République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

M^{elle} Abdesselam Hadjira

Solutions positives pour des problèmes aux limites des équations différentielles du second ordre

---

Encadrant :

Fatima Zohra LADRANI

Maitre Conférence "B" à ENS d'Oran.

Soutenu le 02/06/2019

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. Mami Tawfiq Fawzi	M.C.A	C.U.A.T
Examinateur :	Mme. Mammar Imene	M.C.B	C.U.A.T
Co-Encadrant :	Mr. Benaissa Cherif Amin	M.C.A	U.S.T.O.M.B
Encadrant :	Mme. Ladrani Fatima Zohra	M.C.B	E.N.S.O.

Année Universitaire : 2018 – 2019

Dédicaces

Je dédie ce présent travail à mes chers parents, pour leur sacrifices,
encouragement et soutien tout au long d'étude.
A ma chère sœur : **Kheira**.
A mes chères frères.
A toute chère famille **Abdesselam**.
A mon cher **Ilyes**.
A tous mes enseignants pour leurs persévérance et leurs patience.
Et à mes chers amies : **Kawther** et **Chaimaa**.
Et à mes chers amis en générale.
Pour chacun des mentionnés mon cœur et oubliés mon stylo.
Merci pour tout, je vous aimes.
Que Dieu vous protège et vous prête bonne santé et longue vie.

M^{elle}HADJIRA

Remerciements

En premier lieu, je rends grâce à **Allah** et je tiens à témoigner ma reconnaissance à lui, le tout puissant qui m'a donné longue de vie et m'a permis de réaliser ce travail. Paix et salut sur notre Prophète, notre guide. Que ce travail soit utile pour nous dans cette vie et dans l'au de là Amin.

Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements et mon profond respect à mes encadrants de mémoire : **M^{me} LADRANI Fatima Zohra** et **M^{r} BENAISSA CHERIF Amin** pour avoir accepté de m'accompagner dans ce travail, pour ses patiences, pour le temps qu'ils ont toujours su m'accorder malgré ses occupations, pour ses encouragements durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire et bien sur de ses utiles conseils qui m'ont été précieux.

Je tiens à remercier chaleureusement les membres du jury, **M^{r} MAMI Tawfiq Fawzi** qui me fait honneur de présider ce jury, ainsi je remercie vivement **M^{me} MAMMAR Imene**, d'avoir bien voulu accepter d'être l'examinateur de ce travail.

Spécialement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes enseignants qui d'une manière ou d'une autre m'ont aidé.

Je ne terminerai pas sans remercier une mère extraordinaire qui m'a aidé surtout à surmonter toutes les difficultés, un père, des frères et une sœur qui n'ont épargné aucun effort matériel ni moral pour que je puisse arriver dont ils ont toujours rêvé. Je ne peux que leur demander pardon car je ne les remercierai jamais assez.

Je remercie également mes amis et tous qui ont contribué de prés ou de loin au cours de la réalisation de ce travail.

M^{elle}HADJIRA

Table des matières

Introduction générale

Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence et la multiplicité de solutions positives pour les équations différentielles non linéaire d'ordre deux posées sur des intervalles bornés.

Les problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires jouent un rôle très important, à la fois en théorie et en application. Ils sont utilisés pour décrire un grand nombre de phénomènes physiques, biologiques et chimiques.

Récemment, l'étude de l'existence de solutions positives du problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre ou des ordres supérieurs a pris l'importance puisque a été étudiée de manière approfondie. C'est un domaine en forte croissance.

Nous rencontrons dans la littérature différentes techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe pour la résolution des équations différentielles ordinaires.

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linéaires. De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach [1] en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

En 1930, Schauder [2] a établi une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Dans les dernières années, le théorème de Krasnoselskii [6] est apparu. Sa version

1. **Stefan Banach** (1892 – 1945) est un mathématicien polonais.
2. **Juliusz Paweł Schauder** (21 septembre 1899, Lviv, en allemand Lemberg situé alors en Autriche-Hongrie– septembre 1943, Lemberg, Pologne occupée) est un mathématicien polonais

générale est un outil pour obtenir l'existence de multiples solutions positives pour des problèmes aux limites différents, notamment dans les équations différentielles ordinaires. D'autre part on trouve des théorèmes importants qui donnent l'existence et la multiplicité des solutions, par exemple le théorème de Krasnosel'skii [3] [6] et le théorème d'Avery et Peterson [8].

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Nous présentons, dans **le premier chapitre**, quelques résultats préliminaires indispensables à la compréhension de la suite du travail. Ces résultats concernent essentiellement les notions suivantes : Espace de Banach, Fonction convexe, les cônes. Nous avons rassemblé à la fin de ce chapitre quelques théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

Le deuxième chapitre est basé sur l'étude du problème en trois points pour une équation non linéaire d'ordre deux :

$$u''(t) + a(t) f(u(t)) = 0, \quad \text{pour tout } t \in [0,1],$$

avec la condition aux limites

$$u(0) = 0, \quad \alpha u(\eta) = u(1),$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions données, $0 < \eta < 1$ et $\alpha\eta \neq 1$.
Suite à une introduction, nous présentons dans la section 2 quelques lemmes fondamentaux auxquels nous aurons à se référer tout au long de ce chapitre. Dans la section 3 et 4 des résultats d'existence et d'unicité de la solution sont établis en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Schauder. Dans la dernière section, en se basant sur les théorèmes de Krasnoselskii, des résultats d'existence de solutions positives ont pu être prouvé, cette section est basée sur les travaux de R.Ma [7].

3. **Mark Alexandrovich Krasnosel'skii** (Le 27 avril 1920, Starokostiantyniv, le 13 février 1997, Moscou) est un mathématicien russe. Parmi ses travaux sur l'analyse fonctionnelle non linéaire et ses applications.

Dans **le dernier chapitre**, on étudie le problème suivant :

$$u''(t) + h(t)f(t, u(t)) = 0, \quad \text{pour tout } t \in [a, c]\,,$$

avec les conditions aux limites

$$u(a) = \alpha u(b) + \delta u'(a), \qquad \beta u(c) + \gamma u'(c) = 0,$$

où $f : [a, c] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [a, c] \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions données, $b \in \,]a, c[$, $\beta, \gamma, \delta > 0$ et $0 < \alpha < \dfrac{c-a}{c-b}$.
Tout d'abord, dans la section 2, nous établissons le cône approprié pour appliquer le théorème d'Avery-Henderson.

Dans la section 3, en se basant sur le théorème d'Avery Peterson, des résultats d'existence de multiples solutions positives ont pu être prouvé. Enfin, nous terminons par un exemple d'applications. Les résultats de ce chapitre sont basés sur les travaux de D. R. Anderson [2].

Notations générales

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, n fois.
$\mathbb{K}$	Un corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\|.\|$	Norme.
E	Espace vectoriel.
I	Intervalle, tel que $I = [0, 1]$.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence.
F^c	Complémentaire de F.
$\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$	Espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^+)$	Espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$.
$\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$	Espace des fonctions de classe 2.
∂	La frontière.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement à définir des notions fondamentales et à rappeler quelques théorèmes importants dans la théorie du point fixe, notamment le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le Théorème de Krasnoselskii et le Théorème d'Avery Henderson ainsi leurs extensions.

1.1 Espace de Banach

Cette section est consacrée à quelques définitions sur les espaces vectoriels normés. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 (Espace normé)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle une norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$

(iii) $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Une norme est généralement notée $\|.\|$ et le couple $(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1. *On définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ de la manière suivante*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Dans toute la suite on suppose que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2 (Suites convergentes)**.** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge dans E s'il existe $x \in E$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $x_n \to x$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si elle ne converge pas.

Définition 1.1.3 (Suite de Cauchy)**.** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.4. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}.$$

Proposition 1.1.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, alors*

$i)$ Toute boule ouverte est un ouvert de E.

$ii)$ Toute boule fermée est un fermé de E.

Définition 1.1.5. *On dit qu'une partie A de $(E, \|.\|_E)$ est bornée s'il existe une boule fermée $\overline{B}(a, r)$ telle que $A \subset \overline{B}(a, r)$ i.e.*

$$\exists r > 0, \qquad \exists a \in E, \qquad A \subset \overline{B}(a, r).$$

Ou

$$\exists r > 0, \qquad A \subset \overline{B}(0,r).$$

Définition 1.1.6 (Espace de Banach)**.** *Un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est appelé espace de Banach sur* E*, si toute suite de Cauchy converge dans* E*.*

Exemple 1.1.2. *L'espace* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.1.7. *Une sous-ensemble* A *d'un espace vectoriel* E *est dit convexe si et seulement si*

$$\textit{pour tout } x, y \in A,\ \lambda \in [0,1], \qquad \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Définition 1.1.8 (Cône)**.** *[2] Un sous-ensemble* K *d'un espace vectoriel* E *est dit cône de sommet* x_0 *si et seulement s'il est stable par les homothéties de centre* x_0*, i.e.*

$$\textit{pour tout } x \in K, \quad \lambda > 0, \qquad x_0 + \lambda(x - x_0) \in K.$$

Remarque 1.1.1.

i) *Si on ne précise pas le sommet* x_0*, ce sera* 0*.*

ii) K *est un cône si et seulement si,* $\lambda K \subset K$*, pour tout* $\lambda > 0$*.*

Définition 1.1.9 (cône ordonné)**.** *Un sous-ensemble non vide* K *d'un espace vectoriel* E *est dit* ***cône ordonné*** *sur* E *s'il est convexe, fermé et vérifie les deux conditions suivantes :*

1) *Pour tout* $x \in K$ *et* $\lambda \geq 0$*, implique* $\lambda x \in K$*.*

2) $K \cap (-K) = \{0\}$*, i.e.* $x \in K$ *et* $-x \in K \Longrightarrow x = 0$*.*

1.2 Fonction convexe, Fonction concave

Définition 1.2.1 (Fonction convexe)**.** *[2] On dit qu'une fonction* f *est convexe sur un intervalle* I *si et seulement si :*

$$\textit{pour tout } x, y \in I,\ \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.2.2 (Fonction concave)**.** *[2] On dit qu'une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si :*

$$\text{pour tout } x, y \in I,\ \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lemme 1.2.1. *Soit f une application sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes*

$i)$ L'application f convexe sur I.

