

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et de l'Informatique



M ÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématique
Domaine : Mathématique et l'Informatique
Filière : Mathématique
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation

ETUDE DU MODELE DE LESLIE EN DYNAMIQUE DES POPULATIONS

Présenté Par :

M. ELAIHAR Arafat

Devant le jury composé de :

Dr. MAMMAR Imane. (M C B) UAT.B.B (Ain Temouchent)	Présidente
Dr. BELATTAR Zokha. (M C B) UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr. HELLAL Meryem. (M C B) UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :
mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de
m'encourager, qu'*ALLAH* me les garde,
mes chers frères et ma sœur,
tous les membres de ma famille, petits et grand,
mes collègues de ma promotion sans exception.

Arafat

Remerciements

Tout d'abord, je remercie *Dieu* qui m'a donné la volonté, la motivation et surtout la santé durant toutes mes années d'études.

Pour le soutien d'accompagnement qu'elle m'a accordé, je remercie vivement *M^{elle}. HELAL Meryem* d'avoir accepté l'encadrement de ce mémoire. Je suis très reconnaissant de l'aide qu'elle m'a apporté à travers les nombreuses discussions qu'on a fait. De plus, sa grande disponibilité, ses précieux conseils et orientations dans la rédaction de ce manuscrit ainsi que dans la préparation de la soutenance m'ont été d'une aide inestimable.

Je tiens aussi à remercier *Mme. MAMMAR Imane* pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à *Mme. BELATTAR Zokha* qui a accepté d'évaluer ce travail.

Mon respect et mes remerciements vont, aussi, à tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de l'université de Ain Temouchent.

Je tiens à remercier, chaleureusement, les êtres qui me sont les plus chers au monde "mes parents", pour leurs sacrifices et leurs conseils, Sans eux, je ne serais jamais arrivé à ce niveau, que dieu les garde.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent, à tous mes amis et mes collègues pour les moments et les souvenirs inoubliables qu'on a passé ensemble.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'épanouissement et l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction	6
1 Préliminaires	8
1.1 Équations différentielles ordinaires	8
1.2 Linéarisation des systèmes non linéaires	11
1.3 Stabilité des points d'équilibres selon la trace et le déterminant d'une matrice	13
2 Modèles de base en dynamique de populations	15
2.1 Modèles de dynamique d'une seule population	15
2.1.1 Modèle de Malthus	15
2.1.2 Modèle de Verhulst	17
2.2 Modèle avec deux populations de Lotka-Volterra	20
3 Modèle de Leslie	24
3.1 Présentation du modèle	24
3.2 Comportement asymptotique du modèle discret de Leslie	26
3.3 Théorème de Perron-Frobenius	27
3.4 Interprétation	28
3.5 Application théorique	29
3.6 Application numérique	32
Conclusion	40
Bibliographie	41

Table des figures

1	Graphe de cycle de vie de moustique	6
1.1	Résumé des différents portraits de phase possibles du système $\dot{X} = AX$	14
2.1	Évolution de la population selon le modèle de malthus.....	17
2.2	Évolution de la population selon modèle logistique.....	19
2.3	Approche asymptotique de la population vers la capacité limite du milieu $k = 5$ quand $x(t) = 7, 5$ et 1	20
2.4	L'évolution d'un système proies prédateurs de Lotka-Volterra.	23
2.5	Portrait de phase du Lotka-Volterra.	23
3.1	cycle de vie pour $p = 4$	25
3.2	cycle de vie associé à des matrices non primitives.....	27
3.3	Évolution des trois classes d'âge de la population de rougeurs.	30
3.4	Évolution des trois classes d'âge de la population au cour du temps	34
3.5	Évolution de la population après 100 ans.....	39

Notations

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

$[a, b]$: Intervalle fermé de \mathbb{R} contenant les nombres entre a et b.

$C = C([- \tau, 0], \mathbb{R})$: Ensemble des fonctions continues de $[- \tau, 0]$ dans \mathbb{R} .

$C^1 = C^1([- \tau, 0], \mathbb{R})$: Ensemble des fonctions continues et dérivables de dérivée continue de $[- \tau, 0]$ dans \mathbb{R} .

$|\cdot|$: La valeur absolue d'un nombre réel.

$\|\cdot\|$: Norme dans \mathbb{R}^n .

$y' = \frac{dy}{dt}$: La dérivée première qui représente la vitesse du système.

$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$: La dérivée seconde de y .

$J_{(x,y)}$: Matrice jacobienne au point (x, y) .

P : Matrice de passage.

P^{-1} : L'inverse de matrice de passage.

$\lambda_i (i = 1, 2, \dots)$: Les valeur propres d'une matrice.

$\det J_{(x,y)}$: Le determinant de la matrice $J_{(x,y)}$.

$Tr J_{(x,y)}$: La trace de la matrice $J_{(x,y)}$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty}$: La limite qu'on t tends vers $+\infty$.

sup : Borne supérieure.

λ^* : valeur propre dominante.

V^* : vecteur propre dominant.

Introduction

Ce mémoire de Master, à pour but de faire une étude d'un modèle mathématique pour des populations structurées en âge, qui est le modèle de Leslie. Ce modèle est nommé d'après Patrick H. Leslie (1900-1972), c'est un modèle matriciel basé sur la structure interne de la population. Il étudie le stade de développement de la population au cours du temps ([12],[13]).

Le cycle de vie est l'unité fondamentale de description du fonctionnement d'une population, sur laquelle repose la théorie des modèles matriciels de dynamique de population, mieux connus sous le nom du *modèle de Leslie* qui est un outil de modélisation parmi d'autres, le *Modèle de Leslie* est un modèle mathématique permettant de décrire la dynamique d'une population structurée en classes, cela signifie que sous réserve les individus de la population puissent être groupés en catégories au sein desquelles les probabilités de survie et les taux de reproduction sont les mêmes pour tout individu, ces modèles peuvent être utilisés pour prédire l'évolution du nombre d'individus présents dans chaque catégorie d'un pas de temps sur l'autre (voir Figure 1).

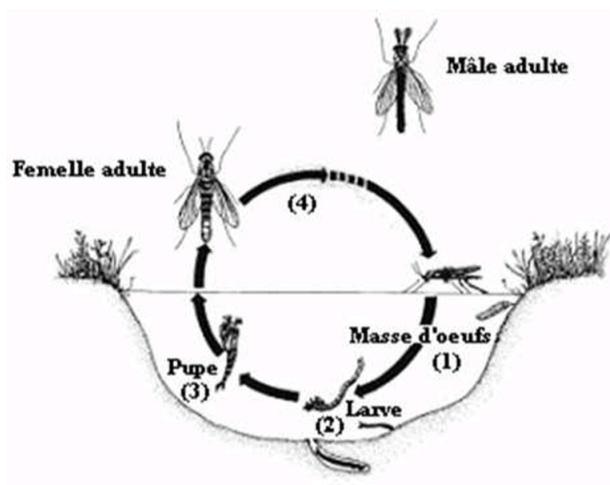


FIGURE 1 : Graphe de cycle de vie de moustique

La modélisation mathématique consiste à utiliser les mathématiques pour décrire, et expliquer et prévoir un comportement d'un phénomène dans le monde réel. La modélisation mathématique a fait l'objet de nombreuses recherches dans plusieurs domaines, en particulier la dynamique des populations, l'écologie, l'épidémiologie, la biologie, la physique, l'économie et la chimie. Les premiers pas de la modélisation sont basés sur les équations différentielles ordinaires ou les équations aux dérivées partielles dont l'étude de l'évolution d'une population au cours du temps. Dans notre travail on étudie cette évolution au cours du temps en utilisant des modèles matriciels. Effectivement, cette étude est basée sur les outils de calcul matriciel comme les valeurs et les vecteurs propres.

En 1798, le mathématicien britannique Thomas Malthus a présenté un modèle de la dynamique de population. Après en 1838, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst a présenté un nouveau modèle en s'inspirant du modèle de Malthus. Les deux modèles négligent plusieurs paramètres, par conséquent ils donnent la possibilité qu'une population tend vers l'infini alors que les ressources disponibles dans un environnement se limitent en une taille maximale. De même, les deux modèles précédents ne prennent pas en compte la structure interne de la population, ces défauts ont été réglés après la découverte du modèle matriciel de Leslie. Les débuts du modèle de Leslie reviennent aux années 40 quand Bernardelli en 1941 et Lewis 1942, ont décrit l'évolution des populations par des systèmes matriciels, ces travaux ont été terminés par Leslie (1945,1948) qui a considéré aussi la structure en âge [2].

