République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Équations différentielles et modélisation

Présenté par :

Melle. BOUDEFLA Chahrazed

Bifurcation à partir d'une valeur propre simple

Encadrant :

Mme. BELATTAR Zokha

Maitre de Conférence "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le : 10/06/2019

Devant le jury composé de :

Présidente :	Mme. BENDIMRED Lamia (M.A.A)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Mr. BOUKHARI Boumédiène (M.A.A)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Mme. BELATTAR Zokha (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2018–2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes parents qui m'ont suivi durant mes études et qui ont toujours

été là pour me soutenir et encourager.

A mes chères sœurs et mon frère ***Mohammed,***

A mes chères nièces ***Nour el-houda, Zahra, Assia, Amina, Nour el-yakine***

et mon neveu ***Mohammed****, à qui je souhaite*

une vie pleine de bonheur et de succès.

A mes bons amis et camarades.

A toute ma famille.

Remerciements

Avant tout, louange à Allah pour son aide et sa bénédiction qui m'a donné la santé et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, **Mme. BELATTAR Zokha**. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté et conseillé.

Je veux exprimer un grand merci à tous les membres du jury : **Mme. BENDIMRED Lamia**, d'avoir accepté de présider mon jury de mémoire. **Mr. BOUKHARI Boumédiène**, pour avoir acceptée d'être examinateur de mon mémoire.

Je voudrais remercier mes parents qui m'ont accompagné, m'ont aidé, m'ont soutenu et m'ont encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire. Merci pour tout le soutien et l'amour que vous m'avez apportés depuis mon enfance et jusqu'à ce jour.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes enseignants pour leurs utiles conseils, et mes amis qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

La théorie de la bifurcation, comme le reste de l'analyse non linéaire, a connu une croissance très rapide au cours de ces dernières années, à la fois en théorie et en applications. Cette notion a une grande importance dans de nombreux domaines de la physique mathématique.

Un grand nombre de phénomènes non linéaires conduisent à des modèles mathématiques de la forme

$$F(\lambda, x) = 0 \tag{1}$$

où x représente la solution recherchée dans un espace de Banach X et λ est un paramètre réel, et F application de $\mathbb{R} \times X$ dans l'espace de Banach Y. Dans la théorie de la bifurcation, on suppose que l'équation ci-dessus a un ensemble connu de solutions, les solutions "triviales", et on dit que (λ_0, x_0) sur cet ensemble est un point de bifurcation si, à n'importe quel voisinage de ce point, on a des solutions qui ne sont pas triviales.

Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement qualitatif ou topologique dans le comportement d'un système, lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. Plus précisément, nous entendons par bifurcation une variation du nombre de solutions d'une équation en fonction des paramètres.

La théorie de la bifurcation est un sujet d'origine mathématique classique important de l'analyse non linéaire. Beaucoup de travaux ont été établie concernant des problèmes de valeurs propres non linéaires, en particulier pour les équations différentielles ordinaires et les équations intégrales, etc.

Les traveaux de Krasnosel'skii a une place particulière dans la théorie des bifurcations des solutions aux problèmes de valeurs propres non linéaires, en particulier le théorème classique concernant la bifurcation à partir des valeurs propres de multiplicité impaire [17]. En 1971, Crandall et Rabinowitz ont résolu le problème à des valeurs propres simples et caractérisé les branches de solutions qui bifurquent [5].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de bifurcation de solutions du problème non linéaire (1), le résultat est obtenu en utilisant le concept de valeurs propres. Ainsi, nous présentons l'un des résultats les plus célèbres de la théorie de bifurcation appelé "bifurcation à partir d'une valeur propre simple", qui a été développé par M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres :

Le premier chapitre, nous étudions le degré topologique en dimension finie de Brouwer et en dimension infinie de Leray-Schauder dont nous aurons besoin pour définir l'indice de Schauder. ([11], [13], [17], [18], [20])

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons des résultats importants concernant la solution d'un problème non linéaire dans la théorie de bifurcation. Nous examinons la méthode de Lyapunov-Schmidt et nous prouvons l'existence des branches de solutions par le théorème de Krasnosel'ski où la multiplicité algébrique de la valeur propre du problème linéaire est impaire, dont la preuve en utilisant l'indice de Schauder. ([3], [4], [7], [8], [10], [21], [23])

Dans le dernier chapitre, on va se baser sur les travaux de M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz concernant la bifurcation à partir d'une valeur propre simple. Ensuite, nous donnons quelques résultats obtenus à partir de ces travaux et des applications simples.

CHAPITRE 1

Préliminaires

On entame ce chapitre par quelques notions de base, puis nous passerons à la première partie qui est consacrée aux définitions et propriétés du degré topologique de Brouwer en dimension fini et le degré de Leray-Schuder en dimension infini, ensuite dans la deuxième partie de ce chapitre, nous allons définir l'indice de Schauder à l'aide du degré topologique de Leray-Schauder.

1.1 Notions de base

Dans cette section, nous exposons les outils mathématiques qui seront utilisées comme les applications compacts et quelques notions sur le calcul différentiel.

1.1.1 Applications compactes

Soient X et Y deux espaces de Banach et Ω un ouvert de X.

Définition 1.1.1 *[24]*

Une application linéaire continue $f : X \longrightarrow Y$ est dite compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est un compacte de Y.

Proposition 1.1.1 *[15]*

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application linéaire continue, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) *f est compact.*

ii) *Pour toute partie A borné de X, l'ensemble $f(\overline{A})$ est relativement compact dans Y.*

iii) *L' image de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X possède une sous-suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.*

Proposition 1.1.2 *[20]*

f est dite complètement continue si elle est continue et compacte.

Proposition 1.1.3 *[15]*

Soient X, Y et Z des espaces de Banach, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications linéaires continues, si f ou g est compacte alors $g \circ f$ est compacte.

Définition 1.1.2 *[12]*

Une application linéaire continue f est dit de rang fini si la dimension de son image est finie.

Proposition 1.1.4 *[15]*

Tout application linéaire continu de rang fini est compacte.

Théorème 1.1.1 *[24]*

Une application linéaire continue $f : X \longrightarrow Y$ est compact si et seulement si f est limite d'une suite d'opérateur de rang fini.

1.1.2 Applications différentiables

Définition 1.1.3 *[2](Dérivée de Fréchet)*

Soit $x_0 \in \Omega$, on dit qu'une application $f : \Omega \longrightarrow Y$ est Fréchet-différentiable (ou différentiable au sens de Fréchet) au point x_0 s'il existe un opérateur linéaire et continu $L : X \longrightarrow Y$, tel que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh = \circ(||h||),$$

où

$$\frac{\circ(||h||)}{||h||} \to 0 \qquad \textit{quand} \;\; ||h|| \to 0.$$

Définition 1.1.4 *[22]*

L' application $f : \Omega \longrightarrow Y$ est Fréchet-différentiable au point x_0 s'il existe un opérateur linéaire et continu $L : X \longrightarrow Y$ et une application ε de X dans Y, tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + ||h||\varepsilon(h), \qquad \textit{avec} \lim_{||h|| \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Lemme 1.1.1 *[19]*

Si $f : \Omega \longrightarrow Y$ est une application différentiable compacte alors la différentiabilité de f au point $x_0 \in \Omega$, $Df(x_0) : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire compact.

Définition 1.1.5 *[22](Dérivée en un point suivant une direction)*

Soient $f : \Omega \longrightarrow Y$ une application, $x_0 \in \Omega$ et $d \in X$. La limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + hd) - f(x_0)}{h}$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de f au point x_0 suivant la direction d. Elle est notée $Df(x_0)(d)$.

1.2 Le degré topologique en dimension finie

Dans cette section nous présentons la théorie du degré topologique de Brouwer et ses propriétés principales.

Dans la suite, nous considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω et $J_f(x)$ le jacobien de f au point x, telle que

$$J_f(x) = det\ Df(x) = det\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

1.2.1 Le degré topologique de Brouwer

Définition 1.2.1 *[20]*

Un point $x \in \Omega$ est appelé un point régulier de f si le jacobien de f au point x est inversible (c.à.d : $J_f(x) \neq 0$) , si non x est appelé un point singulier de f.

On note l'ensemble des points singuliers de f sur Ω par $S_f(\Omega) = \{x \in \Omega,\ J_f(x) = 0\}$.

Définition 1.2.2 *[20]*

Un point $p \in \mathbb{R}^n$ est appelé une valeur régulière de f si $f^{-1}(p) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$, si non p est dite valeur singulière de f.

Définition 1.2.3 *[20]*

Soient f une fonction de classe C^1 sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$ noté $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $p \notin f(\partial\Omega) \cup f(S_f(\Omega))$, on appelle le degré de Brouwer de f au p relativement à Ω l'entier :

$$deg(f, \Omega, p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(p)} sign\ J_f(x) & Si \quad \Omega \cap f^{-1}(p) \neq \emptyset, \\ 0 & Si \quad \Omega \cap f^{-1}(p) = \emptyset\,. \end{cases}$$

Exemple 1.2.1

Soient $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1\}$ *et* $\partial\Omega = S^1$ *la sphère unité de centre 0. Soient* $p_0 = (0,0)$ *et*

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = (\underbrace{2x_1^2 - 1}_{f_1}, \underbrace{2x_1 x_2}_{f_2}).$$

Cherchons $x = (x_1, x_2)$ *tel que* $f(x) = p_0$

$$f(x_1, x_2) = (0,0) \implies \begin{cases} 2x_1^2 - 1 & = 0 \\ 2x_1 x_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ou \; x_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \;, \\ x_2 = 0 \;. \end{cases}$$

Donc on trouve deux solutions $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0) \notin \partial\Omega$, *alors le degré est bien défini.*

Calculons le jacobien de f *au points* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ *et* $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0)$ *avec*

$$\begin{aligned} J_f(x_1, x_2) &= det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} 4x_1 & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} \;. \end{aligned}$$

Donc on a $J_f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = 4 \neq 0$ *et* $J_f(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0) = 4 \neq 0$, *ce qui donne* $f^{-1}(\{p_0\}) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$, *alors* p_0 *est une valeur régulière et le degré de f au* p_0 *est :*

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, p_0) &= \sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(\{p_0\})} sign\, J_f(x) \\ &= sign\, J_f(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0) + sign\, J_f(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}, 0) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \;. \end{aligned}$$

Définition 1.2.4 *[17]*

Soit $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. *Si* $p \notin f(\partial\Omega)$ *est une valeur singulière de* f, *alors on prend une valeur régulière* p_1 *proche de* p *telle que* $p_1 \notin f(\partial\Omega)$ *et on a :*

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega, p_1).$$

Définition 1.2.5 *[11]*

Soient $\alpha > 0$, $\phi : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[0, +\infty[$, *on dit que* ϕ *est une fonction poids d'indice* α *s'il existe* $\delta \in [0, \alpha]$ *tel que* $\phi(t) = 0$ *pour* $t \notin [\delta, \alpha]$.

On note W_α l'ensemble des fonctions poids d'indice α et on désigne par $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2.1

1) *Si* $\phi \in W_\alpha$ *et*

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \phi(\|x\|_2)\ , \end{aligned}$$

alors g *est une fonction continue à support compact dans* $\mathbb{R}^n$. *Ainsi* $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|_2)dx$ *est bien défini.*

2) *On note par* $W_\alpha^1 = \{\phi \in W_\alpha \ \text{ tel que } \ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|_2)dx = 1\}$.

Définition 1.2.6 *[11]*

Soient $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *et* $p \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $p \notin f(\partial\Omega)$, *alors le degré de* f *au point* p *dans* Ω *est défini par*

$$deg_\phi(f, \Omega, p) = \int_\Omega \phi(\|f(x) - p\|_2) J_f(x) dx,$$

où $\phi \in W_\alpha^1$ *une fonction poids d'indice* α *tel que*

$$0 < \alpha < \gamma = \min_{x \in \partial\Omega} \|f(x) - p\|_2\ .$$

Proposition 1.2.1 *[20]*

Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *et* $p \notin f(\partial\Omega)$. *Si pour tout* $x \in \Omega \cap f^{-1}(\{p\})$ *avec* $J_f(x) \neq 0$, *alors les définitions 1.2.3 et 1.2.6 sont équivalentes, c-à-d : il existe une constante* $\widehat{\alpha}$ *vérifiant*

$$0 < \widehat{\alpha} < \gamma = \min_{x \in \partial\Omega} \|f(x) - p\|_2,$$

telle que $\forall \phi \in W_\alpha^1$ *avec* $\alpha \in [0, \widehat{\alpha}]$, *on a :*

$$deg_\phi(f,\Omega,p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\Omega\cap f^{-1}(p)} sign\ J_f(x) & Si \quad \Omega\cap f^{-1}(p) \neq \varnothing, \\ 0 & Si \quad \Omega\cap f^{-1}(p) = \varnothing. \end{cases}$$

Définition 1.2.7 *[11](Extension de la définition du degré)*

Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue sur* $\overline{\Omega}$ *et* $p \notin f(\partial\Omega)$, *où* p *un point fixé de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $(f_k)_k$ *une suite de fonctions de* $C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$f_k(x) \neq p, \qquad \forall x \in \partial\Omega,$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\Omega = 0.$$

Alors le degré topologique de f *au point* p *par rapport à* Ω *est défini par :*

$$deg(f,\Omega,p) := \lim_{k\to\infty} deg(f_k,\Omega,p).$$

1.2.2 Propriétés du degré topologique de Brouwer

1) Le degré de l'identité [13]

Soit $I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application identité, on a :

i) $deg(I,\Omega,p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in \Omega, \\ 0 & \text{si } p \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

ii) $deg(-I,\Omega,p) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } p \in \Omega, \\ 0 & \text{si } p \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