$ii)$ Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, alors

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}. \tag{1.1}$$

Lemme 1.2.2. *Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur un intervalle I, alors*

$i)$ Si $f^{''}(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$, alors la fonction f est convexe sur I.

$ii)$ Si $f^{''}(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$, alors la fonction f est concave sur I.

1.3 Introduction à l'analyse fonctionnelle

Dans la suite $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent des espaces de Banach.

Définition 1.3.1. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application. On dit que $\mathcal{F}$ est bornée si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F i.e. l'image d'un borné est un borné.*

Remarque 1.3.1. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application bornée, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que*

$$\text{pour tout } x \in E : \|x\|_E \leq \varepsilon \Longrightarrow \|\mathcal{F}(x)\|_F \leq \delta.$$

Définition 1.3.2. *Soient $a \in E$ et $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. On dit que $\mathcal{F}$ est continue au point a si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour $x \in E$, on a*

$$\|x-a\|_E < \varepsilon \Longrightarrow \|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a)\|_F < \delta.$$

Proposition 1.3.1. *Une application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est continue au point* x*, si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_n$ *converge vers* x *dans* E*, alors* $(\mathcal{F}(x_n))_n$ *converge vers* $\mathcal{F}(x)$ *dans* F*.*

Définition 1.3.3. *Un ensemble* M *est relativement compact si* $\overline{M}$ *est compact.*

Définition 1.3.4. *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. L'application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est dite compacte si :*

i) $\mathcal{F}$ *est continue sur* E*.*

ii) $\mathcal{F}(E)$ *est relativement compact dans* F*.*

Définition 1.3.5. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. L'application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est dite complètement continue si :*

i) $\mathcal{F}$ *est continue sur* E*.*

ii) Pour tout sous-ensemble borné A *de* E*, implique que* $\mathcal{F}(A)$ *est relativement compacte dans* F*.*

1.3.1 Théorèmes du point fixe

Définition 1.3.6. *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (E, \|.\|_E)$ *une application. Un élément* x_0 *de* E *est dit point fixe de* E *si :*

$$\mathcal{F}(x_0) = x_0.$$

Théorème d'Arzéla-Ascoli

Définition 1.3.7 (Equicontinuitée)**.** *Soit* $(E, \|.\|_E)$*,* $(F, \|.\|_E)$ *deux espaces normés et* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathcal{C}(E, F)$*. On dit que* $\mathcal{H}$ *est équicontinue en* x_0 *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\eta > 0$*, tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dit que $\mathcal{H}$ *est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de* E*.*

Remarque 1.3.2. *Le point important,* η *ne dépend pas de* f*.*

Théorème 1.3.1 (Arzéla-Ascoli). *Soit K un sous-ensemble compact dans E et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(K, F)$. Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(K, F)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

i) $\mathcal{H}$ est équicontinue.

ii) $\forall x \in K$, $\mathcal{H}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compacte dans F.

Théorème du point fixe de type Leray Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.3.2 (Schauder). *[1] Soit M un sous-ensemble de E fermé et convexe et $\mathcal{F} : M \to M$ une application continue telle que $\mathcal{F}(M)$ est relativement compact. Alors $\mathcal{F}$ possède un point fixe.*
En particulier, si M est un compact convexe alors toute fonction continue de M sur M possède un point fixe.

Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.3.3 (Principe de contraction de Banach). *[3] Soit $(E, \| \,.\, \|_E)$ un espace de Banach et $\mathcal{F} : E \to E$ une contraction, s'il existe $0 \leq k < 1$, tel que :*

$$\forall y_1, y_2 \in E, \qquad \|\mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2)\|_E \leq k \|y_1 - y_2\|_E,$$

alors l'opérateur $\mathcal{F}$ admet un point fixe unique $x \in E$.

Théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii

Krasnoselskii a combiné le Théorème de point fixe de Banach et celui de Schauder et a établi un nouveau théorème de point fixe qui a porté son nom.

Théorème 1.3.4 (Krasnoselskii). *[6] Soit K un cône défini dans un espace de Banach $(E, \|.\|_E)$. Supposons que Ω_1 et Ω_2 deux sous ensembles ouverts non vide de E. Avec*

$$0 \in \Omega_1, \qquad \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2.$$

Soit $A : K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1) \to K$ *une application complètement continue telle que*

1) $\|Au\| \leq \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \geq \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_2$,

   ou bien

2) $\|Au\| \geq \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \leq \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

   Alors l'application A *possède un point fixe dans* $K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.

Théorème d'Avery-Henderson

Le Théoreme d'Avery-Henderson est un théorème qui généralise le Théorème de Krasnoselskii, donc il est autour de la notion du point fixe pour les opérateurs complètements continus et en plus il donne l'ordre de multiplicité des solutions. Pour cela soit la fonction ϕ définie dans un cône K d'un espace de Banach, r un nombre positif, tels que l'ensemble suivant est défini de cette manière :

$$K(\phi, r) := \{u \in K : \phi(u) < r\}.$$

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.5 (Avery-Henderson)**.** *[8] Soient* K *le cône dans un espace de Banach* $(E, \|.\|_E)$ *et* η, ϕ *et* θ *des fonctions définies de* K *vers* $\mathbb{R}^+$*. Supposons que* η, ϕ *et* θ *sont continues. Si de plus les fonctions* ϕ, θ *et* η *sont satisfont :*

- *Pour* $u, v \in K$, $u - v \in K$,

$$\phi(u) \leq \phi(v) \quad et \quad \eta(u) \leq \eta(v).$$

- *Il existe des nombres positifs* r *et* M*, tels que*

$$\phi(u) \leq \theta(u) \leq \eta(u) \quad et \quad \|u\| \leq M\phi(u), \quad pour\ tout\ u \in \overline{K(\phi, r)}.$$

- *Il existe des nombres positifs* $p < q < r$*, tels que*

$$\theta(0) = 0 \quad et \quad \theta(\lambda u) \leq \lambda\theta(u), \quad pour\ \lambda \in [0, 1], \quad u \in \partial K(\theta, q).$$

Si $A : \overline{K(\phi, r)} \longrightarrow K$ *est un opérateur complètement continu satisfait :*

1) $\phi(Au) > r$, *pour tout* $u \in \partial K(\phi, r)$,

2) $\phi(Au) < q$, *pour tout* $u \in \partial K(\theta, q)$,

3) $K(\eta, p) \neq \emptyset$ *et* $\eta(Au) > p$, *pour tout* $u \in \partial K(\eta, p)$.

Alors A *admet au moins deux points fixes* u_1 *et* u_2 *telles que*

$$p < \eta(u_1) \quad avec \quad \theta(u_1) < q,$$

$$q < \theta(u_2) \quad avec \quad \phi(u_2) < r.$$

Chapitre 2

Problème en trois points pour une équation non linéaire d'ordre deux

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limite suivant :

$$u''(t) + a(t)f(u(t)) = 0, \quad \text{pour tout } t \in [0,1], \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \alpha u(\eta) \tag{2.2}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $0 < \eta < 1$ et $0 < \alpha\eta < 1$.

On établit l'existence et l'unicité de la solution par application de Théorème du Leray Schauder, le Théorème du point fixe de Banach et le Théorème de Guo-Krasnosekii.

2.2 Lemmes fondamentaux

Pour établir la positivité de la solution du problème (2.1) , (2.2), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 2.2.1. *[7] Pour tout $y \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a le problème*

$$\begin{cases} u''(t) + y(t) = 0, & t \in [0,1], \\ u(0) = 0, & \alpha u(\eta) = u(1). \end{cases} \tag{2.3}$$

Si $\alpha\eta \neq 1$, alors le problème admet une solution unique de la forme

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)y(s)ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

Démonstration.
Soit $y \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$u'' = -y(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Par intégration les deux membre entre 0 à t, on obtient

$$u'(t) = -\int_0^t y(s)ds + z, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Avec $z \in \mathbb{R}$. Par intégration de la dernière équation entre 0 à t, on trouve

$$u(t) = -\int_0^t \int_0^s y(\tau)d\tau ds + zt + b, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Avec $b \in \mathbb{R}$. On utilisant l'intégrale par partie, nous avons

$$u(t) = \int_0^t (s-t)y(s)ds + zt + b.$$

Par la condition au limite $u(0) = 0$, on trouve $b = 0$, d'autre part, on a $u(1) = \alpha u(\eta)$, ce qui donne

$$z = \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (s-\eta)y(s)ds - \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (s-1)y(s)ds.$$

Par conséquent,

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)y(s)ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

$\square$

Lemme 2.2.2. *[7] Si $y \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^{+})$ et $0 < \alpha < \dfrac{1}{\eta}$, alors la solution du problème* (2.3) *satisfaite*

$$u(t) \geq 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1].$$

Démonstration.

