) et (b) du lemme (2.1.1), on obtient que :

$$F_\infty \quad \text{est un ensemble compact.}$$

Maintenant, montrons que $F_\infty \neq \emptyset$: soient $x_n \in F_n \quad (n=1,2,...)$ et $X_n=\{x_i : i \geq n\}$ pour $n=1,2,....$ Puisque $X_n \subset F_n$, d'après (b),(d) et (e) du lemme (2.1.1), on obtient que :

$$\alpha(X_1)=\alpha(X_n)\leq \alpha(F_n), \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad n. \tag{2.1}$$

On a :

$$\alpha(X_1)=0.$$

Par conséquent, X_1 est un ensemble relativement compact, ainsi la suite (x_n) a une sous-suite (x_{n_k}) convergente avec $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}\in X$. Puisque F_n est fermé en X, on a :

$$x \in F_n \text{ pour tout } n=1,2,...,$$

alors $x\in F_\infty$, donc :

$$F_\infty \neq \emptyset.$$

■

Théorème 2.1.1 *[4] Soit X un espace de Banach, $Q\subset C([0,1],X)$ un sous-ensemble équicontinu et borné, où $a,b\in\mathbb{R}$. Alors,*

$$\alpha(Q)=\max_{t\in[a,b]}\alpha(\{x(t):x(.)\in Q\}).$$

Preuve (voir [4])

Lemme 2.1.4 *[1] Soit X un espace de Banach, $Q\subset C([0,1],X)$ un sous-ensemble équicontinu. Supposons que f est une fonction uniformément continue sur*

$$R=\{(t,x):t\in[0,1],x\in B(x_0,r_0) \text{ où } r_0>0, x_0\in X\},$$

et pour tout $M \subset B(x_0, r_0)$ et tout $t \in [0,1]$, f vérifie la condition suivante :

$$\alpha(f(t \times M)) \leq k\alpha(M).$$

Alors, on a l'inégalité

$$\alpha\left(\left\{x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds : x(.) \in Q\right\}\right) \leq k \max_{s\in[0,1]} \alpha(Q(s)).$$

Définition 2.1.3 ***(La mesure généralisée de non compacité)*** *[5]*
Supposons que β est une application qui affecte à chaque sous-ensemble borné Q de X un nombre réel positive $\beta(Q)$. On appelle β la mesure généralisée de non compacité si elle satisfait les propriétés suivantes :

(1) $\beta(Q) = 0$ *si est seulement si la fermeture de Q est compacte,*

(2) $\beta(\overline{conv}(Q)) = \beta(Q)$ *pour tout ensemble borné $Q \subset X$ ($\overline{conv}(Q)$ est la fermeture convexe de Q, c'est à dire le plus petit ensemble fermé, convexe qui contient Q),*

(3) $\beta(Q + S) \leq \beta(Q) + \beta(S)$ *pour tout ensembles bornés Q et S, avec $Q + S = \{q + s : q \in Q, s \in S\}$,*

(4) $\beta(Q \cup S) = \max\{\beta(Q), \beta(S)\}$.

Application

Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $B(0,1)$ la boule unité de E. Alors :

$$\alpha(B(0,1)) = 2.$$

En effet, d'après le lemme (2.1.1) (a), on a :

$$\alpha(B(0,1)) \leq diam(B(0,1)) = 2.$$

Supposons que $\alpha(B(0,1)) < 2$; alors :

il existe $\{B_k\}_{1\leq k\leq n}$ tel que $diam(B_k) < 2$ pour $k \in [1,n]$ et $B(0,1) \subset \cup_{k=1}^n B_k$.

De plus, on peut choisir les ensembles B_i fermé. Si F un espace de dimension n, les ensembles $\{B_i \cap F\}_{1\leq i\leq n}$ recouvrent la boule unité $B \cap F$. D'après le Théorème des antipodes de Lusternik-Shnirelmann-Borsuk (1)(voir l'annexe), il existe au moins un des ensembles B_i qui vérifie :

$$diam(B_i) \geq diam(B(0,1)) = 2,$$

ce qui est absurde, donc $\alpha(B(0,1)) = 2$. D'une façon plus générale $B_i(x_0, r) = 2r$. ■

Exemple Soit $B(0,1)$ la boule unité d'un espace de Banach de dimension finie X. Alors :

$$\alpha(B(0,1)) = 0.$$

En effet, $\overline{B(0,1)}$ est compacte $\Leftrightarrow dimX < \infty$. D'une façon générale, $\alpha(B(x_0,r)) = 0$ avec $B(x_0,r)$ est la boule de centre x_0 et de rayon r dans X, car $\overline{B(x_0,r)}$ est compacte dans l'espace de dimension finie X.

2.2 Les contractions d'ensembles

Soient X, Y deux espaces de Banach, Q un ouvert de X.

Définition 2.2.1 *[11] Soit $T : X \to Y$ une application continue et bornée*

- *On dit que T est une k-**contraction d'ensembles** s'il existe $k \geq 0$, tel que :*

$$\alpha(T(Q)) \leq k\alpha(Q), \quad \forall Q \text{ borné de } X.$$

- *T est appelée k-**contraction stricte d'ensembles** si $0 \leq k < 1$.*
- *T est dite **condensante** si*

$$\alpha(T(Q)) < \alpha(Q), \forall Q \text{ borné non relativement compacte .}$$

Proposition 2.2.1 *[19] Soient E_1, E_2 et E_3 trois espaces métriques et supposons que $T_1 : E_1 \to E_2$, et $T_2 : E_2 \to E_3$ sont respectivement k_1, k_2-contractions d'ensembles. Alors :*

$$T_2 \circ T_1 : E_1 \to E_3 \text{ est une } k_1k_2\text{-contraction d'ensembles.}$$

Preuve On a T_1 et T_2 sont respectivement k_1, k_2-contraction d'ensembles, donc par définition on a T_1 est continue bornée et :

$$\alpha(T_1(Q_1)) \leq k_1\alpha(Q_1), \quad \forall Q_1 \text{ un ouvert borné de } E_1,$$

et T_2 est continue bornée :

$$\alpha(T_2(Q_2)) \leq k_2\alpha(Q_2), \quad \forall Q_2 \text{ un ouvert borné de } E_2.$$

Donc,

$$T_2 \circ T_1 : E_1 \to E_3 \text{ est continue borné.}$$

D'autre part, pour tout Q borné de E_1 on a :

$$\alpha((T_2 \circ T_1)(Q)) = \alpha(T_2(T_1(Q))) \leq k_2k_1\alpha(Q).$$

Proposition 2.2.2 *[19] Soient X un espace de Banach, E un espace métrique. Si $T_1 : E \to X$ et $T_2 : E \to X$ respectivement k_1, k_2-contraction d'ensembles. Alors :*

$$T_1 + T_2 : E \to X \text{ est une } (k_1 + k_2)\text{-contraction d'ensembles.}$$

Preuve Soient $T_1, T_2 : E \to X$ sont respectivement k_1, k_2-contraction d'ensembles, donc par définition on a T_1, T_2 sont continues, bornées et :

$$\alpha(T_1(Q)) \leq k_1\alpha(Q); \quad \forall Q \text{ un ouvert borné de } E,$$

et

$$\alpha(T_2(Q)) \leq k_2\alpha(Q); \quad \forall Q \text{ un ouvert borné de } E.$$

Donc,

$$T_1 + T_2 : E \to X \text{ est continue, borné.}$$

D'après lemme (2.1.2) (i), pour tout Q un ouvert borné de E, on a :

$$\begin{aligned} \alpha((T_1 + T_2)(Q)) &\leq \alpha(T_1(Q)) + \alpha(T_2(Q)), \\ &\leq k_1\alpha(Q) + k_2\alpha(Q), \\ &\leq (k_1 + k_2)\alpha(Q). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.3 *[18] Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques et $T : X_1 \to X_2$ une application continue.*

a) Si T est une k-contraction, alors T est une k-contraction d'ensembles,

b) si T est compacte sur les ensembles bornés, alors T est 0-contraction d'ensembles.