Preuve:

i) • Si $p \in \Omega$, on suppose qu'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que

$$\begin{aligned} I(x) = p \quad &\Longrightarrow \quad x = I^{-1}(\{p\}) \\ &\Longrightarrow \quad x = p, \end{aligned}$$

il y a une contradiction car $p \notin \partial\Omega$, donc le degré est bien défini. On a $\Omega\cap I^{-1}(\{p\}) \neq \varnothing$, alors

$$deg(I,\Omega,p) = sing\ J_I(x) = 1.$$

- Si $p \notin \overline{\Omega}$, le degré est bien défini car $p \notin I(\overline{\Omega})$ et on a $\Omega \cap I^{-1}(\{p\}) = \varnothing$, alors

$$deg(I, \Omega, p) = 0.$$

ii) • Si $p \in \Omega$, supposons $\exists\ x \in \partial\Omega$ tel que

$$\begin{aligned}(-I)(x) = p \quad &\Longrightarrow \quad -x = p \\ &\Longrightarrow \quad x = -p \in \Omega,\end{aligned}$$

donc le degré est bien défini et on a $\Omega \cap (-I)^{-1}(\{p\}) \neq \varnothing$, alors

$$deg(-I, \Omega, p) = sing\ J_{-I}(x) = (-1)^n.$$

- Si $p \notin \overline{\Omega}$, vérifions si $p \notin (-I)(\partial\Omega)$

$$\begin{aligned}x \in \partial\Omega \quad &\Longrightarrow \quad (-I)(x) \in (-I)(\partial\Omega) \\ &\Longrightarrow \quad p \in \partial\Omega, \qquad \text{(ce qui contredit que } p \notin \overline{\Omega})\end{aligned}$$

donc le degré est bien défini et $\Omega \cap (-I)^{-1}(\{p\}) = \varnothing$, alors

$$deg(-I, \Omega, p) = 0.$$

$\blacksquare$

2) La continuité par rapport à la fonction [13]

Soient $f_1, f_2 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $p \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\gamma = \min_{x \in \partial\Omega} \|f_1(x) - p\|_2$, si $\alpha \in]0, \gamma[$ et

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|f_1(x) - f_2(x)\|_2 < \frac{1}{7}\alpha,$$

alors

$$deg(f_1, \Omega, p) = deg(f_2, \Omega, p).$$

Preuve:

On pose $\alpha_0 = \frac{1}{7}\alpha$ et soit $\mu(t) : [0, +\infty[\longrightarrow [0, 1]$ une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ définie par :

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, 2\alpha_0], \\ 0 & \text{si} \quad t > 3\alpha_0, \end{cases}$$

et soit $H : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ définie par :

$$H(x) = \left[1 - \mu(\|f_1(x) - p\|_2)\right] f_1(x) + \mu(\|f_1(x) - p\|_2) f_2(x).$$

Montrons que deg (H, Ω, p) est bien défini, c.à.d :

$$H(x) \neq p, \qquad \forall x \in \partial\Omega,$$

alors

$$\|H(x) - p\|_2 > 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - p\|_2 &= \|f_1(x) - H(x) + H(x) - p\|_2 \\ &\leq \|f_1(x) - H(x)\|_2 + \|H(x) - p\|_2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|H(x) - p\|_2 \geq \|f_1(x) - p\|_2 - \|f_1(x) - H(x)\|_2,$$

avec

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - H(x)\|_2 &= \left\| f_1(x) - \left[1 - \mu(\|f_1(x) - p\|_2)\right] f_1(x) - \mu(\|f_1(x) - p\|_2) f_2(x) \right\|_2 \\ &= \left\| \mu(\|f_1(x) - p\|_2) f_1(x) - \mu(\|f_1(x) - p\|_2) f_2(x) \right\|_2 \\ &= \mu(\|f_1(x) - p\|_2) \|f_1(x) - f_2(x)\|_2 < \alpha_0. \qquad (\text{ pour } \mu = 1) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \partial\Omega$, on a :

$$\|f_1(x) - p\|_2 \geq \gamma > \alpha = 7\alpha_0,$$

d'où

$$\|H(x) - p\|_2 \geq 6\alpha_0 > 0,$$

pour $\phi \in W^1_{6\alpha_0}$, donc deg (H, Ω, p) est bien défini.

1) Montrons que deg $(H, \Omega, p) =$ deg (f_1, Ω, p). Soit $\phi_1 \in W^1_{5\alpha_0}$ tel que $\phi_1(t) = 0$ pour $t \in [0, 4\alpha_0[$ et on a :

$$\begin{aligned} \|H(x) - p\|_2 &\leq \|H(x) - f_1(x)\|_2 + \|f_1(x) - p\|_2 \\ &\leq \alpha_0 + \|f_1(x) - p\|_2. \end{aligned}$$

i) Si $\|f_1(x)-p\|_2 < 3\alpha_0$, on a :

$$\|H(x)-p\|_2 < 4\alpha_0,$$

ce qui donne

$$\phi_1(\|H(x)-p\|_2) = \phi_1(\|f_1(x)-p\|_2) = 0,$$

donc

$$\deg_{\phi_1}(H,\Omega,p) = \deg_{\phi_1}(f_1,\Omega,p) = 0.$$

ii) Si $\|f_1(x)-p\|_2 > 3\alpha_0$, on a par la définition de H et μ

$$\mu(\|f_1(x)-p\|_2) = 0,$$

donc

$$H(x) = f_1(x).$$

Par suite :

$$\int_\Omega \phi_1(\|H(x)-p\|_2)J_H(x)dx = \int_\Omega \phi_1(\|f_1(x)-p\|_2)J_{f_1}(x)dx,$$

donc

$$\deg(H,\Omega,p) = \deg(f_1,\Omega,p).$$

2) Montrons que $\deg(H,\Omega,p) = \deg(f_2,\Omega,p)$. Vérifions tout d'abord que $\deg(f_2,\Omega,p)$ est bien défini, c.à.d :

$$\|f_2(x)-p\|_2 > 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Soit $\phi_2 \in W^1_{\alpha_0}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_1(x)-p\|_2 &= \|f_1(x)-f_2(x)+f_2(x)-p\|_2 \\
&\leq \|f_1(x)-f_2(x)\|_2 + \|f_2(x)-p\|_2,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\|f_2(x)-p\|_2 &\geq \|f_1(x)-p\|_2 - \|f_1(x)-f_2(x)\|_2 \\
&\geq \|f_1(x)-p\|_2 - \alpha_0 \\
&\geq 6\alpha_0 > 0,
\end{aligned}$$

donc deg (f_2, Ω, p) est bien défini.

i) Si $\|f_1(x) - p\|_2 > 2\alpha_0$, alors on trouve que $\|f_2(x) - p\|_2 > \alpha_0$ et on a :

$$\|f_1(x) - p\|_2 \leq \|f_1(x) - H(x)\|_2 + \|H(x) - p\|_2,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \|H(x) - p\|_2 &\geq \|f_1(x) - p\|_2 - \|f_1(x) - H(x)\|_2 \\ &\geq \alpha_0 > 0, \end{aligned}$$

donc

$$\phi_2(\|H(x) - p\|_2) = \phi_2(\|f_2(x) - p\|_2) = 0,$$

alors

$$\deg\,(H, \Omega, p) = \deg\,(f_2, \Omega, p) = 0.$$

ii) Si $\|f_1(x) - p\|_2 < 2\alpha_0$, par la définition de H et μ on obtient

$$\mu(\|f_1(x) - p\|_2) = 1,$$

ce qui donne que $H(x) = f_2(x)$, donc

$$\phi_2(\|H(x) - p\|_2) = \phi_2(\|f_2(x) - p\|_2).$$

Alors

$$\deg_{\,\phi_2}(H, \Omega, p) = \deg_{\,\phi_2}(f_2, \Omega, p).$$

Ainsi,

$$\deg\,(f_1, \Omega, p) = \deg\,(f_2, \Omega, p).$$

■

3) Additivité [17]

Soient $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés disjoints de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Si $p \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega_1, p) + deg(f, \Omega_2, p).$$

Preuve:

Soit $(f_k)_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ une suite de fonctions tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|f_k - f\|_\Omega = 0$ et $p \notin f_k(\partial\Omega)$, alors d'après la définition d'extension 1.2.7 et la proposition 1.2.1, on a :

$$\begin{aligned}
deg(f,\Omega,p) &= \lim_{k\to+\infty} deg(f_k,\Omega,p) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \phi(\|f_k(x)-p\|_2)\, J_{f_k}(x)dx \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega_1\cup\Omega_2} \phi(\|f_k(x)-p\|_2)\, J_{f_k}(x)dx \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega_1} \phi(\|f_k(x)-p\|_2)\, J_{f_k}(x)dx + \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega_2} \phi(\|f_k(x)-p\|_2)\, J_{f_k}(x)dx \\
&= deg_\phi(f,\Omega_1,p) + deg_\phi(f,\Omega_2,p) \\
&= deg(f,\Omega_1,p) + deg(f,\Omega_2,p). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

4) **Invariance par homotopie** [13]
Soient $H_t : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $p \notin H_t(\partial\Omega \times [0,1])$. Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$deg(H_0,\Omega,p) = deg(H_1,\Omega,p).$$

Preuve:

Soit $\varepsilon := \frac{1}{7}\alpha$ et comme H_t est uniformément continue sur le compact $\overline{\Omega} \times [0,1]$, alors il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on ait :

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|H_{t_1}(x) - H_{t_2}(x)\| < \varepsilon.$$

Par conséquent, d'après la propriété **2)**, on a :

$$\deg\,(H_{t_1},\Omega,p) = \deg\,(H_{t_2},\Omega,p),$$

pour tous t_1 , $t_2 \in [0,1]$ tels que $|t_1 - t_2| \leq \delta$.

Puisque $[0,1]$ est un compact, on peut trouver un recouvrement d'intervalles finis $]t_i, t_{i+1}[$ de longueur δ, donc pour tous $t_i, t_{i+1} \in [0,1]$, on a :

$$\text{deg}\,(H_{t_i}, \Omega, p) = \text{deg}\,(H_{t_{i+1}}, \Omega, p).$$

Ainsi, deg (H_t, Ω, p) est constant. ■

5) Invariance sur le bord [17]
Soient $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues et $p \in \mathbb{R}^n$. Si $p \notin f(\partial\Omega)$ et $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, alors

$$deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p).$$

■

Preuve:

On considère l'homotopie suivante :

$$H_t(x) = tf(x) + (1-t)g(x), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Montrons tout d'abord que $deg(H_t, \Omega, p)$ est bien défini, c.à.d : $p \notin H_t(\partial\Omega)$.
Nous supposons que $\exists\ x \in \partial\Omega$ tel que :

$$\begin{aligned} H_t(x) = p \quad &\Longrightarrow \quad tf(x) + (1-t)g(x) = p \\ &\Longrightarrow \quad tf(x) + (1-t)f(x) = p \qquad (\text{ car } f = g \text{ sur } \partial\Omega) \\ &\Longrightarrow \quad f(x) = p, \end{aligned}$$

ce qui contredit que $p \notin f(\partial\Omega)$, donc $p \notin H_t(\partial\Omega)$ et le degré est bien défini. Par la propriété d'homotopie 4) on a :

$$deg(H_0, \Omega, p) = deg(H_1, \Omega, p),$$

avec $H_0(x) = g(x)$ et $H_1(x) = f(x)$.
Alors

$$deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p).$$

■

6) Propriété multiplicative du degré[9]
Soit $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $f_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions de classe C^1, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts bornés respectivement de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$. Soient $p_1 \notin f_1(\partial\Omega_1)$ et $p_2 \notin f_2(\partial\Omega_2)$. Alors

$$\text{deg}\,(f_1 \times f_2, \Omega_1 \times \Omega_2, (p_1, p_2)) = \text{deg}\,(f_1, \Omega_1, p_1).\text{deg}\,(f_2, \Omega_2, p_2),$$

où $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)),\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Preuve:

Comme f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^1, le produit $f_1 \times f_2$ est aussi de classe C^1. Puisque $p_1 \notin f_1(\partial\Omega_1)$ et $p_2 \notin f_2(\partial\Omega_2)$ on a :

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \neq (p_1, p_2), \qquad \forall (x_1, x_2) \in \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\deg\,(f_1 \times f_2, \Omega_1 \times \Omega_2, (p_1, p_2)) &= \sum_{x \in (f_1 \times f_2)^{-1}(p_1, p_2)} \text{sign } J_{f_1 \times f_2}(x) \\
&= \sum_{x \in (f_1 \times f_2)^{-1}(p_1, p_2)} \text{sign det} \begin{pmatrix} D_{x_1} f_1(x_1) & 0 \\ 0 & D_{x_2} f_2(x_2) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{x_i \in f^{-1}(p_i),\ i=1,2} \text{sign det } D_{x_1} f_1(x_1).\ \text{det } D_{x_2} f_2(x_2) \\
&= \prod_{i=1}^{2} \sum_{x_i \in f^{-1}(p_i)} \text{sign det } D_{x_i} f_i(x_i) \\
&= deg(f_1, \Omega_1, p_1).deg(f_2, \Omega_2, p_2). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

7) Propriété d'excision[13]

Soient $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $p \in \mathbb{R}^n$. Si $D \subset \overline{\Omega}$ est un ensemble fermé, et $p \notin f(D) \cup f(\partial\Omega)$, alors

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega \backslash D, p).$$

Preuve:

On a $\Omega = (\Omega \backslash D) \cup D$ avec $(\Omega \backslash D) \cap D = \emptyset$, donc d'après la propriété d'additivité 3) on trouve :

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, D, p) + deg(f, \Omega \backslash D, p).$$

Par hypothèses on a D est un ensemble fermé (c.à.d : $D = \overline{D}$) et puisque $p \notin f(D)$, alors $p \notin f(\partial D)$, donc nous concluons que $deg(f, D, p)$ est bien défini et que $D \cap f^{-1}(p) = \emptyset$, ce qui donne

$$deg(f, D, p) = 0.$$

Ainsi,

$$deg(f,\Omega,p) = deg(f,\Omega\backslash D,p).$$

$\blacksquare$

8) Propriété d'existence[13]

Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $p \notin f(\partial\Omega)$. Si $deg(f,\Omega,p) \neq 0$, alors l'équation $f(x) = p$ admet au moins une solution dans Ω.