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre, représente des généralités sur les équations différentielles, rappel de quelques définitions et théorèmes importants pour faciliter la compréhension de notre travail.

Le deuxième chapitre, a pour objectif de présenter quelques modèles de base en dynamique des populations.

Le troisième chapitre, est dédié à l'étude de la dynamique de population structurée en âge présentée par le modèle de Leslie. Dans ce chapitre on évalue et on observe le stade de développement de chaque classe d'âge au cours du temps. On termine ce mémoire par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats utiles pour faciliter la compréhension de notre mémoire. é

1.1 Équations différentielles ordinaires

Soient E un espace de Banach et I un ouvert de \mathbb{R} . Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est une équation dont l'inconnue, est une fonction y n fois dérivable et est exprimée sous la forme :([7],[10])

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(t), \quad (1.1)$$

où F est une fonction continue sur un ouvert $I \times U$ avec U un ouvert de E^{n+1} . En particulier l'équation (1.1) est donnée sous une forme explicite par :

$$y^{(n)} = G(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

La solution y est en général à valeur dans E^n et E est en général donné par \mathbb{R} .

Définition 1.1.1. (équation différentielle d'ordre 1)[10]

$f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert non vide $I \times \mathbb{R}^n$ est à valeur dans \mathbb{R}^n telle que :

$$y' = f(t, y). \quad (1.2)$$

on dit que la fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur I , est une solution de l'équation (1.2) si elle est dérivable sur I et elle vérifie l'équation (1.2) pour tout $t \in I$.

Définition 1.1.2. (Équation différentielle autonome) [10]

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation vérifiant l'équation (1.2) et de la forme :

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Définition 1.1.3. (*Équation différentielle non autonome*)[10]

On appelle équation différentielle non autonome d'ordre n toute équation vérifiant l'équation (1.2) et de la forme :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Remarque 1.1.1. [10]

Les équations autonomes sont très importantes lorsqu'on cherche des solutions stationnaires ainsi que leurs stabilités.

Définition 1.1.4. [7]

On appelle condition initiale de l'équation $y' = f(t, y)$ une valeur $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ telle que la solution y satisfait la condition $y(t_0) = y_0$.

Proposition 1.1.1. [7]

Si f est de classe C^n sur $I \times \mathbb{R}^n$ alors toute solution de (1.2) est de classe C^{n+1} .

Définition 1.1.5. (*Problème de Cauchy*)[7]

Soient I un ouvert de \mathbb{R} , U un ouvert \mathbb{R}^n et $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

On appelle problème de Cauchy du premier ordre le problème avec condition initiale suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $(t_0, y_0) \in I \times U$.

Définition 1.1.6. (*solution classique de problème de Cauchy*)[7]

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite solution du problème de Cauchy (1.3) si :

- y est de classe C^1 sur I ,
- pour tout $t \in I$, $\dot{y} = f(t, y(t))$,
- $y(t_0) = y_0$, pour $(t_0, y_0) \in I \times U$

Théorème 1.1.1. [7]

Soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution intégrale du problème de Cauchy (1.3) si et seulement si :

- Pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in I \times \mathbb{R}^n$,
- y est continue sur I ,

– Pour tout $t \in I$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds .$$

Définition 1.1.7. (Valeur propre et vecteur propre)[24]

Soient A une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. λ est une valeur propre correspondante à un vecteur propre $v \neq 0$ associé à A si et seulement si

$$Av = \lambda v.$$

Définition 1.1.8. (Formes de Jordan réelles dans \mathbb{R}^2)

Soit A une matrice réelle carrée de dimension 2. Alors il existe une matrice réelle inversible P telle que $J = P^{-1}AP$ est de l'une des formes suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ où λ_1, λ_2 deux valeurs propres distinctes de A ,

(b) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ λ_0 est une valeur propre double de A ,

(c) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ λ_0 est une valeur propre double de A ,

(d) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0, \alpha > 0$ deux valeurs complexes.

Remarque 1.1.2. Dans les cas (a) et (d) on peut également trouver :

– (a') $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

– (d') $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

Les matrices J s'appellent **les formes de Jordan** associées à A . Les valeurs propres de la matrice A (et de la matrice J) sont les valeurs λ solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Donc

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Définition 1.1.9. (Les points d'équilibres)[8]

Soit l'équation différentielle autonome du premier ordre :

$$\dot{y} = f(y) \quad (1.4)$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur $U \subset \mathbb{R}^n$.

Un point $y^* \in U$ est appelé point d'équilibre (ou : point stationnaire, solution stationnaire, point critique) de l'équation (1.4) si :

$$f(y^*) = 0.$$

Autrement dit y^* est une solution constante de l'équation (1.4).

Définition 1.1.10. (Stabilité)[3]

On dit que l'équilibre y^* de l'équation (1.4) est stable si pour tout $\varepsilon \geq 0$ il existe δ_ε tel que pour toute solution y de (1.4) :

$$\|y_0 - y^*\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|y(t) - y^*\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.11. (Stabilité asymptotique)[3]

On dit que l'équilibre y^* de l'équation (1.4) est asymptotique stable s'il existe une constante $c > 0$, telle que si $|y(t_0) - y^*(t_0)| < c$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - y^*\| = 0.$$

1.2 Linéarisation des systèmes non linéaires

On considère la méthode la plus utilisée en pratique dans le cas des systèmes non linéaires [19].

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.5)$$

où f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R}^2 à valeur dans \mathbb{R} . Soit (x^*, y^*) un point d'équilibre pour ce système.

En faisant le développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions autour de (x^*, y^*) et on obtient :

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{df}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{df}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) + \frac{d^2f}{dx^2}(x^*, y^*)\frac{(x-x^*)^2}{2!} + \frac{d^2f}{dy^2}(x^*, y^*)\frac{(y-y^*)^2}{2!} + \frac{d^2f}{dxdy}(x^*, y^*)(x - x^*)(y - y^*) + o(x^2 + y^2),$$

$$g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{dg}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dg}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) + \frac{d^2g}{dx^2}(x^*, y^*)\frac{(x-x^*)^2}{2!} + \frac{d^2g}{dy^2}(x^*, y^*)\frac{(y-y^*)^2}{2!} + \frac{d^2g}{dxdy}(x^*, y^*)(x - x^*)(y - y^*) + o(x^2 + y^2).$$

On suppose que :

$$\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{u} = \dot{x}, \\ \dot{v} = \dot{y} \end{cases}$$

Alors, le développement de Taylor devient :

$$f(u + x^*, v + y^*) = f(x^*, y^*) + \frac{df}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{df}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) + o(x + y)$$

$$g(u + x^*, v + y^*) = g(x^*, y^*) + \frac{dg}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dg}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) + o(x + y)$$

Il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire :

$$\dot{u} = \frac{df}{dx}(x^*, y^*)u + \frac{df}{dy}(x^*, y^*)v$$

$$\dot{v} = \frac{dg}{dx}(x^*, y^*)u + \frac{dg}{dy}(x^*, y^*)v$$

On encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx}(x^*, y^*) & \frac{df}{dy}(x^*, y^*) \\ \frac{dg}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dg}{dy}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Définition 1.2.1. [19]

Soit (x^*, y^*) est un point d'équilibre du système (1.5) et soit $J_{(x,y)}$ la matrice jacobienne associée à ce système, la linéarisation de ce système en ce point d'équilibre est définie par :

$$J_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx}(x^*, y^*) & \frac{df}{dy}(x^*, y^*) \\ \frac{dg}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dg}{dy}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

notée $\dot{Y} = JY$, où $J^* = J_{(x^*, y^*)}$ est appelée la matrice jacobienne calculée au point (x^*, y^*) .

Remarque 1.2.1. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Proposition 1.2.1. [20]

Soit A et B deux matrices carrées telles que $B = PAP^{-1}$ avec P une matrice inversible de même ordre que A et B . Alors $B^n = PA^nP^{-1}$.

Définition 1.2.2. [5]

Une matrice M dans $M_p(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) est notée $M \geq 0$ (resp. $M > 0$) si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs).