Preuve

a) Soit Q un ensemble borné dans X_1 et supposons que $\alpha_1(Q) = d$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut écrire $Q = \cup_{j=1}^{m} S_j, diam(S_j) \leq d + \varepsilon$. Ainsi,

$$T(Q) = \cup_{j=1}^{m} T(S_j),$$

et puisque T est une k-contraction, alors :

$$diam(T(S_j)) \leq k(d + \varepsilon).$$

Puisque ε est quelconque, alors :

$$\alpha_2(T(Q)) \leq kd \ ,$$

et T est une k-contraction d'ensembles.

b) Soit Q un ensemble borné dans X_1. Puisque nous supposons que T est compacte sur des ensembles bornés, $T(\overline{Q})$ est compacte et donc totalement borné. Ainsi,

$$\alpha_2(T(\overline{Q})) = \alpha_2(T(Q)) = 0,$$

donc, T est 0-contraction d'ensembles.

■

Proposition 2.2.4 *[4] Soient E un espace réel normé, $B(0,1)$ la boule unité de E et $T : E \to \overline{B(0,1)}$ une application définie par :*

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}, & \|x\| \geq 1, \\ x, & x \in B(0,1). \end{cases}$$

Alors T est une 1-contraction d'ensembles.

Preuve Soit $Q \subset E$ un ensemble borné. Il est évident que $T(Q) \subset conv(\{0\} \cup Q)$, donc on a :

$$\begin{aligned} \alpha(T(Q)) &\leq \alpha(conv(\{0\} \cup Q)), \\ &= \alpha(\{0\} \cup Q), \\ &= \alpha(Q). \end{aligned}$$

Donc, T est une 1-contraction d'ensembles. ■

Lemme 2.2.1 *[19] Soient Q_1 et Q_2 deux sous-ensembles fermés d'un espace métrique X. Supposons que $T : Q_1 \subset X \to X$ et $T^{'} : Q_2 \subset X \to X$ sont deux k-contractions d'ensembles telle que $T = T^{'}$ sur $Q \cap S$. Soit l'application $T^{''} : Q_1 \cup Q_2 \subset X \to X$ définie par :*

$$T^{''}(x) = \begin{cases} T(x) & si \quad x \in Q_1, \\ T^{'}(x) & si \quad x \in Q_2. \end{cases}$$

Alors, $T^{''}$ est une k-contraction d'ensembles.

Preuve Le fait que T et $T^{'}$ sont deux k-contractions d'ensembles, alors elles sont des applications continues bornées de Q_1 et Q_2 respectivement et :

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A), \quad \forall A \text{ un ouvert borné de } Q_1.$$
$$\alpha(T^{'}(A)) \leq k\alpha(A), \quad \forall A \text{ un ouvert borné de } Q_2.$$

D'où, $T^{''}$ est continue et bornée sur $Q_1 \cup Q_2$.

De plus, on a :

$$\alpha(T^{''}(A)) = \begin{cases} \alpha(T(A)) & si \quad A \subset Q_1, \\ \alpha(T^{'}(A)) & si \quad A \subset Q_2. \end{cases}$$

Posons A un ouvert borné de $Q_1 \cup Q_2$. D'après le lemme (2.1.1) (e), on a :

$$\begin{aligned} \alpha(T^{''}(A)) &\leq \max\{\alpha(T(A)), \alpha(T^{'}(A))\}, \\ &\leq k \max\{\alpha(A), \alpha(A)\}, \\ &\leq k\alpha(A). \end{aligned}$$

Donc, $T^{''}$ est une k-contraction d'ensembles. ■

Proposition 2.2.5 *[19] Soient X un espace de Banach, E un sous-ensemble de X, $T : E \subset X \to X$ une k-contraction d'ensembles et $\lambda : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\sup\{\lambda(x) : x \in E\} = \delta < \infty$. On définit $T^{'} : E \subset X \to X$ par :*

$$T^{'} = \lambda(x)T(x), \quad \forall x \in E.$$

Alors, $T^{'}$ est une δk-contraction d'ensembles.

Preuve On a $T^{'}$ est continue et bornée, soit A un sous-ensemble borné de E. D'après le lemme (2.1.1) (d) et le lemme (2.1.2) (iii) (iv), on a :

$$T^{'}(A) \subseteq conv(\{0\} \cup \delta T(A)).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \alpha(T^{'}(A)) &\leq (conv(\{0\} \cup \delta T(A))), \\ &= \alpha(\{0\} \cup \delta T(A)), \\ &\leq \max\{(\{0\}), \alpha(\delta T(A))\}, \\ &\leq \delta k\alpha(A). \end{aligned}$$

D'où, $T^{'}$ est une δk-contraction d'ensembles. ■

Lemme 2.2.2 *[12] Soit E un sous-ensemble borné d'un espace de Banach X. Si $T : X \to X$ est une application de la forme $T_1 + T_2$, où T_1 est une application linéaire borné et T_2 est une application complètement continue. Alors :*

$$\alpha[T(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))] = \alpha[T(E)], \text{ avec } \theta \in E.$$

Preuve D'une part on a : $E \subset \overline{conv}(E \cup \{\theta\})$, d'après le lemme (2.1.1) (d), on a :

$$\alpha[T(E)] \leq \alpha[T(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))].$$

D'autre part, puisque $T(\overline{conv}(E \cup \{\theta\})) \subset T_1(\overline{conv}(E \cup \{\theta\})) + T_2(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))$, alors :

$$\begin{aligned}
\alpha[T(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))] &\leq \alpha[T_1(\overline{conv}(E \cup \{\theta\})) + T_2(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))], \\
&\leq \alpha[T_1(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))] + \underbrace{\alpha[T_2(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))]}_{=0 \text{ par compacité de } T_2}, \\
&\leq \alpha[T_1(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))], \\
&= \alpha[\overline{conv}(T_1(E \cup \{\theta\}))], \\
&= \alpha[\overline{conv}(T_1(E) \cup T_1(\{\theta\}))], \\
&= \max\{\alpha(T_1(E)), \alpha(T_1(\{\theta\}))\}, \\
&= \alpha[T_1(E)].
\end{aligned}$$

Or, on a :

$$T_1 = T + (-T_2),$$

donc, d'après le lemme (2.1.1) (b) et le lemme (2.1.2) (i), on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha[T_1(E)] &\leq \alpha[T(E)] + \alpha[-T_2(E)] \\
&\leq \alpha[T(E)].
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\alpha[T(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))] \leq \alpha[T(E)].$$

Par conséquent,

$$\alpha[T(\overline{conv}(E \cup \{\theta\}))] = \alpha[T(E)].$$

■

2.2.1 Généralisation du théorème de Schauder

Corollaire 2.2.1 *[20] Soit D un sous-ensemble convexe, fermé, non vide, D non nécessairement borné, d'un espace de Banach X et $f : D \longrightarrow D$ une application continue tel que $f(D)$ est inclus dans un compact de D. Alors f admet au moins un point fixe .*

Corollaire 2.2.2 *[18] Soit D un ensemble fermé, borné, convexe dans un espace de Banach X. Soient $T : D \to D$ une application continue, $D_1 = \overline{conv}T(D)$ et $D_n = \overline{conv}T(D_{n-1})$ pour $n > 1$. Supposons que $\alpha(D_n) \to 0$, alors T admet un point fixe.*

Preuve Il est clair que D_n est fermé, borné, convexe et non vide et $D_{n+1} \subset D_n$ pour $n \geq 1$. D'après le lemme (2.1.3), on a :

$$D_\infty = \cap_{n\geq 1} D_n \text{ est non vide, compact et convexe.}$$

Par notre construction $T : D_n \to D_{n+1}$, on a $T : D_\infty \to D_\infty$. Il s'ensuit du corollaire (2.2.1) que T admet un point fixe. ■

Théorème 2.2.1 ***(Théorème de Darbo)*** *[18]*
Soient D un ensemble fermé, borné, convexe et $T : D \to D$ une k-contraction d'ensembles, $0 \leq k < 1$. Alors, T admet un point fixe.