Preuve:

Supposons qu'il n'existe pas un $x \in \Omega$ tel que $f(x) = p$ (c.à.d : $f^{-1}(\{p\}) = \varnothing$), et on a par hypothèse que $p \notin f(\partial\Omega)$ donc $p \notin f(\overline{\Omega})$.
On prend $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = \varnothing$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, d'après la propriété d'additivité 3) on trouve

$$deg(f,\Omega,p) = deg(f,\Omega,p) + deg(f,\varnothing,p) \Longrightarrow deg(f,\varnothing,p) = 0.$$

Maintenant on prend $\Omega_1 = \Omega_2 = \varnothing$ tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \varnothing$, on obtient

$$deg(f,\Omega,p) = deg(f,\varnothing,p) + deg(f,\varnothing,p) \Longrightarrow deg(f,\Omega,p) = 0.$$

$\blacksquare$

9) Invariance par translation [13]

Soient $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, $a \in \mathbb{R}^n$. Si $p \notin f(\partial\Omega)$, alors

$$deg(f - a,\Omega,p - a) = deg(f,\Omega,p).$$

Preuve:

Soient H_t et p_t deux homotopies continues telles que :

$$\begin{aligned} H_t : \overline{\Omega} \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\longmapsto H_t(x,t) = f(x) - ta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_t : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto p_t(t) = p - ta. \end{aligned}$$

Vérifions que $deg(H_t,\Omega,p_t)$ est bien défini, c.à.d : $\forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,1],\ H_t(x,t) \neq p_t(t)$.
En effet, on suppose que $\exists\ x \in \partial\Omega$ tel que

$$\begin{aligned} H_t(x,t) = p_t(t) &\Longrightarrow f(x) - ta = p - ta \\ &\Longrightarrow f(x) = p, \end{aligned}$$

il y a une contradiction car $p \notin f(\partial\Omega)$, donc $deg(H_t, \Omega, p_t)$ est bien défini. D'après la propriété d'homotopie **4)** on a :

$$deg(H_0, \Omega, p_0) = deg(H_1, \Omega, p_1),$$

tel que

$$deg(H_0, \Omega, p_0) = deg(f, \Omega, p),$$

$$deg(H_1, \Omega, p_1) = deg(f - a, \Omega, p - a).$$

Alors

$$deg(f - a, \Omega, p - a) = deg(f, \Omega, p).$$

■

1.2.3 Théorèmes fondamentaux du degré de Brouwer

Théorème 1.2.1 *[1](Théorème de Brouwer)*

Soient Ω un convexe, compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe.

Théorème 1.2.2 *[17](Théorème de Poincaré-Bohl)*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions continues. Si

$$tf(x) + (1-t)g(x) \neq p, \quad \forall t \in [0,1] \text{ et } \forall x \in \partial\Omega,$$

où $p \in \mathbb{R}^n$, alors

$$deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p).$$

Preuve:

On pose

$$H_t(x) = tf(x) + (1-t)g(x), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Puisque $tf(x) + (1-t)g(x) \neq p$ pour tout $x \in \partial\Omega$, alors deg (H_t, Ω, p) est bien défini. D'après la propriété de l'invariance par homotopie **4)** on a :

$$deg(H_0, \Omega, p) = deg(H_1, \Omega, p),$$

avec

$$deg(H_0, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p),$$

$$deg(H_1, \Omega, p) = deg(f, \Omega, p).$$

Alors
$$deg(f,\Omega,p)=deg(g,\Omega,p).$$

■

Théorème 1.2.3 *[14](Théorème de Borsuk)*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, symétrique par rapport à $0\in\Omega$, et $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une application continue et impaire, telle que $0\notin f(\partial\Omega)$. Alors $deg(f,\Omega,0)$ est impair.

Preuve:

Puisque $0\notin f(\partial\Omega)$ alors $\deg(f,\Omega,0)$ est bien défini. Premièrement on a :

$$\begin{aligned} f \text{ est impaire } &\Longrightarrow f(-x)=-f(x)\\ &\Longrightarrow -Df(-x)=-Df(x)\\ &\Longrightarrow Df(-x)=Df(x), \end{aligned}$$

ce qu'implique que $J_f(-x)=J_f(x)$.
Comme f est impaire on a $f(0)=0$ et

$$x\in f^{-1}(\{0\})\Longrightarrow -x\in f^{-1}(\{0\}),$$

donc on a deux cas :

1) Si $f^{-1}(0)=\{0\}$, on trouve

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,0)&=\text{sign } J_f(0)\\ &=\pm 1.\end{aligned}$$

2) Si $f^{-1}(0)=\{0\}\cup\{-x_1,-x_2,\ldots,-x_n,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, on a :

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,0)&=\sum_{x\in\Omega\cap f^{-1}(0)}\text{sign } J_f(x)\\ &=\text{sign } J_f(0)+\sum_{i=1}^{n}\text{sign } J_f(-x_i)+\sum_{i=1}^{n}\text{sign } J_f(x_i)\\ &=\pm 1+2\sum_{i=1}^{n}\text{sign } J_f(x_i).\end{aligned}$$

Alors dans les deux cas le degré est un entier impaire. ■

Théorème 1.2.4 *[17](Degré d'une application paire)*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction paire (c.à.d : $f(x) = f(-x), \forall x \in \partial\Omega$), alors on a $deg(f, \Omega, 0)$ est pair.

1.3 Le degré topologique en dimension infinie

Le degré topologique en dimension infinie ne pourra pas être défini pour toutes les applications continues d'un Banach X dans lui-même. Dans ce cas on va introduire la notion des opérateurs compacts qui sont des perturbations compactes de l'identité, c.à.d : des opérateurs du type $I - f$ où f est compact et I désigne l'application identité de X, qui est appelé degré de Leray-Schauder.

1.3.1 Le degré topologique de Leray-Schauder

Soit X un espace de Banach de dimension infini muni de la norme $\|.\|$.

Lemme 1.3.1 *[13]*

Soient Ω un ouvert borné de X et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Si $\epsilon > 0$ tel que

$$\|x - f(x)\| \geq 4\epsilon, \qquad \forall x \in \partial\Omega,$$

alors, il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie F de X et un opérateur $f_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ tels que :

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \qquad \|f_\epsilon(x) - f(x)\| \leq \epsilon,$$

$$\forall x \in \partial\Omega, \qquad \|x - f_\epsilon(x)\| \geq 3\epsilon.$$

Définition 1.3.1 *[13](Le degré de Leray-Schauder)*

Soient Ω un ouvert borné de X et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$ (c.à.d : $0 \notin (I - f)(\partial\Omega)$). Alors $\epsilon > 0, F \subset X$, et $f_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ étant donnés par le lemme 1.3.1 . On considère G un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant F, tel que $\Omega_G := G \cap \Omega \neq \emptyset$. On définit le degré topologique de Leray-Schauder par :

$$deg(I - f, \Omega, 0) = deg(I_G - f_\epsilon, \Omega_G, 0).$$

1.3.2 Propriétés du degré topologique de Leray-Schauder

Nous citons quelques propriétés importantes du degré topologique de Leray-Schauder. La démonstration de ces résultats découle de la définition du degré de Leray-Schauder, ainsi que des propriétés analogues du degré de Brouwer.

1) Le degré de l'identité[17]

$$deg(I,\Omega,p)=\begin{cases}1 & \text{si } \ p\in\Omega,\\ 0 & \text{si } \ p\notin\overline{\Omega}.\end{cases}$$

2) Additivité[13]

Soient Ω_1,Ω_2 deux ouverts bornés disjoints et $f:\overline{\Omega_1}\cup\overline{\Omega_2}\longrightarrow X$ est un opérateur compact. Soit $p\in X$ tel que $p\notin(I-f)(\partial\Omega_1)\cup(I-f)(\partial\Omega_2)$, alors

$$deg(I-f,\Omega,p)=deg(I-f,\Omega_1,p)+deg(I-f,\Omega_2,p).$$

3) Invariance par translation[13]

Soient $f:\overline{\Omega}\longrightarrow X$ est un opérateur compact et $p\in X$. Si $p\notin(I-f)(\partial\Omega)$, alors

$$deg(I-f,\Omega,p)=deg(I-f-p,\Omega,0).$$

4) Propriété d'existence[13]

Soient $f:\overline{\Omega}\longrightarrow X$ est un opérateur compact et $p\in X$. Si $p\notin(I-f)(\partial\Omega)$ et $deg(I-f,\Omega,p)\neq 0$, alors il existe $x\in\Omega$ tel que $x-f(x)=p$.

5) Invariance par homotopie[17]

Soit $H_t:\overline{\Omega}\times[0,1]\longrightarrow X$ un opérateur compact, tel que

$$p\in X\backslash(I-H_t)(\partial\Omega,t),\qquad \forall t\in[0,1].$$

Alors $deg(I-H_t,\Omega,p)$ est constant pour tout $t\in[0,1]$, c.à.d :

$$deg(I-H_0,\Omega,p)=deg(I-H_1,\Omega,p).$$

6) La continuité par rapport à l'opérateur[13]

Soient $f_1,f_2:\overline{\Omega}\longrightarrow X$ deux opérateurs compacts et $p\in X$ tel que

$$p\notin(I-f_1)(\partial\Omega)\cup(I-f_2)(\partial\Omega),$$

alors, s'il existe $\varepsilon>0$ satisfait $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|f_1(x)-f_2(x)\|\leq\varepsilon$, on a :

$$deg(I-f_1,\Omega,p)=deg(I-f_2,\Omega,p).$$

1.3.3 Théorèmes fondamentaux du degré de Leray-Schauder

Théorème 1.3.1 *[27](Théorème du point fixe de Schauder)*

Soient Ω un sous ensemble convexe fermé, borné non vide d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compacte, alors f admet au moins un point fixe.

Théorème 1.3.2 *[20](Alternative non linéaire de Leray-Schauder)*

Soient X un espace de Banach et $\Omega \subset X$ un sous ensemble ouvert borné contenant 0. Si $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est une application compacte continue. Alors l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :

i) *f a un point fixe sur $\overline{\Omega}$,*

ii) *il existe $\lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tel que $f(x) = \lambda x$.*

Théorème 1.3.3 *[27](Théorème de Borsuk)*

Soit $\Omega \subset X$ un sous ensemble borné ouvert symétrique par rapport à l'origine et contenant 0. Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ une application compacte, ce qui est impair et tel que $0 \notin (I-f)(\partial\Omega)$. Alors $deg(I-f, \Omega, 0)$ est impair.

Théorème 1.3.4 *[25](Théorème de Rothe)*

Soit B une boule ouvert de X et $f : B \longrightarrow X$ une application compacte continue tel que $f(\partial B) \subset B$. Alors f admet au moins un point fixe.

Théorème 1.3.5 *[25](Théorème de Schaefer)*

Soit X un espace de Banach et $f : X \longrightarrow X$ une application complètement continu. Alors

1) *il existe pour tout $\lambda \in [0, 1]$ au moins un $x \in X$ tel que $x = \lambda f(x)$,*
ou bien

2) *l'ensemble $\{x \in X : x = \lambda f(x), 0 < \lambda < 1\}$ est non borné dans X.*

1.4 L'indice de Schauder

Dans cette section, nous allons faire intervenir le degré de Leray Schauder pour calculer l'indice des perturbations compactes de l'identité.

1.4.1 L'indice des applications différentiables

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension finie, et Ω un ouvert borné de X. Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow Y$ une application continue et $p \in X$ tel que $p \notin f(\partial\Omega)$. Supposons que l'équation $f(x) = p$

possède une solution isolé $x_0 \in \Omega$, c.à.d, il existe une boule $B_r(x_0)$ où x_0 est la seule solution de cette équation. Alors pour tout $r_0 \in]0, r[$ et par la propriété d'excision **8)** on a :

$$deg(f, B_r(x_0), p) = deg(f, B_{r_0}(x_0), p).$$

Définition 1.4.1 *[11]*

On définit l'indice de f au point x_0 relativement à p par :

$$i(f, x_0, p) := deg(f, B_{r_0}(x_0), p).$$

Théorème 1.4.1 *[11]*

Soient $f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$ une application continue dans $\overline{\Omega}$ et $p \notin f(\partial\Omega)$. Supposons que l'équation $f(x) = p$ possède uniquement n solutions distinctes $x_1, \cdots, x_n$ contenues dans Ω. Alors

$$deg(f, \Omega, p) = \sum_{j=1}^{n} i(f, x_j, p).$$

Remarque 1.4.1

Soient $f \in C^1(\Omega)$ et $J_f(x_0) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} i(f, x_0, p) &= deg(f, B_{r_0}(x_0), p) \\ &= \sum_{\Omega \cap x \in f^{-1}(\{p\})} sign\, J_f(x) \\ &= sign\, J_f(x_0). \end{aligned}$$

Lemme 1.4.1 *[14]*

Soit A une matrice carré inversible (régulière) de taille n et $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres strictement négatives et de multiplicités respectives $r_1, \cdots, r_m$. Alors

$$sign\ det\, A = (-1)^r, \qquad où \quad r = \sum_{j=1}^{m} r_j.$$

Preuve:

Soient $\mu_{m+1}, \mu_{m+2}, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres positives de la matrice A et de multiplicités respectives $k_{m+1}, k_{m+2}, \ldots, k_n$. Alors

$$\begin{aligned}\det \mathrm{A} &= \prod_{j=1}^{m} \lambda_j^{r_j} \prod_{j=m+1}^{n} \mu_j^{k_j} \\ &= \prod_{j=1}^{m} (-1)^{r_j} |\lambda_j|^{r_j} \prod_{j=m+1}^{n} \mu_j^{k_j} \\ &= (-1)^r \prod_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{r_j} \prod_{j=m+1}^{n} \mu_j^{k_j},\end{aligned}$$

avec $r = \sum_{j=1}^{m} r_j$. Alors on a

$$\text{sign } \det \mathrm{A} = (-1)^r.$$

■

Corollaire 1.4.1 *[19]*

Si A est une matrice régulière et $T = I - A$, alors

$$\textit{sign det } A = (-1)^{\beta},$$

où $\beta = \sum_{\lambda>1} r_\lambda(T)$ et r_λ désignant la multiplicité de la valeur propre λ.

Théorème 1.4.2

Soient Ω un ouvert borné contenant l'origine et $f \in C^1(\overline{\Omega}, Y)$ telle que $f(0) = 0$. Alors

$$i(f, 0, 0) = (-1)^{\beta},$$

où β est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de $I - D_f(0)$ qui sont dans $]0, 1[$. S'il n'existe pas des valeurs caractéristiques comprise entre 0 et 1 on pose $\beta = 0$.