1.3 Stabilité des points d'équilibres selon la trace et le déterminant d'une matrice

La stabilité d'un point d'équilibre (x^*, y^*) est classée selon les valeurs propres qui jouent un rôle important dans l'analyse de la stabilité des points d'équilibres de la matrice jacobienne (1.5), [18]. Aussi bien que son déterminant et sa trace, tel que :

$$\det(J_{(x^*, y^*)}) = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{et} \quad \text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Les valeurs propres de $J_{(x^*, y^*)}$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \det(J_{(x^*, y^*)})\lambda + \text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) = 0.$$

La nature des point d'équilibre dépend essentiellement du signe de discriminant qui est donné par :

$$\Delta = \text{tr}^2(J_{(x^*, y^*)}) - 4\det(J_{(x^*, y^*)}),$$

Trois cas existent :

- **Cas 1** : $\Delta = 0$

On trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et

$$\begin{cases} \det J_{(x^*, y^*)} = \lambda^2, \\ \text{Tr} J_{(x^*, y^*)} = 2\lambda. \end{cases}$$

Donc

- Si la trace est positive c'est-à-dire $\lambda > 0$, on a un nœud dégénéré instable.
- Si la trace est négative c'est-à-dire $\lambda < 0$, on a un nœud dégénéré stable.

- **Cas 2** : $\Delta \geq 0$

On trouve deux valeur propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 , alors :

- Si $\det J_{(x^*, y^*)} < 0$ et λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, alors le point d'équilibre est un point selle (col).
- Si $\det J_{(x^*, y^*)} > 0$ et $\text{tr} J_{(x^*, y^*)} < 0$ et λ_1 et λ_2 sont de signe négative, alors le point d'équilibre est un nœud stable.
- Si $\det J_{(x^*, y^*)} > 0$ et $\text{tr} J_{(x^*, y^*)} > 0$ et λ_1 et λ_2 sont de signe positif, alors le point d'équilibre est un nœud instable.

- **Cas 3** : $\Delta < 0$

On trouve deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$$

Donc

$$\begin{cases} \det J_{(x^*,y^*)} = \alpha^2 + \beta^2 > 0, \\ \text{Tr} J_{(x^*,y^*)} = 2\alpha. \end{cases}$$

- Si $\text{Tr} J_{(x^*,y^*)} = 0$, alors le point d'équilibre est un centre.
- Si $\text{Tr} J_{(x^*,y^*)} > 0$ c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est positive, alors le point d'équilibre est un foyer instable.
- Si $\text{Tr} J_{(x^*,y^*)} < 0$ c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est négative, alors le point d'équilibre est un foyer stable.

Classification des équilibres en fonction de la trace et du déterminant de la matrice $J_{(x^*,y^*)}$ est résumée comme suit :[18]

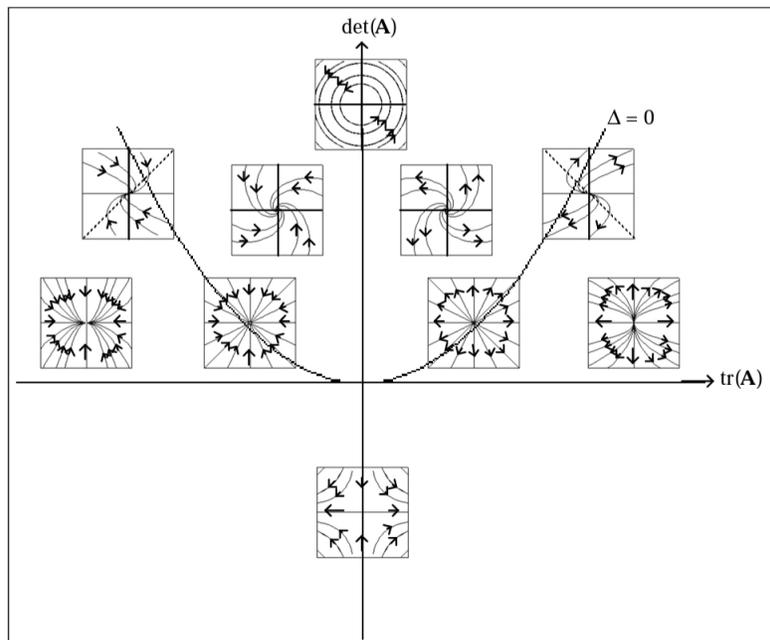


FIGURE 1.1 : Résumé des différents portraits de phase possibles du système $\dot{X} = AX$.

Chapitre 2

Modèles de base en dynamique de populations

Ce chapitre est consacré à l'étude des modèles de base (modèle de malthus et modèle logistique), ainsi qu'un modèle de dynamique d'une population structurée en âges. On note ici que les modèles étudiés dans ce chapitre sont tous autonomes.

2.1 Modèles de dynamique d'une seule population

De nombreux modèles de dynamique d'une seule population ont été développés. Cette section représente les modèles plus classiques. Dans le cas d'une population isolée, la variable d'état est soit l'effectif de la population, c'est-à-dire le nombre d'individus $x(t)$ de cette population à un instant t , soit la densité d'individus qui représente le nombre d'individus par unité de surface. La forme générale de loi de croissance de la population est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Avec x, f et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que la condition $x(t_0) = x_0$.

2.1.1 Modèle de Malthus

En 1798, le mathématicien britannique Thomas Malthus a proposé le premier modèle de la dynamique de population, en supposant que la variable d'état $x(t)$ est l'effectif de la population, et que les natalités et les décès sont proportionnels à la population à l'instant t (voir [16],[17]).

Malthus a proposé le modèle linéaire suivant :

$$\frac{dx}{dt} = nx - mx = rx. \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}$ on a n et m sont des constantes positives représentant les taux de natalité et de mortalité respectivement et $r = n - m$ est le taux de croissance de la population.

La solution de l'équation (2.1) est :

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

avec $x_0 = x(t_0)$ est une condition initiale donnée.

- Point d'équilibre :

Ce modèle admet un seul point d'équilibre $x^* = 0$.

- Stabilité :

On a :

$$f(x) = rx,$$

Par dérivation par rapport à x on obtient

$$f'(x) = r,$$

Au point $x^* = 0$ on a,

$$f'(0) = r.$$

Par conséquent, ce modèle admet trois comportements :

– Si $r > 0$: la population croît exponentiellement vers une densité infinie (explosion de la population), c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_0 e^{rt} = +\infty.$$

– Si $r < 0$: la population décroît exponentiellement vers une densité nulle (extinction de la population), c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_0 e^{rt} = 0.$$

– Si $r = 0$: la population reste à une densité constante (l'évolution de la population est stationnaire pour n'importe quelle condition initiale), c'est-à-dire pour tout $t \geq t_0$ on a : $x(t) = x_0$.

La figure suivante résume les résultats ci-dessus :

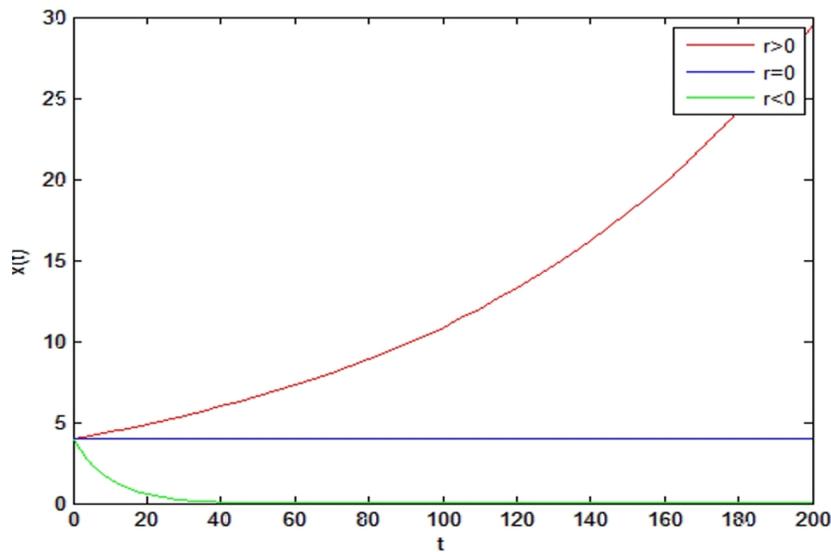
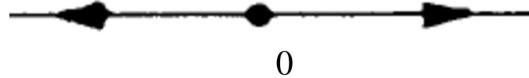


FIGURE 2.1 : Évolution de la population selon le modèle de malthus.

- Portrait de phase :

Le portrait de phase du modèle de Malthus est le suivant :

Pour $r > 0$: le point d'équilibre x^* est instable et les solutions s'éloignent de l'origine :



Pour $r < 0$: le point d'équilibre x^* est stable et les solutions s'approchent de l'origine :



Remarque 2.1.1. Dans le modèle de Malthus (rien ne limite la croissance peut être valable pendant une courte période), mais c'est irréaliste à long terme car le milieu ne peut pas supporter un nombre d'individus supérieur à un certain seuil.