Preuve Il suffit de montrer que $\alpha(D_n) \to 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Mais

$$\begin{aligned} \alpha(D_1) &= \alpha(\overline{conv}(T(D))), \\ &= \alpha(T(D)), \\ &\leq k\alpha(D). \end{aligned}$$

D'une façon générale :

$$\begin{aligned} \alpha(D_n) &= \alpha(\overline{conv}(T(D_{n-1}))), \\ &= \alpha(T(D_{n-1})), \\ &\leq k\alpha(D_{n-1}). \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\alpha(D_n) \leq k^n\alpha(D)$, quand $n \longrightarrow \infty$, on a : $\alpha(D_n) \longrightarrow 0$. Donc, T admet un point fixe. ■

2.3 Application

Application à un problème de Cauchy dans un espace de Banach [4]

Soit X un espace de Banach et $f(t,x) : [0,1] \times \overline{B(x_0,r_0)} \longrightarrow X$ une application continue satisfaisant :

$$\alpha(f([0,1] \times B(x_0,r))) \leq k\alpha(B(x_0,r)) \text{ pour tout } r \in (0,r_0),$$

où $k \in (0,1)$ et $r_0 > 0$ sont des constantes. Alors, il existe $t_0 \in (0,1]$ tel que le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), t \in]0,1[, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

admet une solution.

Appliquons le Théorème de point fixe de Darbo (2.2.1). En effet, posons :

$$D = \sup\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in [0,1] \times \overline{B(x_0,r_0)}\} \text{ et } t_0 = \min\left\{1, \frac{r_0}{D}\right\}.$$

Soit $E = C([0,t_0],X)$ un espace de Banach muni de la norme $\|x\|_E = \max\{\|x(t)\|_X : t \in [0,1]\}$, et soit :

$$K = \{x(.) \in E : x(t_0) = x_0, \|x(t) - x(t_0)\| \leq r_0\},$$

est un sous-ensemble fermé borné de E. K est un convexe car,

soient $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$x \in K \quad alors \quad x \in E : x(t_0) = x_0 \quad et \quad \|x(t) - x(t_0)\|_X \leq r_0, \tag{2.3}$$

et

$$y \in K \quad alors \quad y \in E : y(t_0) = x_0 \quad et \quad \|y(t) - y(t_0)\|_X \leq r_0. \tag{2.4}$$

Multiplions l'équation (2.3) par λ, on trouve :

$$\lambda x \in E, \lambda x(t_0) = \lambda x_0 \quad et \quad \lambda\|x(t) - x(t_0)\|_X \leq \lambda r_0. \tag{2.5}$$

Multiplions l'équation (2.4) par $(1-\lambda)$, on obtient :

$$(1-\lambda)y \in E, (1-\lambda)y(t_0) = (1-\lambda)x_0 \quad et \quad (1-\lambda)\|y(t) - y(t_0)\|_X \leq (1-\lambda)r_0. \tag{2.6}$$

Donc

$$\lambda x(t_0) + (1-\lambda)y(t_0) = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_0 = x_0,$$

et

$$\|\lambda(x(t) - x(t_0)) + (1-\lambda)(y(t) - y(t_0))\|_X \leq \lambda\|x(t) - x(t_0)\|_X + (1-\lambda)\|y(t) - y(t_0)\|_X \ .$$

Ce qui nous donne

$$\|(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)) - (\lambda x(t_0) + (1-\lambda)y(t_0))\|_X \leq \lambda r_0 + (1-\lambda)r_0 = r_0.$$

D'où $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$. Maintenant, on définit l'application $T : K \longrightarrow K$ par :

$$Tx(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Montrons que T est une k-contraction d'ensembles, tout d'abord on montre que T est continue. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K qui converge vers x.

$$(Tx_n)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s))ds, \forall t \in [0,1].$$

D'une part, on a :

$$f(s, x_n(s)) \to f(s, x(s)), \quad \forall s \in [0,t], \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t f(s, x_n(s))ds\right| &\leq \int_0^t |f(s, x_n(s))|ds, \\
&\leq \sup_{s\in[0,1]} \|f(s, x_n(s))\|_X \int_0^t ds, \\
&\leq tk \quad \forall t \in [0,1], \\
&\leq k.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - Tx\|_E &= \max_{t\in[0,t_0]} \|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)\|_X, \\
&= \max_{t\in[0,t_0]} \left\|\int_0^t f(s, x_n(s))ds - \int_0^t f(s, x(s))ds\right\|_X, \\
&\leq \max_{t\in[0,t_0]} \left\|\left[\int_0^t f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\right] ds\right\|_X, \\
&\leq \max_{t\in[0,t_0]} \int_0^t \|f(s, x_n) - f(s, x(s))\|_X \, ds \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, T est continue.

Maintenant, montrons que $\alpha(T(Q)) \leq k\alpha(Q)$ avec Q est un sous-ensemble borné de E et $0 \leq k < 1$. On a, d'après le théorème (2.1.1) et le lemme (2.1.4), on trouve :

$$\begin{aligned}
\alpha(T(Q)) &= \sup_{t\in[0,t_0]} \alpha\left(\{(Tx)(t) : x(.) \in Q\}\right), \\
&= \sup_{t\in[0,t_0]} \alpha\left(\left\{x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds : x(.) \in Q\right\}\right), \\
&\leq t_0 k\alpha(Q), \\
&\leq k\alpha(Q).
\end{aligned}$$

Donc T est une k-contraction d'ensembles et K est un ensemble convexe, fermé et borné de E alors d'après le théorème de Darbo T admet un point fixe sur K. D'où le résultat.

CHAPITRE 3

L'INDICE DE POINT FIXE

La première partie de ce chapitre, est consacrée à l'étude de l'indice de point fixe pour les applications complètement continues. Dans la deuxième partie, nous prolongeons la notion de l'indice de point fixe d'une application complètement continue à une k-contraction d'ensembles. La troisième partie est consacrée à une application de l'indice de point fixe sur le cône.

3.1 L'indice de point fixe d'une application complètement continue

Définition 3.1.1 *[6] Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit un rétracté de X s'il existe une application continue $r : X \longrightarrow F$ telle que $r(x) = x, \forall x \in F$.*

Remarque 3.1.1 *Tout sous-ensemble fermé, convexe, non vide de X est un rétracté de X. En particulier, tout cône de X est un rétracté de X.*

Théorème 3.1.1 *[10]*

Soit A un rétracté d'un espace de Banach X. Alors, pour tout sous-ensemble ouvert borné Ω de A et toute application complètement continue $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ qui n'a pas de points fixes sur $\partial\Omega$, il existe un unique entier $i_A(f, \Omega)$ appelé l'indice de point fixe de f sur Ω par rapport à A satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) ***Normalisation*** *$i_A(f, \Omega) = 1$ si f est constante sur Ω.*

(2) ***Additivité*** *Si $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ n'a pas de points fixes sur $\partial\Omega$, et le point fixe de f sur Ω se trouve dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ensembles ouverts, disjoints inclus dans Ω, alors :*

$$i_A(f,\Omega) = i_A(f,\Omega_1) + i_A(f,\Omega_2).$$

En particulier, si f n'a pas de points fixes dans Ω, cela veut dire que $i_A(f,\Omega) = 0$.