Preuve:

D'après le corollaire (1.4.1) on a :

$$\begin{aligned} i(f, 0, 0) &= \text{sign } J_f(0) \\ &= \text{sign } \det D_f(0) \\ &= (-1)^{\beta}, \end{aligned}$$

où β est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de $I - D_f(0)$ qui sont dans $]0,1[$.

1.4.2 L'indice des applications linéaires compactes

Soient X un espace de Banach de dimension fini et $L : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur linéaire compact. On désigne par μ une valeur caractéristique de L et par $m(\mu)$ son ordre de multiplicité, tel que

$$m(\mu) = \; dim \; \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{N} \left(\mu L - I\right)^n \right],$$

où N désignant le noyau.

Théorème 1.4.3 *[14]*

On a :

$$i(I - L, 0, 0) = (-1)^{\beta},$$

où $\beta = \sum\limits_{0<\mu<1} m(\mu)$.

Corollaire 1.4.2 *[14]*

Soit Ω un ouvert borné de X avec $0 \in \Omega$. Si $\lambda \neq 0$ n'est pas une valeur caractéristique de L, alors

$$deg(I - \lambda L, \Omega, 0) = (-1)^{\beta},$$

où $\beta = \sum\limits_{0<\mu<\lambda} m(\mu)$.

1.4.3 L'indice des perturbations compactes de l'identité

Soit X un espace de Banach et Ω un ouvert borné de X. Considérons l'équation

$$\Phi(x) = x - T(x) = 0, \tag{1.1}$$

où $T : \Omega \longrightarrow X$ est un opérateur compact.

Théorème 1.4.4 *[17]*

Soit T est Fréchet différentiable au voisinage de x_0. Si 1 n'est pas une valeur caractéristique de $T'(x_0)$, alors x_0 est une solution isolée de l'équation (1.1) et on a :

$$\begin{aligned} i(I - T, x_0, 0) &= i(I - T'(x_0), 0) \\ &= (-1)^{\beta}, \end{aligned}$$

où $\beta = \sum\limits_{0<\mu<1} m(\mu)$, *avec μ est la valeur caractéristique de $T'(x_0)$.*

Preuve:

Par translation, on peut se ramener au cas où x_0 est nul, c.à.d : on va montrer que

$$\begin{aligned} i(I-T,0,0) &= i(I-T'(0),0,0) \\ &= (-1)^{\beta}. \end{aligned}$$

Comme T est Fréchet différentiable au voisinage de x_0 et par translation on a :

$$\Phi(x) = \Phi'(0)x + \|x\|\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
Considérons la déformation suivante :

$$T_t(x) = T'(0)x + t\|x\|\varepsilon(x), \qquad \forall t \in [0,1],$$

où $T_t(x)$ est un opérateur linéaire compact uniformément continue en t.
Puisque 1 n'est pas une valeur caractéristique de $T'(0)$, alors il existe $r_0 > 0$ tel que $\forall x \in B_{r_0}(0)$ et $\forall t \in [0,1]$, on a :

$$(I - T_t)x \neq 0.$$

Supposons l'inverse, $\forall r > 0$, il existe $x \in B_r(0)$ tel que

$$\begin{aligned} (I-T_t)x = 0 &\Longrightarrow x = T'(0)x + t\|x\|\varepsilon(x) \\ &\Longrightarrow (I-T'(0))x = t\|x\|\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Comme 1 n'est pas une valeur caractéristique de $T'(0)$, on a $(I-T'(0))x \neq 0$ ce qui donne que $t > 0$ et $I - T'(0)$ est un opérateur inversible et d'inverse continu donc

$$\begin{aligned} (I-T_t)x = 0 &\Longrightarrow x = \frac{1}{I-T'(0)}t\|x\|\varepsilon(x) \\ &\Longrightarrow \|x\| = t\|x\|(I-T'(0))^{-1}\varepsilon(x) \\ &\Longrightarrow \varepsilon(x) = \frac{1}{t}(I-T'(0)), \end{aligned}$$

par passage à la limite on a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, ce qui donne

$$\frac{1}{t}(I-T'(0)) = 0 \Longrightarrow I - T'(0) = 0,$$

ce qui est absurde, donc $\deg\,(I-T_t, B_{r_0}(0), 0)$ est bien défini. Par homotopie

$$\deg\,(I-T_t, B_{r_0}(0), 0) = \text{ constant},$$

c.à.d :

$$\deg\,(I-T'(0), B_{r_0}(0), 0) = \deg\,(I-T, B_{r_0}(0), 0).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} i(I-T,0,0) &= \deg\,(I-T, B_{r_0}(0), 0) \\ &= \deg\,(I-T'(0), B_{r_0}(0), 0) \\ &= i(I-T'(0),0,0) \\ &= (-1)^{\beta}. \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.4.3 *[17]*

Sous les hypothèses de théorème 1.4.4, pour tout λ qui n'est pas valeur caractéristique de $T'(0)$ on a :

$$i(I-\lambda T, x_0, 0) = (-1)^{\beta},$$

où $\beta = \sum_{0<\mu<1} m(\mu)$, avec μ est la valeur caractéristique de $T'(0)$.

CHAPITRE 2

Bifurcation à partir des valeurs propres

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats importants concernant la bifurcation, comprenant la méthode de Lyapunov-Schmidt et à l'aide de cette méthode, nous donnons le théorème de bifurcation à partir d'une valeur propre de multiplicité algébrique impaire donné par Krasnosel'ski.

2.1 Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites est l'un des outils analytiques les plus importants pour la solution d'un problème non linéaire

$$F(x, y) = 0 \tag{2.1}$$

où $F : U \times V \longrightarrow Z$ est une application, $U \subset X$ et $V \subset Y$ sont des ensembles ouverts, et X, Y et Z sont des espaces de Banach réels, il s'énonce comme suit :

Théorème 2.1.1 *[2](Théorème des fonctions implicites)*

Soit F une application de classe C^1 et $(x_0, y_0) \in U \times V$ une solution de (2.1). Supposons que

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

et

$$D_y F(x_0, y_0) : Y \longrightarrow Z \text{ est un isomorphisme avec un inverse continu.}$$

Alors, il existe un voisinage $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ de (x_0, y_0) et une application $\varphi : U_1 \longrightarrow V_1 \subset Y$ de classe C^1 tel que

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

$$F(x,\varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in U_1.$$

De plus, pour $k \geq 1$ *si* $F \in C^k(U \times V, Z)$ *alors* $\varphi \in C^k(U_1, Y)$.

Exemple 2.1.1 *Soit l'application* F *définie par :*

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto F(x,y) = x^2 + y^2 - 4, \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ *est un espace de Banach et* F *est de classe* C^1 *car polynomiale.*
On a $F(0,2) = 0$ *et* $D_y F(0,2) = 4$*, c'est un isomorphisme. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Il existe un voisinage* $U_1 \times V_1 \subset \mathbb{R}^2$ *de* $(0,2)$ *et une application* $\varphi : U_1 \longrightarrow V_1 \subset \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *tel que* $\varphi(0) = 2$ *et*

$$F(x,\varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in U_1.$$

On exprime y *en fonction de* x *on trouve*

$$\begin{aligned} F(x,y) = 0 &\Longrightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ &\Longrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \end{aligned}$$

donc l'application φ *définie comme suite :*

$$\begin{aligned} \varphi : [-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \sqrt{4 - x^2}. \end{aligned}$$

2.2 Bifurcation

La théorie de la bifurcation étudier la structure des solutions pour des équations non-linéaires définies dans des espaces de Banach et dépendant d'un paramètre.
Soient X et Y deux espaces de Banach, $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$ et $F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$ un opérateur tel que $F(\lambda_0, x_0) = 0$, on veut déterminer toutes les solutions non triviales de

$$F(\lambda, x) = 0,$$

dans un voisinage de (λ_0, x_0).

Définition 2.2.1 *[2]*

Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit F l'application continue

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times X &\longrightarrow Y \\ (\lambda, x) &\longmapsto F(\lambda, x). \end{aligned}$$

On considère l'équation de la forme

$$F(\lambda, x) = 0, \tag{2.2}$$

et telle que

$$F(\lambda, 0) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution $(\lambda, 0)$ s'appellera la solution triviale de l'équation (2.2). L'ensemble

$$S = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X : (\lambda, x) \neq (\lambda, 0), F(\lambda, x) = 0\},$$

s'appellera l'ensemble de solutions non triviales de l'équation (2.2).

Définition 2.2.2 *[2]*

$(\lambda_0, 0)$ est appelé point de bifurcation s'il existe une suite $(\lambda_n, x_n) \in \mathbb{R} \times X$, avec $x_n \neq 0$ et $F(\lambda_n, x_n) = 0$, tel que

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_n, x_n) = (\lambda_0, 0).$$

Définition 2.2.3 *[2]*

$(\lambda_0, 0)$ est appelé point de bifurcation de l'équation (2.2) si et seulement si tout voisinage de $(\lambda_0, 0)$ contient une solution non triviale de l'équation (2.2).

Proposition 2.2.1 *[2]*

La condition nécessaire pour que $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de F est que la différentiabilité de F au point $(\lambda_0, 0)$, $D_x F(\lambda_0, 0)$ est non inversible.

Preuve:

Si $D_x F(\lambda_0, 0) : X \longrightarrow Y$ est inversible alors le théorème des fonctions implicites est applicable. Alors il existe un voisinage $I \times V$ de $(\lambda_0, 0)$ et une application $\varphi : I \longrightarrow V \subset X$ telle que $\varphi(\lambda_0) = 0$ et

$$F(\lambda, \varphi(\lambda)) = 0, \qquad \forall \lambda \in I \subset \mathbb{R}.$$

On a

$$F(\lambda, 0) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ce qui implique que $\varphi(\lambda) = 0$, donc F admet $(\lambda, 0)$ comme unique solution au voisinage de $(\lambda_0, 0)$. Alors $(\lambda_0, 0)$ n'est pas un point de bifurcation de F. ■

Dans la suite, on supposera que $X = Y$. Soit l'équation

$$F(\lambda, x) = x - \lambda Ax + G(\lambda, x) = 0, \tag{2.3}$$

où $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire compact et $G : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ une application continue vérifiant

$$G(\lambda, x) = \circ(\|x\|). \tag{2.4}$$

Remarque 2.2.1 *[17]*

On a $(\lambda, x) = (\lambda, 0)$ est une solution de l'équation (2.3). Le problème de bifurcation de (2.3) au point $(\lambda, 0)$ permet de trouver une solution $(\lambda, x_\lambda) \neq (\lambda, 0)$ de l'équation (2.3) tel que $x_\lambda \longrightarrow 0$ quand $\lambda \longrightarrow \lambda_0$.

Proposition 2.2.2 *[14]*

Si $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation alors λ_0 est une valeur caractéristique de l'opérateur A.

Preuve:

On suppose que λ_0 n'est pas une valeur caractéristique de A, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \lambda_0 Ax \neq x &\Longrightarrow x - \lambda_0 Ax \neq 0 \\ &\Longrightarrow (I - \lambda_0 A)x \neq 0, \end{aligned}$$

alors $(I - \lambda_0 A)$ est inversible et donc il existe $c > 0$ tel que

$$\|(I - \lambda_0 A)x\| \geq c\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Alors pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - \lambda Ax + G(\lambda, x)\| &= \|x - \lambda_0 Ax + \lambda_0 Ax - \lambda Ax + G(\lambda, x)\| \\ &\geq \|x - \lambda_0 Ax\| - \|(\lambda - \lambda_0)Ax + G(\lambda, x)\| \\ &\geq \|(I - \lambda_0 A)x\| - \|(\lambda - \lambda_0)Ax\| - \|G(\lambda, x)\| \\ &\geq c\|x\| - |\lambda - \lambda_0|\|A\|\|x\| - \|G(\lambda, x)\| \end{aligned}$$

et puisque G une application continue, il existe une constant $c' > 0$ telle que

$$\|x - \lambda Ax + G(\lambda, x)\| \geq c\|x\| - |\lambda - \lambda_0|\|A\|\|x\| - c'\|x\|$$

$$\geq (c - c')\|x\| - |\lambda - \lambda_0|\|A\|\|x\|.$$

Si $\|x\| \neq 0$ et $|\lambda - \lambda_0|$ est assez petit et si $c' < c$, alors

$$[c - c' - |\lambda - \lambda_0|\|A\|]\|x\| > 0$$

donc

$$\|x - \lambda Ax + G(\lambda, x)\| > 0$$

Ainsi, l'équation $x - \lambda Ax + G(\lambda, x) = 0$ admet 0 pour unique solution au voisinage de $(\lambda_0, 0)$. Par conséquent, $(\lambda_0, 0)$ n'est pas un point de bifurcation, ce qui est absurde. ■

Remarque 2.2.2 *[14]*

La réciproque de la proposition 2.2.2 est fausse. En effet,
On prend un contre exemple
Soit $X = Y = \mathbb{R}^2$ et l'application F définie par :

$$F(\lambda, x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^3 \\ -x_1^3 \end{pmatrix}.$$

On a $\lambda_0 = 1$ est une valeur caractéristique de $A = I$. Vérifions si $(1, (0, 0))$ est un point de bifurcation pour F :

$$F(\lambda, x) = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^3 \\ -x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 - \lambda x_1 + x_2^3 = 0, \\ x_2 - \lambda x_2 - x_1^3 = 0. \end{cases}$$

Donc, on a

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_1 = -x_2^3, & (2.5) \\ x_2 - \lambda x_2 = x_1^3. & (2.6) \end{cases}$$

Si on multiplions (2.5) par x_2 et (2.6) par x_1, et faisons la soustraction entre les deux équations on trouve $x_1^4 + x_2^4 = 0$, ce qui implique que $(x_1, x_2) = (0,0)$ est une solution unique de F. Alors $(1,(0,0))$ n'est pas un point de bifurcation. ■

Exemple 2.2.1 *Soit l'application définie par :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) &\longmapsto F(\lambda, x) = \lambda x - x^3. \end{aligned}$$

On a $\lambda = 0$ est un point de bifurcation pour F.
En effet,
On a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad F(\lambda, 0) = 0,$$

et comme $D_x F(0,0) = 0$ donc F n'est pas inversible.
Cherchons l'ensemble des solutions non triviales de F :

$$\begin{aligned} F(\lambda, x) = 0 &\Longrightarrow \lambda x - x^3 = 0 \\ &\Longrightarrow x(\lambda - x^2) = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda = x^2, \end{aligned}$$

donc on a deux cas :

1) *Si $\lambda \leq 0$ on a une unique solution est $x = 0$.*

2) *Si $\lambda > 0$ on a 3 solutions sont $x = 0$, $x = -\sqrt{\lambda}$ et $x = \sqrt{\lambda}$, donc*

$$S = \{(\lambda, -\sqrt{\lambda}), (\lambda, \sqrt{\lambda}), \text{ tel que } \lambda > 0\}.$$

Alors $\lambda = 0$ est un point de bifurcation pour F.

