الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية populaire
République algérienne démocratique et
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique

M ÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques.

Domaine : Mathématique et Informatique.

Filière : Mathématiques.

Spécialité : Equations Différentielles et modélisation.

ETUDE D'UN MODELE EPEDIMIOLOGIQUE DU « COVID-19 »

Présenté Par :

M[elle] SERIER Nor houda

Devant le jury composé de :

Dr.BOUKHALFA Fatema (M.C.B) UAT.B.B (Ain Temouchent) Président
Dr.BENTOUT Soufiane (M.C.A) UAT.B.B (Ain Temouchent) Examinateur
Dr.MAMMAR Imane (M.C.B) UAT.B.B (Ain Temouchent) Encadrant

Année Universitaire 2020/2021

Remerciement

Je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et patience pour accomplir ce travail.

Je tiens d'abord a remercier très chaleureusement mon encadrant **M$^{\text{me}}$. MAMMAR Imane** pour le privilège qu'elle m'a fait en acceptant de diriger ce travail, sa gentillesse, sa modestie et sa riche expérience et ses conseils directives tout au long de la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury, **M$^{\text{me}}$. BOUKHALFA Fatema** , d'avoir acceepté de présider le jury, et **M. BENTOUT Soufiane** d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements s'étendent également à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Blhadj Bouchaib Ain Témouchent.

Je remercie aussi mes parents pour leur grand sacrifice et leur dévouement pour mon bonheur, ils m'ont toujours soutenu dans les meilleurs moments comme dans les pires.

Je souhaite enfin, remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicace

A mes très chers parents , source de vie, d'amour et d'affection ,

A mon Frère et mes Soeurs, source de joie et de bonheur,

A celui que j'aime beaucoup Mohamed Ayoub ,

A toute ma famille, source d'espoir et de motivation ,

A tous mes amis, qui m'ont toujours encouragé ,

A tous ceux que j'aime.

SERIER Noor el houda

Sommaire

Introduction Générale

Les modèles mathématiques sont utiles pour comprendre le comportement d'une infection lorsqu'elle pénètre dans une communauté et pour déterminer dans quelles conditions elle sera éliminée ou poursuivie. L'analyse des modèles de ce type peut aider à comprendre le mécanisme de la transmission ainsi que les caractéristiques des maladies, et par conséquent, on peut proposer des stratégies efficaces pour prédire, prévenir, et de maitriser les maladies, ainsi que de protéger la santé de la population. Actuellement, le Covid-19 est une grande préoccupation pour la recherches, les gouvernements et tout le monde en raison du taux élevé de propagation de l'infection et du nombre important de décès qui s'est produit. En décembre 2019, le covid-19 signalé pour la première fois à wuhan, en chine, comme maladie infectieuse causée par un coronavirus nouvellement découvert, le virus qui le cause est principalement transmis par les gouttelettes générées lorsqu'une personne infectée tousse, éternue ou expire. Ces gouttelettes sont trop lourdes pour être suspendues dans l'air et tombent rapidement sur les sols ou les surfaces.

Les cas confirmés de du covid-19 ont atteint près de quatre millions personnes dans 187 pays, et environ 295000 personnes ont perdu la vie à cause de ce virus. Selon les chiffres rassemblés par l'université Johns Hopking, les cas les plus importants se sont produits aux États-Unis. Notant que plus de 77000 décès se sont produits, et c'est le nombre de morts le plus élevé au monde [14]. Les chercheurs ont suivi la propagation du virus, se sont mobilisés pour accélérer les diagnostics innovants et travaillent sur un certain nombre de vaccins pour se protéger contre cette maladie mortelle. Cao et al.[12],[13] ont étudié les caractéristiques cliniques du covid-19 et discuté des résultats à court terme de 18 patients et 102 patients de covid-19 dans des unités de soins intensifs. Le covid-19 est généralement transmis de personne à personne par des gouttelettes respiratoires et un contact, la majorité de la transmission se fait par le biais ces gouttelettes que nous pouvons inhaler par contact, les uns avec les autres [35].

Le virus peut facilement se propager dans des endroits denses. la distanciation sociale ou le faible taux de contact font référence aux mesures prises pour augmenter l'espace physique entre les personnes afin de ralentir la propagation du virus. Batista [19] a étudie le modèle de régression de croissance logistique qui est utilisé pour l'estimation de la taille finale de l'épidémie de covid-19. plusieurs chercheurs ont développé différents modèles de covid-19 et étudié le comportement dynamique (voir par exemple [35, 33])

Un modèle d'épidémie SIR modifié est présenté dans [35] pour projeter le nombre réel de cas infectés et les charges spécifiques sur les services d'isolement et les unités de soins intensif. Nesteruk [10] a développé un modèle épidémique SIR (Sensible, Infecté et Récupéré) et a discuté statistiquement les paramètres utilisés dans le modèle proposé et a montré comment contrôler cette infection.

Dans ce mémoire on va étudier deux modèle du covid-19 : Le premier est basé sur une extension du bien connu, Susceptible-Infecté-Récupéré (SIR) famille de modèles à compartiments, par l'ajout des nouveaux compartiments E(exposée) et Q(isolée),le modèle est représenté par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \mu S(t) - \beta(N)S(t)(E(t)+I(t)) \\ \\ \dfrac{dE(t)}{dt} &= \beta(N)S(t)(E(t)+I(t)) - \pi E(t) - (\mu+\gamma)E(t) \\ \\ \dfrac{dI(t)}{dt} &= \pi E(t) - \sigma I(t) - \mu I(t) \\ \\ \dfrac{dQ(t)}{dt} &= \gamma E(t) + \sigma I(t) - \theta Q(t) - \mu Q(t) \\ \\ \dfrac{dR(t)}{dt} &= \theta Q(t) - \mu R(t). \end{cases} \tag{1}$$

Et le deuxième est décrit par un système d'équations différentielles d'ordre fractionnaire et comprend cinq classes à savoir, S(sensible), E(exposée), I(infectée), Q(isolée) et R(récupérée), le modèle est donné par :

$$
\begin{cases}
{}_0^cD_t^\alpha S &= \Lambda^\alpha - \mu^\alpha S - \beta^\alpha S(E+I) \\
\\
{}_0^cD_t^\alpha E &= \beta^\alpha S(E+I) - \pi^\alpha E - (\mu^\alpha + \gamma^\alpha)E \\
\\
{}_0^cD_t^\alpha I &= \pi^\alpha E - \sigma^\alpha I - \mu^\alpha I \\
\\
{}_0^cD_t^\alpha Q &= \gamma^\alpha E + \sigma^\alpha I - \theta^\alpha Q - \mu^\alpha Q \\
\\
{}_0^cD_t^\alpha R &= \theta^\alpha Q - \mu^\alpha R
\end{cases} \tag{2}
$$

On utilise la dérivée fractionnaire de Caputo au lieu de celle d'ordre entier car quand le processus de la modèlisation surgie dans le monde réel, les modèles d'ordre fractionnaire sont plus précis que ceux d'ordre entier. En particulier, ils apportent plus de degrés de liberté dans le modèle tandis qu'une mémoire illimitée est également garantie contairement aux modèles aux dérivées d'ordre entier avec une mémoire limitée.

Ce travail est composé de trois chapitre

Le premier chapitre porte sur des préliminaires et rappel de quelques définitions et théorèmes utilisés.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un modèle du covid-19, on utilise le concept de la matrice de la nouvelle génération pour calculer le nombre de reproduction de base R_0, et étudier la stabilité locale et global des points d'équilibres (sans maladie et endémique).

Le troisième chapitre est pour l'étude d'un modèle covid-19 fractionnaire où on a utilisé la dérivée fractionnaire du caputo et étudié la positivité, la limitation et la stabilité locale et global des points d'équilibre.

Des conclusions sont données à la fin de ce mémoire, qui se termine par une bibliographie.

Chapitre I

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappel quelques définitions et théorèmes nécessaires pour l'elaboration de ce travail.

I.1 Equations différentielles ordinaires

Définition I.1.1. [5]
Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue , une équation différentielle ordinaire sur U est une relation de type :

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{I.1}$$

avec $x \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $t \in \mathbb{R}$.

Définition I.1.2. [5]
Soit x une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, la fonction x est dite solution de l'équation (I.1) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continument dérivable sur I, si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$ et si x satisfait la relation $(I.1)$ sur I.

Théorème 1. *(Cauchy- Lipschitz) [11]*
Si f est continue sur U et s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\| f(x_1(t)) - f(x_2(t)) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|,$$

$\forall x_1, x_2 \in U$, $t > 0$,
alors le problème (I.1) admet une solution globale et unique.

I.2 Stabilité des équilibres

Considérons le système suivant.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{I.2}$$

où $x \in U$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue , $t \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition I.2.1. [5]
Un point x^* est dit point stationnaire (ou équilibre) de système (I.2) si et seulement si $f(x^*) = 0$.

Définition I.2.2. [5]
Un équilibre x^* de (I.2) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (I.2) on a

$$\|x_0 - x^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geqslant 0, \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

Définition I.2.3. [5]
Un équilibre x^* de (I.2) est dit instable , s'il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, tel que pour tout solution $x(t)$ de (I.2) on a

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \forall t \geqslant 0 \ \|x(t) - x^*\| \geqslant \varepsilon$$

.