(3) ***Invariance par homotopie*** *$i_A(H(t,.),\Omega)$ est indépendant de t $(0 \leq t \leq 1)$ quand $H : [0,1]\times\overline{\Omega} \longrightarrow A$ est complètement continu et $H(t,x) \neq x$ pour tout $(t,x) \in [0,1]\times\partial\Omega$.*

(4) ***Permanence*** *$i_A(f,\Omega) = i_B(f,\Omega\cap B) = i_B(f|_{\overline{\Omega\cap B}},\Omega)$ si B est une rétraction de A et $f(\overline{\Omega}) \subset B$.*

De plus, soit :

$$M = \{(f,\Omega,A)/A \text{ un rétracté de } X, \Omega \text{ un ouvert borné dans } A, f : \overline{\Omega} \longrightarrow A \text{ est complètement continue et } f(x) \neq x \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Alors, il existe une seule fonction $d : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ satisfaisant (1) - (4). En d'autre termes, $i_A(f,\Omega)$ est défini de manière unique.

Preuve Tout d'abord, montrons l'unicité de l'indice de point fixe. Supposons que $X = A$, soit $\{i_A(f,\Omega)\}$ est une famille quelconque satisfaisant les conditions (1) - (4), on définit :

$$d(g,\Omega,p) = i_X(f+p,\Omega), \tag{3.1}$$

Où $g = I - f, \Omega$ un ouvert borné de X, $g(x) \neq p$ sur $\partial\Omega$, c'est à dire : $f+p$ n'a pas de points fixes sur $\partial\Omega$. D'après les conditions (1)- (4) on peut montrer que la fonction $d(g,\Omega,p)$ a quatre propriétés qui caractérisent le degré de Leray-Schauder, on a :

$$d(g,\Omega,p) = deg(I-f,\Omega,p). \tag{3.2}$$

On prend, $p = 0$ dans (3.1) et (3.2), on obtient :

$$i_X(f,\Omega) = deg(I-f,\Omega,0). \tag{3.3}$$

Supposons que A est un rétracté quelconque de X et $r : X \longrightarrow A$ une rétraction quelconque pour les sous-ensembles ouverts Ω de A, on choisit la boule $B_R = \{x \in X, \|x\| < R\}$ tel que $\Omega \subset B_R$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} i_A(f,\Omega) &= i_X(f\circ r, B_R\cap r^{-1}(\Omega)),\\ &= deg(I - f\circ r, B_R\cap r^{-1}(\Omega), 0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

En effet, $r : X \longrightarrow A$ une rétraction donc continue. Par conséquent, Ω est un ouvert de A, donc $r^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X. Il est clair que $B_R \cap r^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X, et on a :

$$\overline{B_R \cap r^{-1}(\Omega)} \subset \overline{r^{-1}(\Omega)} \subset \overline{r^{-1}(\overline{\Omega})} = r^{-1}(\overline{\Omega}),$$

donc

$$(f \circ r)(\overline{B_R \cap r^{-1}(\Omega)}) \subset (f \circ r)(r^{-1}(\overline{\Omega})) = f(\overline{\Omega}) \subset A.$$

Et on a :

$$x_0 \in r^{-1}(\Omega), (f \circ r)(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 \in \Omega, f(x_0) = x_0. \tag{3.5}$$

Alors, d'après la propriété (4), on a :

$$\begin{aligned} i_X(f \circ r, B_R \cap r^{-1}(\Omega)) &= i_A(f \circ r, [B_R \cap r^{-1}(\Omega)] \cap A), \\ &= i_A(f \circ r|_{\overline{[B_R \cap r^{-1}(\Omega)] \cap A}}, \Omega), \\ &= i_A(f \circ r|_{\overline{[B_R \cap r^{-1}(\Omega)]}}, \Omega), \\ &= i_A(f, \Omega). \end{aligned}$$

D'où, d'après (3.4) et l'unicité du degré de Leray-Schauder, on obtient l'unicité de l'indice de point fixe. ■

Pour prouver les propriétés (1) - (4), nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Soient A un rétracté d'un espace de Banach X, Ω un sous-ensemble ouvert borné de A et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ une application complètement continue qui n' a pas de points fixes sur $\partial\Omega$, alors :*

$$i_A(f, \Omega) = deg(I - f \circ r, B_R \cap r^{-1}(\Omega), 0),$$

est indépendant du choix de r et de R, où $r : X \longrightarrow A$ une rétraction et B_R est une boule de X de rayon R.

Preuve Soit $R_1 > R$, puisque :

$$\Omega \subset B_R \cap r^{-1}(\Omega) \subset B_{R_1} \cap r^{-1}(\Omega).$$

D'après (3.5), on sait que $f \circ r$ n' a pas de points fixes dans $\partial(B_R \cap r^{-1}(\Omega))$. Par conséquent, d'après la propriété d'excision du degré de Leray-Schauder, on a :

$$deg(I - f \circ r, B_R \cap r^{-1}(\Omega), 0) = deg(I - f \circ r, B_{R_1} \cap r^{-1}(\Omega), 0).$$

C'est à dire : $i_A(f, \Omega)$ est indépendant du choix de R.

Soit $r_1 : X \longrightarrow A$ une autre rétraction de X et soit $V = B_R \cap r^{-1}(\Omega) \cap r_1^{-1}(\Omega)$. Alors, V est un ensemble ouvert borné de X et $\Omega \subset V$. D'après (3.5), on a $f \circ r$ n'a pas de points fixes dans $\overline{B_R \cap r^{-1}(\Omega)} \backslash V$ et $f \circ r_1$ n'a pas de points fixes dans $\overline{B_R \cap r_1^{-1}(\Omega)} \backslash V$. D'où,

$$deg(I - f \circ r, B_R \cap r^{-1}(\Omega), 0) = deg(I - f \circ r, V, 0). \tag{3.6}$$

Et

$$deg(I - f \circ r_1, B_R \cap r_1^{-1}(\Omega), 0) = deg(I - f \circ r_1, V, 0). \tag{3.7}$$

Introduisons l'homotopie suivante :

$$H : [0,1] \times \overline{V} \longrightarrow X$$
$$H(t, x) = x - r[t(f \circ r)(x) + (1-t)(f \circ r_1)(x)].$$

On a, le degré de Leray-Schauder $deg(I - H_t, V, 0)$ est bien défini. En effet, supposons qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ et $x_0 \in \partial V$ tel que :

$$H_{t_0}(x_0) = 0 \Longleftrightarrow x_0 - r[t_0(f \circ r)(x_0) + (1-t_0)(f \circ r_1)(x_0)] = 0,$$
$$\Longrightarrow x_0 - r[t_0 f(r(x_0)) + (1-t_0) f(r_1(x_0))] = 0,$$

car, $r(x_0) = x_0, r_1(x_0) = x_0$ et $f(x_0) = x_0$. D'après (3.5), $x_0 \in \Omega \subset V$ ce qui contredit le fait que $x_0 \in \partial V$. Ainsi, par invariance d'homotopie du degré de Leray-Schauder, on a :

$$deg(I - f \circ r_1, V, 0) = deg(I - f \circ r, V, 0). \tag{3.8}$$

Donc, d'après (3.6), (3.7) et (3.8), on a :

$$deg(I - f \circ r, B_R \cap r^{-1}(\Omega), 0) = deg(I - f \circ r_1, B_R \cap r_1^{-1}(\Omega), 0). \tag{3.9}$$

Ce qui montre que $i_A(f, \Omega)$ est indépendant du choix de r. ■

Remarque 3.1.2 *D'après les propriétés du degré de Leray-Schauder et l'équation* (3.4), *les propriétés (1) - (4) du théorème* (3.1.1) *sont bien vérifiées.*

Corollaire 3.1.1 *L'indice de point fixe vérifie les propriétés suivantes :*

(a) Soit Ω_0 un sous-ensemble ouvert de Ω tel que f n'a pas de points fixes sur $\overline{\Omega} \backslash \Omega_0$

$$i_A(f, \Omega) = i_A(f, \Omega_0).$$

(b) Si $i_A(f,\Omega) \neq 0$, alors f admet au moins un point fixe sur Ω.