2.1.2 Modèle de Verhulst

En 1838, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst a proposé un nouveau modèle qui améliore le modèle de Malthus. Précisément, le taux de croissance de la

population dépend de la densité de la population et d'une capacité maximale car quand le nombre d'individu d'une population augmente, les ressources diminuent et deviennent insuffisantes par suite les individus ne peuvent pas se propager indéfiniment dans un espace défini. Pour ceci, Verhulst a supposé que les taux de naissance et de mortalité dépendent de la densité des individus ([21],[22]), d'où

$$n(x) = \alpha - \beta x, \quad (2.2)$$

$$m(x) = \gamma + \delta x, \quad (2.3)$$

où avec α, β, γ et δ sont des constantes positives.

En remplaçant (2.2) et (2.3) dans (2.1), on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad (2.4)$$

Avec $r = \alpha - \gamma$ est une constante représentant le taux de croissance intrinsèque de la population supposé généralement positif et $k = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$ représente la capacité limite du milieu.

Par la méthode de séparation des variables pour l'équation (2.4) on obtient :

$$x(t) = \frac{rke^{rt}}{k + x_0(e^{rt} - 1)}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.5)$$

Avec $x_0 = x(t_0)$ est une condition initiale donnée. Soit

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

- Point d'équilibre :

$$f(x) = 0 \implies rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0$$

Donc

$$\text{soit } x = 0 \quad \text{soit } x = k,$$

Alors on a deux points d'équilibre :

$$x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad x_2^* = k.$$

- Stabilité :

Par dérivation de $f(x)$ par rapport à x , on trouve :

$$f'(x) = r\left(1 - \frac{2x}{k}\right),$$

Au point x_1^* on obtient

$$f'(x_1^*) = f'(0) = r > 0,$$

Donc le point $x_1^* = 0$ est un point instable.

Au point x_2^* on obtient

$$f'(x_2^*) = f'(k) = -r < 0,$$

Donc le point $x_2^* = k$ est un point stable.

D'autre part, l'évolution de la population dans ce modèle prévoit les comportements suivants :

- Si $x_0 < k$, la population croît et s'approche asymptotiquement de k quand $t \rightarrow +\infty$.
- Si $x_0 = \frac{k}{2}$, il existe alors un point d'inflexion au $x = \frac{k}{2}$ ce qui signifie que quand la population est égale à la moitié de sa capacité limite sa croissance atteint le maximum.
- Si $x_0 > k$, la population décroît et elle s'approche asymptotiquement de k quand $t \rightarrow +\infty$.

La figure suivante résume les résultats ci-dessus

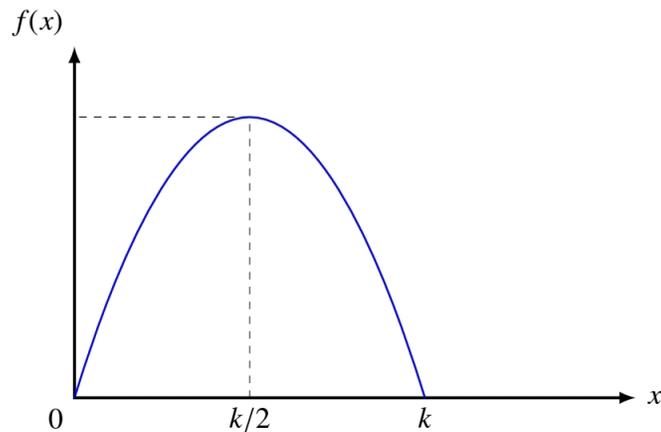


FIGURE 2.2 : Évolution de la population selon modèle logistique.

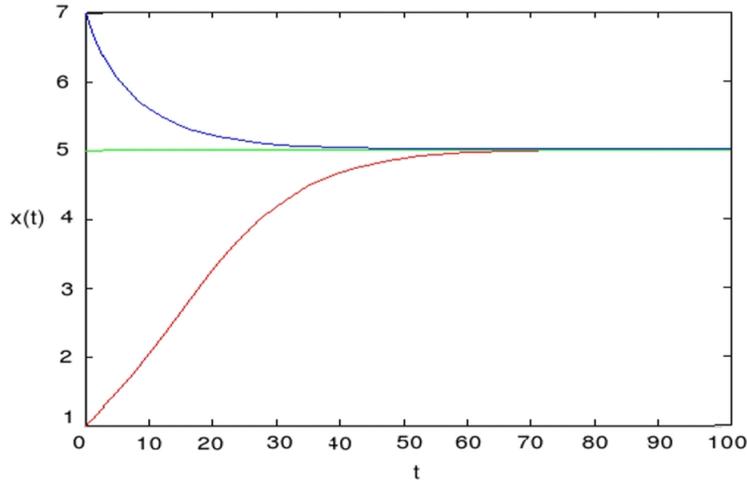
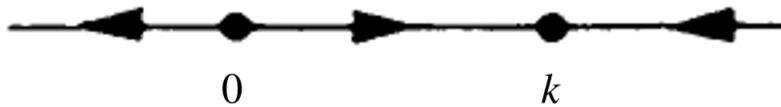


FIGURE 2.3 : Approche asymptotique de la population vers la capacité limite du milieu $k = 5$ quand $x(t) = 7, 5$ et 1 .

- Portrait de phase :

Le portrait de phase du modèle de Verhulst est le suivant :



2.2 Modèle avec deux populations de Lotka-Volterra

Considérons maintenant le cas de deux populations d'effectifs respectifs $x(t)$ et $y(t)$ en interaction. Le modèle dynamique de deux populations en interaction est un système de deux équations différentielles ordinaires couplées. D'une manière assez générale, il est usuel de décomposer chaque équation en une somme de deux termes, le premier terme correspond à la croissance de la population isolée et le second terme représente les interactions entre les deux populations :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(y) + k(x, y). \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ représentent les croissances des populations isolées et ne dépendent que de l'effectif de cette population alors que les termes $h(x, y)$ et $k(x, y)$ correspondent aux interactions entre les populations et dépendent des effectifs

des deux populations.

Le modèle que nous étudions a été proposé par **Volterra** en 1926 dans un ouvrage intitulé "Théorie mathématique de la lutte pour la vie" qui est probablement le premier à traité l'écologie mathématique.

Lotka-Volterra à proposé indépendamment et à peu près simultanément le premier modèle mathématique, pour tenter de décrire l'interaction entre une population de proies et une population de prédateurs (voir [23]).

Le système de **Lotka-Volterra** est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy, \\ \frac{dy}{dt} = -my + eaxy \end{cases} \quad (2.6)$$

avec : r, a, m et $d = ea$ sont des constantes strictement positives telles que :

x : l'effectif de la population de proie et y celui de la population de prédateur.

r : le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur.

a : le taux de prédation.

d : le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation (ou le taux de conversion à la biomasse prédateur).

m : le taux de mortalité (ou décès) du prédateur en l'absence de proie.

- Point d'équilibre :

On note

$$\begin{cases} f(x, y) = rx - axy, \\ g(x, y) = -my + dxy. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} rx - axy = 0, \\ -my + dxy = 0. \end{cases}$$

Donc on a deux points d'équilibre : le premier point triviale $(0, 0)$ et le deuxième point non-triviale $(x^*, y^*) = (\frac{m}{d}, \frac{r}{a})$.

- Stabilité :

Maintenant on va étudier la stabilité locale des points d'équilibre par la méthode de la matrice jacobienne qui est basée sur la linéarisation du système (2.6).

Soit la matrice jacobienne associée à ce système :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} r - ay & -ax \\ dy & -m + dx \end{pmatrix}.$$

– Le premier point d'équilibre $(0, 0)$:

La matrice jacobienne au point $(0, 0)$ donne :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

La matrice (2.7) est diagonale admettant deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = r > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -m < 0$$

Alors, puisque ces deux valeurs propres sont de signes opposés cela implique que le point $(0, 0)$ est un point selle.

– Le deuxième point d'équilibre $(\frac{m}{d}, \frac{r}{a})$:

La matrice jacobienne au point $(\frac{m}{d}, \frac{r}{a})$ est donnée par :

$$J_{(\frac{m}{d}, \frac{r}{a})} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-ma}{d} \\ \frac{dr}{a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

La trace et le déterminant de la matrice (2.8) :

$$\begin{cases} \det J_{(\frac{m}{d}, \frac{r}{a})} = rm > 0, \\ \text{tr} J_{(\frac{m}{d}, \frac{r}{a})} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Donc on prévoit un centre pour le système linéarisé, mais on peut rien dire pour le système non linéaire quand on s'éloigne des points d'équilibres, la linéarisation ne nous permet pas de conclure le portrait de phase complet du système (2.6).