Exemple 2.2.2 *Soit le problème définie par :*

$$\begin{cases} \lambda x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0, \\ -\lambda x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, le problème s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} \lambda x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -\lambda x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases} \iff \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \lambda A x + G(x) = 0,$$

avec $x = (x_1, x_2)$*, et* $G(0) = D_x G(0) = 0$.
L' opérateur linéaire pour $\lambda = 0$ *n'est pas inversible, donc le théorème des fonctions implicites n'est pas applicable. Alors on a :*

$$\begin{cases} \lambda x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -\lambda x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 & \times x_1 \\ -\lambda x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 & \times x_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\Longrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0).$$

La seul solution de problème (2.7) est $(x_1, x_2) = (0, 0)$*, donc* $(0, (0, 0))$ *n'est pas un point de bifurcation.*

2.3 La méthode de Lyapunov-Schmidt

La méthode de Lyapunov-Schmidt d'écrire la réduction du problème $F(\lambda, x) = 0$ qui est de dimension élevée ou infinie, à un problème de dimension fini et inférieur en général, lorsque la différentiabilité de F au point $(\lambda_0, 0)$, $D_x F(\lambda_0, 0)$ n'est pas inversible.

Soit l'équation (2.3) avec G satisfait (2.4), et λ_0^{-1} valeur propre de A de multiplicité algébrique $m \geq 1$.

On décompose l'espace X en somme direct de deux sous-espaces invariants tel que

$$X = X_0 \oplus X_1,$$

où

$$X_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X/(I-\lambda_0 A)^n x = 0\}, \quad avec \quad \dim X_0 = m.$$

Ainsi, A peut se décomposer en somme de deux opérateur A_0 et A_1, où

$$A_0 = A|_{X_0} : X_0 \longrightarrow X_0,$$

$$A_1 = A|_{X_1} : X_1 \longrightarrow X_1.$$

Soient $P_0 : X \longrightarrow X_0$ et $P_1 = I - P_0 : X \longrightarrow X_1$ deux projections canoniques.

Théorème 2.3.1 *[17]*

Soit λ_0^{-1} une valeur propre de A de multiplicité algébrique $m \geq 1$, alors le problème de bifurcation de (2.3) au voisinage de $\lambda = \lambda_0$ est équivalent au

$$x - \lambda A_0 x + P_0 G(\lambda, x + \varphi(\lambda, x)) = 0, \qquad \forall x \in X_0. \tag{2.8}$$

Preuve:

Le problème (2.3) est équivalant au système suivant :

$$\begin{cases} x - \lambda A_0 x + P_0 G(\lambda, x+y) = 0, & \forall x \in X_0, \quad (2.9) \\ y - \lambda A_1 y + P_1 G(\lambda, x+y) = 0, & \forall y \in X_1. \quad (2.10) \end{cases}$$

On pose $H(x,y) = y - \lambda A_1 y + P_1 G(\lambda, x+y)$, alors

$$H(0,0) = P_1 G(\lambda_0, 0) = 0,$$

$$D_y H(0,0) = I - \lambda_0 A_1.$$

On a λ_0^{-1} est une valeur propre de A, alors

$$\begin{aligned} (I-\lambda_0 A)(x+y) = 0 &\implies (I-\lambda_0 A)x + (I-\lambda_0 A)y = 0 \\ &\implies (I-\lambda_0 A)y = 0 \qquad (x \in X_0) \\ &\implies (I-\lambda_0 A_1)y = 0 \qquad (y \in X_1) \\ &\implies y = 0 \\ &\implies N(A_1) = \{0\}. \end{aligned}$$

Donc λ_0^{-1} n'est pas une valeur propre de A_1, alors $(I - \lambda_0 A_1)$ est inversible. Ainsi,

$$D_y H(0,0) : X_1 \longrightarrow X_1,$$

donc $D_y H(0,0)$ est un isomorphisme.
D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $U \times V$ de $(0,0)$ tel que l'équation (2.10) admet une unique solution

$$y = \varphi(\lambda, x), \qquad avec \qquad \varphi(\lambda, x) = \circ(\|x\|). \tag{2.11}$$

De (2.9) et (2.11) on a :

$$x - \lambda A_0 x + P_0 G(\lambda, x + \varphi(\lambda, x)) = 0, \qquad \forall x \in X_0.$$

qui est une équation de dimension m qui s'appelle équation de bifurcation du problème (2.3). ■

Exemple 2.3.1 *Considérons le système suivant défini par :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(x_1, x_2) = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

où $a_{ij} = a_{ij}(\lambda)$ sont des fonctions continues de λ, et f_1, f_2 sont des fonctions de classe C^∞ satisfaisant que

$$(f_1(x), f_2(x)) = \circ(\|x\|).$$

Le système (2.12) s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit A_λ la matrice définie par

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

admet deux valeurs propres simples dans le voisinage de λ_0 sont $\beta_1 = \lambda - \lambda_0$ et $\beta_2 = 1$ donc A_λ est diagonalisable et on a

$$A'_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $(\lambda, (x_1, x_2)) = (\lambda, (0, 0))$ est une solution trivial de (2.12).

Le système (2.12) est équivalant au système suivant :

$$\begin{cases} (\lambda-\lambda_0)x_1 + F_1(x_1,x_2) = 0, & (2.13) \\ x_2 + F_2(x_1,x_2) = 0, & (2.14) \end{cases}$$

où $F_i(x) = \circ(\|x\|), i = 1,2.$
On pose

$$H(x_1,x_2) = x_2 + F_2(x_1,x_2),$$

alors on a $H(0,0) = 0$ *et* $D_{x_2}H(0,0) = I$ *est inversible, donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage* $U \times V$ *de* $(x_1,x_2) = (0,0)$ *tel que (2.14) admet une unique solution au voisinage de* U*, et on a :*

$$x_2 = \varphi(x_1), \qquad \varphi(x_1) = \circ(\|x\|). \tag{2.15}$$

Introduisons (2.13) et (2.15) on obtient :

$$\begin{cases} (\lambda-\lambda_0)x_1 + F_1(x_1,\varphi(x_1)) = 0, \\ F_1(x_1,\varphi(x_1)) = \circ(\|x_1\|). \end{cases} \tag{2.16}$$

Ainsi, l'indice de bifurcation de système (2.12) est équivalent à (2.16) et d'après le théorème 1.4.4 et le corollaire 1.4.3, on a :

$$\begin{aligned} i((\lambda-\lambda_0)I + F_1, 0, 0) &= i((\lambda-\lambda_0)I + D_xF_1, 0, 0) \\ &= i((\lambda-\lambda_0)I, 0, 0) \\ &= \begin{cases} 1 & si\ \lambda > \lambda_0, \\ -1 & si\ \lambda < \lambda_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui est implique que (2.16) a une point de bifurcation $(\lambda_0, 0)$*. Alors,* $(\lambda_0, 0)$ *est une point de bifurcation de (2.12).*

2.4 Bifurcation à partir des valeurs propres de multiplicité algébrique impaires

Dans cette section, nous présentons le théorème classique de Krasnosel'ski constitue l'un des principaux outils topologiques permettant d'étudier la bifurcation.

Théorème 2.4.1 *[17](Théorème de Krasnosel'ski)*

Sous la condition (2.4), si $A : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire compact et λ_0^{-1} est une valeur propre de A de multiplicité algébrique impaire. Alors $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de

$$F(\lambda, x) = x - \lambda Ax + G(\lambda, x) = 0.$$

Preuve:

On a λ_0^{-1} est une valeur propre de multiplicité algébrique impaire, alors d'après le théorème 2.3.1 le problème (2.3) est équivalant à l'équation (2.8). On peut écrire l'équation (2.8) sous la forme :

$$\begin{cases} x - \lambda A_0 x + g(\lambda, x) = 0, \\ g(\lambda, x) = P_0 G(\lambda, x + \varphi(\lambda, x)) = \circ(\|x\|). \end{cases} \tag{2.17}$$

Comme A_0 est un opérateur linéaire de dimension fini, alors il existe une base de X_0 tel que A_0 peut s'exprimer sous forme de Jordan. Supposons que

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_0^{-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

alors

$$x - \lambda A_0 x + g(\lambda, x) = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \lambda_0^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_0^{-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + g(\lambda, x) = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 - \lambda\lambda_0^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1 - \lambda\lambda_0^{-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 - \lambda\lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + g(\lambda, x) = 0,$$

où m est la multiplicité algébrique de λ_0^{-1} qui est supposé impaire.
On a

$$g(\lambda,x)=g(\lambda,0)+D_x g(\lambda,0)x+\circ(\|x\|),$$

ce qui donne

$$g(\lambda,x)=\circ(\|x\|) \iff \begin{cases} g(\lambda,0)=0, \\ D_x g(\lambda,0)=0. \end{cases}$$

D'après le théorème 1.4.4 et le corollaire 1.4.3, on a :

$$\begin{aligned}
i(I-\lambda A_0+g,0,0) &= i(I-\lambda A_0+D_x g(\lambda,0),0,0)\\
&= i(I-\lambda A_0,0,0)\\
&= \text{sign det } (I-\lambda A_0)\\
&= \text{sign } (1-\lambda_0^{-1}\lambda)^m \qquad\qquad \text{(puisque } m \text{ est impaire)}\\
&= \text{sign } (1-\lambda_0^{-1}\lambda).
\end{aligned}$$

D'un côté :

$$\begin{aligned}
\text{Si } \lambda<\lambda_0 &\implies \lambda_0^{-1}\lambda<1\\
&\implies 1-\lambda_0^{-1}\lambda>0,
\end{aligned}$$

alors

$$i(I-\lambda A_0+g,0,0)=1.$$

De l'autre côté :

$$\begin{aligned}
\text{Si } \lambda>\lambda_0 &\implies -\lambda_0^{-1}\lambda<-1\\
&\implies 1-\lambda_0^{-1}\lambda<0,
\end{aligned}$$

alors

$$i(I-\lambda A_0+g,0,0) \;\; =-1.$$

Ce qui implique que le point $(\lambda_0,0)$ est un point de bifurcation de l'équation (2.8). Ainsi, $(\lambda_0,0)$ est un point de bifurcation de l'équation (2.3). ■

Exemple 2.4.1 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^3$ et $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un opérateur linéaire compact défini par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres pour A :

$$det\,(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2(1-\lambda) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0, \\ ou \\ \lambda = 1. \end{cases}$$

On a $\lambda_0 = 1$ est une valeur propre simple de multiplicité impaire égale 1.
Il faut montre que $(\lambda_0, 0) = (1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est un point de bifurcation pour l'équation

$$x - \lambda Ax + G(\lambda, x) = 0,$$

avec $G(\lambda, 0) = 0$ et $D_x G(\lambda, 0) = 0$, et on a :

$$x - \lambda Ax + G(\lambda, x) = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + G(\lambda, x) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + G(\lambda, x) = 0.$$

D'après le théorème 1.4.4 et le corollaire 1.4.3, on a :

$$\begin{aligned} i(I-\lambda A+G,0,0) &= i(I-\lambda A+D_xG(\lambda,0),0,0) \\ &= i(I-\lambda A,0,0) \\ &= sign\ det\ (I-\lambda A) \\ &= sign \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= sign\ (1-\lambda), \end{aligned}$$

donc

$$i(I-\lambda A+G,0,0)=\begin{cases} 1 & si\ \lambda<1, \\ -1 & si\ \lambda>1. \end{cases}$$

Alors $(1,0)$ *est un point de bifurcation de l'équation*

$$x-\lambda Ax+G(\lambda,x)=0.$$

CHAPITRE 3

Bifurcation à partir d'une valeur propre simple

Ce chapitre est consacré à un cas spécial du théorème de Krasnosel'ski, où la multiplicité de valeur propre est simple. Nous allons donner dans ce chapitre le théorème de Crandall et Rabinowitz qui est la base principale de la bifurcation à partir d'une valeur propre simple, où le nombre de branches de solutions du problème (2.3) est précisé.

3.1 Quelques notions

On donne dans cette section quelques notations et définitions seront utilisées dans ce dernier chapitre.

Notations

Soit X et Y deux espaces de Banach, $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné.

- $\|\cdot\|$ désignant la norme associé à X et Y, et même les normes des opérateurs linéaires.
- $N(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$ le noyau de A.
- $R(A) = \{y \in Y : Ax = y, \text{ pour } x \in X\}$ l'image de A.
- La codimension d'un sous-espace Z de Y est la dimension de $Y \backslash Z$ et noté par :

$$\text{codim } (Z) = \text{ dim } (Y \backslash Z).$$

- On note par $[v]$ l'espace engendré par v.

Définition 3.1.1 *[16]*

Soient A, B deux opérateurs linéaires bornées de X dans Y. Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ est dite valeur propre de (A, B) ou bien B-valeur propre de A si 0 est une valeur propre de de $A - \lambda B$, c.à.d, si

$$dim\ N(A - \lambda B) \geq 1.$$

Définition 3.1.2 *[6]*

Soit A, B deux opérateurs linéaires bornées de X dans Y et $x_0 \in X$. Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre simple de (A, B) si :

1) $dim\ N(A - \lambda B) =\ codim\ R(A - \lambda B) = 1,$
et si $N(A - \lambda B) = [x_0],$

2) $Bx_0 \notin R(A - \lambda B).$

Remarque 3.1.1 *[16]*

Si $X \subset Y$ et $B = I$, tel que I est l'opérateur d'identité dans Y, on dit simplement que λ est une valeur propre simple de A.