Preuve

(a) Soit $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = \emptyset$, alors on a :

$$\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \overline{\Omega}\backslash\Omega = \partial\Omega.$$

Donc, par hypothèse f n'a pas de points fixes sur $\partial\Omega$, d'après la propriété d'additivité (2), on a :

$$i_A(f,\Omega) = i_A(f,\Omega) + i_A(f,\emptyset) \Longrightarrow i_A(f,\emptyset) = 0.$$

On prend, $\Omega_1 = \Omega_0$ et $\Omega_2 = \emptyset$ d'après la propriété d'additivité (2), on obtient :

$$i_A(f,\Omega) = i_A(f,\Omega_0).$$

(b) Supposons que f n'a pas de points fixes sur Ω. Soit $\Omega_0 = \emptyset$, puisque f n'a pas de points fixes sur Ω et $\partial\Omega$, donc f n'a pas de points fixes sur $\overline{\Omega}$. D'après la propriété (a), on a :

$$\begin{aligned} i_A(f,\Omega) &= i_A(f,\Omega_0), \\ &= i_A(f,\emptyset), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que $i_A(f,\Omega) \neq 0$.

■

3.2 L'indice de point fixe d'une k-contraction d'ensembles

Le concept de l'indice de point fixe d'une application complètement continue peut être prolongé à des contractions strictes d'ensembles.

Théorème 3.2.1 *[8] Soit A un ensemble fermé, convexe, non vide d'un espace de Banach X et Ω un sous-ensemble ouvert de A. Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ une k-contraction d'ensembles $(0 \leq k < 1)$ qui n'a pas de points fixes sur $\partial\Omega$. Soit $A_1 = \overline{conv} f(\overline{\Omega}), A_n = \overline{conv} f(A_{n-1} \cap \overline{\Omega}) \quad (n = 2, 3, ...)$. Alors*

$$i_A(f,\Omega) = i_A(f_1,\Omega),$$

avec $f_1 : \overline{\Omega} \longrightarrow D$ *est une application complètement continue et* $f_1(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in D \cap \overline{\Omega}$*, où* D *est un sous-ensemble convexe, compact, non vide de* A.

Preuve Le fait que $A_n \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$ pour tout n, alors $A_n \neq \emptyset$. Évidemment, $A_2 \subset A_1$ et $A_n \subset A_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est une k-contraction d'ensembles, alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha(A_n) &\leq \alpha(\overline{conv} f(A_{n-1} \cap \overline{\Omega})), \\ &\leq k\alpha(A_{n-1} \cap \overline{\Omega}), \\ &\leq k\alpha(A_{n-1}), \\ &\leq k^{n-1}\alpha(A_1), \quad (n = 1, ...). \end{aligned}$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha(A_n) = 0$. D'après la proposition (1), on a : $D = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est un ensemble convexe, compact, non vide de A et $D \cap \overline{\Omega}$ est non vide compact. De plus, $f(D \cap \overline{\Omega}) \subset D$. Comme D est compact, l'application $f : D \cap \overline{\Omega} \longrightarrow D$ est complètement continue. Par conséquent, d'après le théorème d'extension de Dugundji (2)(voir l'annexe) il existe une application complètement continue :

$$f_1 : \overline{\Omega} \longrightarrow D \text{ tel que } f_1(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in D \cap \overline{\Omega}.$$

Il est clair que f_1 n'a pas de points fixes sur $\partial\Omega$. D'où, d'après le théorème (3.1.1) l'indice de point fixe $i_A(f_1,\Omega)$ est bien défini. Ainsi, l'indice du point fixe $i_A(f,\Omega)$ est défini par :

$$i_A(f,\Omega) = i_A(f_1,\Omega). \tag{3.10}$$

L'indice du point fixe définit dans (3.11) et (3.10) est indépendant du choix de f_1. En effet, supposons que $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \longrightarrow D$ deux applications complètement continues telles que :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x), \quad \forall x \in D \cap \overline{\Omega}, \\ f_2(x) &= f(x), \quad \forall x \in D \cap \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Introduisons l'homotopie suivante, $H(t,x) = tf_1(x) + (1-t)f_2(x)$ avec $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow A$ est complètement continue. On a $H(t,x) \neq x$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$. Car, supposons que si $t \in [0,1], x_0 \in \partial\Omega$ et $H(t,x_0) = x_0$, alors :

$$tf_1(x_0) + (1-t)f_2(x_0) = x_0.$$

Puisque $f_1(x_0), f_2(x_0) \in D$ qui est convexe, on a :

$$tf_1(x_0) + (1-t)f_2(x_0) = x_0.$$

Ainsi,

$$x_0 \in D \cap \overline{\Omega} \quad \text{et} \quad f_1(x_0) = f_2(x_0) = f(x_0),$$

et donc

$$f(x_0) = x_0,$$

ce qui contredit le fait que f n'a pas de points fixes sur $\partial\Omega$. D'où, d'après la propriété (3) du théorème (3.1.1), on a :

$$i_A(f_1, \Omega) = i_A(f_2, \Omega).$$

■

Remarque 3.2.1 *Si $A_n \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ pour certains n,*

$$i_A(f, \Omega) = 0. \tag{3.11}$$

D'une façon générale, on définit l'indice de point fixe de f sur Ω par rapport à A par :

Définition 3.2.1 *[5] Soient A un sous-ensemble convexe, fermé de X et Ω un sous-ensemble borné, relativement ouvert de A. Soient $A_1 = \overline{conv} f(\Omega), A_n = \overline{conv} f(\Omega \cap A_{n-1})$ et D un ensemble convexe, compact tel que $\cap_{n\geq 1} A_n \subseteq D \subset A$ et $f(\Omega \cap D) \subset D$. Soit G un ouvert borné de X tel que $G \cap D = \Omega \cap D$ et soit $g : G \longrightarrow D$ une application continue tel que :*

$$g|_{\Omega\cap D} = f|_{\Omega\cap D}.$$

Si l'ensemble $\{x \in X, f(x) = x\}$ est compact non vide. D'une façon générale, si $f : \Omega \longrightarrow A$ est une k-contraction d'ensembles par rapport à β sur $\overline{\Omega}$ et $f(x) \neq x$ pour $x \in \partial\Omega$, alors on définit l'indice de point fixe de l'application f sur Ω par rapport à A par :

$$i_A(f, \Omega) = deg(I - g, G, 0).$$

Théorème 3.2.2 *[8] L'indice de point fixe d'une k-contraction d'ensembles vérifie les propriétés suivantes :*

(i) ***(Normalisation)*** *si $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \Omega$ une application constante ($f(x) = y_0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et y_o une constante de Ω), alors :*

$$i_A(f,\Omega)=1.$$

(ii) ***(Additivité)*** *si Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles ouverts disjoints de Ω tel que f n'a pas de points fixes sur $\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)$, alors :*

$$i_A(f,\Omega)=i_A(f,\Omega_1)+i_A(f,\Omega_2).$$

(iii) ***(Invariance par homotopie)*** *supposons que :*

(a) $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\longrightarrow A$ est continue et $H(t,x)$ est uniformément continue en t par rapport à $x\in\overline{\Omega}$,

(b) $H(t,.):\overline{\Omega}\longrightarrow A$ est une k-contraction avec $0\leq k<1$, où k ne dépend pas de $t\in[0,1]$,

(c) $H(t,x)\neq x$ pour tout $t\in[0,1]$ et $x\in\partial\Omega$.