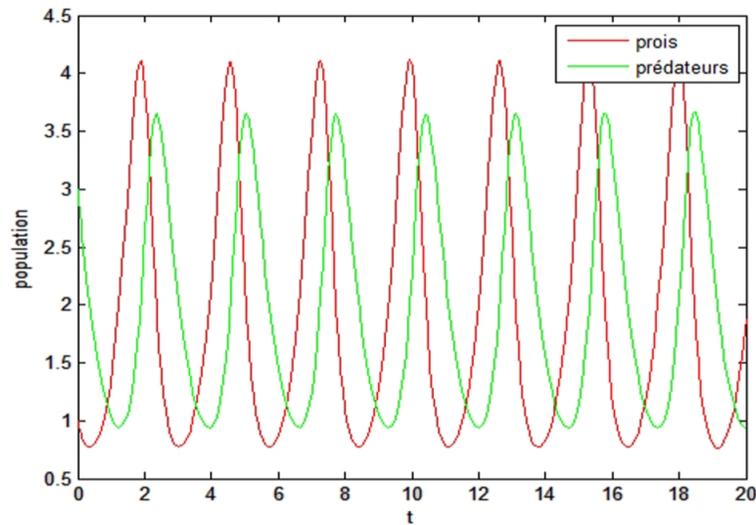


FIGURE 2.4 : L'évolution d'un système proies prédateurs de Lotka-Volterra.

• Portrait de phase :

– Isocline verticale : ($\dot{x} = 0$ et $\dot{y} \neq 0$).

$$\dot{x} = 0 \implies x = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{r}{a}.$$

– Isocline horizontale : ($\dot{y} = 0$ et $\dot{x} \neq 0$).

$$\dot{y} = 0 \implies y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{m}{d}.$$

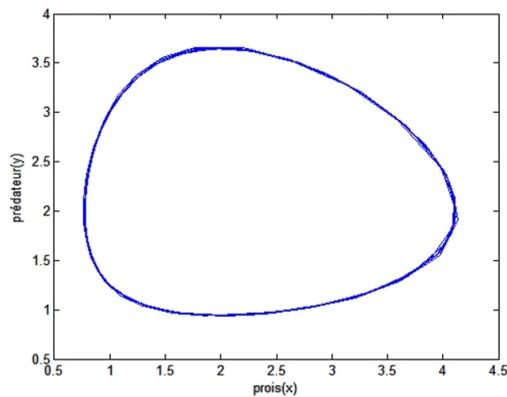


FIGURE 2.5 : Portrait de phase du Lotka-Volterra.

Chapitre 3

Modèle de Leslie

Le modèle de Leslie est un modèle démographique. Il est utilisé pour évaluer et observer l'évolution d'un nombre d'individus basé sur la composition de cette population, ce modèle a été introduit par P.H. Leslie en 1945, ce dernier avait critiqué le fait que dans les modèles précédents les taux de fécondité et de survie étaient constants pour tous les individus de la population considérée, alors que ceux-ci varient en fonction de *l'âge* ou du stade de développement des individus. Ainsi par exemple dans le cas d'une population de poissons, les œufs, larves et adultes n'ont pas le même taux de natalité ni le même taux de mortalité (voir [11], [12], [13],[14]).

3.1 Présentation du modèle

Le modèle de croissance de population le plus simple est le modèle malthusien, on se place dans le cas où le temps est discret : il est découpé en pas de temps de mêmes durées, si N_t représente la taille de la population (nombre d'individus) au pas de temps t celle au pas de temps $t + 1$ est donnée par l'équation.

$$N_{t+1} = rN_t. \quad (3.1)$$

Étant donnée une population initiale N_0 à $t = 0$ la taille de la population évolue de manière exponentielle. Si $r < 1$, la population finit par s'éteindre et si $r > 1$ la population finit par exploser, donc les résultats ne sont pas réels. De même, le modèle ne prend pas en compte la structure interne de la population.

Le modèle de Leslie est un modèle mathématique discret de croissance d'une population, le modèle de Leslie permet de prendre en compte la composition de la population et cette population peut être structurée en classes d'âges (par exemple pour la population humaine), ou en stades évolutifs de même durée (par exemple œufs, larves, adultes pour certains insectes). La durée passée par un individu dans une classe d'âge ou stade évolutif correspond à celle d'un pas de temps, par exemple si chaque pas de temps correspond à un an, les classes d'âges choisies seront : 0-1 ans, 1-2 ans, 2-3 ans. Dans

les modèles précédents la taille de la population à un pas de temps t est donnée par un scalaire N_t . La population peut cependant être décrite plus finement à l'aide d'un vecteur population pour représenter cette structuration en classes, lorsque la population peut être divisée en p classes le vecteur population $N_t \in \mathbb{R}^p$ donné par

$$N_t = \begin{pmatrix} N_{1,t} \\ \vdots \\ N_{p,t} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in 1, \dots, p$, $N_{i,t}$ représente l'effectif de la population dans la classe i au pas de temps t , ainsi pour certaines populations d'insectes, $N_{1,t}$, $N_{2,t}$ et $N_{3,t}$ représentent respectivement le nombre d'individus dans les stades lèvre, adulte non reproducteur et adulte reproducteur au pas de temps t .

Cette représentation permet de prendre en compte des paramètres de fécondité et de survie. En général, seules les femelles sont prises en compte dans les modèles de Leslie alors que la paternité n'est en générale pas connue, et donc le nombre de descendants par mâle ne peut pas être mesuré en générale aisément. La dynamique d'une population peut être représentée par un graphe de cycle de vie (voir Figure 3.1) dont les nœuds sont les différentes classes d'âge. Entre chaque pas de temps, une proportion $s_i \in]0, 1]$ d'individus survit et passe de la classe i à la classe $i + 1$. Ce passage est représenté par un segment qui part du nœuds $i > 1$ et qui va au nœud $i + 1$. De même, à chaque pas de temps, chaque individu de la classe i donne naissance à $f_i \geq 0$ individus, ceci est représenté par un arc entre les nœuds i et 1. Le nombre de naissances dues aux individus de la classe i est $f_i N_{i,t}$. Les nouveaux individus apparaissent dans la classes 1. On pose f_1 car la première classe d'âge ne se reproduit pas car les individus sont trop jeunes.

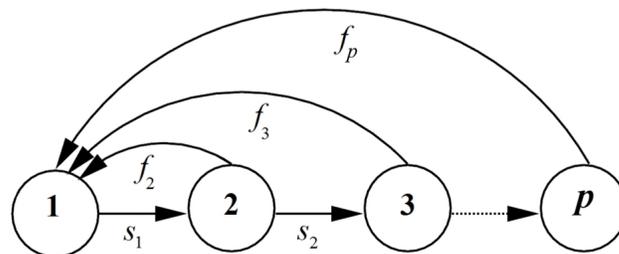


FIGURE 3.1 : cycle de vie pour $p = 4$.

L'état de la population au pas de temps $t + 1$ en fonction de celle à l'instant t est donné par l'équation suivante :

$$N_{t+1} = LN_t, \tag{3.2}$$

Donc

$$N_i(t+1) = LN_i(t) \implies \begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_p(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & \dots & f_p \\ s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & s_{p-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_p(t) \end{pmatrix}$$

où $L \in M_p(\mathbb{R})$ est la matrice

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & \dots & f_p \\ s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & s_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice L est appelée *matrice de Leslie*, elle est composée des taux de fécondité sur la première ligne, des taux de survie sur la sous-diagonale, et de 0 partout ailleurs. Les transitions représentées sur le cycle de vie correspondent aux éléments non nuls de la *matrice de Leslie*, ainsi qu'une transitions représentées entre une classe i et une classe j , l'élément $L_{j,i}$ sera non nul et prendra la valeur attribuée à la transition sur le graphe. On a vu que dans le modèle de **Leslie** les durées des classes d'âge considérées correspondent à celles des pas de temps du modèle.

3.2 Comportement asymptotique du modèle discret de Leslie

A partir de la formule de récurrence (3.2), on peut déterminer l'état de N_t de la population à l'instant t à partir de celle à l'instant initiale N_0 par la formule suivante :

$$N_t = L^k N_0.$$

Il apparait donc que le comportement asymptotique de la population est lié aux propriétés de la matrice L et plus particulièrement à ses éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres).