Par (2.3), on a $u''(t) = -y(t) \leq 0$, pour tout $t \in [0,1]$, alors la fonction u est concave sur $[0,1]$. Comme $u(0) = 0$, nous avons

$$u(t) \geq tu(1) \qquad \text{pour tout } t \in [0,1]. \tag{2.4}$$

Si $u(1) \geq 0$, par (2.4) implique que $u(t) \geq 0$ pour $t \in [0,1]$.
Si $u(1) < 0$, alors $u(\eta) < 0$, comme $\alpha < \dfrac{1}{\eta}$, alors

$$u(1) = \alpha u(\eta) > \frac{1}{\eta} u(\eta).$$

Par (2.4), on a

$$u(\eta) \geq \eta u(1).$$

d'où la contradiction. □

Lemme 2.2.3. *[7] Si $y \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^{+})$ et $0 < \alpha < \dfrac{1}{\eta}$, alors la solution du problème* (2.3) *satisfaite*

$$\inf_{t \in [\eta,1]} u(t) \geq \gamma \|u\|,$$

où $\gamma := \min \left\{ \alpha\eta, \dfrac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}, \eta \right\}$.

Démonstration.

La preuve se fait en deux cas.

1^er^ cas : Si $0 < \alpha < 1$. Par la condition au limite $\alpha u(\eta) = u(1)$, alors $u(\eta) \geq u(1)$. La fonction u est continue sur le compact $[0,1]$, alors le sup est atteint, c'est-à-dire, il existe $t^{*} \in [0,1]$, tel que

$$u(t^{*}) = \sup_{t \in [0,1]} u(t) = \|u\|_{\infty}. \tag{2.5}$$

Si $t^* \leq \eta < 1$, alors par la concavité de u, on a

$$\min_{t\in[\eta,1]} u(t) = \min\left(u(1), u\left(\eta\right)\right) = u(1)\min\left(1, \frac{1}{\alpha}\right) = u\left(1\right). \tag{2.6}$$

Par le lemme 1.2.1, on a $t^* \leq \eta < 1$, alors

$$\frac{u\left(t^*\right) - u\left(1\right)}{t^* - 1} \geq \frac{u\left(\eta\right) - u\left(1\right)}{\eta - 1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u(t^*) &\leq u(1) - \frac{u(1) - u(\eta)}{1-\eta} \\ &= u(1)\left[1 - \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{1-\eta}\right] \\ &= u(1)\frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Par (2.5), (2.6) et (2.7), on obtient

$$\min_{t\in[\eta,1]} u(t) \geq \frac{\alpha(1-\eta)}{(1-\alpha\eta)} \left\|u\right\|_\infty \geq \gamma \left\|u\right\|_\infty.$$

Si $\eta < t^* < 1$, alors

$$\min_{t\in[\eta,1]} u(t) = u(1). \tag{2.8}$$

Par le lemme 1.2.1, on a $0 \leq \eta < t^*$, alors

$$\frac{u(\eta)}{\eta} \geq \frac{u(t^*)}{t^*}. \tag{2.9}$$

Par (2.9) et la condition aux limite $u(1) = \alpha u(\eta)$, on conclut que

$$\frac{u(1)}{\alpha\eta} \geq \frac{u(t^*)}{t^*} \geq u(t^*) = \left\|u\right\|_\infty.$$

Par (2.8) et la dernière inégalité, on trouve

$$\min_{t\in[\eta,1]} u(t) \geq \alpha\eta \left\|u\right\|_\infty \geq \gamma \left\|u\right\|_\infty.$$

$2^{ème}$ **cas :** $1 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{\eta}$. Par la condition aux limite $u(1) = \alpha u(\eta)$, on conclut que

$u(\eta) \leq u(1)$.

Montrons que $\eta \leq t^* \leq 1$, on suppose l'inverse, c'est-à-dire $t^* \in [0, \eta)$, alors $t^* < \eta < 1$, on conclut que

$$\eta = \lambda t^* + (1-\lambda), \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{1-\eta}{1-t^*} \in (0,1).$$

Comme la fonction u est concave sur $[0,1]$, alors

$$\begin{aligned} u(\eta) &\geq \lambda u(t^*) + (1-\lambda) u(1) \\ &= \lambda u(t^*) + (1-\lambda) u(\eta). \end{aligned}$$

Donc, $u(\eta) \geq u(t^*)$, d'où la contradiction.

Par la concavité de u, on a

$$\min_{t \in [\eta,1]} u(t) = \min(u(1), u(\eta)) = u(\eta) \min(1, \alpha) = u(\eta).$$

Par le lemme 1.2.1, on a $0 \leq \eta < t^*$, alors

$$\frac{u(\eta)}{\eta} \geq \frac{u(t^*)}{t^*}.$$

Ce qui implique

$$\min_{t \in [\eta,1]} u(t) \geq \eta \|u\|_\infty \geq \gamma \|u\|_\infty.$$

□

2.3 Existence de la solution

Afin d'établir notre résultat principal concernant l'existence de la solution du problème (2.1), (2.2) dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

Théorème 2.3.1. *Supposons que :*

(H_1) *La fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continue et bornée, c'est-à-dire*

$$M:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|<\infty.$$

(H_2) *La fonction* $a:[0,1]\to\mathbb{R}$ *continue.*

Alors le problème $(2.1),(2.2)$ *admet au moins une solution sur l'intervalle* $[0,1]$*.*

Démonstration.
Transformons l'équation (2.1) en un problème de point fixe.

Pour cela, on considère l'opérateur suivant :

$$A:\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),$$

défini par

$$\begin{aligned}Au(t):&=-\int_0^t(t-s)a(s)f(u(s))ds-\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)a(s)f(u(s))ds\\&+\frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))ds.\end{aligned}$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 **:** (A est continu)

Soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ qui converge vers u. Alors, il existe $r>0$, tel que

$$\|u_n\|_\infty\le r,\qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Montrons que $\lim_{n\to+\infty}\|Au_n-Au\|_\infty=0$. En effet, pour tout $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}|Au_n(t)-Au(t)|&=\Big|-\int_0^t(t-s)a(s)\left(f(u_n(s))-f(u(s))\right)ds\\&-\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)a(s)\left(f(u_n(s))-f(u(s))\right)\\&+\frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\left(f(u_n(s))-f(u(s))\right)ds\Big|\\&\le\|a\|_\infty\frac{2+\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}\int_0^1|f(u_n(s))-f(u(s))|ds\\&\le C\int_0^1|f(u_n(s))-f(u(s))|ds.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Avec $C := \|a\|_\infty \dfrac{2+\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est uniformément continue sur le compact $[-r,r]$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $u_1, u_2 \in [-r,r]$, on a

$$|u_1 - u_2| \leq \delta \qquad \text{implique} \qquad |f(u_1) - f(u_2)| < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{2.11}$$

D'autre part, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$, alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$n \geq n_0 \qquad \text{implique} \qquad \sup_{t\in[0,1]} |u_n(t) - u(t)| < \delta. \tag{2.12}$$

Par (2.11) et (2.12), on a

$$n \geq n_0 : |f(u_n(t)) - f(u(t))| < \frac{\varepsilon}{C}, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Par conséquent, par l'équation (2.10), on conclut que

$$|Au_n(t) - Au(t)| \leq \varepsilon, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Donc

$$n \geq n_0 : \|Au_n - Au\|_\infty \leq \varepsilon.$$

D'où la continuitée de A.

Etape 2 **:**

Montrons que $A(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}))$ est un ensemble borné dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer qu'il existe $\delta > 0$, tel que

$$\|Au\|_\infty \leq \delta, \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$
\begin{aligned}
|Au(t)| &\leq \left|\int_0^t (t-s)a(s)f(u(s))ds\right| + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\left|\int_0^\eta (\eta-s)a(s)f(u(s))ds\right| \\
&+ \frac{t}{1-\alpha\eta}\left|\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds\right| \\
&\leq \|a\|_\infty \left(\frac{2+(1-\eta)\alpha}{1-\alpha\eta}\right)\int_0^1 |f(u(s))|ds \\
&= C\int_0^1 |f(u(s))|ds.
\end{aligned}
$$

Par les hypothèse (H_1), on trouve

$$
|Au(t)| \leq CM, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].
$$

Donc $\|Au\|_\infty \leq CM := \delta$, d'où $A(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}))$ est borné.