Alors :

$$i_A(H(t,.),\Omega)\equiv \textit{constant pour tout } t\in[0,1].$$

(iv) ***(Permanence)*** *si B est un sous-ensemble convexe fermé de A et $f(\overline{\Omega})\subset B$, alors :*

$$i_A(f,\Omega)=i_B(f,\Omega\cap B).$$

(v) ***(Propriété d'excision)*** *si Ω_0 est un ouvert par rapport à A, $\Omega_0\subset\Omega$ et f n'a pas de points fixes sur $\overline{\Omega}\backslash\Omega_0$, alors :*

$$i_A(f,\Omega)=i_A(f,\Omega_0).$$

(vi) ***(Propriété d'existence)*** *si $i_A(f,\Omega)\neq 0$, alors f admet au moins un point fixe sur Ω.*

Preuve

(i) On a :

$$i_A(f,\Omega)=deg(I-g,G,0).$$

Comme

$$g|_{\Omega\cap D}=f|_{\Omega\cap D},\quad \text{et}\quad G\cap D=\Omega\cap D,$$

alors

$$g(x)=f(x)=y_0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} i_A(f,\Omega) &= deg(I-y_0,G,0) \neq 0, \\ &= deg(I,G,y_0), \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii) Puisque $f(x) \neq x$ pour $x \in \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, c'est à dire :

$$(I-f)(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

alors

$$(I-f)(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \partial((\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap D).$$

De plus, on a :

$$f|_{(\Omega_1 \cup \Omega_2)\cap D} = g|_{(\Omega_1 \cup \Omega_2)\cap D},$$

et

$$(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap D = G \cap D.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} deg(I-g,G,0) &= deg(I-g,\Omega_1 \cup \Omega_2,0), \\ &= deg(I-g,\Omega_1,0) + deg(I-g,\Omega_2,0), \\ &= i_A(f,\Omega_1) + i_A(f,\Omega_2). \end{aligned}$$

(iii) On a

$$i_A(H_t,\Omega) = deg(I-g_t,G,0),$$

où $g_t(x) = H_t(x)$ avec $0 \leq t \leq 1$.

Comme

$$(I-H_t)(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega,$$

alors

$$(I-H_t)(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \partial(\Omega \cap D).$$

De plus, on a :

$$H_t|_{\Omega\cap D} = g_t|_{\Omega\cap D} \text{ et } \Omega \cap D = G \cap D,$$

donc

$$(I - g_t)(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \partial(G \cap D),$$

ce qui donne

$$(I - g_t)(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \partial G,$$

donc

$$deg(I - g_t, G, 0) \text{ est bien défini.}$$

D'après la propriété de l'invariance par homotopie du degré topologique de Schauder, on a :

$$deg(I - g_t, G, 0) \equiv \text{constant}, \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1$$

ce qui donne

$$i_A(H_t, \Omega) \equiv \text{constant} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(iv) On a B est un sous-ensemble convexe, fermé de A et $f(\overline{\Omega}) \subset B$, c'est à dire :

$$f : \overline{\Omega} \longrightarrow B.$$

Puisque

$$f(x) \neq x \quad \text{pour} \quad x \in \overline{\Omega},$$

alors

$$(I - f)(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega,$$

donc

$$(I - f)(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial((\Omega \cap B) \cap D).$$

De plus, on a :

$$f|_{(\Omega\cap B)\cap D} = g|_{G\cap D} \quad \text{et} \quad (\Omega \cap B) \cap D = G \cap D,$$

donc

$$\begin{aligned} i_B(f, \Omega \cap B) &= deg(I - g, G, 0), \\ &= i_A(f, \Omega). \end{aligned}$$

(v) Soit Ω_1, Ω_2 deux sous-ensembles ouverts disjoints de Ω tel que :

$$\Omega_1 = \Omega \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \emptyset,$$

alors on a :

$$\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial\Omega.$$

Donc, par hypothèse f n' a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, c'est à dire :

$$(I - f)(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

donc

$$(I - f)(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial((\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap D).$$

De plus, on a :

$$f|_{(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap D} = g|_{(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap D} \quad \text{et} \quad (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap D = G \cap D,$$

donc

$$\begin{aligned} i_A(f, \Omega_1 \cup \Omega_2) &= deg(I - g, G, 0), \\ &= i_A(f, \Omega). \end{aligned}$$

D'après la propriété d'additivité (ii), on a :

$$i_A(f, \Omega_1) + i_A(f, \emptyset) = i_A(f, \Omega) \Rightarrow i_A(f, \emptyset) = 0.$$

On prend

$$\Omega_1 = \Omega_0 \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \emptyset,$$

alors

$$i_A(f, \Omega) = i_A(f, \Omega_0) + i_A(f, \emptyset).$$

Ainsi

$$i_A(f, \Omega) = i_A(f, \Omega_0).$$

(vi) On a

$$i_A(f, \Omega) = deg(I - g, G, 0) \neq 0,$$

donc

$$\exists x \in G \quad \text{tel que} \quad (I - g)(x) = 0,$$

c'est à dire :

$$\exists x \in G \quad \text{tel que} \quad g(x) = x.$$

Comme g est une application de G à valeur dans D, alors

$$g(x) \in D,$$

ce qui donne $x \in D$, donc

$$\exists x \in G \cap D \quad \text{tel que} \quad g(x) = x.$$

De plus, on a :

$$G \cap D = \Omega \cap D,$$

alors

$$\exists x \in \Omega \cap D \quad \text{tel que} \quad g(x) = x.$$

Comme

$$f|_{\Omega \cap D} = g|_{\Omega \cap D},$$

alors

$$\exists x \in \Omega \cap D \quad \text{tel que} \quad f(x) = x,$$

d'où

$$\exists x \in \Omega \quad \text{tel que} \quad f(x) = x.$$

■

Théorème 3.2.3 *Soit A un ensemble fermé, convexe dans X. A_1 un sous-ensemble borné, fermé, convexe de A et Ω un ensemble ouvert, non vide de A avec $\Omega \subset A_1$. Si $f : A_1 \longrightarrow A$ est une k-contraction d'ensembles $(0 \leq k < 1), f(A_1) \subset A_1$ et f n'a pas de points fixes sur $A_1 \backslash \Omega$, alors :*

$$i_A(f, \Omega) = 1.$$

Preuve Il est clair que A_1 est un ensemble fermé dans X et $\overline{\Omega} \subset A_1$, d'après la propriété (4) du théorème (3.1.1), on a :

$$i_A(f, \Omega) = i_{A_1}(f, \Omega \cap A_1). \tag{3.12}$$

Puisque Ω est un sous-ensemble relativement ouvert de A et $\Omega \subset A_1 \subset A, \Omega$ est aussi un sous-ensemble relativement ouvert de A_1. On a f n'a pas des points fixes sur $A_1 \backslash \Omega$ et d'après la propriété (a) du théorème (3.1.1), on a :