Définition 3.2.1. [1]

Une matrice positive M dans $M_p(\mathbb{R})$ est dite primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que M^k soit strictement positive .

Définition 3.2.2. [5]

Une matrice M dans $M_p(\mathbb{R})$ est dite non primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que M^k soit strictement négative (voir Figure 3.2).

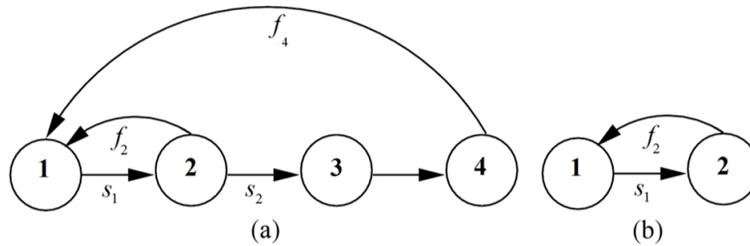


FIGURE 3.2 : cycle de vie associé à des matrices non primitives.

Définition 3.2.3. [10]

Un cycle est une suite de sommets (S_1, \dots, S_k) tel que deux sommets consécutifs sont reliés par un arc et tel que le dernier sommet est relié au premier par un arc. La longueur d'un cycle est le nombre d'arcs traversés (ou encore le nombre de sommets sur la Figure 3.1, 1, 2, 3 est un cycle de longueur 3.

Définition 3.2.4. [10]

Soit L une matrice carrée et primitive alors $\exists \lambda_i$ tel que $\lambda_i > \lambda_k$ ou $k = 1, \dots, p$ et $i \neq k$.
 $\lambda_i = \lambda^*$ S'appelle valeur propre dominante associée au vecteur propre V^* qui s'appelle vecteur propre dominant.

3.3 Théorème de Perron-Frobenius

L'analyse d'un modèle de Leslie repose sur le théorème de Perron-Frobenius [15].

Théorème 3.3.1. [15]

Soit $L \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice carrée de type n positive et primitive, alors il existe une valeur propre positive strictement plus grande que toutes les autres valeurs propres que l'on appelle valeur propre dominante λ^* , à laquelle est associée un vecteur propre dominant V^* dont tous les coefficients sont positifs, de plus si N_0 est un vecteur initial dont tous les coefficients sont strictement positifs, Soit $N(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))$

est sa dynamique et

$$S(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t) = N_1(t) + N_2(t) + \dots + N_i(t).$$

On a les propriétés suivantes :

$$1. \quad i = 1, \dots, n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_i(t+1)}{N_i(t)} \longrightarrow \lambda^*$$

.

$$2. \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N(t)}{S(t)} \longrightarrow V^*$$

.

Proposition 3.3.1. [15]

Si l'on a choisi le vecteur $V^* = (V_1^*, V_2^*, \dots, V_i^*)$ tel que

$$\sum_{i=1}^n V_i(t) = V_1^* + V_2^* + \dots + V_i^* = 1. \quad (3.3)$$

Ce résultat important permet d'affirmer que si la matrice de **Leslie** d'un modèle dynamique (3.1) est primitive, alors cette dynamique présentera lorsque t augmente, un comportement asymptotique de croissance exponentielle et la population se répartira selon une répartition particulière qui ensuite sera invariante au cours du temps.

Remarque 3.3.1. [15]

le calcul de ce taux de croissance de cette répartition asymptotique se fait simplement en recherchant la valeur propre dominante λ^* de la matrice de **Leslie** et le vecteur propre dominant V^* .

3.4 Interprétation

A l'instant t , la population totale vaut

$$S(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t)$$

Nous déduisons du théorème précédent que si la matrice de **Leslie** est primitive, nous avons les propriétés suivantes :

$$1. \quad \forall i \in 1, \dots, p, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_i(t+1)}{N_i(t)} = \lambda^*.$$

$$2. \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_i(t)}{S(t)} = V^*.$$

La première propriété décrit le comportement asymptotique de croissance exponentielle. La deuxième propriété souligne que l'on tend vers une répartition constante des individus dans les différentes classes d'âge, indépendamment de la taille de la population. Ce taux de croissance asymptotique et dépend uniquement de la matrice L , il s'agit de la valeur propre dominante et du vecteur propre, ces éléments ne dépendent pas de l'état initial de la population N_0 , même sans connaître les conditions initiales il est possible de déterminer vers quelle population va tendre et on peut également connaître la population totale après un certain nombre de pas de temps.

Les situation possible sont les suivantes :

- Si $\lambda^* > 1$: on a un croissance de la population.
- Si $\lambda^* = 1$: la population est à l'équilibre.
- Si $\lambda^* < 1$: on a une décroissance de la population.

3.5 Application théorique

On considère une population de rongeurs avec trois classes d'âge (cycle de reproduction de 3 ans), on considère que la population formée des individus femelles et que chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles sa troisième année. Cependant seul un rongeur sur deux survit à la première année et seul 40% de ceux qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.

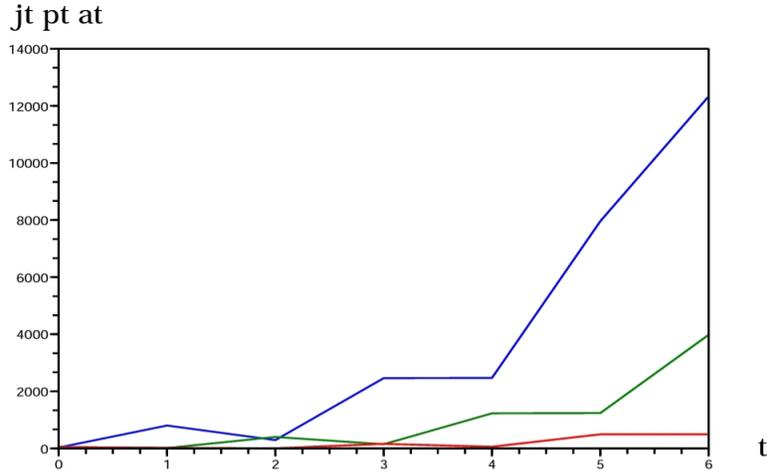


FIGURE 3.3 : Évolution des trois classes d'âge de la population de rongeurs.

On désigne respectivement par j_t , p_t et a_t les effectifs à l'instant t des femelles juvéniles et des femelles pré-adultes (rongeurs de 1 an) et des femelles adultes (rongeurs de 2 ans), les informations précédents peuvent s'écrire comme suite :

$$\begin{cases} j_{t+1} = 6p_t + 10a_t, \\ p_{t+1} = 0.5j_t, \\ a_{t+1} = 0.4p_t. \end{cases}$$

- Alors la matrice de Leslie correspondante à ce modèle est la suivante :

$$N_{t+1} = LN_t \implies \begin{pmatrix} j_{t+1} \\ p_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_t \\ p_t \\ a_t \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Donc

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

la formule de (3.3) permettent à partir des effectifs initiaux des classes, (j_0, p_0, a_0) , de calculer les effectifs (j_1, p_1, a_1) à l'instant $t = 1$ puis (j_2, p_2, a_2) à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Si $(j_0, p_0, a_0) = (30, 50, 50)$ on obtient :

t	0	1	2	3	4	5	6
j_t	30	800	290	2460	2470	7690	12330
p_t	50	15	400	145	1230	1235	3980
a_t	50	20	60	160	58	492	494

- D'après le théorème de Perron-Frobenius on a :

La matrice de **Leslie** est primitive car par un simple calcul on trouve $L, L^2, L^3, L^4, \dots etc$ a tous ses coefficient sont strictement positive.

Dans la Figure 3.3 on peut observer la dynamique les trois classes est qui montre les premiers termes des trois suites $(j_t), (p_t)$ et (a_t) pour $0 \leq t \leq 6$.

Si l'on désigne par $N_t = j_t + p_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant t (et donc N_0 l'effectif initial), on peut également calculer à partir Figure 3.3 les termes successifs de la suite (N_t) .

On trouve donc,

t	0	1	2	3	4	5	6
N_t	130	835	696	2765	3758	8687	16804

- Les valeurs propres et vecteurs propres de L :

Soit L une matrice carrée, V un vecteur propre de L et λ valeur propre de L .

$$LV = \lambda V.$$

Alors on a

$$\det(L - \lambda Id) = 0.$$

Donc

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 6 & 10 \\ 0.5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.4 & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

D'après les calculs on a

$$-\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Donc la matrice L possède deux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, donc la valeur propre dominante est λ_1 , par suite $\lambda^* = 2$ associé à un vecteur propre dominant $V^* = (100, 25, 5)$.