Etape 3 **:**

Montrons que $A(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}))$ est un ensemble équicontinu de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

On pose

$$
\mathcal{H} = \{A(u) : u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\}.
$$

Montrons que $\mathcal{H}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. En effet

Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$ et soit $u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, alors

$$
\begin{aligned}
|Au(t_2) - Au(t_1)| \leq &\left|\int_0^{t_2} (t_2-s)a(s)f(u(s))ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)a(s)f(u(s))ds\right| \\
&+ \frac{\alpha|t_1-t_2|}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds + \frac{|t_1-t_2|}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds \\
\leq &\left|(t_2-t_1)\int_0^{t_1} a(s)f(u(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)a(s)f(u(s))ds\right| + \\
&\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha\eta}|t_1-t_2|\int_0^1 |a(s)f(u(s))|\,ds \\
\leq &\frac{2+(1-\eta)\alpha}{1-\alpha\eta}\|a\|_\infty |t_1-t_2|\int_0^1 |f(u(s))|\,ds + \|a\|_\infty\left|\int_{t_1}^{t_2} |f(u(s))|\,ds\right|.
\end{aligned}
$$

Par les hypothèse (H_1), on trouve

$$
\begin{aligned}
|Au(t_2) - Au(t_1)| &\leq M\|a\|_\infty \frac{3+(1-2\eta)\alpha}{1-\alpha\eta}|t_1-t_2| \\
&: = k|t_1-t_2|
\end{aligned}
$$

Alors les fonctions de $\mathcal{H}$ sont k-lipschitzienne, et par suite, l'ensemble $\mathcal{H}$ est équicontinu sur $[0,1]$ .Par le Théorème d'**Arzelé-Ascolie** 1.3.1, on obtient que l'ensemble $\mathcal{H}$ est relativement compact.

Par conséquent A est compact.

Par le Théorème du point fixe de **Leray Schauder** 1.3.2, nous concluons que A a un point fixe, ce qui est la solution du problème $(2.1),(2.2)$. □

Remarque 2.3.1. *Il est clair que les points fixes de l'opérateur A sont les solutions de l'équation* (2.1).

2.4 Unicité de la solution

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de l'unicité de solution dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Théorème 2.4.1. *Supposons que :*

(H_1) *La fonction $a:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue.*

(H_2) *La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est k-lipschitzienne, telle que*

$$k\,\|a\|_\infty \frac{2+\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}<1. \tag{2.13}$$

Alors, le problème $(2.1),(2.2)$ *admet une solution unique sur* $[0,1]$.

Démonstration.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur A sont les solutions du problème $(2.1),(2.2)$.

Pour montrer que A admet un point fixe unique, il suffit de prouver que A est une contraction.

En effet, soient $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|Au_1(t) - Au_2(t)| &\leq \int_0^t (t-s)\,|a(s)|\,|f(u_1(s)) - f(u_2(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)\,|a(s)|\,|f(u_1(s)) - f(u_2(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)\,|a(s)|\,|f(u_1(s)) - f(u_2(s))|\,ds \\
&\leq k\,\|a\|_\infty \frac{2+\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |u_1(s) - u_2(s)|\,ds \\
&\leq k\,\|a\|_\infty \frac{2+\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}\,\|u_1 - u_2\|_\infty .
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\|Au_1 - Au_2\| \leq k\,\|a\|_\infty \frac{2+\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}\,\|u_1 - u_2\|_\infty .$$

Donc de (2.13) on peut déduire que A est une contraction et d'après le **Théorème de Banach** 1.3.3**,** le problème (2.1), (2.2) à une seule solution qui est le point fixe de A. □

2.5 Existence d'au moins une solution positive

Dans cette section, on établit la positivité de la solution du problème (2.1), (2.2) qui est basé sur le Théorème de point fixe de **Krasnoselskii Guo** .

Lemme 2.5.1. *L'opérateur $A : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est complètement continu.*

Démonstration.
Par la preuve du théorème 2.3.1, on conclut que l'opérateur A est continu.
Montrons que A envoie tous ensembles bornés en ensembles bornés dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
En effet, il suffit de montrer pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tels que

$$\text{pour tout } u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \|Au\|_\infty \leq \delta.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$|Au(t)| \leq \|a\|_\infty \left(\frac{2+(1-\eta)\alpha}{1-\alpha\eta}\right)\int_0^1 |f(u(s))|ds.$$

Ainsi, $[-\varepsilon,\varepsilon]$ est un ensemble compact et f étant continue sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$, nous pouvons déduire l'existence d'une constante $M > 0$, telle que

$$|f(u)| \leq M, \qquad \text{pour tout } u \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

D'autre part, on a $\|u\|_\infty \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $|u(t)| \leq \varepsilon$, pour tout $t \in [0,1]$, on conclut que

$$|Au(t)| \leq \|a\|_\infty \left(\frac{2 + (1-\eta)\alpha}{1 - \alpha\eta} \right) M := \delta, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Donc $\|Au\|_\infty \leq \delta$, d'où A est borné.

□

Théorème 2.5.1. *[7] Supposons que :*

(H_1) *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue, telle que*

$$f_0 := \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u} = 0 \qquad \textit{et} \qquad f_\infty := \lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty.$$

(H_2) *La fonction $a : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue et il existe $t_0 \in [\eta, 1]$, tel que $a(t_0) > 0$.*

Alors le problème $(2.1), (2.2)$ *admet au moins une solution positive sur l'intervalle* $[0,1]$.

Démonstration.
Il est clair que les points fixes de l'opérateur A sont les solutions du problème $(2.1), (2.2)$.
Montrons que A admet un point fixe $u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^+)$.
La démonstration est basée sur le Théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii dans un cône, pour cela on définit le cône K par :

$$K := \left\{ u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \min_{\eta \leq t \leq 1} u(t) \geq \gamma \|u\| \text{ et } u(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [0,1] \right\}. \tag{2.14}$$

Il est facile de vérifier que K est un cône ordonné sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
Par les hypothèses (H_1) et (H_2), on a $a(t) f(u(t)) \geq 0$, pour tout $t \in [0,1]$, par les lemmes 2.2.2 et 2.2.3, on conclut que

$$\min_{\eta \leq t \leq 1} Au(t) \geq \gamma \|Au\| \qquad \text{et} \qquad Au(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Par conséquent, $A(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})) \subset K$.
Ainsi, on peut définir $A : K \longrightarrow K$, par le théorème 2.3.1, on conclut que l'opérateur

$A : K \longrightarrow K$ est complètement continu.

D'autre part, on a $f_0 = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tel que

$$\frac{\varepsilon}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \leq 1, \tag{2.15}$$

il existe $H_1 > 0$, tel que

$$0 \leq u \leq H_1 \qquad \text{implique} \qquad f(u) \leq \varepsilon u. \tag{2.16}$$

On pose

$$\Omega_1 := B\left(0, H_1\right) = \left\{u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \|u\| < H_1\right\}.$$

Soit $u \in K \cap \partial\Omega_1$, c'est-à-dire $u \in K$ et $\|u\|_\infty = H_1$, alors

$$0 \leq u\left(t\right) \leq H_1, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1]. \tag{2.17}$$

D'après la définition de l'opérateur A, on a

$$Au(t) \leq \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Par (2.16) et (2.17), on trouve

$$\begin{aligned} Au(t) &\leq \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\varepsilon u(s)ds \\ &\leq \frac{\varepsilon\left\|u\right\|_\infty}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds. \end{aligned}$$

Par (2.15), on a

$$0 \leq Au(t) \leq \left\|u\right\|_\infty, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

D'où $\|Au\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

De plus, on a $f_\infty = \infty$, alors pour tout $\rho > 0$, tel que

$$\rho\frac{\eta\gamma}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1 (1-s)a(s)ds > 1, \tag{2.18}$$

il existe $\hat{H}_2 > 0$, tel que

$$u \geq \hat{H}_2 \qquad \text{implique} \qquad f(u) \geq \rho u.$$

On pose $H_2 := \max\left\{2H_1, \dfrac{\hat{H}_2}{\gamma}\right\}$ et $\Omega_2 := B\left(0, H_2\right) = \{u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \|u\|_\infty < H_2\}$.
Soit $u \in K \cap \partial\Omega_2$, c'est-à-dire $u \in K$ et $\|u\|_\infty = H_2$, alors

$$u\left(t\right) \geq \min_{\eta \leq t \leq 1} u(t) \geq \gamma \left\|u\right\|_\infty \geq \hat{H}_2, \qquad \text{pour } t \in \left[\eta, 1\right],$$

ce qui implique

$$f\left(u\left(t\right)\right) \geq \rho u\left(t\right) \geq \rho \hat{H}_2, \qquad \text{pour } t \in \left[\eta, 1\right]. \tag{2.19}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
Au(\eta) &= -\int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(u(s))ds - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(u(s))ds \\
&\quad + \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\
&= -\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\
&= -\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta \eta a(s)f(u(s))ds + \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta s a(s)f(u(s))ds \\
&\quad + \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1 a(s)f(u(s))ds - \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1 s a(s)f(u(s))ds \\
&= \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1 a(s)f(u(s))ds + \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta s a(s)f(u(s))ds \\
&\quad - \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1 s a(s)f(u(s))ds.
\end{aligned}$$

Comme $\eta > 0$, alors

$$\begin{aligned}
Au(\eta) &\geq \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1 a(s)f(u(s))ds - \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1 s a(s)f(u(s))ds \\
&= \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Par (2.19) et (2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
Au(\eta) &\geq \rho\frac{\eta\hat{H}_2}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \\
&\geq \frac{\hat{H}_2}{\gamma} \geq H_2 = \left\|u\right\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\left\|Au\right\|_\infty \geq Au(\eta) \geq \left\|u\right\|_\infty.$$

D'où $\|Au\|_\infty \geq \|u\|_\infty$, pour $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

D'autre part, on a

$$0 \in \Omega_1, \qquad \overline{\Omega_1} = \overline{B}\,(0, H_1) \subset B\,(0, H_2) = \Omega_2.$$

Par le Théorème du point fixe de **Krasnoselskii Guo** 1.3.4, nous concluons que A a un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.
Si $u \in K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$, alors $u\,(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0, 1]$ et $H_1 \leq \|u\|_\infty \leq H_2$.
Par conséquent, le problème (2.1) , (2.2) admet au moins une solution positive. □

Exemple 2.5.1. *Considérons le problem de l'équation différentielle suivant :*

$$\begin{cases} u''\,(t) + t^2 u^2 = 0, & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ \quad u\,(0) = 0, & u\,(1) = \frac{1}{2} u\left(\frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{2.21}$$

Ici, $a\,(t) = t^2$ *est continue sur* $[0, 1]$, $f\,(u) = u^2$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, $f\,(u) \geq 0$, *pour tout* $u \in \mathbb{R}^+$ *et* $\alpha = \eta = \frac{1}{2}$.
D'autre part, on a

$$\alpha\eta = \frac{1}{4} \in (0, 1)\,, \; f_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad f_\infty = +\infty.$$

Du théorème 2.5.1, on déduit que le problème (2.21) *admet une solution positive sur* $[0, 1]$.