Théorème 3.1.1 *[2]**(Alternative de Fredholm)***

Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire compact et $\mu \neq 0$. Alors

1) $N(\mu I - A) = \{0\}$ *si et seulement si* $R(\mu I - A) = X$.

2) $R(\mu I - A) = [N(\mu I - A^*)]^{\perp} = \{x \in X : \langle \phi, x \rangle = 0,\ \forall \phi \in N(\mu I - A^*)\}.$

Définition 3.1.3 *[8]*

Un opérateur linéaire continue $A : X \longrightarrow Y$ est dite de Fredholm si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) *$N(A)$ est un sous-espace de dimension finie de X.*

2) *$R(A)$ est un sous-espace fermé de Y de codimension finie.*

Définition 3.1.4 *[8]*

Si A est de Fredholm, l'indice de A est l'entier :

$$ind\ (A) = dim\ N(A) - codim\ R(A).$$

3.2 Théorème de M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz

Cette section est présenté les résultats les plus importants concernant la bifurcation à partir d'une valeur propre simple.
Comme premier résultat on a le théorème de Crandall et Rabinowitz, et pour la preuve de ce théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *[5]*

Soient X et Y deux espace de Banach, V un voisinage de 0 en X et

$$F : (-1,1)\times V \longrightarrow Y$$

une application continue telle que :

a) $F(\lambda,0)=0$ *pour* $|\lambda|<1$.

b) *Les dérivés partielles* F_λ, F_x *et* $F_{\lambda x}$ *existent et sont continues.*

c) $N(F_x(0,0))$ *et* $Y/R(F_x(0,0))$ *sont de dimension 1.*

d) $F_{\lambda x}(0,0)x_0 \notin R(F_x(0,0))$, *où* $x_0\in X$ *tel que*

$$N(F_x(0,0))=[x_0].$$

Alors, il existe un voisinage U_1 de $(0,0)\in\mathbb{R}\times V$ et une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ avec $g(0)=0$, tel que $F(\lambda,\alpha x_0+z)=0$, où $\alpha\in\mathbb{R}$, $(\lambda,\alpha x_0+z)\in U_1$ et $z\in Z$ avec Z le complémentaire de $N(F_x(0,0))$ dans X, on a :

$$||z||+|\alpha||\lambda|\le|\alpha|g(\alpha).$$

Preuve:

D'après l'hypothèse **b)** on a F est de classe C^1, ce qui implique qu'il existe un voisinage U_2 de $(0,0)\in\mathbb{R}\times V$ et une fonction continue h sur $\mathbb{R}$ avec $h(0)=0$, tel que si $(\lambda,\alpha x_0+z)\in U_2$, alors on a :

$$F(\lambda,\alpha x_0+z)=F(\lambda,\alpha x_0)+zF_x(\lambda,\alpha x_0)+zh(z), \tag{3.1}$$

$$F(\lambda,\alpha x_0)=F(\lambda,0)+\alpha F_x(\lambda,0)x_0+\alpha h(\alpha), \tag{3.2}$$

$$F_x(\lambda,0)x_0=\underbrace{F_x(0,0)x_0}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}+\lambda F_{\lambda x}(0,0)x_0+\lambda h(\lambda). \tag{3.3}$$

On introduit la norme sur les trois équations au-dessus on trouve :

$$\left\|F(\lambda,\alpha x_0+z)-F(\lambda,\alpha x_0)-zF_x(\lambda,\alpha x_0)\right\|\leq \|z\|h(\|z\|), \tag{3.4}$$

$$\left\|F(\lambda,\alpha x_0)-F(\lambda,0)-\alpha F_x(\lambda,0)x_0\right\|\leq |\alpha|h(|\alpha|), \tag{3.5}$$

$$\left\|F_x(\lambda,0)x_0-\lambda F_{\lambda x}(0,0)x_0\right\|\leq |\lambda|h(|\lambda|). \tag{3.6}$$

D'autre part, on a $F(\lambda,\alpha x_0+z)=0$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
0 &= F(\lambda,\alpha x_0+z)\\
&= F(\lambda,\alpha x_0+z)-F(\lambda,\alpha x_0)+F(\lambda,\alpha x_0)-\overbrace{F(\lambda,0)}^{=0}\\
&= F(\lambda,\alpha x_0+z)-F(\lambda,\alpha x_0)+F(\lambda,\alpha x_0)-F(\lambda,0)-F_x(\lambda,\alpha x_0)z\\
&\quad +F_x(\lambda,\alpha x_0)z-F_x(0,0)z+F_x(0,0)z-\alpha F_x(\lambda,0)x_0+\alpha F_x(\lambda,0)x_0\\
&\quad -\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0+\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0\\
&= [F(\lambda,\alpha x_0+z)-F(\lambda,\alpha x_0)-F_x(\lambda,\alpha x_0)z]+[F_x(\lambda,\alpha x_0)z-F_x(0,0)z]\\
&\quad +[F(\lambda,\alpha x_0)-F(\lambda,0)-\alpha F_x(\lambda,0)x_0]+[\alpha F_x(\lambda,0)x_0-\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0]\\
&\quad +F_x(0,0)z+\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
F_x(0,0)z+\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0 = &-[F(\lambda,\alpha x_0+z)-F(\lambda,\alpha x_0)-F_x(\lambda,\alpha x_0)z]-[F_x(\lambda,\alpha x_0)z-F_x(0,0)z]\\
&-[F(\lambda,\alpha x_0)-F(\lambda,0)-\alpha F_x(\lambda,0)x_0]-[\alpha F_x(\lambda,0)x_0-\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0].
\end{aligned}$$

En utilisant les équations (3.4), (3.5) et (3.6), on trouve

$$\begin{aligned}
\left\|F_x(0,0)z+\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0\right\| &= \Big\|[F(\lambda,\alpha x_0+z)-F(\lambda,\alpha x_0)-F_x(\lambda,\alpha x_0)z]\\
&\quad +[F_x(\lambda,\alpha x_0)z-F_x(0,0)z]+[F(\lambda,\alpha x_0)-F(\lambda,0)-\alpha F_x(\lambda,0)x_0]\\
&\quad +[\alpha F_x(\lambda,0)x_0-\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0]\Big\|\\
&\leq \left\|F(\lambda,\alpha x_0+z)-F(\lambda,\alpha x_0)-F_x(\lambda,\alpha x_0)z\right\|\\
&\quad +\left\|F_x(\lambda,\alpha x_0)z-F_x(0,0)z\right\|+\left\|F(\lambda,\alpha x_0)-F(\lambda,0)-\alpha F_x(\lambda,0)x_0\right\|\\
&\quad +|\alpha|\left\|F_x(\lambda,0)x_0-\lambda F_{\lambda x}(0,0)x_0\right\|\\
&\leq \|z\|\,h(\|z\|)+\left\|F_x(\lambda,\alpha x_0)-F_x(0,0)\right\|\,\|z\|+|\alpha|\,h(|\alpha|)+|\alpha|\,|\lambda|\,h(|\lambda|).
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses **c)** et **d)** l'application linéaire $F_x(0,0)z+\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0$ est un isomorphisme. Ainsi, il existe une constante $k>0$ telle que

$$\left\|F_x(0,0)z+\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0\right\|\geq k(\|z\|+|\alpha||\lambda|),\qquad \forall\lambda,\alpha\in\mathbb{R},\ \forall z\in Z.$$

Donc

$$\begin{aligned}
k(\|z\|+|\alpha||\lambda|) &\leq \left\|F_x(0,0)z+\lambda\alpha F_{\lambda x}(0,0)x_0\right\|\\
&\leq \|z\|h(\|z\|)+\left\|F_x(\lambda,\alpha x_0)-F_x(0,0)\right\|\,\|z\|+|\alpha|h(|\alpha|)+|\alpha||\lambda|h(|\lambda|).
\end{aligned}$$

Maintenant, choisissons un voisinage U_1 de $(0,0)$ pour que $(\lambda,\alpha x_0+z)\in U_1$ et tel que

$$h(\|z\|)\leq\frac{k}{4},$$

$$\left\|F_x(\lambda,\alpha x_0)-F_x(0,0)\right\|\leq\frac{k}{4},$$

$$h(|\lambda|)\leq\frac{k}{2}.$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} k(\|z\|+|\alpha||\lambda|) &\leq \frac{k}{4}\|z\|+\frac{k}{4}\|z\|+|\alpha|h(|\alpha|)+\frac{k}{2}|\alpha||\lambda| \\ &\leq \frac{k}{2}\|z\|+|\alpha|h(|\alpha|)+\frac{k}{2}|\alpha||\lambda|, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} k(\|z\|+|\alpha||\lambda|) \leq \frac{k}{2}\|z\|+|\alpha|h(|\alpha|)+\frac{k}{2}|\alpha||\lambda| &\Longrightarrow k|\alpha||\lambda|+k\|z\| \leq \frac{k}{2}\|z\|+|\alpha|h(|\alpha|)+\frac{k}{2}|\alpha||\lambda| \\ &\Longrightarrow \frac{k}{2}\|z\|+\frac{k}{2}|\alpha||\lambda| \leq |\alpha|h(|\alpha|) \\ &\Longrightarrow \|z\|+|\alpha||\lambda| \leq \frac{2}{k}|\alpha|h(|\alpha|) \\ &\Longrightarrow \|z\|+|\alpha||\lambda| \leq |\alpha|g(|\alpha|), \end{aligned}$$

avec $g(|\alpha|)=\frac{2}{k}h(|\alpha|)$, donc on a l'existence d'une fonction g, qui est continue d'après la continuité de h, avec $g(0)=0$. ■

Théorème 3.2.1 *[5](Théorème de Crandall-Rabinowitz)*

Soient X et Y deux espace de Banach, V un voisinage de 0 en X et

$$F:(-1,1)\times V \longrightarrow Y$$

une application continue satisfaisante les hypothèses du lemme 3.2.1.
Si Z est le complémentaire de $N(F_x(0,0))$ dans X, alors il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}\times X$, un intervalle $(-a,a)$ et des fonctions continues $\varphi:(-a,a)\longrightarrow\mathbb{R}$, $\psi:(-a,a)\longrightarrow Z$ tel que $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$ et

$$F^{-1}(0)\cap U=\{(\varphi(\alpha),\alpha x_0+\alpha\psi(\alpha)):|\alpha|<a\}\cup\{(\lambda,0):(\lambda,0)\in U\}. \tag{3.7}$$

De plus, si F_{xx} est aussi continue, les fonctions φ et ψ sont continument différentiables.

Preuve:

Soit $f:\mathbb{R}^2\times Z\longrightarrow Y$ la fonction définie par :

$$f(\alpha,\lambda,z)=\begin{cases} \alpha^{-1}F(\lambda,\alpha(x_0+z)) & \text{si} \quad \alpha\neq 0, \\ F_x(\lambda,0)(x_0+z) & \text{si} \quad \alpha=0. \end{cases} \tag{3.8}$$

tel que $\alpha(x_0+z)\in V$, et $|\lambda|<1$.
Les dérivées partielles f_λ et f_z existes et sont continues en (α,λ,z), donc f est de classe C^1.
D'autre part, on a $N(F_x(0,0))=[x_0]$ donc

$$f(0,0,0)=F_x(0,0)x_0=0. \tag{3.9}$$

On dérivons l'application $(\lambda,z)\to f(0,\lambda,z)$ par rapport à (λ,z) en $(0,0)$, on trouve

$$\begin{aligned}
f_{\lambda z}(0,0,0)(\lambda,z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h\lambda,hz)-f(0,0,0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h\lambda,hz)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{F_x(h\lambda,0)(x_0+hz)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{F_x(h\lambda,0)x_0}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F_x(h\lambda,0)hz}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{F_x(h\lambda,0)x_0-\overbrace{F_x(0,0)x_0}^{=0}}{h}+F_x(0,0)z\\
&= \lambda\lim_{h\to 0}\frac{[F_x(h\lambda,0)-F_x(0,0)]x_0}{h\lambda}+F_x(0,0)z\\
&= \lambda F_{\lambda x}(0,0)x_0+F_x(0,0)z.
\end{aligned}$$

Donc l'application linéaire

$$f_{\lambda z}(0,0,0):\mathbb{R}\times Z\longrightarrow Y, \tag{3.10}$$

est un isomorphisme sur Y d'après les hypothèses **c)** et **d)** du lemme 3.2.1. Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe deux applications continues φ et ψ définies dans un voisinage ouvert de $0\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(0)=0,\psi(0)=0$ et

$$f(\alpha,\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=0$$

pour $\alpha \simeq 0$. L'affirmation d'existence du théorème découle de la définition de f.

Prouvons l'unicité, en effet :

D'après le lemme 3.2.1, il existe une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ avec $g(0) = 0$, tel que

$$\|z\| + |\alpha||\lambda| \leq |\alpha| g(\alpha).$$

Si $\alpha = 0$, on trouve que $z = 0$.

Si $\alpha \neq 0$, on a :

$$\|\alpha^{-1}z\| + |\lambda| \leq g(\alpha),$$

et par la définition de f on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha, \lambda, \alpha^{-1}z) &= \alpha^{-1}F(\lambda, \alpha(x_0 + \alpha^{-1}z)) \\ &= \alpha^{-1}\underbrace{F(\lambda, \alpha x_0 + z)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, pour α assez petit et puisque $g(0) = 0$, on a :

$$\|\alpha^{-1}z\| + |\lambda| \simeq 0,$$

et on trouve que

$$f(\alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = f(\alpha, \lambda, \alpha^{-1}z).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \lambda = \varphi(\alpha) \\ \alpha^{-1}z = \psi(\alpha) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \varphi(\alpha), \\ z = \alpha\psi(\alpha). \end{cases}$$

Alors

$$(\lambda, \alpha x_0 + z) = (\varphi(\alpha), \alpha x_0 + \alpha\psi(\alpha)).$$

■

Maintenant, on s'intéresse à l'équation de la forme :

$$F(\lambda, x) = L(\lambda)x + G(\lambda, x) = 0, \tag{3.11}$$

où $L(\lambda) := F_x(\lambda, 0) : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire continu où X et Y sont deux espaces de Banach, $L(\lambda_0)$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro et $G : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$ une application vérifiant

$$G(\lambda, 0) = 0 \quad \text{et} \quad G_x(\lambda, 0) = 0, \qquad \forall \lambda \in \text{vois}(\lambda_0). \tag{3.12}$$

tel que $F(\lambda, 0) = 0$, pour tout λ dans un voisinage de λ_0.