Pour avoir une idée sur le taux de croissance de chacune des classes, on peut calculer les quotients $\frac{j_{t+1}}{j_t}$, $\frac{p_{t+1}}{p_t}$, $\frac{a_{t+1}}{a_t}$ et $\frac{N_{t+1}}{N_t}$ pour $t = 0, 1, 2, \dots$

t	0	1	2	3	...	31	32	33	34	35
$\frac{j_{t+1}}{j_t}$	26.66	0.3625	8.4827	1.004	...	2.000	2	2	2	2
$\frac{a_{t+1}}{a_t}$	0.3	26.66	0.3625	8.4827	...	1.999	2.000	2	2	2
$\frac{p_{t+1}}{p_t}$	0.4	0.3	26.66	0.3625	...	2.000	1.999	2.000	2	2
$\frac{N_{t+1}}{N_t}$	6.42	0.83	3.97	1.35	...	2.000	1.999	2.000	2	2

- D'après les résultats on constate que :

Tendent tous vers la même valeur λ ici $\lambda = 2$ c'est-à-dire après un certain temps la dynamique considérée consiste simplement à une multiplication par un facteur 2 des effectifs de chaque classe d'une période à la suivante, le facteur multiplicatif qui correspond au taux de croissance asymptotique s'appelle la valeur propre dominante $\lambda^* = 2 > 1$ ce qui montre qu'on a la croissance de la population.

Si on s'intéresse maintenant à la dynamique de l'évolution des effectifs au cours de temps de la répartition des individus entre les diverses classes, on peut calculer à partir de la répartition initiale des individus selon ces trois classes, $v_0 = (\frac{j_0}{N_0}, \frac{p_0}{N_0}, \frac{a_0}{N_0})$ l'évolution de cette répartition au cours du temps $v_t = (\frac{j_t}{N_t}, \frac{p_t}{N_t}, \frac{a_t}{N_t})$, on constate que cette répartition tend vers une répartition asymptotique qui est celle de vecteur $v = (100, 25, 5)$, c'est-à-dire la répartition $(\frac{100}{130}, \frac{25}{130}, \frac{5}{130}) \simeq (0.77, 0.192, 0.038)$, sur une population initiale répartie de cette façon, la dynamique est exactement le comportement asymptotique indiqué plus haut, à savoir une multiplication des effectifs par 2.

3.6 Application numérique

Supposons qu'une population à trois classes d'âge et que chaque femelle de la deuxième classe d'âge produise 4 femelles et que chaque femelle de la troisième classe d'âge produit 3 femelles. Cependant on a 50% de ceux qui survivent la première année jusqu'à la

deuxième et 25% qui survit à la deuxième année jusqu'à la troisième année [25].

La matrice Leslie est donnée par la formule suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec une population initiale :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer les vecteurs de la population pour les dix premières années on utilise les commandes **Matlab** suivante :

```
>> L = [0 5 3; 5 0 0; 0 0.25 0]
>> X = zeros(3, 11)
>> X(:, 1) = [10; 10; 10]
>> for k = 2 : 11
X(:, k) = L * X(:, k - 1)
end
>> X
```

X =
colonnes 1 à 11

10	70	27.5	143.75	81.25	297.81	216.41	626.09	544.49	1333.3	1323.8
10	5	35	13.75	71.875	40.625	148.91	108.2	313.05	272.25	666.67
10	2.5	1.25	8.75	3.4375	17.969	10.156	37.227	27.051	78.262	68.062

L'évolution de la population pour l'année 0 à l'année 10 est représentée comme un vecteur colonne de la matrice X, le graphe de la population au cours du temps qui le montre la Figure 3.4 peut être produit en entrant la commande suivante

```
>> plot(X),
```

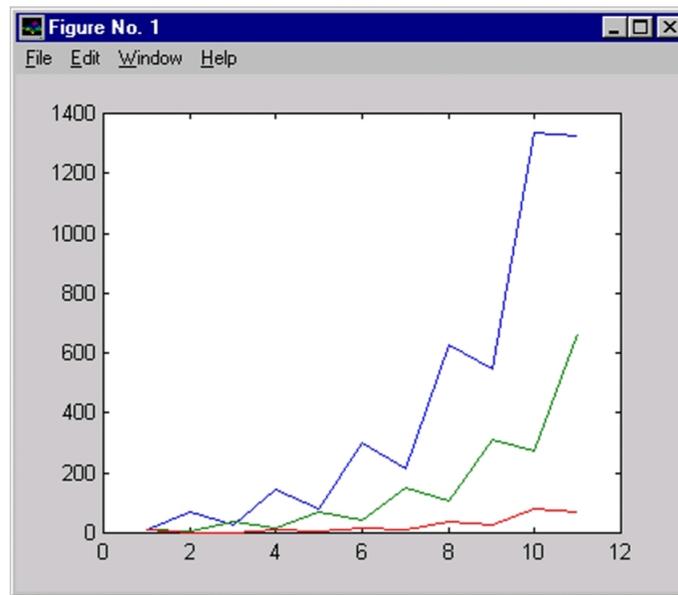


FIGURE 3.4 : Évolution des trois classes d'âge de la population au cour du temps.

On note que le nombre de femelle dans chaque groupe d'âge de la Figure 3.4 augmente généralement avec de temps dans certain comportement oscillatoire.

Aussi nous pouvons utiliser **Matlab** pour vérifier que la population peut être trouvée en multipliant l'âge initial de vecteur par une puissance appropriée de matrice de leslie.

```
>> X0 = [10; 10; 10]
```

X₀ =

```
10
10
10
```

```
>> X(10) = L(10) * X0
```

X⁽¹⁰⁾ =

```
1323.8
666.67
68.062
```

Donc on note que X⁽¹⁰⁾ est le même vecteur que la colonne 11 dans la matrice X, multiplie X⁽⁰⁾ par d'autres puissances de L, on peut vérifier que X^(k) = L^(k)X⁽⁰⁾ pour

tout entier positive k .

On utilisant la matrice L , théoriquement on a le polynôme caractéristique est donnée par $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 0.375$ ainsi la valeur propre dominante $\lambda_1 = 1.5$ est le vecteur propre dominant :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.9474 \\ 0.3158 \\ 0.0526 \end{bmatrix}$$

Maintenant par l'utilisation des commandes **Matlab** suivantes, on a

```
>> L = [0 5 3; 5 0 0; 0 0.25 0]
```

$L =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4.0000 & 3.0000 \\ 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2500 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> [V, D] = eig(L)
```

$V =$

$$\begin{bmatrix} 0.9474 & 0.9320 & 0.2259 \\ 0.3158 & -0.3560 & -0.5914 \\ 0.0526 & 0.0680 & 0.7741 \end{bmatrix}$$

$D =$

$$\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.302 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.1910 \end{bmatrix}$$

La commande $[V, D] = eig(L)$ stocke les valeurs propres de L dans une matrice diagonale et les vecteurs propre associée à chaque valeur propre dans les colonnes de la matrice V .

– $\lambda_1 = 1.5$, associée à un vecteur propre :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.9474 \\ 0.3158 \\ 0.0526 \end{bmatrix}.$$

– $\lambda_2 = -1.3090$, associée à un vecteur propre :

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0.9320 \\ -0.3560 \\ 0.0680 \end{bmatrix}.$$

– $\lambda_3 = -1.3090$, associée à un vecteur propre :

$$V_3 = \begin{bmatrix} 0.2259 \\ -0.5914 \\ 0.7741 \end{bmatrix}.$$

Pour vérifier que $L = VDV^{-1}$, on utilise la commande suivante

```
>> V * D * inv(V)
```

ans =

```
0.0000 4.0000 3.0000
0.5000 0.0000 0.0000
0.0000 0.2500 0.0000
```

Rappelons que tout multiple scalaire d'un vecteur propre est aussi un vecteur propre dans notre analyse, il sera utile de diviser le vecteur propre V_1 par la somme de toutes les coefficients de vecteur.

Alors, on a