Théorème 2.5.2. *[7] Supposons que :*

(H_1) *La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *continue, tel que* $f_0 = +\infty$ *et* $f_\infty = +\infty$.

(H_2) *La fonction* $a : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ *continue et il existe* $t_0 \in [\eta, 1]$, *tel que* $a(t_0) > 0$.

Alors le problème (2.1) , (2.2) *admet au moins une solution positive sur l'intervalle* $[0, 1]$.

Démonstration.
Par le théorème, on a que l'opérateur $A : K \longrightarrow K$ est complètement continu, avec K est un cône ordonné sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ définit dans (2.14).
D'autre part, on a $f_0 = \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tel que

$$\varepsilon \frac{\eta\gamma}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 (1 - s) a(s) ds \geq 1, \tag{2.22}$$

il existe $H_3 > 0$, tel que

$$0 \leq u \leq H_3 \qquad \text{implique} \qquad f\left(u\right) \geq \varepsilon u.$$

On pose

$$\Omega_3 =: B\left(0, H_3\right) = \left\{u \in \mathcal{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right) : \|u\| < H_3\right\}.$$

Soit $u \in K \cap \partial\Omega_3$, c'est-à-dire $u \in K$ et $\|u\|_\infty = H_3$, alors

$$u\left(t\right) \geq \min_{\eta \leq t \leq 1} u(t) \geq \gamma \left\|u\right\|_\infty \geq \gamma H_3, \qquad \text{pour } t \in \left[\eta, 1\right],$$

ce qui implique

$$f\left(u\left(t\right)\right) \geq \varepsilon u\left(t\right) \geq \varepsilon\gamma \left\|u\right\|_\infty, \qquad \text{pour } t \in \left[\eta, 1\right]. \tag{2.23}$$

Par (2.19) et (2.23), on a

$$\begin{aligned} Au(\eta) &\geq \frac{\eta}{1-\alpha\eta} \int_\eta^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \frac{\eta\varepsilon \left\|u\right\|_\infty}{1-\alpha\eta} \int_\eta^1 (1-s)a\left(s\right)ds. \end{aligned}$$

Par (2.22), on obtient

$$\left\|Au\right\|_\infty \geq Au(\eta) \geq \left\|u\right\|_\infty.$$

D'où $\left\|Au\right\|_\infty \geq \left\|u\right\|_\infty$, pour $u \in K \cap \partial\Omega_3$.

De plus, on a $f_\infty = 0$, alors pour tout $\rho > 0$, tel que

$$\frac{\rho}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)a(s)ds \leq 1,$$

il existe $\hat{H}_4 > 0$, tel que

$$u \geq \hat{H}_4 \qquad \text{implique} \qquad f(u) \leq \rho u.$$

On considère deux cas :

1^{er} **cas :** On suppose que f est bornée sur $[0, \infty)$, c'est-à-dire, il existe $N > 0$, tel que

$$0 \leq f\left(u\right) \leq N, \qquad \text{pour tout } u \in [0, \infty).$$

Dans ce cas, on choisit

$$H_4 = \max\left\{2H_3, \frac{N}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds\right\}.$$

Soit $u \in K$ et $\|u\|_\infty = H_4$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} Au(t) &\leq \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \frac{N}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &\leq H_4, \end{aligned}$$

donc $\|Au\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, pour tout $u \in K$ et $\|u\|_\infty = H_4$.

$2^{éme}$ **cas :** Si f n'est pas bornée sur $[0, \infty)$, dans ce cas, on choisit H_4, tel que

$$H_4 > \max\left\{2H_3, \frac{\hat{H}_4}{\gamma}\right\},$$

$$f(u) \leq f(H_4), \qquad \text{pour tout } 0 < u \leq H_4.$$

Pour tout $u \in K$ et $\|u\|_\infty = H_4$, on a

$$\begin{aligned} Au(t) &\leq \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \frac{tf(H_4)}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &\leq \frac{\rho H_4}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &\leq H_4. \end{aligned}$$

donc $\|Au\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, pour tout $u \in K$ et $\|u\|_\infty = H_4$.

Soit

$$\Omega_4 := B\left(0, H_4\right) = \left\{u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \|u\| < H_4\right\}.$$

Par suite, dans les deux cas, on a $\|Au\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_3$.

D'autre part, on a

$$0 \in \Omega_3, \qquad \overline{\Omega_3} = \overline{B}\,(0, H_3) \subset B\,(0, H_4) = \Omega_4.$$

Par le Théorème du point fixe de **Krasnoselskii Guo** 1.3.4, nous concluons que A a un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.
Si $u \in K \cap (\overline{\Omega}_4 \backslash \Omega_3)$, alors $u\,(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0,1]$ et $H_3 \leq \|u\|_\infty \leq H_4$.
Par conséquent, le problème $(2.1)\,,(2.2)$ admet au moins une solution positive. □

Exemple 2.5.2. *Considérons le problem de l'équation différentielle suivant :*

$$\begin{cases} u''\,(t) + \sqrt{t}\sqrt{|u|} = 0, \quad \textit{pour tout } t \in [0,1] \\ \qquad u\,(0) = 0, \qquad u\,(1) = 2u\left(\frac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{2.24}$$

Ici, $a\,(t) = \sqrt{t}$ *est continue sur* $[0,1]$, $f\,(u) = \sqrt{|u|}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, $f\,(u) \geq 0$, *pour tout* $u \in \mathbb{R}^+$ *et* $\alpha = 2, \eta = \dfrac{1}{3}$.
D'autre part, on a

$$\alpha\eta = \frac{2}{3} \in (0,1)\,,\ f_0 = +\infty \qquad \textit{et} \qquad f_\infty = 0.$$

Du théorème 2.5.2, on déduit que le problème (2.24) *admet une solution positive sur* $[0,1]$.

Corollaire 2.5.1. *Supposons que :*

(H_1) *La fonction* $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue et il existe* $t_0 \in [\eta, 1]$, *tels que* $a(t_0) > 0$.

(H_2) *La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *est k-lipschitzienne, telle que* $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$ *et* (2.13) *est vérifiée.*

Alors, le problème $(2.1)\,,(2.2)$ *admet une unique solution positive sur* $[0,1]$.

Corollaire 2.5.2. *Supposons que :*

(H_1) *La fonction* $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue et il existe* $t_0 \in [\eta, 1]$, *tels que* $a(t_0) > 0$.

(H_2) *La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *est k-lipschitzienne, telle que* $f_0 = \infty$, $f_\infty = 0$ *et* (2.13) *est vérifiée.*

Alors, le problème $(2.1)\,,(2.2)$ *admet une unique solution positive sur* $[0,1]$.

Chapitre 3

Existence des solutions positives pour une équation non linéaire d'ordre deux

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites non linèaires à trois points de second ordre donnè par :

$$u''(t) + h(t)f(t, u(t)) = 0, \text{ pour tout } t \in]a, c[\tag{3.1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(a) = \alpha u(b) + \delta u'(a), \qquad \beta u(c) + \gamma u'(c) = 0 \tag{3.2}$$

où $\beta, \gamma, \delta \geq 0$ avec $\beta + \gamma > 0$, $0 < \alpha < \dfrac{c-a}{c-b}$ et $b \in]a, c[$.
On impose les conditions suivantes :

(C_1) $h \in \mathcal{C}([a, c], \mathbb{R}^+)$ tel qu'il existe $t_0 \in (a, b) : h(t_0) > 0$,

(C_2) La fonction $f : [a, c] \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ est continue.

Nous introduisons quelques conditions suffisantes pour montrer l'existence de solutions positives du problème aux limites. Notre approche est basée sur le Théorèmes de point fixe de d'Avery-Peterson 1.3.5.