Définition I.2.4. [5]
Un équilibre x^* de $(I.2)$, on dit que x^* asymptotiquement stable s'il est stable et il existe $\eta > 0$ telle que, pour toute solution $x(t)$ de (I.2) on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition I.2.5. [5]
L'équilibre x^* de (I.2) est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

I.3 Stabilité d'un système linéaire

Considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax \tag{I.3}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n et $x \in U$ et x^* le point d'équilibre du système linéaire (I.3)

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A

Théorème 2.

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont de parties réelles nulle ou négative alors l'équilibre x^* est stable.*
2. *S'il existe au moins une valeur propre de la matrice A de parties réelles positive alors x^* est instable.*
3. *Si les valeurs propres de la matrice A sont de parties réelles strictement négatives alors l'équilibre x^* est asymptotiquement stable.*
4. *Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de x^*.*

I.4 Stabilité d'un système non linéaire

On considère un système non linéaire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \tag{I.4}$$

où f_1 et f_2 deux fonction de classe C^1 , définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit (x^*, y^*) un point d'équilibre pour ce système. Pour déterminer la nature des points d'équilibre du système (I.4), on utilise la méthode de linéarisation du système non linéaire, elle est obtenue en utilisant le développement de Taylor du premier ordre de deux fonctions f_1 et f_2 autour de l'équilibre (x^*, y^*).

Définition I.4.1. (La méthode de linéarisation)

Soit $J_{(x,y)}$ la matrice Jacobienne associée au système (I.4), la linéarisation de ce système autour de l'équilibre (x^*, y^*) est définie par :

$$J_{(x^*,y^*)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Théorème 3. *La stabilité d'un point d'équilibre (x^*, y^*) est classée selon les valeurs propres qui jouent un rôle important dans l'analyse de la stabilité des points d'équilibres de la matrice Jacobienne $J_{(x^*,y^*)}$, aussi bien que son déterminant et sa trace telle que :*

$$det\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = \lambda_1\lambda_2 \quad et \quad tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = \lambda_1 + \lambda_2$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right)\lambda + det\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = 0,$$

avec :

$$\lambda_1 = \frac{tr + \sqrt{tr^2 - 4det}}{2} \quad et \quad \lambda_2 = \frac{tr - \sqrt{tr^2 - 4det}}{2}$$

La nature des points d'équilibres dépend du signe du Δ qui est donné par :

$$\Delta = (tr)^2 - 4det,$$

donc il existe trois cas :

- 1^{er} *cas : $\Delta > 0$*

— *Si $det\left(J_{(x^*,y^*)}\right) < 0$ et λ_1 et λ_2 sont de signes opposés, alors le point d'équilibre est un point selle.*

— *Si $det\left(J_{(x^*,y^*)}\right) > 0$ et $tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right) < 0$ et λ_1, λ_2 sont de signes négatifs, alors le point d'équilibre est un nœud stable.*

- $2^{\text{ème}}$ *cas : $\Delta < 0$*

  On trouve deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Donc

$$det\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad et \quad tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = 2\alpha.$$

— *Si* $tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = 0$, *alors le point d'équilibre est un centre.*

— *Si* $tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right) > 0$ *c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est positive, alors le point d'équilibre est un foyer instable.*

— *Si* $tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right) < 0$ *c'est-à-dire la partie réelles des valeurs propres est négative, alors le point d'équilibre est un foyer stable.*

- $3^{\text{ème}}$ *cas :* $\Delta = 0$

  On trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *alors*

$$det\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = \lambda^2 \quad et \quad tr\left(J_{(x^*,y^*)}\right) = 2\lambda$$

Donc

— *Si* $tr > 0$ *c'est-à-dire* $\lambda > 0$, *alors on a un nœud dégénéré instables.*

— *Si* $tr < 0$ *c'est-à-dire* $\lambda < 0$, *alors on a un nœud dégénéré stable.*

Définition I.4.2. (Ensemble invariant)[31]
Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. l'ensemble image de D par la matrice A, noté AD , est donné par

$$AD = \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in D : Ax = y\}$$

L'ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est dit positivement invariant par rapport au système (I.3) si $AD \subset D$. Il est dit invariant si $AD = D$, D est un domaine positivement invariant.

I.5 Critère de Routh-Hurwitz

La matrice A admet n valeurs propres distincts au maximum, qui sont solution de l'équation caractéristique $det(A - \lambda I) = 0$, qui est un polynôme de degré n qu'on peut mettre sous la forme suivant

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Considérons les n déterminants suivants [26] :

$$H_1 = a_1$$

et

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_k \end{vmatrix}$$

avec $k \in [2, n], a_i = 0$, pour $i > n$.

Corrolaire 1. *[26]*
L'équilibre est asymptotiquement stable si est seulement si

$$\forall k \in [1, n], H_k > 0.$$

Il faut donc vérifier que les déterminants H_k sont strictement positif, c'est une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique locale de (I.3) en $(0, 0)$
Donc le cas de dimension deux, l'équation caractéristique est la suivant :

$$\lambda^2 - trA\lambda + detA = 0$$

on a donc $a_1 = -trA$, $a_2 = detA$ *et* $a_3 = 0$
les critères de Routh-Hurwitz sont alors

$$H_1 = a_1 = -trA > 0 \Leftrightarrow trA < 0$$

,

$$H_2 = a_1a_2 + a_3 = -trA \times detA > 0 \Leftrightarrow detA > 0$$

.

I.6 La Méthode de van Den Driessch et Watmough

On a souvent à faire avec l'indice R_0 qui mesure le nombre de cas secondaire produit par un individu infectieux moyen au cours de sa période d'infectiosité, dans une population entièrement susceptibles. Il existe dans la littérature plusieurs techniques pour calculer R_0 nous en présentons une ici[29] :

État de la population x_i, $i = 1, ...n$, soit le système différentielle suivant :

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x} = F_i(x) + V_i^+(x) - V_i^-(x) \tag{I.5}$$

avec

$F_i(x)$: vitesse d'apparition des infectieux dans le compartiment i.

$V_i^+(x)$: la vitesse de transfert des individus dans le compartiment i par tout autre moyene (guérison, etc....).

$V_i^-(x)$: la vitesse de transfert hors du compartiment i (mortalité, infection, etc....).

- On ordonne les variables d'état afin que les $m(\leq n)$ premières correspondent à des états infectés.
- États sans maladies : $X_s = \{x \geq 0 \; ; \; x_i = 0, \; i = 1, ..., m\}$.
- Équilibre sans maladie DFE $x^* \in X_s$.

pour des raisons biologiques on a les propriétés suivantes :

1. Si $x \geqslant 0$, alors $F_i \geqslant 0$, $V_i^+ \geqslant 0$.
2. Si $x_i = 0$ alors $V_i^- = 0$ (pas de sortie d'un compartiment vide).
3. Pour $i > m$ alors , $F_i = 0$ (pas d'incidence pour états non infectés).
4. Si $x \in X_s$ alors $F_i(x) = 0$ et pour $V_i^+(x) = 0$ (pas d'infection spontanée).
5. Si $F = 0$ le système est localement asymptotiquement stable en $\dot{x}$, ie $D(V^+ - V^-)(x^*)$ a des valeurs propres à parties réelles négatives

La jacobienne s'écrit

$$J(x^*) = DF(x^*) + D(V^+ - V^-) - (x^*)$$

.

Lemme I.6.1. Si x_0 est un équilibre sans maladie DFE de (I.5) et $f_i(x)$ vérifie $(1) - (5)$,alors les dérivées $DF(x_0)$ et $DV(x_0)$ sont partitionnée comme

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad DV(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

ou F et V sont les matrices $m \times m$ définies par

$$F \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \quad et \quad V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$$

avec $1 \leq i, j \leq m$.
De plus, F est non négatif, V est une matrice non singulière et toutes les valeurs propres de J_4 ont des parties réelles positives.

Définition I.6.1. Soit A une matrice carrée, on appelle de A l'ensemble des valeurs propres de A :

$$Sp(A) = \{\lambda : \lambda \text{ } est \text{ } valeur \text{ } propre \text{ } de \text{ } A\}$$

,

et le rayon spectrale de A, la valeur maximale du module des valeurs propres de A,

$$\rho(A) = max\,\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}$$

Définition I.6.2. (Le taux de reproduction basique)[29]
Le nombre de reproduction de base, noté R_0 est le nombre de cas secondaires produit, dans une population complètement sensible par un individu infectieux

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

où $R_0 = \rho(FV^{-1})$ le rayon spectral de la matrice (FV^{-1})

I.7 Fonction de Lyapunov

Définition I.7.1. [36]
Soit $V : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, V est dite définie positive si :

1. $V(0) = 0$,
2. $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$,

V est dite définie négative si $-V$ est définie positive .

Définition I.7.2. (**Fonction de Lyapunov**)[3]
Une fonction $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite fonction de Lyapunov si :

— V est définie positive .

— $\dot{V}(t, x) < 0$ pour tout $x \in U \setminus \{0\}$.

Théorème 4. *(Stabilité de Lyapunov) [21]*
Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de (I.2) et V une fonction définie positive sur un voisinage de x^*.