```
>> V(:,1)
```

ans =

```
0.94737
0.31579
0.052632
```

```
>> V = V(:,1)/sum(V(:,1))
```

V =

```
0.72
0.24
0.04
```

V donne 72% dans la première ligne, 24% dans la deuxième ligne et 4% dans la troisième ligne. Ces valeurs nous aideront à déterminer la proportion relative de femelle dans chaque d'âge après une longue période de temps.

On sait que

$$X^{(k)} = C_1 \lambda_1^k V_1 + C_2 \lambda_2^k V_2 + C_3 \lambda_3^k V_3$$

Donc

$$X^{(k)} = C_1 (1.5)^k \begin{bmatrix} 0.9474 \\ 0.3158 \\ 0.0526 \end{bmatrix} + C_2 (-1.3090)^k \begin{bmatrix} 0.9320 \\ -0.3560 \\ 0.0680 \end{bmatrix} + C_3 (-0.1910)^k \begin{bmatrix} 0.2259 \\ -0.5914 \\ 0.7741 \end{bmatrix}$$

Puisque λ_1 est la valeur propre dominante, alors pour une grande valeur de puissance k le vecteur $X^{(k)}$ d'âge de la population sera un multiple scalaire de vecteur propre V_1 .

Numériquement, on trouve

```
>> L = [0 5 3; 5 0 0; 0 0.25 0]
```

L =

$$\begin{bmatrix} 0 & 4.0000 & 3.0000 \\ 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2500 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> X0 = [10; 10; 10]
```

X₀ =

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

```
>> X(100) = L(100) * X0
```

X⁽¹⁰⁰⁾ =

$$\begin{bmatrix} 1.1555e + 019 \\ 3.8516e + 018 \\ 6.4194e + 017 \end{bmatrix}$$

```
>> X = X(100)/sum(X100)
```

```
X =
```

```
0.72
```

```
0.24
```

```
0.04
```

Ce calcul montre que après 100 ans la population a une distribution de 72% de femme de la première classe d'âge, 24% de la deuxième classe d'âge et 4% de troisième classe d'âge. Pour cela on a obtenu les mêmes résultats dans la partie théorique .

Évolution des trois classes d'âge de la population après 100 ans.

```
>> X = zeros(3, 101)
```

```
>> X(:, 1) = [10; 10; 10]
```

```
>> for k = 2 : 101
```

```
X(:, k) = L * X(:, k - 1)
```

```
end
```

```
>> X
```

```
>> for k = 2 : 101
```

```
G(:, k) = X(:, k)/sum(X(:, k))
```

```
end
```

```
>> plot(G)
```

```
>> shg
```

```
>> h = plot(G)
```

```
>> set(h(1), 'LineStyle', '-')
```

```
>> set(h(2), 'LineStyle', ':')
```

```
>> legend('FirstAgeClass', 'SecondAgeClass', 'ThirdAgeClass')
```

```
>> grid on
```

```
>> shg
```

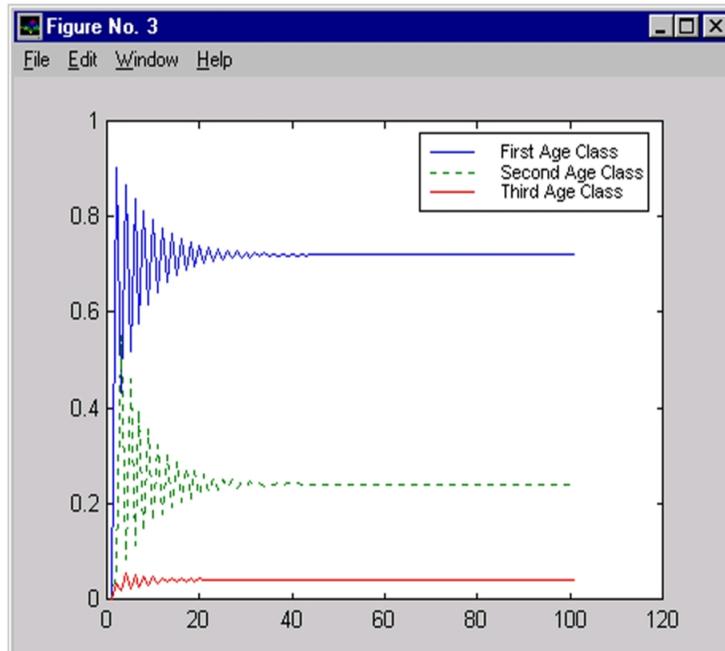


FIGURE 3.5 :Évolution de la population après 100 ans.

La valeur propre dominante λ_1 nous indique comment le vecteur de population évolue d'une année à l'autre.

$$\gg X^{(99)} = L^{(99)} * X_0$$

$$X^{(99)} =$$

$$7.7033e + 018$$

$$2.5678e + 018$$

$$4.2796e + 017$$

$$\gg X^{(100)} ./ X^{(99)}$$

ans =

$$1.5$$

$$1.5$$

$$1.5$$

Dans ce cas on observe que le nombre des femelle dans chaque classe d'âge après 100 ans est 1.5 fois le nombre des femelles dans chaque classe après 99 ans. Ainsi, après une longue période de temps le nombre de femelle dans chaque classe d'âge augmente environ de 50%.

Conclusion

Leslie a montré la pertinence de son modèle en l'appliquant à des données observées sur des rats, mais aussi sur d'autres populations comme par exemple, des oiseaux, des coléoptères ...

De nos jours, ce modèle est adopté par de nombreux biologistes, son usage est évidemment facile en utilisant des logiciels comme MATLAB qui sont capables de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de Leslie. Il est encore intéressant de constater que le théorème de Perron-Frobenius a été trouvé en 1910 par Oskar Perron et Ferdinand Georg Frobenius. Par ailleurs, ce résultat mathématique admet d'autres applications intéressantes et variées, par exemple en calcul des probabilités (dans l'étude des chaînes de Markov) et en théorie des graphes.

Bibliographie

- [1] *A. Roger Horn* and *R. CHARLES JOHNSON*, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985.
- [2] *B. Nicolas*, A Short History of Mathematical Population Dynamics, Spriger-Verlag London Limited, 2011.
- [3] *Dang-Vu* and *H.Delcarte*. introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses, 2000.
- [4] *F. Pierre*, Entreprise et écologie, Esitions L'harmattan, 1997.
- [5] *G. Philippe*. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod, 1998.
- [6] *G. Enrico*, The invasion speech of cell migration models with realistic cell cycle time distributions. Journal of Theoretical Biology, 2018.
- [7] *H. Amann*. Ordinary Differential Equation-An Introduction to Nonlinear Analysis, De gruyter Studies in Mathematics, Walter De Guyter Inc, 1990.
- [8] *H.Jack K*, H. Dynamics and bifurcations, Research in Griminology-Springer-Verlag, 1991.
- [9] *J.Murray*. D. Mathematical biology, an introduction third edition, Interdisciplinary Applied Mathematics, Mathematical Biology. Sprig, 2002.
- [10] *J.K.Hale*. Ordinary differential equations. Krieger, 1980
- [11] *L. Lefkovitch*. The Study of Population Growth in Organisms Grouped by Stages, Biometrics, 1965.
- [12] *L. Patrick H* On The Use of Matrices in Certain Population Mathematics, Biometrika, 1945.
- [13] *L. Patrick H* . Some Further Notes on The Use of Matrices in Population Mathematics, Biometrika, 1948. Business Media, 2005.
- [14] *M. B.Usher*. A Matrix Approach to the Management of Renewable Resources, With Special Reference to Selection Forests, Journal of Applied Ecology, 1966.
- [15] *M. Carl* , Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, 2000.

- [16] *M.Thomas Robert*, An Inquiry into the Nature and Progress of Rent, and the Principles by which it is regulated, 1815.
- [17] *P. William and M.Thomas Robert*, Cambridge, Harvard University Press, 1979.
- [18] *S. Kulenovic and R. Mustafa*, Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, Chapman and Hall, 2002.
M.Eugene. Dynamical Systems in Neuroscience- the geometry of Excitability and Burs-ting. The MIT Press, 2006.
- [19] *S. Stephen and H. Morris*. Dynamical Systems and Linear Algebra, Differential Equations. Pure Applied Mathematics, 1974.
- [20] *S. joseph*. The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, Cambridge(England. Cambridge University Press) ,1904.
- [21] *V. Pierre François*. Population Institut National d'Etudes Démographiques, 1981.
- [22] *V. Pierre François*. Mac Tutor History of Mathematics archive, iniversité de St Andrews, 1846.
- [23] *V.Von*, Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, 1926.
- [24] *W.R.Hamilton*, On a General Method in Dynamics, 1834.
- [25] *Y. Kevin*, Population Modeling Using The Leslie Matrix, Part 2. Math 45-Linear Algebra, November 17, 1997.