3.2 Lemmes fondamentaux

Dans cette section, on établit la positivité de la solution du problème (3.1)-(3.2), pour cela nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Notation 3.2.1. *Pour la simplification, on note*

$$d := \gamma(1-\alpha) + \beta[(c-a) - \alpha(c-b) + \delta].$$

Lemme 3.2.1. *[3] Si $d \neq 0$, pour $y \in \mathcal{C}([a,c], \mathbb{R})$, l'unique solution u du problème linéaire suivant*

$$\begin{cases} u''(t) + y(t) = 0, & \text{pour tout } t \in]a, c[, \\ u(a) = \alpha u(b) + \delta u'(a), & \beta u(c) + \gamma u'(c) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) \quad = \quad & \frac{1}{d}(\gamma + \beta(c-t)) \left[\int_a^c (s-a+\delta) y(s) ds - \alpha \int_b^c (s-b) y(s) ds \right] \\ & - \int_t^c (s-t) y(s) ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Démonstration.
Soit u la fonction définie comme dans (3.4). Alors u est deux fois dérivable sur (a, c) et on a

$$u'(t) = -\frac{\beta}{d} \left[\int_a^c (s-a+\delta) y(s) ds - \alpha \int_b^c (s-b) y(s) ds \right] + \int_t^c y(s) ds, \quad \text{pour tout } t \in (a, c).$$

La dérivée seconde de u est donné par

$$u''(t) = -y(t), \qquad \text{pour tout } t \in (a, c).$$

D'autre part, on a les conditions aux limites du problème (3.3) sont vérifiées.
Donc la fonction u qui est donnèe dans (3.4) est une solution de (3.3).

□

Lemme 3.2.2. *[3] Si $d > 0$ et $y \in \mathcal{C}([a,c], \mathbb{R}^+)$, alors la solution du problème (3.4) satisfaite*

$$u(t) \geq 0, \qquad \text{pour tout } t \in [a, c].$$

Démonstration.

Par (3.4) , on a $u''(t) = -y(t) \leq 0$, pour tout $t \in [a, c]$, alors la fonction u est concave sur $[a, c]$.

Montrons que $u\,(c) \geq 0$, on distingue deux cas :

Si $0 < \alpha \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} u(c) &= \frac{\gamma}{d} \left[\int_a^c (s - a + \delta) y(s) ds - \alpha \int_b^c (s - b) y(s) ds \right] \\ &\geq \frac{\gamma}{d} \left[\int_b^c (s - b + \delta) y(s) ds - \alpha \int_b^c (s - b) y(s) ds \right] \\ &\geq \frac{\gamma}{d} \left[(1 - \alpha) \int_b^c (s - b) y(s) ds + \delta \int_b^c y(s) ds \right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Si $1 < \alpha < \dfrac{c - a}{c - b}$, on a

$$\begin{aligned} u(c) &= \frac{\gamma}{d} \left[\int_a^c (s - a + \delta) y(s) ds - \alpha \int_b^c (s - b) y(s) ds \right] \\ &= \frac{\gamma}{d} \left[\int_a^b (s - a + \delta) y(s) ds + \int_b^c (s - a - \alpha(s - b) + \delta) y(s) ds \right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Montrons que $u\,(a) \geq 0$, on a

$$
\begin{aligned}
u(a) &= \frac{1}{d}(\gamma+\beta(c-a))\left[\int_a^c (s-a+\delta)\, y(s)\, ds - \alpha\int_b^c (s-b)\, y(s)\, d\right] \\
&\quad -\frac{d}{d}\int_a^s (s-a)\, y(s)\, ds \\
&= \frac{1}{d}(\gamma+\beta(c-a)-d)\int_a^c (s-a)\, y(s)\, ds + \frac{\delta}{d}(\gamma+\beta(c-a))\int_a^c y(s)\, ds \\
&\quad -\frac{\alpha}{d}(\gamma+\beta(c-a))\int_b^c (s-b)\, y(s)\, ds \\
&= \frac{\alpha}{d}[\gamma+\beta(c-b)]\int_a^c (s-a)\, y(s)\, ds - \frac{\beta\delta}{d}\int_a^c (s-a)\, y(s) \\
&\quad +\frac{\delta}{d}(\gamma+\beta(c-a))\int_a^c y(s)\, ds - \frac{\alpha}{d}(\gamma+\beta(c-a))\int_b^c (s-b)\, y(s)\, ds \\
&= \frac{\alpha}{d}[\gamma+\beta(c-b)]\int_a^b (s-a)\, y(s)\, ds + \frac{\alpha}{d}[\gamma+\beta(c-b)]\int_b^c (s-a)\, y(s)\, ds \\
&\quad -\frac{\beta\delta}{d}\int_a^c (s-a)\, y(s)\, ds + \frac{\delta}{d}(\gamma+\beta(c-a))\int_a^c y(s)\, ds - \frac{\alpha}{d}(\gamma+\beta(c-a))\int_b^c (s-b)\, y(s)\, ds \\
&= \frac{\alpha}{d}[\gamma+\beta(c-b)]\int_a^b (s-a)\, y(s)\, ds + \frac{\alpha}{d}[\gamma+\beta(c-b)](b-a)\int_b^c y(s)\, ds \\
&\quad +\frac{\delta}{d}\int_a^c (\gamma+\beta(c-s))\, y(s)\, ds \geq 0.
\end{aligned}
$$

Finalement, comme $u(a) \geq 0$ et $u(c) \geq 0$, alors par la définition de la fonction concave, on trouve

$$u(t) \geq \lambda u(a) + (1-\lambda)\, u(c) \geq 0, \qquad \text{pour } t \in [a,c].$$

$\square$

Lemme 3.2.3. *[3] Si $y \in \mathcal{C}([a,c],\mathbb{R}^+)$ et $d>0$, alors la solution du problème (3.4) satisfaite*

$$\inf_{t\in[a,b]} u(t) \geq k\,\|u\|_\infty,$$

où

$$k := \min\left\{\frac{\alpha(c-b)}{c-a}, \frac{c-b}{c-a}, \frac{\alpha(b-a)}{c-a-\alpha(c-b)}\right\} \in (0,1). \tag{3.5}$$

Démonstration.

Par (3.4), on a $u''(t) = -y(t) \leq 0$, pour tout $t \in [a,c]$, alors la fonction u est concave sur $[a,b]$.

Si $t \in [a,b]$, alors

$$\begin{array}{rcl} u\left(t\right) & \geq & \lambda u(a)+\left(1-\lambda\right)u\left(c\right) \\ & \geq & \lambda \min\{u(a),u(b)\}+\left(1-\lambda\right)\min\{u(a),u(b)\} \\ & = & \min\{u(a),u(b)\}. \end{array}$$

Avec $\lambda \in [0,1]$, on conclut que

$$\min_{t\in[a,b]} u(t)=\min\{u(a),u(b)\} \tag{3.6}$$

Pour tout $\tau \in [a,c)$, on pose

$$\eta(t):=u(t)-\left(\frac{c-t}{c-\tau}\right)u(\tau), \qquad \text{pour tout } t\in[a,c),$$

Alors

$$\eta(\tau)=0, \quad \eta(c)=u(c)\geq 0, \quad \text{et} \quad \eta''(t)=u''(t)\leq 0 \quad \text{sur } [\tau,c).$$

Par le lemme 1.2.1, on a

$$\frac{u(t)}{c-t}\geq\frac{u(\tau)}{c-\tau}, \qquad \text{pour tout } t\in[\tau,c). \tag{3.7}$$

La fonction u est continue sur le compact $[a,c]$, alors le sup est atteint, c'est-à-dire, il existe $\tau \in [a,c]$, tel que

$$u(\tau)=\sup_{t\in[a,c]} u\left(t\right)=\left\|u\right\|_{\infty}.$$

On distingue deux cas :

1^{er} **cas :** Si $a\leq\tau\leq b$ et $u(a)\leq u(b)$. Par (3.7), on a

$$\frac{u\left(b\right)}{c-b}\geq\frac{u(\tau)}{c-\tau},$$

alors,

$$\frac{\alpha u(b)}{c-b}\geq\frac{\alpha u(\tau)}{c-\tau}\geq\frac{\alpha u(\tau)}{c-a},$$

Par la condition aux limite en b, on conclut que

$$\alpha u(b) = u(a) - \delta u'(a) \geq \left(\frac{c-b}{c-a}\right) \alpha \left\|u\right\|_\infty .$$

Puisque $u'(a) \geq 0$, alors

$$\min_{t\in[a,b]} u(t) = u(a) \geq \alpha \left(\frac{c-b}{c-a}\right) \left\|u\right\|_\infty \geq k \left\|u\right\|_\infty .$$

$2^{ème}$ **cas :** Si $a \leq \tau \leq b$ et $u(b) \leq u(a)$. Par (3.7), on a

$$u(b) \geq \left(\frac{c-b}{c-\tau}\right) u(\tau) \geq \left(\frac{c-b}{c-a}\right) u(\tau),$$

donc

$$\min_{t\in[a,b]} u(t) = u(b) \geq \left(\frac{c-b}{c-a}\right) \left\|u\right\|_\infty \geq k \left\|u\right\|_\infty .$$

Si $b < \tau < c$, alors $u(a) = \min\limits_{t\in[a,b]} u(t)$. On a $a < b < \tau$, alors par le lemme 1.2.1, on obtient que

$$\frac{u(\tau) - u\left(a\right)}{\tau - a} \leq \frac{u(b) - u(a)}{b-a},$$

alors

$$\begin{aligned}
u(\tau) &\leq u(a) + \left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right)(\tau - a) \\
&\leq u(a) + \left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right)(c - a) \\
&= \frac{\left[c-a-\alpha(c-b)\right]u(a) - \delta(c-a)u'(a)}{\alpha(b-a)} \\
&\leq \frac{\left[c-a-\alpha(c-b)\right]}{\alpha(b-a)} u(a),
\end{aligned}$$

donc

$$\min_{t\in[a,b]} u(t) = u\left(a\right) \geq \frac{\alpha(b-a)}{\left[c-a-\alpha(c-b)\right]} u(\tau).$$

Par consèquent,

$$\min_{t\in[a,b]} u(t) \geq \frac{\alpha(b-a)}{c-a-\alpha(c-b)} \left\|u\right\|_\infty \geq k \left\|u\right\|_\infty .$$

□

3.3 Existence d'au moins deux solutions positives

Soit $\mathcal{C}([a,c],\mathbb{R})$ l'espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{t\in[a,c]} |u(t)|.$$

Définissons l'opérateur $A : \mathcal{C}([a,c],\mathbb{R}) \to ([a,c],\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} Au(t) := & \frac{1}{d}(\gamma+\beta(c-t))\left[\int_a^c (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds - \alpha\int_b^c (s-b)h(s)f(s,u(s))ds\right] \\ & - \int_t^c (s-t)h(s)f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.1. *Les points fixes de l'opérateur A sont les solutions du problème* $(3.1),(3.2)$.