1. *Si* $\dot{V} \leq 0$, $\forall\, x \in U \setminus \{0\}$ *, alors* x^* *est stable.*
2. *Si* $\dot{V} < 0$, $\forall\, x \in U \setminus \{0\}$ *, alors* x^* *est asymptotiquement stable.*

Théorème 5. *(***Principe d'invariance de LaSalle***) [17],[18]*

Soit Ω *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$*, supposons que* Ω *est un ouvert pour le système (I.2) en* x^* *. Soit* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *pour le système (I.2) en* x^* *telle que :*

— $\dot{V} \leq 0$ *sur* Ω.

— *soient* $E = \left\{x \in \Omega \setminus \dot{V}(x) = 0\right\}$ *et* L *est le plus grand ensemble invariant par x et contenu dans* E*.*

Alors, toute solution bornée commençant dans Ω *tend vers l'ensemble L lorsque* $t \to \infty$*.*

I.8 Equation differentielle d'ordre fractionnaire

I.8.1 Derivée fractionnaire

Définition I.8.1. (Un Système fractionnaire) [20]
L'opération de dérivation ou d'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la dérivation ou intégration classique entière à des ordres quelconques non entiers irrationnels ou complexes
l'opérateur integro-différentiel continu est défini comme :

$$ {}_{t_0}D_0^{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} & si \quad Re(\alpha) > 0, \\ 1 & si \quad Re(\alpha) = 0, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} (d\tau)^{-\alpha} & si \quad Re(\alpha) < 0 \end{cases} \tag{I.6} $$

ou α est l'ordre de l'opération , t_0 et t sont des limites de l'opération et $Re(\alpha)$ est la partie réelle de α.

L'équation différentielle représentant un système d'ordre fractionnaire s'écrit sous la forme [20] :

$$ a_n D^{a_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \cdots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \cdots + b_0^{\beta_0} u(t) \tag{I.7} $$

où : a_k , $b_k \in \mathbb{R}$; $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système ; et $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}^+$.

Définition I.8.2. (dérivée fractionnaire de caputo) [34]

Supposons que $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ la dérivée fractionnaire de caputo est donnée par

$${}_a^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha+1-n}} d\xi \ , \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}.$$

Propriétés I.8.1.

(linéarité)[8]

soit $f(t), g(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que ${}_a^cD_t^\alpha f(t)$ et ${}_a^cD_t^\alpha g(t)$ doit exister presque partout et soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, de plus, ${}_a^cD_t^\alpha(c_1 f(t) + c_2 g(t))$ existe presque partout, et

$${}_a^cD_t^\alpha(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 \, {}_a^cD_t^\alpha f(t) + c_2 \, {}_a^cD_t^\alpha g(t)$$

Propriétés I.8.2.

(dérivée de caputo d'une constante)[28]

La dérivée fractionnaire pour une fonction constante $f(t) = c$ est nulle.

$${}_a^cD_t^\alpha c = 0$$

Considérons le type général suivant d'équations différentielles fractionnaires impliquant la dérivée de caputo :

$${}_{t_0}^{c}D_t^\alpha x(t) = f(t,x), \quad \alpha \in [0,1] \tag{I.8}$$

avec la condition initiale $x_0 = x(t_0)$

Définition I.8.3. [34]

x^* est un point d'équilibre du système dynamique fractionnaire de caputo ($I.8$), si et seulement si $f(t, x^*) = 0$.

Théorème 6. *(stabilité asymptotique uniforme)[34]*

Soit x^* un point d'équilibre pour le système d'ordre fractionnaire non autonome (I.8) et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant x et soit $L(t, x(t)) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continument *différentiable tel que*

$$W_1(x) \leq L(t, x(t)) \leq W_2(x)$$
$${}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t} L(t, x(t)) \leq -W_3(x)$$

$\forall\ \alpha \in [0,1]$ $, \forall x \in \Omega$ *, où* $W_1(x), W_2(x)$ *et* $W_3(x)$ *sont des fonctions définies positives continues sur* Ω. *Alors le point d'équilibre du système* ($I.8$) *est uniformément asymptotiquement stable.*

I.8.2 Fonction de Lyapunov de type volterra

L'idée de cette section est d'étendre la fonction de Lyapunov de type volterra aux systèmes épidémiques d'ordre fractionnaire à travers une inégalité pour estimer les dérivées fractionnaires de caputo de cette fonction on a le lemme suivant :

Lemme I.8.1. [34]
Soit $x(t) \in \mathbb{R}^+$ une fonction continue et dérivable. alors, pour tout instant $t \geqslant t_0$

$${}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t}\left[x(t) - x^* - x^* \ln \frac{x(t)}{x^*}\right] \leq \left(1 - \frac{x^*}{x(t)}\right) {}^{c}_{t_0}D^{\alpha}_{t} x(t) \quad , \; x^* \in \mathbb{R}^+ \quad \forall \alpha \in (0,1)$$

.

Théorème 7. *(Le principe de comparaison)[33]*
Si $D^q x(t) \geqslant D^q y(t)$ *et* $0 < q < 1,\ x(0) = y(0)$ *alors* $x(t) \geqslant y(t)$.

Théorème 8. *(théorème de la valeur moyenne généralisée) [25]*
suppose que $f(x) \in C[a,b]$ *et* $D^{\alpha}_{a} f(x) \in C[a,b]$, *pour* $0 < \alpha \leq 1$ *alors on a*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(D^{\alpha}_{a} f)(\xi)(x-a)^{\alpha}$$

avec $a \leq \xi \leq x$, $\forall x \in [a,b]$.

Chapitre II

Un Modèle du COVID-19

Un modèle d'épidémie SIR modifié est présenté dans [35] pour projeter le nombre réel de cas infectés et les charges spécifiques sur les services d'isolement et les unités de soins intensif. Nesteruk [10] a développé un modèle épidémiologique SIR (Sensible, Infecté et Récupéré) et a discuté statistiquement les paramètres utilisés dans le modèle proposé et a montré comment contrôler cette infection.

II.1 Le Modèle SIR

II.1.1 Présentation du modèle

Le modèle SIR divise la population N en trois catégories les individus S (susceptibles), I (infectées), et R (guéris), avec S(t), I(t), R(t) leurs nombres au temps t, c'est-à- dire $N = S(t) + I(t) + R(t)$. avec N constante. Le modèle est donnée par [22],[23] :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu_1 S \\ \dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu_3 R \end{cases} \tag{II.1}$$

où

S :les personnes susceptible ;

I :les personnes infectées ;

R :les personnes retirées (guéris) ;

$\gamma =$ taux de guérison ;

$\beta =$taux d'infection ;

$\Lambda =$ taux de natalité ;

$\mu_i =$taux de mortalité $(i = 1, 2, 3)$;

Tous les nouveaux nés sont susceptibles, on suppose que la natalité Λ compense la mortalité ; donc $\Lambda = \mu_1 S + \mu_2 I + \mu_3 R$ le système (II.1) se réduit à

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \frac{SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 R \\ \dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu_3 R \end{cases} \tag{II.2}$$

D'autre part on a la population totale $N = S + I + R$

Vu que les deux premières équations sont indépendantes de R alors on néglige la troisième équation et on étudie le système modifié suivant

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \frac{SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 (N - S - I) \\ \dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \end{cases}$$

On pose $\frac{S}{N} = S$ $\frac{I}{N} = I$ donc le système (II.2) :

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3) I - \mu_3 S - \beta SI \\ \dot{I} = \beta SI - (\mu_2 + \gamma) I \end{cases} \tag{II.3}$$

on a $S \geq 0, I \geq 0$ alors $\dfrac{dS}{dt} + \dfrac{dI}{dt} \geq 0$

d'où

$1 - S - I \geq 0,$

donc $S + I \leq 1.$

Le domaine biologique de ce système est le l'ensemble $\Omega = \{(S, I) : S \geq 0; I \geq 0; S + I \leq 1\}$ est un compact positivement invariant pour (II.3)

II.1.2 Equilibre et Stabilité locale

D'après le système (II.3)

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \end{cases}$$

Théorème 9. *le système (II.3) admet deux points d'équilibre*

$(S_0^*, I_0^*) = (1, 0)$ *et* $(S_1^*, I_1^*) = \left(\dfrac{\mu_2 + \gamma}{\beta}, \dfrac{\mu_3}{\gamma + \mu_3} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right)$

Preuve. On a

$$\begin{cases} \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3) I - \mu_3 S - \beta SI = 0 \\ \beta SI - (\mu_2 + \gamma) I = 0 \end{cases} \tag{II.4}$$

Par la deuxième équation du système (II.4),on a

$$I[\beta S - (\gamma + \mu_2)] = 0$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} I = 0 \\ S = \dfrac{\gamma + \mu_2}{\beta} \end{cases}$$

si $I^* = 0$ c'est a dire le cas sans épidémie, on aura $S^* = 1$ d'où
le point d'équilibre sans maladie $(S_0^*, I_0^*) = (1, 0)$
Par contre si $I \neq 0$ ie : le cas épidémique on trouve $S = \dfrac{\mu_2 + \gamma}{\beta}$ On remplace par la première équation de (II.4)
On trouve

$$\begin{aligned} \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)I - \mu_3(\frac{\mu_2 + \gamma}{\beta}) - I(\mu_2 + \gamma) = 0 &\Rightarrow I(\mu_2 - \mu_3 - \mu_2 - \gamma) = \mu_3(\frac{\mu_2 + \gamma}{\beta}) - \mu_3 \\ &\Rightarrow I(-\mu_3 - \gamma) = \mu_3(\frac{\mu_2 + \gamma}{\beta} - 1) \\ &\Rightarrow I^* = \frac{\mu_3}{\gamma + \mu_3}(1 - \frac{1}{R_0}) \end{aligned}$$

Donc le deuxième point d'équilibre est donné par $(S_1^*, I_1^*) = \left(\dfrac{\mu_2 + \gamma}{\beta}, \frac{\mu_3}{\gamma + \mu_3}(1 - \frac{1}{R_0})\right)$
On va utiliser maintenant la méthode de Van Den Driessche et Watmough pour trouver le nombre de reproduction de base R_0 donné par

$$R_0 = \rho\left(\tilde{F}\left(-\tilde{V}^{-1}\right)\right)$$

en effet :

On a le point d'équilibre sans maladie (DFE) $(S_0^*, I_0^*) = (1, 0)$

F : le taux d'apparition des nouveau malades dans chaque compartiment.