Corollaire 3.2.1 *[16]*

Supposons que $F(\lambda, x)$ est une application de classe C^r pour $r \geq 2$, et zéro est une valeur propre simple de $(L(\lambda_0), L'(\lambda_0))$, où $L'(\lambda_0)$ la dérivée par rapport à λ de l'opérateur L au point λ_0. Soit $Z \subset X$ un sous espace tel que :

$$N(L(\lambda_0)) \oplus Z = X.$$

Alors, il existe $a > 0$ et deux applications de classe C^{r-1}

$$\varphi : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi : (-a, a) \longrightarrow Z,$$

tel que

$$\varphi(0) = \lambda_0, \qquad \psi(0) = 0,$$

et pour chaque $\alpha \in (-a, a)$

$$F(\varphi(\alpha), x(\alpha)) = 0,$$

et

$$x(\alpha) = \alpha(\phi_0 + \psi(\alpha)),$$

où $\phi_0 \in X \backslash \{0\}$ tel que $N(L(\lambda_0)) = [\phi_0]$.
De plus, il existe $\rho > 0$ tel que si $F(\lambda, x) = 0$ et $(\lambda, x) \in B_\rho(\lambda_0, 0)$, alors soit $x \equiv 0$ ou bien $(\lambda, x) = (\varphi(\alpha), x(\alpha))$ pour certain $\alpha \in (-a, a)$, où $B_\rho(\lambda_0, 0)$ est une boule de centre $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times X$ et de rayon ρ.

Preuve:

L'application F vérifie par hypothèse

$$F(\lambda, 0) = 0, \qquad \forall \lambda \in vois(\lambda_0),$$

et puisque F est de classe C^r donc les dérivées partielles F_x, F_λ, $F_{\lambda x}$ existes et sont continus.
Comme zéro est une valeur propre simple de $(L(\lambda_0), L'(\lambda_0))$, alors on a :

$$\dim N(L(\lambda_0)) = \text{codim } R(L(\lambda_0)) = 1,$$

ce qui donne

$$\dim N(F_x(\lambda_0, 0)) = \text{codim } R(F_x(\lambda_0, 0)) = 1,$$

et on a $L'(\lambda_0)\phi_0 \notin R(L(\lambda_0))$, où $N(L(\lambda_0)) = [\phi_0]$, ce qui implique

$$F_{\lambda x}(\lambda_0, 0)\phi_0 \notin R(F_x(\lambda_0, 0)),$$

et

$$N(F_x(\lambda_0, 0)) = [\phi_0],$$

donc toutes les hypothèses du théorème 3.2.1 sont satisfaites.
De plus, on a $N(L(\lambda_0)) \oplus Z = X$, c.à.d : Z est le complémentaire de $N(F_x(\lambda_0, 0))$ dans X, alors d'après le théorème 3.2.1, il existe un voisinage de $(\lambda_0, 0)$, un intervalle $(-a, a)$ et deux fonctions continues

$$\varphi : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi : (-a, a) \longrightarrow Z,$$

tel que $\varphi(0) = \lambda_0$, $\psi(0) = 0$ et

$$F(\varphi(\alpha), \alpha\phi_0 + \alpha\psi(\alpha)) = 0.$$

■

Corollaire 3.2.2 *[17]*

Sous la condition (3.12) et $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire compact. Si λ_0^{-1} est une valeur propre simple de A, alors l'équation

$$F(\lambda, x) = x - \lambda Ax + G(\lambda, x) = 0$$

possède exactement au point $(\lambda_0, 0)$ deux branches de bifurcation.

Preuve:

On a

$$F(\lambda, x) = x - \lambda Ax + G(\lambda, x) = 0,$$

satisfaisant $F(\lambda, 0) = 0$ et puisque A un opérateur compact et G une application continue alors on a :

$$\begin{aligned} F_x(\lambda, x) &= I - \lambda A + G_x(\lambda, x), \\ F_\lambda(\lambda, x) &= -Ax + G_\lambda(\lambda, x), \\ F_{\lambda x}(\lambda, x) &= -A + G_{\lambda x}(\lambda, x), \end{aligned}$$

ce qui implique que les dérivées partielles sont existes et continues. Ainsi, on trouve

$$F_x(\lambda_0, 0) = I - \lambda_0 A \quad \text{et} \quad F_{\lambda x}(\lambda_0, 0) = -A.$$

Puisque λ_0^{-1} est une valeur propre simple de A, alors

$$\dim N(\lambda_0^{-1}I - A) = \operatorname{codim} R(\lambda_0^{-1}I - A) = 1,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\dim N(\lambda_0^{-1}I - A) &= \dim N(I - \lambda_0 A)\\ &= \dim N(F_x(\lambda_0, 0))\\ &= \operatorname{codim} R(F_x(\lambda_0, 0))\\ &= 1,\end{aligned}$$

puisque x_0 est le vecteur propre de A correspondant à λ_0^{-1}, alors

$$N(\lambda_0^{-1}I - A) = [x_0],$$

et que $x_0 \notin R(\lambda_0^{-1}I - A)$, implique que $x_0 \notin R(F_x(\lambda_0, 0))$, ce qui donne que

$$N(F_x(\lambda_0, 0)) = [x_0].$$

Alors, F vérifié les hypothèses du théorème 3.2.1 donc l'équation $F(\lambda, x) = 0$ possède exactement au point $(\lambda_0, 0)$ deux branches de bifurcation. ■

3.3 Applications

Dans cette section nous présentons des applications simples du théorème de M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz.

Exemple 3.3.1 *Soit l'équation suivante :*

$$\lambda x - x^p \sin \frac{1}{x} = 0, \tag{3.13}$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $p \geq 3$.
On observe que l'équation (3.13) a le même type que l'équation (3.11), telle que

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\lambda, x) \quad &\longmapsto F(\lambda, x) = \lambda x - x^p \sin \frac{1}{x},\end{aligned}$$

où

$$L(\lambda)x = \lambda x \qquad et \qquad G(\lambda, x) = -x^p \sin\frac{1}{x},$$

avec $G(\lambda, 0) = 0$ *et* $G_x(\lambda, 0) = 0$.
On a

$$F(\lambda, 0) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\lambda_0 = 0$ *est l'unique valeur propre de* $L(\lambda)$ *et on a* $L'(\lambda_0) = I$.
Vérifions que zéro est une valeur propre simple de $(L(\lambda_0), I)$ *:*

$$\begin{aligned} N(L(\lambda_0)) &= \{x \in \mathbb{R} : L(\lambda_0)x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \lambda_0 x = 0\} \\ &= \{\beta : \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}, \end{aligned}$$

on prend $\beta = 1$, *et on a :*

$$\begin{aligned} R(L(\lambda_0)) &= \{y \in \mathbb{R} : L(\lambda_0)x = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \lambda_0 x = y\} \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

donc on a

$$dim\ N(L(\lambda_0)) = 1 \quad et \quad dim\ R(L(\lambda_0)) = 0,$$

ce qui donne que

$$codim\ R(L(\lambda_0)) = 1,$$

et que

$$\beta = 1 \notin R(L(\lambda_0)) \qquad et \qquad N(L(\lambda_0)) = [1].$$

Donc, toutes les hypothèses du corollaire 3.2.1 sont satisfaites. Alors, il existe $a > 0$ *et deux applications continues* φ *et* ψ *tels que* $\varphi(0) = \lambda_0$, $\psi(0) = 0$ *et pour chaque* $\alpha \in (-a, a)$

$$F(\varphi(\alpha), \alpha[1 + \psi(\alpha)]) = 0.$$

L' équation (3.13) a deux courbes de solutions, alors soit $x \equiv 0$ *et* $\lambda = x^{p-1} sin\frac{1}{x}$ *ou bien il existe* $\alpha \in (-a, a)$ *pour lequel*

$$(\lambda, x) = (\varphi(\alpha), \alpha[1 + \psi(\alpha)]).$$

Exemple 3.3.2 *Considérons le problème aux limites non linéaire*

$$\begin{cases} -x''(t) = \lambda x(t)[1 + h(x(t))], & t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

où λ est un paramètre réel et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3 telle que

$$h(x) = h_2 x^2 + \circ(x^2), \tag{3.15}$$

quand $x \to 0$, avec

$$h_2 \neq 0.$$

Considérons les espaces de Banach

$$X = C_0^2([0,1]), \qquad Y = C([0,1]).$$

On remarque que l'équation du problème (3.14) a la même forme que l'équation (3.11), telle que l'opérateur F est défini par :

$$\begin{aligned} F : & \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y \\ & (\lambda, x) \longmapsto F(\lambda, x) = x'' + \lambda x[1 + h(x)], \end{aligned}$$

avec

$$L(\lambda)x = x'' + \lambda x \qquad \text{et} \qquad G(\lambda, x) = \lambda x h(x).$$

On a l'application F est de classe C^3 et satisfaite

$$F(\lambda, 0) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le problème (3.14) est constitué d'une équation non homogène avec des conditions aux limites, on résoudre le problème homogène qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} -x''(t) = \lambda x(t), & t \in (0,1) \quad (3.16) \\ x(0) = x(1) = 0. & \quad (3.17) \end{cases}$$

On a 3 cas :

1) *Si $\lambda = 0$, l'équation (3.16) devient $x'' = 0$ qui a l'équation caractéristique de la forme $r^2 = 0$,* *donc la solution s'écrit sous la forme*

$$x(t) = \alpha t + \beta,$$

avec les conditions aux limites (3.17) on a :

$$\begin{cases} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x \equiv 0.$$

2) *Si $\lambda < 0$, on a :*

$$\begin{aligned} x'' + \lambda x = 0 &\Longrightarrow r^2 + \lambda = 0 \\ &\Longrightarrow r^2 = -\lambda \\ &\Longrightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}, \end{aligned}$$

donc la solution est de la forme :

$$x(t) = \alpha e^{t\sqrt{-\lambda}} + \beta e^{-t\sqrt{-\lambda}},$$

de (3.17) on a :

$$\begin{cases} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha e^{\sqrt{-\lambda}} - \alpha e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x \equiv 0.$$

3) *Si $\lambda > 0$, on a :*

$$\begin{aligned} x'' + \lambda x = 0 &\Longrightarrow r^2 + \lambda = 0 \\ &\Longrightarrow r^2 = -\lambda \\ &\Longrightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}, \end{aligned}$$

donc la solution est de la forme :

$$x(t) = \alpha \cos\sqrt{\lambda}t + \beta \sin\sqrt{\lambda}t,$$

avec

$$\begin{cases} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta \sin\sqrt{\lambda} = 0, \end{cases}$$

supposons que $\beta \neq 0$ *donc*

$$\begin{aligned} \sin\sqrt{\lambda} = 0 &\implies \sqrt{\lambda} = n\pi \\ &\implies \lambda = n^2\pi^2. \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de l'équation (3.16) sont :

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

De plus, on a la fonction propre associe au valeur propre λ_n *pour chaque* $n \geq 1$ *est :*

$$\phi_n(t) = \sin(n\pi t),$$

donc

$$N(L(\lambda_n)) = [\sin(n\pi t)],$$

et d'après l'alternative de Fredholm 3.1.1, on a :

$$R(L(\lambda_n)) = \{x \in X : \int_0^1 x(t)\sin(n\pi t)dt = 0\} := Z_n.$$

Vérifions que zéro est une valeur propre simple de $(L(\lambda_n), L'(\lambda_n))$ *avec* $L'(\lambda_n) = I$*, c.à.d :*

$$dim\ N(L(\lambda_n)) = codim\ R(L(\lambda_n)) = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin^2(n\pi t)dt &= \int_0^1 \frac{1-\cos(2n\pi t)}{2}dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

donc pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sin(n\pi t) \notin R(L(\lambda_n)),$$

ce qui donne

$$dim\ N(L(\lambda_n)) = codim\ R(L(\lambda_n)) = 1.$$

Alors, zéro est une valeur propre simple de $L(\lambda_n)$ *. Par conséquent, en appliquant le corollaire 3.2.1 .*

Alors, il existe $a > 0$ et deux applications de classe C^2

$$\varphi_n : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\psi_n : (-a, a) \longrightarrow Z_n,$$

tels que

$$\varphi_n(0) = \lambda_n, \qquad \psi_n(0) = 0,$$

et pour chaque $\alpha \in (-a, a)$

$$F(\varphi_n(\alpha), \alpha[\sin(n\pi t) + \psi_n(\alpha)]) = 0.$$

De plus, si (λ, x) est suffisamment proche de $(\lambda_n, 0)$ et $F(\lambda, x) = 0$, alors soit $x \equiv 0$ ou bien il existe $\alpha \in (-a, a)$ pour lequel

$$(\lambda, x) = (\varphi_n(\alpha), \alpha[\sin(n\pi t) + \psi_n(\alpha)]).$$

Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, le problème (3.14) a une courbe de solutions

$$(\varphi_n(\alpha), x_n(\alpha)),$$

où

$$x_n(\alpha) = \alpha[\sin(n\pi t) + \psi_n(\alpha)], \qquad \alpha \simeq 0,$$

au voisinage de $(\lambda, x) = (\lambda, 0)$ pour $\lambda = \lambda_n$.