Lemme 3.3.2. *L'opérateur $A : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est complètement continu.*

Démonstration.

La preuve est analogue à la preuve du lemme 2.5.1. □

Théorème 3.3.1. *[3] Soit $d > 0$. On suppose qu'il existe des nombres positifs, r, p, q, tels que $r > q > p > 0$ et la fonction f est vèrifiée les conditions suivantes*

1) $f(s,u) > pM$, *pour* $s \in [a,b]$ *et* $u \in [kp,p]$,
2) $f(s,u) < qm$, *pour* $s \in [a,c]$ *et* $u \in \left[0,\frac{q}{k}\right]$,
3) $f(s,u) > rM$, *pour* $s \in [a,b]$ *et* $u \in \left[r,\frac{r}{k}\right]$.

Où

$$M := \frac{d}{\min\{\alpha,1\}(\gamma+\beta(c-b))\int_a^b (s-a+\delta)h(s)ds}. \tag{3.8}$$

$$m := \frac{d}{(\gamma+\beta(c-b))\int_a^c (s-a+\delta)h(s)ds}. \tag{3.9}$$

Alors le problème $(3.1),(3.2)$ *admet au moins deux solutions positives u_1 et u_2 telles que*

$$p < \max_{t\in[a,c]} u_1(t) \qquad \text{avec} \qquad \max_{t\in[b,c]} u_1(t) < q, \tag{3.10}$$

$$q < \max_{t\in[b,c]} u_2(t) \qquad \text{avec} \qquad \min_{t\in[a,b]} u_2(t) < r. \tag{3.11}$$

Démonstration.

La démonstration est basée sur le Théorème du point fixe d'**Avery-Henderson** dans un cône, pour cela on définit le cône K par :

$$K = \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{C}\left([a,c], \mathbb{R}\right) : u(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [a,c], \\ u \text{ est concave} \quad \text{et} \quad \min\limits_{t\in[a,b]} u(t) \geq k \left\|u\right\|_{\infty}. \end{array} \right\}. \tag{3.12}$$

où k donnè par (3.5) .

Il est clair que K est un cône ordonné sur $\mathcal{C}([a,c],\mathbb{R})$.

Par les hypothèses (C_1) et (C_2), on a $h(t) f(t, u(t)) \geq 0$, pour tout $t \in [a,c]$, par les lemmes 3.2.2 et 3.2.3, on conclut que

$$\min_{t\in[a,b]} Au(t) \geq k\|Au\| \qquad \text{et} \qquad Au(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [a,c].$$

Par conséquent, $A\left(\mathcal{C}([a,c],\mathbb{R})\right) \subset K$.

Ainsi, on peut définir $A : K \longrightarrow K$. Par le lemme 3.3.2, on conclut que l'opérateur $A : K \longrightarrow K$ est complètement continu.

Soient $\phi, \theta, \eta : K \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\phi(u) := \min_{t\in[a,b]} u(t), \qquad \theta(u) := \max_{t\in[b,c]} u(t), \qquad \eta(u) := \max_{t\in[a,c]} u(t).$$

Vérifions maintenant que les conditions de ϕ, θ et η sont satisfaites :

Pour $u \in K$, on a $u(t) \geq 0$, pour tout $t \in [a,c]$, alors

$$\phi(u) \geq 0, \qquad \theta(u) \geq 0, \qquad \theta(0) = 0 \qquad \eta(u) \geq 0.$$

Si $u \in K$, on a

$$0 \leq \min_{t\in[a,b]} u(t) \leq \|u\|_{\infty}, \quad 0 \leq \max_{t\in[b,c]} u(t) \leq \|u\|_{\infty} \quad \text{et} \quad 0 \leq \max_{t\in[a,c]} u(t) \leq \|u\|_{\infty}.$$

Donc, pour tout $u, v \in K$,

$$|\phi(u) - \phi(v)| \leq |\|u\|_{\infty} - \|v\|_{\infty}| \leq \|u - v\|_{\infty}.$$

C'est-à-dire ϕ est $1-$lipschitzienne sur K, de même méthode on obtient que η et θ

sont $1-$lipschitzienne sur K.

Par conséquent, les fonctions ϕ, η et θ sont continues sur K.

Pour $u \in K$, on a

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{k} \min_{t\in[a,b]} u(t) = \frac{1}{k}\phi(u).$$

Par la concavitè de u, on a

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{k} \min_{t\in[a,b]} u(t) = \frac{1}{k}\phi(u) \leq \frac{1}{k}\theta(u) \leq \eta(u).$$

D'autre part, pour tout $u \in K$, $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\phi(\lambda u) = \max_{t\in[b,c]}(\lambda u)(t) = \lambda \max_{t\in[b,c]} u(t) = \lambda\phi(u).$$

Soit $u, v \in K$, tel que $u - v \in K$, alors

$$u(t) \geq v\,(t)\,, \qquad \text{pour tout } t \in [a,c]\,,$$

ce qui implique

$$\phi\,(u) \geq \phi\,(v) \qquad \text{et} \qquad \eta\,(u) \geq \eta\,(v)\,.$$

D'où les conditions du théorème 1.3.5 pour les fonctions ϕ, η et θ sont vérifiées

Nous vérifions les conditions du théorème 1.3.5 pour l'opérateur A.

• Montrons que : $K(\eta,p) \neq \emptyset$ et $\eta(Au) > p$, pour $u \in \partial K(\eta,p)$.

Par définition de $K(\eta,p)$, on a

$$K(\eta,p) = \{u \in K : \eta\,(u) < p\} = \left\{u \in K : \max_{t\in[a,c]} u(t) < p\right\}.$$

Puisque $0 \in K$ et $p > 0$, alors $0 \in K(\eta,p)$, cela implique $K(\eta,p) \neq \emptyset$.

Si $u \in \partial K(\eta,p)$,alors

$$\eta\,(u) = \max_{t\in[a,c]} u(t) = \|u\|_\infty = p.$$

Donc, pour tout $t \in [a,b]$

$$kp = k\,\|u\|_\infty \leq \min_{t\in[a,b]} u(t) \leq u\,(t) \leq \|u\| = p. \tag{3.13}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\eta(Au) &= \max_{t\in[a,c]} Au(t) \\
&\geq Au(b) \\
&= \frac{1}{d}(\gamma+\beta(c-b)) \left[\int_a^c (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds - \alpha \int_b^c (s-b)h(s)f(s,u(s))ds\right] \\
&- \int_b^c (s-b)h(s)f(s,u(s))ds \\
&= \frac{\gamma+\beta(c-b)}{d} \int_a^b (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds \\
&+ \frac{b-a+\delta}{d} \int_b^c (\gamma+\beta(c-s))h(s)f(s,u(s))ds \\
&\geq \frac{\gamma+\beta(c-b)}{d} \int_a^b (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds.
\end{aligned}
$$

Par (3.13) et l'hypothèse (1) du théorème, on a

$$\eta(Au) \geq pM\frac{\gamma+\beta(c-b)}{d} \int_a^b (s-a+\delta)h(s)ds.$$

Par (3.8) , on trouve que

$$\eta(Au) \geq p \min\{1,\alpha\} \geq p.$$

• Montrons que : $\theta(Au) < q$, pour tout $u \in \partial K(\theta, q)$.

Si $u \in \partial K(\theta, q)$, alors $\theta(u) = q$, c'est-à-dire

$$0 \leq u(t) \leq \max_{t\in[b,c]} u(t) = q.$$

Donc, pour tout $t \in [a, c]$,

$$0 \leq u(t) \leq \|u\| \leq \frac{1}{k} \max_{t\in[b,c]} u(t) = \frac{q}{k}. \tag{3.14}$$

Pour tout $t \in [a, c]$, on a

$$Au(t) \leq \frac{1}{d}(\gamma+\beta(c-t)) \int_a^c (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds.$$

Donc

$$\begin{aligned}\theta(Au) &= \max_{t\in[b,c]} Au(t)\\ &\leq \max_{t\in[b,c]} \frac{(\gamma+\beta(c-t))}{d}\int_a^c (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds\\ &\leq \frac{(\gamma+\beta(c-b))}{d}\int_a^c (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds.\end{aligned}$$

Par (3.14) , (3.9) et l'hypothèse (2) du théorème, on a

$$\begin{aligned}\theta(Au) &\leq \frac{qm}{d}(\gamma+\beta(c-b))\int_a^c (s-a+\delta)h(s)ds\\ &= q.\end{aligned}$$

• Montrons que : $\phi(Au) > r$, pour tout $u \in \partial K(\phi, r)$.