V : le taux transfert des individus qui entrent et qui sortent dans chaque compartiment.

Le compartiment des individus infectées I.

$$F(S, I) = \beta SI \;\; et \;\; V(S, I) = (\mu_2 + \gamma)I$$

$\tilde{F}$ et $\tilde{V}$ les dérivés de F et V par rapport à I respectivement

$$\tilde{F}(S_0^*, I_0^*) = \beta S \quad et \quad -\tilde{V}(S_0^*, I_0^*) = \mu_2 + \gamma$$

avec $(\mu_2+\gamma) \neq 0$ donc la matrice $(-\tilde{V})$ est inversible d'inverse donné par :

$$(-\tilde{V})^{-1} = \frac{1}{\mu_2+\gamma}$$

on obtient

$$\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1} = \frac{\beta}{\mu_2+\gamma}$$

d'où

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu_2+\gamma}$$

En effet cette quantité est le produit du taux de contact par la période moyenne d'infection ajustée par les décès $\dfrac{1}{\mu_2+\gamma}$

Théorème 10. *si* $R_0 < 1$ *alors le point d'équilibre* (S_0^*, I_0^*) *est asymptotiquement stable et si* $R_0 > 1$ *alors* (S_0^*, I_0^*) *est instable.*

Preuve. La jacobienne du système (II.3) est donnée par

$$J(S,I) = \begin{pmatrix} -\mu_3-\beta I & \mu_2-\mu_3-\beta S \\ \beta I & -\mu_2-\gamma+\beta S \end{pmatrix}$$

pour le point d'équilibre (S_0^*, I_0^*), on a

$$J(S_0^*, I_0^*) = \begin{pmatrix} -\mu_3 & \mu_2-\mu_3-\beta \\ & \\ 0 & -\mu_2-\gamma+\beta \end{pmatrix}$$

On a

$$detJ(S_0^*, I_0^*) = -\mu_3\beta(1-\frac{1}{R_0})$$
$$trJ(S_0^*, I_0^*) = -\mu_3+\beta(1-\frac{1}{R_0})$$

Donc :

— Si $R_0 < 1 \Rightarrow detJ(S_0^*, I_0^*) > 0$ et $trJ(S_0^*, I_0^*) < 0$
d'oǔ le point (S_0^*, I_0^*) est asymptotiquement stable.

— Si $R_0 > 1 \Rightarrow detJ(S_0^*, I_0^*) < 0$ alors le point (S_0^*, I_0^*) est instable.

— Si $R_0 = 1 \Rightarrow detJ(S_0^*, I_0^*) = 0$ comme le système est non linéaire alors par la linéarisation on peut rien dire.

Pour le point d'équilibre (S_1^*, I_1^*) on a

$$J(S_1^*, I_1^*) = \begin{pmatrix} -\mu_3 - \beta I^* & \mu_2 - \mu_3 - \beta S^* \\ & \\ \beta I^* & -\mu_2 - \gamma + \beta S^* \end{pmatrix}$$

et de la deuxième équation de système (II.4) on a,

$$\begin{aligned} \beta S^* I^* - (\mu_2 + \gamma) I^* = 0 \\ \beta S^* I^* = (\mu_2 + \gamma) I^* \\ \beta S^* = \mu_2 + \gamma \end{aligned}$$

En remplaçant dans le matrice $J(S_1^*, I_1^*)$ on trouve

$$J(S_1^*, I_1^*) = \begin{pmatrix} -\mu_3 - \beta(\frac{\mu_3}{\gamma+\mu_3}(1-\frac{1}{R_0})) & -\mu_3 - \gamma \\ & \\ \beta(\frac{\mu_3}{\gamma+\mu_3}(1-\frac{1}{R_0})) & 0 \end{pmatrix}$$

En effet

$$\begin{aligned} det J(S_1^*, I_1^*) &= \beta\mu_3(1 - \frac{1}{R_0}) \\ tr J(S_1^*, I_1^*) &= -\mu_3 - \beta(\frac{\mu_3}{\gamma + \mu_3}(1 - \frac{1}{R_0})) \end{aligned}$$

Donc

- Si $R_0 < 1 \Rightarrow det J(S_1^*, I_1^*) < 0$
  d'où le point (S_1^*, I_1^*) est instable.
- Si $R_0 > 1 \Rightarrow det J(S_1^*, I_1^*) > 0$ et $tr J(S_1^*, I_1^*) < 0$ alors le point (S_1^*, I_1^*) est asymptotiquement stable.
- Si $R_0 = 1 \Rightarrow det J(S_1^*, I_1^*) = 0$ comme le système est non linéaire alors par la linéarisation on peut rien dire.

II.1.3 Stabilité globale

Théorème 11. *Si* $R_0 < 1$ *alors le point d'équilibre sans maladie (DFE) est globalement asymptotiquement stable sur* Ω *.*

Preuve. On considère la fonction de lyapunov $V(S, I) = I$

On a

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{I} \\ &= \beta S I - (\mu_2 + \gamma) I \\ &= I(R_0 S - 1)(\mu_2 + \gamma) \\ &\leq 0\end{aligned}$$

et $\dot{V} = 0$ si $I = 0$ ou $S = S^*$ et $R_0 = 1$
donc le plus grand ensemble invariant contenu dans cet ensemble est $L = \{(S, I) \in \Omega / \dot{V}(S, I) = 0\}$ qui est réduit au point d'équilibre sans maladie. Puisque l'ensemble Ω est un compact positivement invariant , par le principe d'invariance de LaSalle le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable dans Ω.

Théorème 12. *Si $R_0 > 1$ le point d'équilibre sans maladie est instable, et existe un unique équilibre endémique (S_1^*, I_1^*) qui est globalement asymptotiquement stable sur le domaine $\Omega \setminus [0,1] \times \{0\}$.*

Preuve. Si $R_0 > 1$ l'instabilité équilibre sans maladie viens de [6] soit Ω_1 l'ensemble défini par
$\Omega_1 = \left\{(S, I)/S \geq \dfrac{\mu_2 - \mu_3}{\beta}, I \geq 0, S + I \leq 1\right\}$ l'ensemble Ω_1 est un compact positivement invariant.
On considère sur $\mathring{\Omega}_1$ la fonction de lyapunov définie par

$$V(S, I) = (S - S_1^*) - \frac{\mu_3 + \gamma}{\beta} \log\left(\frac{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S_1^*}\right) + (I - I_1^*) - I_1^* \log\left(\frac{I}{I_1^*}\right)$$

On a
V est définie positive. ie : $V(S, I) \geq 0$ $V(S_1^*, I_1^*) = 0$ si seulement si $(S, I) = (S_1^*, I_1^*)$
En effet

$$
\begin{aligned}
\dot V(S,I) &= \dot S - (\mu_3+\gamma)\frac{\mu_3+(\mu_2-\mu_3)I-\mu_3 S-\beta SI}{-\mu_2+\mu_3+\beta S}+\beta SI-(\mu_2+\gamma)I-I_1^*(\beta S-(\mu_2+\gamma))\\
&= \dot S-(\mu_3+\gamma)\frac{(\mu_3 -_3 S)}{-\mu_2+\mu_3+\beta S}+(\mu_3+\gamma)+\beta SI-(\mu_2+\gamma)I-I_1^*(\beta S-(\mu_2+\gamma))\\
&= \mu_3(1-S)-(\mu_3+\gamma)\frac{\mu_3+\gamma}{-\mu_2 +_3 +\beta S}-I_1^*(\beta S-(\mu_2+\gamma))\\
&= \mu_3(1-S)\left[1-\frac{\mu_3+\gamma}{-\mu_2+\mu_3+\beta S}\right]-I_1^*(\beta S-(\mu_2+\gamma))\\
&= \mu_3(1-S)(\frac{-\beta S_1^*+\beta S}{-\mu_2 +_3 +\beta S})-\frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma}(1-S_1^*)(\beta S-\beta S_1^*)\\
&= \mu_3\beta(S_1^*-S)\left[\frac{1-S}{-\mu_2+\mu_3+\beta S}-\frac{1-S_1^*}{\mu_3+\gamma}\right]\\
&= \mu_3\beta(S_1^*-S)\left[\frac{1-S}{-\mu_2+\mu_3+\beta S}-\frac{1-S_1^*}{-\mu_2+\mu_3+\beta S_1^*}\right]\\
&= -\frac{\beta\mu_3}{\mu_3+\gamma}\left[\frac{-\mu_2+\beta+\mu_3}{-\mu_2+\beta+\beta S}\right](S-S_1^*)^2\\
&\le 0
\end{aligned}
$$

Donc, on conclut que $\dot V$ est semi-définie négative. L'équilibre endémique est donc stable par le théorème de lyapunov.