$$i_{A_1}(f, A_1) = i_{A_1}(f, \Omega). \tag{3.13}$$

On prend $x_0 \in \Omega \subset A_1$, soit $H(t, x) = tx_0 + (1 - t)f(x)$. Évidemment, $H : [0, 1] \times A_1 \longrightarrow A_1$ est continue. Pour tout $t \in [0, 1]$ et $Q \subset A_1$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha(H(t, Q)) &\leq (1 - t)\alpha(f(Q)), \\ &\leq (1 - t)k\alpha(Q), \\ &\leq k\alpha(Q). \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $t \in [0, 1], H(t, .) : A_1 \longrightarrow A_1$ est une k-contraction d'ensembles. Notons que quand A_1 est traité comme sous-ensemble ouvert de A_1 sa frontière est vide. D'après les propriétés (1) et (3) du théorème (3.1.1), on a :

$$\begin{aligned} i_{A_1}(f, A_1) &= i_{A_1}(H(0, .), A_1), \\ &= i_{A_1}(H(1, .), A_1), \\ &= i_{A_1}(x_0, A_1) = 1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Alors, d'après (3.12), (3.13) et (3.14) on obtient que

$$i_A(f, \Omega) = 1.$$

■

Corollaire 3.2.1 *Soit A un ensemble fermé, convexe dans X et Ω un sous-ensemble ouvert, borné, convexe, non vide de A. Si $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ une contraction d'ensembles et $f(\overline{\Omega}) \subset \Omega$, alors*

$$i_A(f, \Omega) = 1.$$

Preuve Il suffit de prendre $A_1 = \overline{\Omega}$ dans le théorème (3.2.3) et on obtient la preuve. ■

Théorème 3.2.4 *Soit A un ensemble fermé, convexe dans X et Ω un ensemble ouvert, borné dans A avec $\theta \in \Omega$. Si $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ est une k-contraction d'ensembles $(0 \leq k < 1)$ qui satisfait la condition suivante :*

$$f(x) \neq \mu x, \quad x \in \partial\Omega, \quad \mu \geq 1, \tag{3.15}$$

alors

$$i_A(f, \Omega) = 1.$$

Preuve Soit $H(t, x) = tf(x)$, évidemment $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow A$ est continue et $H(t, .) : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ est une k-contraction d'ensembles avec $0 \leq k < 1$. En outre, d'après (3.15) et $\theta \in \Omega$, on a $H(t, x) \neq x$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et $0 \leq k < 1$. Ainsi, d'après les propriétés (4) et (3) du théorème (3.1.1), on a :

$$\begin{aligned} i_A(f, \Omega) &= i_A(\theta, \Omega), \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.5 *Soit A un ensemble convexe fermé dans X, Ω un ensemble ouvert borné dans A et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow A$ une k-contraction d'ensembles $(0 \leq k < 1)$. S'il existe $u_0 \in A, u_0 \neq \theta$, tel que $\lambda u_0 \in A$ pour tout $0 \leq \lambda < \infty$ et :*

$$x - f(x) \neq \lambda u_0, \quad x \in \partial\Omega, \lambda \geq 0. \tag{3.16}$$

Alors

$$i_A(f, \Omega) = 0.$$

Preuve Supposons que $i_A(f, \Omega) \neq 0$. D'après la relation (3.16), choisissons $\lambda_0 > 0$ tel que :

$$\lambda_0 > \|u_0\|^{-1} \sup_{x \in \overline{\Omega}} (\|x\| + \|f(x)\|). \tag{3.17}$$

Soit $H(t, x) = f(x) + \lambda_0 t u_0$. Puisque, A est un convexe fermé on a pour tout entier positif n :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \lambda_0 t u_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{1}{n} . n\lambda_0 t u_0 \in A.$$

Et donc, quand $n \to \infty$, on a : $f(x) + \lambda_0 t u_0 \in A$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \in [0, 1]$. Ainsi, $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow A$ est une application k-contraction d'ensembles pour tout $t \in [0, 1]$. D'après la condition (3.16) on obtient que $H(t, x) \neq x$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et $t \in [0, 1]$. Par conséquent, d'après l'invariance par homotopie, on a : $i_A(H(1, .), \Omega) = i_A(H(0, .), \Omega)$, c'est à dire :

$$i_A(f + \lambda_0 u_0, \Omega) = i_A(f, \Omega) \neq 0.$$

D'après la propriété (b) du théorème (3.1.1), on a il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $x_0 = f(x_0) + \lambda_0 u_0$, et donc $\lambda_0 \leq \|u_0\|^{-1}(\|x\| + \|f(x)\|)$, ce qui contredit avec (3.17). D'où le résultat. ∎

3.3 Application de l'indice de point fixe au cône

Dans cette section, nous présentons une application de l'indice de point fixe au cône qui nous assure la positivité des solutions (voir [9]).

Soit K un cône d'un espace de Banach X et $K_1 = \{x \in K, \|x\| \leq r\}$, $K_2 = \{x \in K, r \leq \|x\| \leq R$ avec $R > r > 0\}$. Considérons une k-contraction d'ensembles $T : K_1 \longrightarrow K$ vérifiant la condition suivante :

$$\|T(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in K \quad \text{et} \quad \|x\| = r; \|T(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in K, \|x\| = R. \tag{3.18}$$

Alors, T admet un point fixe $x \in K_2$. En effet, puisque T vérifie la condition (3.18), alors :

- S'il existe $x \in \partial K_1 \cup \partial K_R$ tel que $T(x) = x$, alors T admet un point fixe sur K_2.
- Sinon, T n'admet pas de point fixe. Posons $\Omega = \overline{K}_R$, $\Omega_1 = \overline{K}_R \backslash K_1 \subset \overline{K}_R$ et $\Omega_2 = K_1 \subset \overline{K}_R$. On a alors :

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset\,; \overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial K_1 \cup \partial K_R,$$

dans ce cas, la condition (3.18) devient :

$$\|T(x)\| \leq \|x\| \quad \text{et} \quad T(x) \neq x, \forall x \in \partial K_1, \tag{3.19}$$

$$\|T(x)\| \geq \|x\| \quad \text{et} \quad T(x) \neq x, \forall x \in \partial K_R. \tag{3.20}$$

D'un coté, on a : (3.19) $\Rightarrow$ (3.15). En effet, supposons que (3.19) est vérifiée et que (3.15) ne l'est pas. Donc :

$$\exists x_0 \in \partial K_r, \exists \mu_0 \geq 1 \text{ tel que } T(x_0) = \mu_0 x_0.$$

- Si $\mu_0 > 1$, $\|T(x_0)\| = \|\mu_0 x_0\| = \mu_0 \|x_0\| > \|x_0\|$, ce qui est absurde.
- Si $\mu_0 = 1$, $T(x_0) = x_0$. Ce qui est absurde. Ainsi, on obtient que :

$$\|T(x)\| \leq \|x\| \text{ et } T(x) \neq x, \forall x \in \partial K_1,$$

donc

$$T(x) \neq \mu x, \forall x \in \partial K_1 \text{ et } \mu \geq 1.$$

Par suite, d'après le théorème (3.2.4) on a :

$$i_K(T, K_1) = 1.$$

D'autre coté, (3.20) $\Rightarrow$ (3.16). En effet, supposons que :

$$\forall u_0 \in K, \exists x_0 \in \partial K_R, \exists \lambda_0 \geq 0 \text{ tel que } x_0 - T(x_0) = \lambda_0 u_0 \text{ et } \lambda_0 u_0 \in K.$$