Si $u \in \partial K(\phi, r)$, alors $\phi(u) = \min_{t\in[a,b]} u(t) = r$, donc

$$r = \min_{t\in[a,b]} u(t) \leq \|u\|_\infty \leq \frac{1}{k}\min_{t\in[a,b]} u(t) = \frac{r}{k}. \tag{3.15}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}Au(b) &= \frac{\gamma+\beta(c-b)}{d}\int_a^b (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds\\ &\quad+\frac{b-a+\delta}{d}\int_b^c (\gamma+\beta(c-s))h(s)f(s,u(s))ds.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Au(a) &= \alpha\left[\frac{\gamma+\beta(c-b)}{d}\int_a^b (s-a)h(s)f(s,u(s))ds\right.\\ &\quad\left.+\frac{b-a}{d}\int_b^c (\gamma+\beta(c-s))h(s)f(s,u(s))ds\right]\\ &\quad+\frac{\delta}{d}\int_a^c (\gamma+\beta(c-s))h(s)f(s,u(s))ds.\end{aligned}$$

Par la concavitè de la fonction u, on a

$$\min_{t\in[a,b]} Au(t) = \min\{Au(a), Au(b)\}.$$

Si $\alpha \geq 1$, alors $Au(a) \geq Au(b)$.

Si $0 < \alpha < 1$, alors $Au(a) \geq \alpha Au(b)$. Donc

$$\min_{t\in[a,b]} Au(t) \geq \min\{\alpha, 1\}Au(b).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\phi(Au) &= \min_{t\in[a,b]} Au(t) \\
&\geq \min\{\alpha, 1\}Au(b) \\
&\geq \frac{1}{d}\min\{\alpha, 1\}\left(\gamma + \beta(c-b)\right)\int_a^b (s-a+\delta)h(s)f(s,u(s))ds.
\end{aligned}$$

Par (3.8), (3.15) et l'hypothèse (3) du théorème, on a

$$\begin{aligned}
\phi(Au) &\geq \frac{rM}{d}\min\{\alpha, 1\}\left(\gamma + \beta(c-b)\right)\int_a^b (s-a+\delta)h(s)ds. \\
&\geq r.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les hypothèses du **Théorème d'Avery-Henderson** 1.3.5 sont vérifiées.

Donc, il existe au moins deux points fixes positifs u_1 et u_2 de A sur $\overline{K(\phi, r)}$, tel que

$$p < \eta(u_1) \qquad \text{avec} \qquad \theta(u_1) < q,$$

$$q < \theta(u_2) \qquad \text{avec} \qquad \phi(u_2) < r.$$

Ce qui implique que le problème (3.1), (3.2) admet deux solutions u_1 et u_2 sont vérifiées (3.10), (3.11). $\square$

Corollaire 3.3.1. *[3] Soit $d > 0$. S'il existe $q > 0$, tel que*

1) $\liminf_{u\to 0^+} \dfrac{f(s,u)}{u} > \dfrac{M}{k}$, *pour $s \in [a,b]$,*

2) $f(s,u) < qm$, *pour $s \in [a,c]$ et $u \in \left[0, \dfrac{q}{k}\right]$,*

3) $\liminf_{u\to +\infty} \dfrac{f(s,u)}{u} > M$, *pour $s \in [a,b]$,*

Alors le problème (3.1), (3.2) admet au moins deux solutions positives u_1 et u_2

telles que

$$p < \max_{t\in[a,c]} u_1(t) \qquad \textit{avec} \qquad \max_{t\in[b,c]} u_1(t) < q,$$

$$q < \max_{t\in[b,c]} u_2(t) \qquad \textit{avec} \qquad \min_{t\in[a,b]} u_2(t) < r.$$

Démonstration.

Par l'hypothèse (1) de corollaire 3.3.1, alors il existe $p > 0$, tel que

$$\frac{f(s,u)}{u} > \frac{M}{k}, \qquad \text{pour tout } u \in (0,p], \qquad s \in [a,b].$$

Alors

$$f(s,u) > \frac{M}{k}u \geq pM, \quad \text{pour } u \in [kp,p], \quad s \in [a,b],$$

donc la condition (1) du théorème 3.3.1 est vérifiée.

On pose

$$f_\infty := \liminf_{u\to\infty}\left(\min_{s\in[a,b]} \frac{f(s,u)}{u}\right),$$

Soit $\eta \in (M, f_\infty)$, alors il existe $r' > q$, tel que

$$\min_{s\in[a,b]} f(s,u) \geq \eta u, \qquad \text{pour } u \in [r',\infty).$$

On pose

$$\nu := \min\left\{\min_{s\in[a,b]} f(s,u) : u \in [0,r']\right\}$$

Soit

$$r > \max\left\{r', \frac{\nu}{\eta - M}\right\}.$$

Alors

$$\min_{s\in[a,b]} f(s,u) \geq \eta u - \nu \geq \eta r - \nu > rM, \quad u \in [r,\infty),$$

donc la condition (3) du théorème 3.3.1 est vérifié.

Du théorème 3.3.1, on déduit que l'équation (3.1) , (3.2) admet au moins deux solutions positives. $\square$

Exemple 3.3.1. *Considérons le problème de l'équation différentielle suivant :*

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda e^u = 0 = 0, & \textit{pour tout } t \in [0,1] \\ u(0) = u\left(\frac{1}{2}\right), & u(1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Avec $\lambda > 0$. *Ici,* $a = 0,\ b = \dfrac{1}{2},\ c = 1,\ \alpha = 1,\ \delta = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0,\ h(t) = 1$ *et* $f(t,u) = \lambda e^{u}$.

Alors $\beta, \gamma, \delta \geq 0,\ \beta + \gamma > 0,\ \dfrac{c-a}{c-b} = 2,\ 0 < \alpha < \dfrac{c-a}{c-b}$.

D'autre part, on a

$$d = \frac{1}{2}, \qquad k = \frac{1}{2} \in (0,1), \qquad M = 8, \qquad m = 2,$$

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f(s,u)}{u} = \lim_{u \to 0^+} \lambda \frac{e^u}{u} = +\infty > \frac{M}{k},\ \textit{pour } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(s,u)}{u} = \lim_{u \to +\infty} \lambda \frac{e^u}{u} = +\infty > M,\ \textit{pour } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

Pour $s \in [0,1]$ *et* $u \in [0, 2q]$, *on a*

$$f(s,u) = \lambda e^{u} \leq \lambda e^{2q}.$$

Si $\lambda e^{2q} < 2q$, *c'ést-à-dire* $\lambda < 2qe^{-2q}$.

Par le corollaire 3.3.1, on déduit que le problème (3.16) *admet deux solutions positives sur* $[0,1]$.

Bibliographie

[1] A. Granas, and J. Dugundji, Fixed point theory. Springer Science & Business Media, (2013).

[2] D. R. Anderson, Nonlinear triple-point problems on time scales, Ele. J. Diff. Equ, 47(2004), pp. $1-12$.

[3] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[4] D. Guo and V. Lakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones, Academic Press, San Diego 1988.

[5] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo, 1985.

[6] M. A. Krasnosel'skii, Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators, Soviet Mathematics, Doklady, 1(1960), pp :$1285-1288$.

[7] R.Ma, Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem, Ele. J. Diff. Equ, No. 34, pp. 1-8, 1998.

[8] R.I. Avery and J. Henderson, Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 8 (2001), pp :$27-36$.

[9] S.Lang, Analyse réelle. Cours. Mathématiques. Inter-Editions, (1977).

Résumé : Dans ce mémoire, nous nous intéressons l'existence et de multiplicité de solutions positives pour les équations différentielles d'ordre deux. L'existence, l'unicité ainsi que la positivité de la solution sont établies via l'alternative non linéaire de Leray- Schauder, le principe de contraction de Banach, le théorème de Guo-Krasnosel.skii et d'Avery-Henderson d'expansion et de compression d'un cône.

Mots clé :
Equations différentielles ordinaires, Problèmes aux limites, Solutions positives, Cône, Points fixes.

Abstarct : In this memory, we focus on the existence and multiplicity of positive solutions to second order differential equations. Uniqueness and the existence of positive solutions are established by using some fixed point theorems notably, Leray-Schauder nonlinear alternative, the Banach contraction principle, Guo-Krasnosel'skii and Avery-Peterson theorms on compression and expansion of cones.

Key words :
Ordinary differential equation, Boundary value problems, Positive solution, Cone, Fixed point.

ملخص : هذه المذكرة تهتم بِوجدَانية وَ ايجَابية الحلول لِلمعَادلَات التفَاضلية مِن الدرجة الثَانية. درَاسة الوجدَانية وَ ايجَابية الحُلول يعتمد علَى نظرية النقطة الصَامدة، كنظرية $Leray - Schauder$ وَ نظرية $Banach$ تعطينَا الوجدَانية و وحدَانية الحَل لِلمعَادلة التفَاضلية علَى التوَالي، امَا نظرية $Guo - Krasnoselskii$ و نظرية $Avery - Henderson$ تعتمدَان علَى المَخروط التي تضمن لنَا ايجَابية حل لِلمعَادلة التفَاضلية.

إلكلمَات المفتَاحية :
المعَادلَات التفَاضلية، مشكلة قيمة الحدود، حلول موجبة، مَخروط، اَلنقطة الصَامدة.