II.2 Un Modèle du COVID-19

Le modèle est donné par le système d'équation différentielle [37] :

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS(t)}{dt} &= \Lambda-\mu S(t)-\beta(N)S(t)(E(t)+I(t))\\[2ex]
\dfrac{dE(t)}{dt} &= \beta(N)S(t)(E(t)+I(t))-\pi E(t)-(\mu+\gamma)E(t)\\[2ex]
\dfrac{dI(t)}{dt} &= \pi E(t)-\sigma I(t)-\mu I(t)\\[2ex]
\dfrac{dQ(t)}{dt} &= \gamma E(t)+\sigma I(t)-\theta Q(t)-\mu Q(t)\\[2ex]
\dfrac{dR(t)}{dt} &= \theta Q(t)-\mu R(t)
\end{cases}
\tag{II.5}
$$

Sous les hypothèses suivants :

S :population susceptible,

E :population exposée,

I :population infectée,

Q :population isolée,

R :population récupérée (guéris),

Λ :taux de recrutement des individus susceptibles,

β :le taux de transmission de la maladie,

π :taux auquel la population exposée devient à une population infectée,

γ :taux de l'isolation des personnes exposées,

σ :le taux auquel les personnes infectée ont été isolées,

θ :taux de guérison des personnes isolées,

μ : taux de mortalité naturelle plus taux de mortalité lié à la maladie.

Comme les quatrs premières équations sont indépendantes de $R(t)$ alors on peut négliger la dernière équation pour du système $(II.5)$ et on étudie le système modifié suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \mu S(t) - \beta(N)S(t)(E(t)+I(t)) \\[2ex] \dfrac{dE(t)}{dt} &= \beta(N)S(t)(E(t)+I(t)) - \pi E(t) - (\mu+\gamma)E(t) \\[2ex] \dfrac{dI(t)}{dt} &= \pi E(t) - \sigma I(t) - \mu I(t) \\[2ex] \dfrac{dQ(t)}{dt} &= \gamma E(t) + \sigma I(t) - \theta Q(t) - \mu Q(t) \end{cases} \tag{II.6}$$

Soit $N = \Lambda/\mu$, $s = S/N$, $e = E/N$, $i = I/N$ et $q = Q/N$

le système (II.6) devient

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} &= \mu - \mu s - \beta N s(e+i) \\[2ex] \dfrac{de}{dt} &= \beta N s(e+i) - \pi e - (\mu+\gamma)e \\[2ex] \dfrac{di}{dt} &= \pi e - \sigma i - \mu i \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} &= \gamma e + \sigma i - \theta q - \mu q \end{cases} \tag{II.7}$$

Avec les conditions initiales

$$s(0) = s_0 \geqslant 0, \quad e(0) = e_0 \geqslant 0, \quad i(0) = i_0 \geqslant 0, \quad q(0) = q_0 \geqslant 0 \tag{II.8}$$

II.2.1 Positivité des solutions

Lemme II.2.1. [37]
Sous les conditions initiales (II.8), toutes les solutions $(s(t), e(t), i(t), q(t))$ du système (II.5) restent non négatives pour $t \geqslant 0$.

Preuve. Par les conditions initiales (II.8) on a :

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt}|_{s=0} &= \mu > 0, \\
\frac{de}{dt}|_{e=0} &= \beta N s i \geqslant 0, \\
\frac{di}{dt}|_{i=0} &= \pi e \geqslant 0, \\
\frac{dq}{dt}|_{q=0} &= \gamma e + \sigma i \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{II.9}$$

II.2.2 Stabilité locale et existence d'un point d'équilibre positif

L'existence d'un équilibre positif unique et de la stabilité du système (II.7) dépend du nombre de reproduction de base R_0 qui est déterminé à l'aide de la méthode matricielle de la nouvelle génération [30], on a deux point d'équilibre $C_0(1, 0, 0, 0)$ et $C^*(s^*, e^*, i^*, q^*)$
Considérons les matrices suivantes

$$F = \begin{pmatrix} \beta N s(e+i) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.10}$$

$$-V = \begin{pmatrix} \pi e + (\mu + \gamma) e \\ -\pi e + \sigma i + \mu i \end{pmatrix} \tag{II.11}$$

Les Jacobiennes de F et V au point C_0 sont :

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial e}(e,i) & \dfrac{\partial f}{\partial i}(e,i) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial e}(e,i) & \dfrac{\partial g}{\partial i}(e,i) \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{F} = \begin{pmatrix} \beta N & \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$f(e,i) = \beta N s(e+i)$ et $g(e,i) = 0.$

et

$$-\tilde{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial e}(e,i) & \dfrac{\partial H}{\partial i}(e,i) \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial e}(e,i) & \dfrac{\partial G}{\partial i}(e,i) \end{pmatrix} \Rightarrow -\tilde{V} = \begin{pmatrix} \pi+\mu+\gamma & 0 \\ -\pi & \sigma+\mu \end{pmatrix}$$

avec

$H(e,i) = \pi e + (\mu+\gamma)e$ et $G(e,i) = -\pi e + \sigma i + \mu i$ La valeur propre dominante de $\tilde{F}(-\tilde{V}^{-1})$ représente R_0 ie $R_0 = \rho\left(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}\right)$, en effet :

$$(-\tilde{V})^{-1} = \frac{1}{detV} cof(V^t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\pi+\mu+\gamma} & 0 \\ \\ \dfrac{\pi}{\pi+\mu+\gamma(\pi+\mu)} & \dfrac{1}{\sigma+\mu} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1} = \begin{pmatrix} \beta N & \beta N \\ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\pi+\mu+\gamma} & 0 \\ \pi & \dfrac{1}{\sigma+\mu} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta N}{\pi+\mu+\gamma} + \dfrac{\beta N \pi}{(\pi+\mu+\gamma)(\sigma+\mu)} & \dfrac{\beta N}{\sigma+\mu} \\ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres :

$$det\left(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}-\lambda I\right)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\dfrac{\beta N}{\pi+\mu+\gamma}+\dfrac{\beta N\pi}{(\pi+\mu+\gamma)(\sigma+\mu)}-\lambda & \dfrac{\beta N}{\sigma+\mu}\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\frac{\beta N}{\pi+\mu+\gamma}+\frac{\beta N\pi}{(\pi+\mu+\gamma)(\sigma+\mu)}-\lambda)(-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=0 \quad et \quad \lambda=\frac{\beta N}{\pi+\mu+\gamma}+\frac{\beta N\pi}{(\pi+\mu+\gamma)(\sigma+\mu)}$$

$\lambda=\dfrac{\beta N(\sigma+\mu)+\beta N\pi}{(\pi+\mu+\gamma)(\sigma+\mu)}$

$R_0=\rho\left(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}\right)=max(\lambda)=\beta N\dfrac{\sigma+\mu+\pi}{(\pi+\mu+\gamma)(\sigma+\mu)}$, alors

$$R_0=\beta N\frac{\sigma+\mu+\pi}{(\pi+\mu+\gamma)(\sigma+\mu)} \tag{II.12}$$

Théorème 13. *[37]*
Le système (II.7) est localement stable par rapport au point d'équilibre C_0 si $R_0<1$, et instable si $R_0>1$.

Preuve. Pour la stabilité locale du système (II.7), la jacobienne est donnée par

$$J=(C_0)=\begin{pmatrix}-\mu & -\beta N & -\beta N & 0\\ 0 & \beta N-\pi-\mu-\gamma & \beta N & 0\\ 0 & \pi & -(\sigma+\mu) & 0\\ 0 & \gamma & \sigma & -(\theta+\mu)\end{pmatrix} \tag{II.13}$$

On calcule le polynôme caractéristique :

$$det\,(J-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu-\lambda & -\beta N & -\beta N & 0 \\ 0 & \beta N-\pi-\mu-\gamma-\lambda & \beta N & 0 \\ 0 & \pi & -(\sigma+\mu)-\lambda & 0 \\ 0 & \gamma & \sigma & -(\theta+\mu)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (-\mu-\lambda)\begin{vmatrix} \beta N-\pi-\mu-\gamma-\lambda & \beta N & 0 \\ \pi & -(\sigma+\mu)-\lambda & 0 \\ \gamma & \sigma & -(\theta+\mu)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (-\mu-\lambda)(-\theta-\mu-\lambda)\begin{vmatrix} \beta N-\pi-\mu-\gamma-\lambda & \beta N \\ \pi & -(\sigma+\mu)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\mu+\lambda)(\theta+\mu+\lambda)\,[(\beta N-\pi-\mu-\gamma-\lambda)(-\sigma-\mu-\lambda)-\beta N\pi]=0$$

d'ou

$\lambda_1=-\mu<0$

$\lambda_2=-(\theta+\mu)<0$

D'après le critère de Routh-Hurwitz Les valeurs propres $\lambda_3<0, \lambda_4<0$ si $R_0<1$ donc le système (II.7) est asymptotiquement stable, si $R_0>1$ et instable.