Puisque φ_n et ψ_n sont de classe C^2 et que Z_n est un sous-espace fermé de X, ces fonctions admettent un développement de Taylor au voisinage de $\alpha = 0$ de la forme

$$\varphi_n(\alpha) = \varphi_n(0) + \varphi_n'(0)\alpha + \frac{\varphi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2) \Longrightarrow \varphi_n(\alpha) = \lambda_n + \varphi_n'(0)\alpha + \frac{\varphi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2), \quad (3.18)$$

$$\psi_n(\alpha) = \psi_n(0) + \psi_n'(0)\alpha + \frac{\psi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2) \Longrightarrow \psi_n(\alpha) = \psi_n'(0)\alpha + \frac{\psi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2), \qquad (3.19)$$

pour certains nombres réels $\varphi_n'(0)$ et $\varphi_n''(0)$ et fonctions $\psi_n'(0), \psi_n''(0) \in Z_n$.
D'après (3.15), on a :

$$-x''(t) = \lambda x(t)[1 + h_2 x^2 + \circ(x^2)]. \qquad (3.20)$$

En remplaçant par les extensions (3.18) et (3.19) dans l'équation (3.20), on obtient

$$-x_n''(\alpha) = \varphi_n(\alpha)x_n(\alpha)[1 + h_2 x_n^2 + \circ(x_n^2)], \qquad (3.21)$$

avec

$$\begin{aligned}
-x_n''(\alpha) &= -\left(\alpha\left[\sin(n\pi t)+\psi_n(\alpha)\right]\right)'' \\
&= -\left(\alpha\left[\sin(n\pi t)+\psi_n'(0)\alpha+\frac{\psi_n''(0)}{2}\alpha^2+\circ(\alpha^2)\right]\right)'' \\
&= -\left(\alpha\left[-n^2\pi^2\sin(n\pi t)+(\psi_n'(0))''\alpha+\frac{(\psi_n''(0))''}{2}\alpha^2+\circ(\alpha^2)\right]\right) \\
&= \alpha\left(\lambda_n\sin(n\pi t)-(\psi_n''(0))'\alpha-\frac{(\psi_n''(0))''}{2}\alpha^2+\circ(\alpha^2)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.21), on trouve

$$\begin{aligned}
-x_n''(\alpha) &= \alpha\left(\lambda_n\sin(n\pi t)-(\psi_n''(0))'\alpha-\frac{(\psi_n''(0))''}{2}\alpha^2+\circ(\alpha^2)\right) \\
&= \varphi_n(\alpha)x_n(\alpha)[1+h_2x_n^2+\circ(x_n^2)] \\
&= \left(\lambda_n+\varphi_n'(0)\alpha+\frac{\varphi_n''(0)}{2}\alpha^2+\circ(\alpha^2)\right)\cdot\left(\alpha\left[\sin(n\pi t)+\psi_n(\alpha)\right]\right) \\
&\quad\cdot\left[1+h_2\left(\alpha\left[\sin(n\pi t)+\psi_n(\alpha)\right]\right)^2+\circ(\alpha^2)\right] \\
&= \left(\lambda_n+\varphi_n'(0)\alpha+\frac{\varphi_n''(0)}{2}\alpha^2+\circ(\alpha^2)\right) \\
&\quad\cdot\left(\alpha\left[\sin(n\pi t)+\psi_n'(0)\alpha+\frac{\psi_n''(0)}{2}\alpha^2+\circ(\alpha^2)\right]\right) \\
&\quad\cdot\left[1+h_2\alpha^2\left(\sin(n\pi t)+\psi_n(\alpha)\right)^2+\circ(\alpha^2)\right].
\end{aligned}$$

En divisant par α on trouve

$$\begin{aligned}\lambda_n \sin(n\pi t) - (\psi_n''(0))'\alpha - \frac{(\psi_n''(0))''}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2) &= \left(\lambda_n + \varphi_n'(0)\alpha + \frac{\varphi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2)\right) \\ &\cdot \left(\sin(n\pi t) + \psi_n'(0)\alpha + \frac{\psi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2)\right) \\ &\cdot \left[1 + h_2\alpha^2 \left(\sin(n\pi t) + \psi_n(\alpha)\right)^2 + \circ(\alpha^2)\right].\end{aligned}$$

En divisant une autre fois par α et par passage à la limite quand $\alpha \to 0$ on obtient

$$-(\psi_n'(0))'' = \lambda_n \psi_n'(0) + \varphi_n'(0)\sin(n\pi t). \tag{3.22}$$

L' application de l'alternative de Fredholm sur l'équation (3.22) donnée que

$$\varphi_n'(0) = 0.$$

De plus, puisque $\psi_n'(0) \in Z_n$, il est nécessaire que

$$\psi_n'(0) = 0.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\lambda_n \sin(n\pi t) - \frac{(\psi_n''(0))''}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2) &= \left(\lambda_n + \frac{\varphi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2)\right) \\ &\cdot \left(\sin(n\pi t) + \frac{\psi_n''(0)}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2)\right) \\ &\cdot \left[1 + h_2\alpha^2 \left(\sin(n\pi t) + \psi_n(\alpha)\right)^2 + \circ(\alpha^2)\right].\end{aligned} \tag{3.23}$$

La division de l'équation (3.23) par α^2 et par passage à la limite quand $\alpha \to 0$ donne

$$-\frac{(\psi_n''(0))''}{2} = \lambda_n h_2 \sin^3(n\pi t) + \frac{\varphi_n''(0)}{2}\sin(n\pi t) + \lambda_n \frac{\psi_n''(0)}{2}. \tag{3.24}$$

Enfin, en utilisant l'alternative de Fredholm sur l'équation (3.24) et puisque $\psi_n''(0) \in Z_n$ on a :

$$\int_0^1 -\frac{(\psi_n''(0))''}{2}\sin(n\pi t)dt = 0 \implies \int_0^1 \left(\lambda_n h_2 \sin^3(n\pi t) + \frac{\varphi_n''(0)}{2}\sin(n\pi t)\right)\sin(n\pi t)dt$$

$$+\int_0^1 \lambda_n \frac{\psi_n''(0)}{2}\sin(n\pi t)dt = 0$$

$$\implies \lambda_n h_2 \int_0^1 \sin^4(n\pi t)dt + \frac{\varphi_n''(0)}{2}\int_0^1 \sin^2(n\pi t)dt = 0$$

$$\implies \frac{\varphi_n''(0)}{2}\int_0^1 \sin^2(n\pi t)dt = -\lambda_n h_2 \int_0^1 \sin^4(n\pi t)dt$$

$$\implies \varphi_n''(0) = -2\lambda_n h_2 \frac{\displaystyle\int_0^1 \sin^4(n\pi t)dt}{\displaystyle\int_0^1 \sin^2(n\pi t)dt}.$$

Par conséquent, lorsque $h_2 > 0$, alors $\varphi_n''(0) < 0$ donc la courbe est concave au voisinage de λ_n et on a le diagrammes suivant :

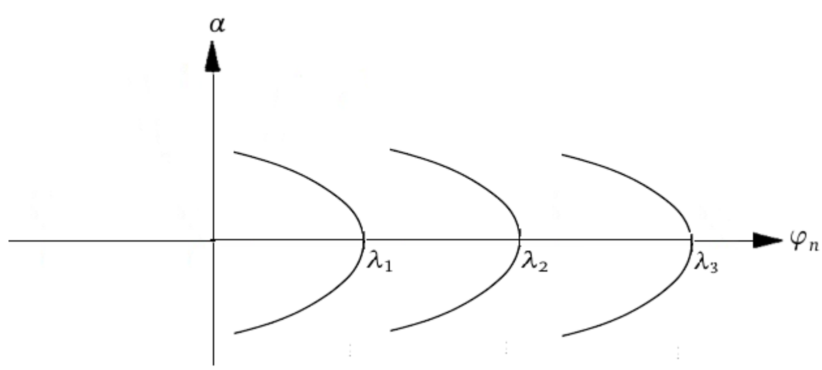

FIGURE 3.1: Diagramme de bifurcation pour $h_2 > 0$

Et lorsque $h_2 < 0$, *alors* $\varphi_n''(0) > 0$ *donc la courbe est convexe au voisinage de* λ_n *et on a le diagrammes suivant :*

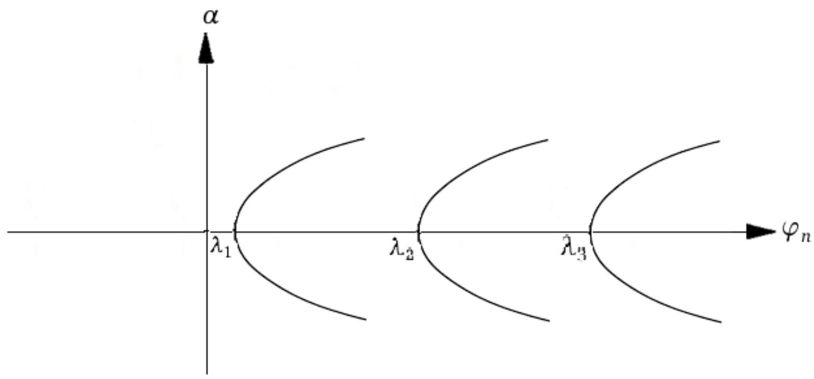

FIGURE 3.2: Diagramme de bifurcation pour $h_2 < 0$

Bibliographie

[1] Amann, H. *Ordinary differential equations : an introduction to nonlinear analysis*. Walter De Gruyter, 1990.

[2] Ambrosetti, A. & Prodi, G. *A primer of nonlinear analysis*. Cambridge University Press, 1993.

[3] Bardos, C. & Lasry, J., and Schatzman, M. *Bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*. Springer, 1980.

[4] Chow, S. & Hale, J. K. *Methods of bifurcation theory*. Springer, 1982.

[5] Crandall, M.G. & Rabinowitz, P. H. *Bifurcation from simple eigenvalues*. Journal of Functional Analysis *8* (1971), 321–340.

[6] Crandall, M.G. & Rabinowitz, P. H. *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability*. Journal of Functional Analysis *52* (1973), 162–180.

[7] Esquinas, J. & López-Gómez, J. *Optimal multiplicity in local bifurcation theory I. Generalized generic eigenvalues*. Journal of differential equations *71* (1988), 72–92.

[8] Golubitsky, M. & Schaeffer, D. G. *Singularities and groups in bifurcation theory*. Springer-Verlag New York Inc, 1985.

[9] Granas, A. & Dugundji, J. *Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics*. Springer New York, 2003.

[10] Hale, J.K. & Koçak, H. *Dynamics and bifurcations*. Springer Science & Business Media, 1991.

[11] Heinz, E. *An elementary analytic theory of the degree of mapping in n-dimensional space*. Journal of Mathematics and Mechanics (1959), 231–247.

[12] Intissar, A. *Analyse fonctionnelle & théorie spectrale : pour les opérateurs compacts non auto-adjoints ; avec exercices et solutions*. Cépaduès-Éd, 1997.

[13] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, vol. 13. Springer, 1993.

[14] KLAUS, D. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag Berltn Heidelherg, 1985.

[15] LÉVY-BRUHL, P. *Introduction à la théorie spectrale : cours et exercices corrigés*. Dunod Paris, 2003.

[16] LÓPEZ-GÓMEZ, J. *Spectral theory and nonlinear functional analysis*. CRC Press, 2001.

[17] MA, T. & WANG, S. *Bifurcation theory and applications*. World Scientific, 2005.

[18] MATZEU, M. & VIGNOLI, A. *Topological nonlinear analysis II : degree, singularity and variations*. Springer Science & Business Media, 1995.

[19] NIRENBERG, L. *Topics in nonlinear functional analysis*. American Mathematical Soc, 2001.

[20] O'REGAN, D. & CHO, Y., AND CHEN, Y. *Topological degree theory and applications*. Chapman et Hall/CRC, 2006.

[21] PAOLO, C. & EDUARDO, G., AND MASSIMO, L. D. C. *Topics in mathematical analysis*, vol. 3. World Scientific, 2008.

[22] PAPAGEORGIOU, N.S. & KYRITSI-YIALLOUROU, S. T. *Handbook of applied analysis*, vol. 19. Springer Science & Business Media, 2009.

[23] SCHMITT, K. & THOMPSON, R. *Nonlinear analysis and differential equations : An introduction*. Lecture Notes, University of Utah, Department of Mathematics (1998).

[24] SCHWARTZ, L. *Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1970.

[25] SMART, D. R. *Fixed point theorems*. Cambridge University Press, 1980.

[26] YOSIDA, K. *Functional analysis*. Spring-Verlag, New York/Berlin, 1980.

[27] ZEIDLER, E. *Nonlinear functional analysis and its applications : Part 1 : fixed-point theorems*. Springer, 1985.

Résumé

Ce travail a pour objectif de présenter la théorie de bifurcation à partir des valeurs propres. En premier lieu, nous présentons le degré topologique en dimension finie et infinie pour définir l'indice de Schauder. Nous donnons ensuite le théorème du bifurcation à partir d'une valeur propre de multiplicité algébrique impaire introduit par Krasnosel'ski, qui montre l'existence des branches de solutions. La dernière partie de notre travail est consacrée aux théorème de Crandall et Rabinovwitz du la bifurcation à partir d'une valeur propre simple.

Mots-clés: le degré topologique, l'indice de Schauder, bifurcation, théorème de Krasnosel'ski, bifurcation à partir d'une valeur propre simple.

Abstract

This work aims to present the bifurcation theory from eigenvalues. First, we present the topological degree in finite and infinite dimension to define the Schauder index. We then give the bifurcation theorem from an eigenvalue of odd algebraic multiplicity introduced by Krasnosel'ski, which shows the existence of the solution branches. The last part of our work is devoted to Crandall and Rabinovwitz's theorem of the bifurcation from a simple eigenvalue.

Keywords: the topological degree, the Schauder index, bifurcation, Krasnosel'ski theorem, bifurcation from a simple eigenvalue.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى تقديم نظرية التشعب من القيم الذاتية. أولاً ، نقدم الدرجة الطوبولوجية في البعد المحدود واللانهائي لتحديد مؤشر شودر. ثم نعطي نظرية التشعب من القيمة الذاتية للتعددية الجبرية الفردية التي قدمها كراسنوسيلكي ، والتي توضح وجود فروع الحل. يكرس الجزء الأخير من عملنا لنظرية كراندال ورابينوفيتز حول التشعب من قيمة بسيطة.

الكلمات المفتاحية: الدرجة الطوبوغرافية ، مؤشر شودر ، التشعب ، نظرية كراسنوسيلكي ، التشعب من القيم الذاتية البسيطة.