- Si $\lambda_0 = 0$, $T(x_0) = x_0$, ce qui contredit avec $T(x) \neq x, \forall x \in \partial K_R$,
- si $\lambda_0 > 0, x_0 - T(x_0) = \lambda_0 u_0 > 0$, donc $T(x_0) < x_0$ alors :

$$\|T(x_0)\| < \|x_0\|.$$

Ce qui contredit le fait que $\|T(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in K_R$. D'après le théorème (3.2.5), on a :

$$i_K(T, K_R) = 0.$$

Comme $T(x) \neq x, \forall x \in \partial K_1 \cup \partial K_R$, d'après l'additivité de l'indice de point fixe, on obtient :

$$i_K(T, \overline{K}_R) = i_K(T, \overline{K}_R \backslash K_1) + i_K(T, K_1),$$

alors

$$i_K(T, \overline{K}_R \backslash K_1) = -1.$$

Donc, nous avons bien montrer que $i_K(T, \overline{K}_R \backslash K_1) \neq 0$. D'après la propriété d'existence de l'indice de point fixe, on déduit que :

$$T \quad \text{admet au moins un point fixe} \quad x \in \overline{K}_R \backslash K_1 = K_2.$$

ANNEXES

Définition 1 ***(Espace de Banach)*** *On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite.*

Théorème des antipodes de Lusternik-Shnirelmann-Borsuk

Théorème 1 *[13] Soit S une sphère dans un espace normé de dimension n et $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ un recouvrement de S par des fermés, alors au moins un des ensembles B_k contient deux points antipodaux c-à-d $diam(B_k) \geq diam(S)$.*

Théorème d'extension de Dugundji

Théorème 2 *[10] Soient X et Y deux espaces de Banach, $A \subset X$ une partie fermée, bornée de X et $f : A \longrightarrow Y$ une application complètement continue. Alors, f admet une extension complètement continue $\widehat{f} : X \longrightarrow Y$ telle que $\widehat{f}(x) \subset conv(f(A))$.*

Proposition 1 *[10] Soit Ω un ouvert borné d'un espace de Banach E et $F : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ une k-contraction d'ensemble $(0 \leq k < 1)$, supposons que $D_1 = \overline{conv}F(\overline{\Omega})$ et $D_n = \overline{conv}F(D_{n-1} \cap \overline{\Omega})$ $\quad (n = 2, ...)$. Si $D_n \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$ alors $\alpha(D_n) \to 0$ et $D = \cap_{n=1}^{\infty} D_n$ est un convexe, compact non vide. De plus, $D \cap \overline{\Omega}$ est compact non vide, $F(D \cap \overline{\Omega}) \subset D$.*

Les cônes

Définition 2 *[5] Soit X un espace de Banach, un cône K est un sous-ensemble fermé non vide de X tel que :*

1) Si $x, y \in K$ et λ, μ sont des réels positifs, alors $\lambda x + \mu y \in K$;

2) si $x \in K - \{0\}$, alors $-x \notin K$.

Définition 3 *[4] Soit E un espace vectoriel linéaire et K un sous-ensemble convexe non vide de E. On appelle K un cône si :*

1) $\lambda x \in K$ pour tout $x \in K$ et $\lambda > 0$;

2) $K \cap (-K) = \{0\}$.

Si E est un espace linéaire et $K \subset E$ est un cône, on définit une relation d'ordre sur E comme suit :

$$x \leq y \textit{ si et seulement si } y - x \in K.$$

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que :*

1) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pp sur Ω ;

2) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) pp \textit{ sur } \Omega.$$

Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \textit{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Akhmerov, R. R., Kamenskii, M., Potapov, A., Rodkina, A., and Sadovskii, B. *Measures of noncompactness and condensing operators*, vol. 55. Springer, 1992.

[2] Akhmerov, R. R., Kamenskii, M., Potapov, A., Rodkina, A., and Sadovskii, B. *Measures of noncompactness and condensing operators*, vol. 55. Springer, 1992.

[3] Cid, J., Infante, G., Tvrdỳ, M., and Zima, M. A topological approach to periodic oscillations related to the liebau phenomenon. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 423*, 2 (2015), 1546–1556.

[4] D. ORegan, Y. J. C., and Chen, Y. Q. *Topological Degree Theory and Applications*, vol. 10. 2006.

[5] Fadell, E., and Fournier, G. *Fixed point theory : proceedings of a conference held at Sherbrooke, Québec, Canada, June 2-21, 1980*, vol. 886. Springer, 2006.

[6] Feng, M., Zhang, X., and Ge, W. Positive fixed point of strict set contraction operators on ordered banach spaces and applications. In *Abstract and Applied Analysis* (2010), vol. 2010, Hindawi.

[7] Fonda, A., and Toader, R. Periodic orbits of radially symmetric keplerian-like systems : a topological degree approach. *Journal of Differential Equations 244*, 12 (2008), 3235–3264.

[8] Guo, D., Cho, Y. J., and Zhu, J. *Partial ordering methods in nonlinear problems.* Nova Publishers, 2004.

[9] Guo, D., and Lakshmikantham, V. Multiple solutions of two-point boundary value problems of ordinary differential equations in banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 129*, 1 (1988), 211–222.

[10] Guo, D., and Lakshmikantham, V. *Nonlinear Problems in Abstract Cones.* Academic Press, New York, 1988.

[11] Guo, D., Lakshmikantham, V., and Liu, X. *Nonlinear integral equations in abstract spaces*, vol. 373. Springer Science & Business Media, 2013.

[12] Ishikawa, S., Fujita, H., et al. Some variants of a strict-set-contraction. Yokohama City University, 1973.

[13] Józef Banaś, M. M. a. *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations.* Springer, 2014.

[14] Kavian, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, vol. 13. Springer, 1993.

[15] Lévy-Bruhl, P. *Introduction à la théorie spectrale - Cours et exercices corrigés.* 2003.

[16] Ma, T., and Wang, S. *Bifurcation theory and applications*, vol. 53. World Scientific, 2005.

[17] Mawhin, J. *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems.* No. 40. American Mathematical Soc., 1979.

[18] Nussbaum, R. D. The fixed point index for local condensing maps. *Annali di Matematica Pura ed Applicata 89*, 1 (1971), 217–258.

[19] Potter, A. A fixed point theorem for positive k-set contractions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 19*, 1 (1974), 93–102.

[20] S.Djebali. *Le degré topologique : Théorie et applications.* PhD thesis, Département de mathématiques, ENS, Algérie, 2006.

[21] Toledano, J. M. A., Benavides, T. D., and Acedo, G. L. *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, vol. 99. Springer Science & Business Media, 1997.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la théorie de l'indice de point fixe qui est une extension du degré topologique de Leray-Schauder. Nous nous permettons d'étudier l'indice de point fixe d'une k-contraction d'ensembles grâce à l'indice de point fixe d'une application complètement continue.

Mots-clés: le degré topologique, la mesure de non compacité de Kuratowski, la contraction d'ensembles, l'indice de point fixe.

Abstract

In this work, we study the theory of fixed point index which is an extension of the topological degree of Leray-Schauder. We allow ourselves to study the fixed point index of k-sets contraction thanks to fixed point index of an application completely countinuous.

Keywords: the topological degree, the Kuratowski measure of non-compactness, set contractions, fixed point index.

ملخص

في هذا العمل، ندرس نظرية مؤشر النقطة الثابتة التي هي امتداد لدرجة لوري-شودر الطوبولوجية. سمحنا لأنفسنا بدراسة مؤشر النقطة الثابتة لمجموعة من مجموعات بواسطة مؤشر النقطة الثابتة للتطبيق المستمر بالكامل.

الكلمات المفتاحية: الدرجة الطوبولوجية، مقياس عدم الاتراص لكوراتوسكي، مجموعة المجموعات، مؤشر النقطة الثابتة