Théorème 14. *[37]*

Il existe un unique point d'équilibre endémique $c^*(s^*, e^*, i^*, q^*)$ *pour le système (II.7) si* $R_0>1$.

Preuve. on a

$$\begin{aligned} \mu-\mu s-\beta N s(e+i)&=0 \\ \beta N s(e+i)-\pi e-(\mu+\gamma)e&=0 \\ \pi e-\sigma i-\mu i&=0 \\ \gamma e+\sigma i-\theta q-\mu q&=0 \end{aligned} \tag{II.14}$$

Ce qui implique que :

$$s^* = \frac{1}{R_0}$$

$$e^* = \frac{(\sigma + \mu)}{\pi} i^*$$

$$i^* = \frac{\pi\mu(R_0 - 1)}{\beta N(\pi + \sigma + \mu)}$$

$$q^* = \frac{\gamma(\sigma + \mu) + \pi\sigma}{\pi(\theta + \mu)} i^*$$

D'après la valeur de i^* il est évident que toutes les valeurs de (s^*, e^*, q^*) sont positive si $R_0 > 1$.

II.2.3 Stabilité globale

Théorème 15. *[37]*
Si $R_0 < 1$ alors le système (II.7) est globalement stable.

Preuve. pour la démonstration de ce théorème on utilise la fonction de Lyapunov, soit

$$L = (e - e_0) + \frac{\beta N}{\sigma + \mu}(i - i_0). \tag{II.15}$$

La différenciation de l'équation (II.15) par rapport au temps et en prenant en compte que $R_0 < 1$ et $0 < s < 1$, donne

$$\begin{aligned}
L' &= \acute{e} + \frac{\beta N}{\sigma + \mu}\acute{i} \\
L' &= \beta N se + \beta N si - (\pi + \mu + \gamma)e + \frac{\beta N}{\sigma + \mu}(\pi e) - \frac{\beta N}{\sigma + \mu}(\sigma + \mu)i \\
L' &= \beta N se + \beta N si - (\pi + \mu + \gamma)e + \frac{\beta N}{\sigma + \mu}(\pi e) - \beta N i \\
&\leqslant \beta N e - (\pi + \mu + \gamma)e + \frac{\beta N}{\sigma + \mu}(\pi e) = (R_0 - 1)e
\end{aligned}$$

Par conséquent si $R_0 < 1$, alors $L' < 0$, ce qui implique que le système (II.7) est globalement stable pour $R_0 < 1$.

Chapitre III

Un Modèle Fractionnaire du COVID-19

Dans ce chapitre on va analyser un nouveau modèle mathématique pour l'épidémie du covid-19. Ce modèle est décrit par un système d'équations différentielles d'ordre fractionnaire qui comprend cinq classes à savoir, S (sensible), E (exposée), I (infectée), Q (isolée) et R (récupérée). C'est une généralisation d'un modèle d'équations différentielles ordinaire formulé dans [37], on utilise la dérivée fractionnaire de Caputo au lieu de celle d'ordre entier.

III.1 Présentation du modèle

Soit le modèle d'équations différentielles ordinaire suivant [37] :

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \mu S(t) - \beta(N)S(t)(E(t)+I(t)) \\ \dfrac{dE(t)}{dt} &= \beta(N)S(t)(E(t)+I(t)) - \pi E(t) - (\mu+\gamma)E(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} &= \pi E(t) - \sigma I(t) - \mu I(t) \\ \dfrac{dQ(t)}{dt} &= \gamma E(t) + \sigma I(t) - \theta Q(t) - \mu Q(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} &= \theta Q(t) - \mu R(t) \end{cases} \tag{III.1}$$

Où

S : population susceptible ,

E : population exposée ,

I : population infectée ,

Q : population isolée,

R : population récupérée (guéris),

Λ : taux de recrutement des individus susceptibles (naissance,..),

β : taux de transmission de la maladie,

π : taux d'infection des personnes exposées,

γ : taux de l'isolation des personnes exposées ,

σ : taux auquel les personnes infectée ont été isolées,

θ : taux de guérison des personnes isolées,

μ : taux de mortalité naturelle plus taux de mortalité lié à la maladie.

Soit N la population totale tel que $N = S + E + I + Q + R$,
a partir du système (III.1), on obtient

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N$$

Ce qui implique que la population totale, est prise comme constante car $\Lambda = \mu N$. Pour inclure dans le modèle $(III.1)$ l'historique ou les propriétés héréditaires, on remplace la dérivée d'ordre entier par la dérivée fractionnaire de caputo. plus précisément, on propose le système d'équations différentielles fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^\alpha S &= \Lambda^\alpha - \mu^\alpha S - \beta^\alpha S(E+I) \\ \\ {}_0^cD_t^\alpha E &= \beta^\alpha S(E+I) - \pi^\alpha E - (\mu^\alpha + \gamma^\alpha)E \\ \\ {}_0^cD_t^\alpha I &= \pi^\alpha E - \sigma^\alpha I - \mu^\alpha I \\ \\ {}_0^cD_t^\alpha Q &= \gamma^\alpha E + \sigma^\alpha I - \theta^\alpha Q - \mu^\alpha Q \\ \\ {}_0^cD_t^\alpha R &= \theta^\alpha Q - \mu^\alpha R \end{cases} \tag{III.2}$$

Où $0 < \alpha < 1$, et ${}_0^cD_t^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

III.1.1 Positivité et délimitation

On note

$$\mathbb{R}_+^4 = \{(S, E, I, Q)/S, E, I, Q \geq 0\}.$$

Théorème 16. *(Positivité)[38]*
Soit (S_0, E_0, I_0, Q_0) *toute donnée initiale appartenant à* $\mathbb{R}^4_+$ *et* $(S(t), E(t), I(t), Q(t))$ *la solution correspondante aux données initiales. par suite, l'ensemble* $\mathbb{R}^4_+$ *est un ensemble positivement invariant du modèle (III.2). De plus, nous avons*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} supS(t) \leq S_\infty &:= \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}, \\ \lim_{t\to+\infty} supE(t) \leq E_\infty &:= \frac{\Lambda^\alpha}{\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha}, \\ \lim_{t\to+\infty} supI(t) \leq I_\infty &:= \frac{\pi^\alpha E_\infty}{\sigma^\alpha + \mu^\alpha}, \\ \lim_{t\to+\infty} supQ(t) \leq Q_\infty &:= \frac{\gamma^\alpha E_\infty + \sigma^\alpha I_\infty}{\delta^\alpha + \mu^\alpha}, \\ \lim_{t\to+\infty} supR(t) &\leq \frac{\theta^\alpha}{\mu^\alpha}. \end{aligned} \tag{III.3}$$

Preuve. Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du modèle on a utilisé des résultats prouvés dans [16].
Pour le modèle (III.2), on a

$$\begin{aligned} {}_0^cD_t^\alpha S|_{S=0} &= \Lambda^\alpha > 0, \\ {}_0^cD_t^\alpha E|_{E=0} &= \beta^\alpha SI \geq 0, \\ {}_0^cD_t^\alpha I|_{I=0} &= \pi^\alpha E \geq 0, \\ {}_0^cD_t^\alpha Q|_{Q=0} &= \gamma^\alpha E + \sigma^\alpha I \geqslant 0. \end{aligned} \tag{III.4}$$

D'après (III.4) et le théorème de la valeur moyenne généralisée , on déduit que
$S(t), E(t), I(t), Q(t) \geqslant 0 \; \forall \, t \geqslant 0$.
A partir de la première équation du système $(III.2)$, on obtient

$${}_0^cD_t^\alpha S \leq \Lambda^\alpha - \mu^\alpha S,$$

en utilisant le principe de comparaison fractionnaire, nous avons la première estimation de $(III.3)$.
A partir de la deuxième équation du système (III.2), on a

$${}_0^cD_t^\alpha (S + E) \leq \Lambda^\alpha - \mu^\alpha S - \pi^\alpha E - (\mu^\alpha + \gamma^\alpha)E,$$

ce qui implique

$$\lim_{t\to+\infty} sup(S(t)+E(t)) \leq E_\infty,$$

par conséquent, nous avons la deuxième estimation de $(III.3)$.

De la troisième équation du système (III.2), on obtient

$${}_0^cD_t^\alpha I \leq \pi^\alpha E_\infty - \sigma^\alpha I - \mu^\alpha I,$$

ce qui donne la troisième estimation de (III.3).

A partir de la quatrième équation du système (III.2), on a

$${}_0^cD_t^\alpha Q \leq \gamma^\alpha E_\infty + \sigma^\alpha I_\infty - \theta^\alpha Q - \mu^\alpha Q,$$

pour t assez grand, de là, nous obtenons la quatrième estimation de (III.3).

Enfin, la cinquième équation de (III.2) implique que

$${}_0^cD_t^\alpha R \leq \theta^\alpha Q_\infty - \mu^\alpha R,$$

ce qui donne la cinquième estimation de (III.3).

III.2 Les équilibres et le nombre de reproduction

Pour trouver les équilibres du modèle (III.2), on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \Lambda^\alpha - \mu^\alpha S - \beta^\alpha S(E+I) & = 0 \\ \beta^\alpha S(E+I) - \pi^\alpha E - (\mu^\alpha + \gamma^\alpha)E & = 0 \\ \pi^\alpha E - \sigma^\alpha I - \mu^\alpha I & = 0 \\ \gamma^\alpha E + \sigma^\alpha I - \theta^\alpha Q - \mu^\alpha Q & = 0 \\ \theta^\alpha Q - \mu^\alpha R & = 0 \end{cases} \tag{III.5}$$

On a deux points d'équilibres $F_0 = (S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0)$ *et* $F_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ avec

$$S_0 = \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}, \quad E_0 = 0, \quad I_0 = 0, \quad Q_0 = 0, \quad R_0 = 0$$

et

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{\Lambda^\alpha - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)E^*}{\mu^\alpha}, \\
I^* &= \frac{\pi^\alpha}{\sigma^\alpha + \mu^\alpha} E^*, \\
Q^* &= \frac{\gamma^\alpha E^* + \sigma^\alpha I^*}{\theta^\alpha + \mu^\alpha}, \\
R^* &= \frac{\theta^\alpha Q^*}{\mu^\alpha}, \\
E^* &= \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) - \mu^\alpha(\mu^\alpha + \sigma^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}{\beta^\alpha(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}
\end{aligned}$$

On note que S^*, E^*, I^*, Q^*, R^* sont positifs si seulement si

$$\beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) - \mu^\alpha(\mu^\alpha + \sigma^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) > 0$$

On calcule le nombre de reproduction du modèle $(III.2)$ en utilisant la méthode de van den Driessche et Watmough. Soit $x = (E, I, Q, R, S)$

On réécrit le modèle $(III.2)$ sous forme de :

$${}_0^c D_t^\alpha x = F(x) - V(x),$$

avec

$$F(x) = \begin{pmatrix} \beta^\alpha S(E+I) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$-V(x) = \begin{pmatrix} \pi^\alpha E + (\mu^\alpha + \gamma^\alpha)E \\ \\ -\pi^\alpha E + \sigma^\alpha I + \mu^\alpha I \\ \\ -\gamma^\alpha E - \sigma^\alpha I + \theta^\alpha Q + \mu^\alpha Q \\ \\ -\theta^\alpha Q + \mu^\alpha R \\ \\ -\Lambda^\alpha + \mu^\alpha S + \beta^\alpha S(E+I) \end{pmatrix}$$

Les Jacobiennes de F et V au point $(S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0,)$ sont :

$$\tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} & \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\tilde{V}(x) = \begin{pmatrix} \pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\pi^\alpha & \sigma^\alpha + \mu^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma^\alpha & -\sigma^\alpha + \theta^\alpha & \theta^\alpha + \mu^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta^\alpha & \mu^\alpha & 0 \\ \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} & \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} & 0 & 0 & \mu^\alpha \end{pmatrix}$$

En effet :

$$(-\tilde{V})^{-1} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} A & C & 0 & 0 & 0 \\ D & E & 0 & 0 & 0 \\ F & G & H & 0 & 0 \\ I & K & M & N & 0 \\ U & S & 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

avec

$A = (\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\theta^\alpha + \mu^\alpha)\mu^\alpha\mu^\alpha$

$B = (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)(\mu^\alpha)(\mu^\alpha)(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\theta^\alpha + \mu^\alpha)$

$C = -\mu^\alpha$

$D = \pi^\alpha\mu^\alpha\mu^\alpha(\theta^\alpha + \mu^\alpha)$
$E = \mu^\alpha\mu^\alpha(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)(\theta^\alpha + \mu^\alpha)$
$F = \mu^\alpha\mu^\alpha(-\pi^\alpha(-\sigma^\alpha + \theta^\alpha) + \gamma^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha))$
$G = \mu^\alpha\mu^\alpha(-\sigma^\alpha + \theta^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)$
$H = \mu^\alpha\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)$
$I = \mu^\alpha\theta^\alpha[(-\sigma^\alpha + \theta^\alpha)(-\pi^\alpha) + \gamma^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)]$
$K = -\mu^\alpha\theta^\alpha[(-\sigma^\alpha + \theta^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)]$
$M = \mu^\alpha\theta^\alpha[(\sigma^\alpha + \theta^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)]$
$N = \mu^\alpha(\theta^\alpha + \mu^\alpha)(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)$
$U = \mu^\alpha(\theta^\alpha + \mu^\alpha)\dfrac{\beta^\alpha\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}(-\sigma^\alpha - \mu^\alpha - \pi^\alpha)$
$S = -\mu^\alpha\dfrac{\beta^\alpha\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}(\theta^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)$
$R = \mu^\alpha(\theta^\alpha + \mu^\alpha)(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)$

$$\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta^\alpha\Lambda^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a une seule valeur propre

$$\lambda = \frac{\beta^\alpha\Lambda^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}$$

Par conséquent, le nombre de reproduction du modèle (III.2) est déterminer par

$$R_0 = \rho(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}) = max(\lambda) = \frac{\beta^\alpha\Lambda^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}$$

Donc

$$R_0 = \frac{\beta^\alpha\Lambda^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}$$

il est claire que S^*, E^*, I^*, Q^* et R^* sont positifs si et seulement si $R_0 > 1$.

Théorème 17. *(Équilibres)[38]*
Le modèle (III.2) possède toujours un équilibre sans maladie (DFE) $F_0 = (S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0)$, quelque soit les valeurs des paramètres, En outre, le modèle admet un unique équilibre endémique $F_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ si seulement si $R_0 > 1$.

III.3 Stabilité locale du point d'équilibre trivial

Théorème 18. *Le point DFE (équilibre sans maladie) du modèle (III.2) est localement asymptotiquement stable si* $R_0 < 1$.

Preuve. la jacobienne du modèle (III.2) au point DFE(équilibre sans maladie) est

$$J = (F_0) = \begin{pmatrix} -\mu^\alpha & -\beta^\alpha S_0 & -\beta^\alpha S_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^\alpha S_0 - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) & \beta^\alpha S_0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^\alpha & -(\sigma^\alpha + \mu^\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^\alpha & \sigma^\alpha & -(\theta^\alpha + \mu^\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta^\alpha & -\mu^\alpha \end{pmatrix}$$

le polynôme caractéristique de J est

$$P(x) = (\lambda + \mu^\alpha)[\lambda + (\theta^\alpha + \mu^\alpha)](\lambda + \mu^\alpha)(\lambda^2 + \tau_1\lambda + \tau_2)$$

avec

$\tau_1 = -[\beta^\alpha \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) - (\sigma^\alpha + \mu^\alpha)]$

$\tau_2 = (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)(\sigma^\alpha + \mu^\alpha) - \beta^\alpha \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)$

Si $\tau_1 et \tau_2$ sont positifs si et seulement si $R < 1$, en effet

$$R_0 = \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)} < 1 \Rightarrow \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} < \frac{(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha}$$

d'où

$$\tau_1 = -\left[\frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) - (\sigma^\alpha + \mu^\alpha)\right]$$
$$\tau_1 < -\left[\frac{(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha} - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) - (\sigma^\alpha + \mu^\alpha)\right]$$
$$\tau_1 < -\left[\frac{(\sigma^\alpha + \mu^\alpha) - (\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) - (\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha}\right]$$
$$\tau_1 < -\left[-\frac{(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha}\right]$$
$$\tau_1 > 0$$

et

$$\tau_2 = (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)(\sigma^\alpha + \mu^\alpha) - \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)$$
$$\tau_2 = \frac{(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)\mu^\alpha - \beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha}$$

On a $\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) > \beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)$

Donc $\tau_2 > 0$.

Ce qui implique que deux racines du polynôme $\lambda^2 + \lambda\tau_1 + \tau_2$ ont des parties réelles négatives. Par conséquent, les parties réelles des cinq valeurs propres de la matrice $J(F_0)$ sont toutes négatives, ou de manière équivalente F_0 est localement stable.

III.4 Stabilité globale du point trivial

On montre la stabilité globale du point d'équilibre trivial en utilisant le théorème de stabilité de Lyapunov.

Théorème 19. *[38]*

Si $R_0 < 1$ alors le point DFE(équilibre sans maladie) du modèle (III.2) n'est pas seulement localement asymptotiquement stable mais aussi uniformément asymptotiquement stable.

Preuve. Puisque les trois premières équations du modèle $(III.2)$ ne dépendent pas des états Q et R, il suffit de considérer le sous-système suivant :

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^\alpha S &= \Lambda^\alpha - \mu^\alpha S - \beta^\alpha S(E+I) \\ \\ {}_0^cD_t^\alpha E &= \beta^\alpha S(E+I) - \pi^\alpha E - (\mu^\alpha + \gamma^\alpha)E \\ \\ {}_0^cD_t^\alpha I &= \pi^\alpha E - \sigma^\alpha I - \mu^\alpha I \end{cases}$$

Soit l'ensemble défini par

$$\Omega : \left\{ (S, E, I) \ S, E, I \geq 0, , S \leq \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} \right\},$$

et considérons une fonction de Lyapunov $V : \Omega \longmapsto \mathbb{R}_+$ donné par

$$V(S,E,I) = (S - S_0 \ln \frac{S}{S_0} - S_0) + E + \frac{\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha} I$$

En utilisant la propriété de linéarité de la dérivée de caputo, on obtient

$$\begin{aligned}
{}_0^cD_t^\alpha V &\leq \left(1 - \frac{S_0}{S}\right) {}_0^cD_t^\alpha S(t) +_0^c D_t^\alpha E + L_0^c D_t^\alpha I \\
&\leq \left(1 - \frac{S_0}{S}\right) (\Lambda^\alpha - \mu^\alpha S) +_0^c D_t^\alpha E + L\left(\pi^\alpha E - \sigma^\alpha I - \mu^\alpha I\right) \\
&\leq \frac{\mu^\alpha}{S} (S - S_0)(S_0 - S) +_0^c D_t^\alpha E + \frac{\pi^\alpha \Lambda^\alpha}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha} - L\sigma^\alpha I - \mu^\alpha I L \\
&\leq -\mu^\alpha \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} (S - S_0)^2 + \left(\frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) + \pi^\alpha L\right) E + I \left(\frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - (\sigma^\alpha + \mu^\alpha) L\right) \\
&\leq -\Lambda^\alpha (S - S_0)^2 + \tau_1 E + \tau_2 I,
\end{aligned}$$

avec $L = \dfrac{\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha}$,

$\tau_1 = \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) + \dfrac{\pi^\alpha(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha}$ et $\tau_2 = \beta^\alpha \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - \dfrac{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \gamma^\alpha}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha}$.

τ_1 et τ_2 sont négatifs si et seulement si $R_0 < 1$, en effet

On a

$$R_0 = \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)} < 1 \Rightarrow \beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) < \mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) + \frac{\pi^\alpha(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha} \\
&= \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) - \mu^\alpha(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha) + \mu^\alpha \pi^\alpha (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}{\mu^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)} \\
&= \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) - (\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)[\mu^\alpha \pi^\alpha + \mu^\alpha \sigma^\alpha + \mu^{\alpha^2} - \mu^\alpha \pi^\alpha]}{\mu^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)} \\
&= \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) - \mu^\alpha(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)}{\mu^\alpha(\pi^\alpha \sigma^\alpha + \mu^\alpha)} \\
&< 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} - (\sigma^\alpha + \mu^\alpha)\frac{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \gamma^\alpha}{\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha} \\
&= \frac{\beta^\alpha \Lambda^\alpha (\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) - \mu^\alpha(\sigma^\alpha + \mu^\alpha)(\pi^\alpha + \mu^\alpha + \gamma^\alpha)}{\mu^\alpha(\pi^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)} \\
&< 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, F_0 est uniformément asymptotiquement stable.

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons présenté deux modèles épidémiologiques covid-19 et covid-19 fractionnaire.
Pour le premier modèle, on a montré l'existence d'un point d'équilibre sans maladie qui est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$, et un point d'équilibre endémique positif si $R_0 > 1$. Pour le deuxième modèle on a utilisé le théorème géneralisé de la valeur moyenne et le principe de comparaison fractionnaire pour montrer la positivité, et on a montré la stabilité locale et globale du point d'équilibre trivial si $R_0 < 1$.
Dans un futur, nous étendrons les résultats de ce travail pour proposer de nouveaux modèles pour l'épidémie de covid-19 en particulier, et des stratégies efficaces pour contrôler et prévenir la maladie.

Bibliographie

[1] Atangana ,A. :Fractal-fractional differentiation and integration : connecting fractal calculus and fractional calculus to predict complex system. Chaos Solitons Fractals 102,396-406(2017)

[2] Atangana, A. : Fractional discretization : the African's tortoise walk.Chaos Solitons Fractals 130, 109399(2020)

[3] AUGER ,P., LETT ,C.,AND POGGIALE ;J. Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés.

[4] Caputo, M. : Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-ii.Geophys.J.Int.13(5), 529-539(1976)

[5] DANG-VU, H., AND DELCARTE , C.Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal , Fortran et Mathematica . Ellipses ; 2000.

[6] Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., Metz, J. A. (1990). On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R 0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. Journal of mathematical biology, 28(4), 365-382.

[7] Delavari , H., Baleanu ,D.,Sadati, J. : Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear Dyn. 67,2433-2439(2012)

[8] Diethelm K .The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-oriented Exposition using Differential Operators of caputo Type. Springer ; 2010.p.247.

[9] Derdei Bichara.Étudedemodèlesépidémiologiques :Stabilité,observationetestimationde paramètres.Systèmesdynamiques[math.DS].UniversitédeLorraine,2013.Français.NNT :2013LORR00 tel-01749335v2

[10] I.Nesteruk, "Statistics-based predictions of coronavirus epidemic spreading in Mainland China," Innovative Biosystems and Bioengineering, vol.4,no.1,PP.13-18,2020.

[11] J.Hale, Ordinary differential equations, Springer. New York 1969.

[12] J.L.Cao,X.R.Hu,W.J.Tu,and Q.Liu ,"clinical features and short-term outcomes of 18 patients with corona virus disease 2019 in intensive car unit ,"Intensive Care Medicine ,vol.46,no.5,pp.851-853,2020.

[13] J.L.Cao,W.J.Tu,X.R.Hu,and Q. Liu, "clinical features and short-term outcomes of 102 patients with Coronavirus disease 2019 in Wuhan, China," Clinical Infectious Diseases , 2020.

[14] Johns Hopkins University,"Internet source national health agencies, report p to 08 May"

[15] Li,Y., Cheng,Y., Podlubny ,I. : Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. Automatica 45, 1965-1969(2009)

[16] Lin, W. :Global existence theory and chaos control of fractional differential equations. J.Math.Anal.Appl.332(1),709-726(2007).

[17] LASALLE, J. Stability theory for ordinary differential equation.J Differ. Equations 1968.

[18] LASALLE.J.P.the Stability of dynamical Systems, Society for industrial and applied mathematics , philadelphia , pa.,.Regional conference Series in Applied . Mathematics.1976.

[19] M.Batista ,Estimation of the final size of the coronavirus epidemic by SIR model , Research Gate, 2020.

[20] Messaoud, A. B., Talmoudi, S., Ksour, M. (2016). Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles extrêmes d'ordre entier. In Conférence Internationale des Energies Renouvelables (CIER-2016) (pp. 134-140).

[21] MOULAY, E. Stabilité des équations différentielles ordinaires .

[22] MURRAY, J. D. Mathematical biology II : spatial models and biomedical applications. Springer-Verlag, 2001.

[23] MURRAY, James D. Mathematical biology : I. An introduction. Springer Science , Business Media, 2007.

[24] Odibat,Z.,Baleanu, D. : Numerical simulation of initial value problems with generalized Caputo-type fractional derivatives. Appl.Numer.Math. 156,94-105(2020).

[25] Odibat,Z.,Shawagfh, N. :Generalized Taylor's formul. Appl.Math.Comput. 186(1),286-293(2007).

[26] P.Auger , C .Lett,J.C.Poggiale, Modélisation mathématique en écologie, Fevier 2010.

[27] Podlubny,I. :Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego (1998)

[28] Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego : Academic Press ;1999.

[29] P. van den Driessche, J.Watmough.Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmision, Math . Biosci.180(2002)29. of disease transmission, Math. Biosci.180 (2002) 29.

[30] P.Van den Driessche and J. Watmough, "Further notes on the basic reproduction number," in Mathematical Epidemiology, Lecture Notes in Mathematics, F.Brauer, P. Driessche, and J.Wu, Eds.,pp.159-178,2008.

[31] RACHID, Ahmed et MEHDI, Driss. Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires. Editions Technip, 1997.

[32] Van den Driessche, P.,Watmough, J. : Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental model of disease transmission. Math.Biosci. 180,29-48(2002)

[33] V.A.Okhuese, Mathematical predictions forcoronavirus as a global pendamic, Research Gate,2020.

[34] Vargas-De-Leon, C. :Volterra-type Lapunov functions for fractional-order epidemic systems. Commun.Nonlinear Sci.Numer.Simul.24,75-85(2015)

[35] W.Ming,J.V.Huang, and C.J.P. Zhang," Breaking down of the healthcare system :mathematical modelling for controlling the novel coronavirus (2019-nCoV) outbreak in Wuhan, China " medRxiv, 2020.

[36] X. LIAO , L. WANG , P.YU, Stability of Dynamical Systems. Elsevier , première edition , 2007.

[37] Zeb,A.Alzahrani,E.,Erturk,V.S.,Zaman,G. :Mathematical model for coronavirus disease 2019 (COVID-19)containing isolation class. BioMed Res.Int.2020,Article ID 3452402(2020).

[38] Zhang, Z., Zeb, A., Egbelowo, O. F., Erturk, V. S. (2020). Dynamics of a fractional order mathematical model for COVID-19 epidemic. Advances in Difference Equations, 2020(1), 1-16.