République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par : Melle. ABEBSI Ainouna

Les Théorèmes du Point Fixe Et Application Aux Équations Différentielles

Encadrant :

Mr BOUKHARI Boumediene

Soutenu le 10/06/2019

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. BENAISSA Abdelkader	M.C.B	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Mme. SAIAH-Belattar Zokha	M.C.B	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Mr. BOUKHARI Boumediene	M.A.A	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2018 – 2019

Remerciements :

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **"Allah"** qui m'a donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur **BOUKHARI Boumediene** pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques et ces conseils m'ont été précieux.J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je remercie également Monsieur **BENAISSA Abdelkader** et Madame **SAIAH-Belattar Zokha** membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

J'adresse également un grand merci à tous les enseignants de Mathématiques de centre universitaire BELHADJ Bouchaib Ain-temouchent et surtout Monsieur **Beniani Abderrahmane**.

Nos plus vifs remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin par leurs expériences et leurs savoirs pour enrichir nos connaissances lors de nos études supérieures.

« **Merci** »

«ABEBSI Ainouna»

Dédicace :

Avec un grand plaisir, un cœur ouvert et une immense joie.

Que je dédie ce modeste mémoire,

À mes très chers, respectueux et magnifiques parents ma mère et mon père,

Qui m'ont soutenus tout au long de ma vie,

Par leur patience, leur amours et leur encouragement.

*À mes frères, **Houari-Salah**.*

*À mes sœurs, **Fatima-Amel-Hayet-Khadra-Ibtissem**, leurs enfants et leurs maris.*

*À toute ma famille et surtout mon oncle **Sahli** et ses fils.*

*À mes meilleurs amies pour leur amour et leur soutien et surtout ma puce **Messegmine Siham**,*

*À toute mes chères amies de ma promotion et surtout ma chérie **RELID Yousra** et mon ami **BELBACHIR Youcef**.*

À tout mes enseignants, pour leur utiles conseils, leur patience et leur persévérance.

«ABEBSI Ainouna»

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS GÉNÉRALES

E' :	espace dual de E.
$\overline{X}$:	L'adhérence de X.
(a, b) :	Intervalle ouverte.
$\mathcal{L}(E, F)$:	l'ensemble des application linéaire continue de E dans F.
$\mathcal{L}_c(E, F)$:	l'espace des applications linéaire compacte.
C^1 :	l'ensemble des applications continument différentiable.
$GL(E)$:	groupe linéaire de E dans E.
$\partial\Omega$:	La frontière de Ω.
EDO :	Équation différentielle ordinaire .
EDP :	Équation aux dérivées partielles.
$\overline{B}(x_0, r_0)$:	La boule fermée de centre x_0 et de rayon r_0.
$B(x_0, r_0)$:	La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r_0.
$\bigtriangledown$:	opérateur gradient.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui montrent l'existence des solutions dans divers types d'équations.

En analyse, un théorème du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Le théorème du point fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Le théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Ce théorème est plus topologique, est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1955, et pour la première fois, Kranosel'skii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Les équations différentielles et les systèmes différentiels ont une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme d'équations différentielles. Les équations différentielles constituent une des branches les plus fertiles des mathématiques, l'étude de ce type d'équations différentielles est liée à l'étude des phénomène naturels.

Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvée l'existence des théorème du point fixe en utilisant des applications.

Dans ce mémoire, nous avons considéré les théorèmes du point fixe et application aux équations différentielles. On a structure ce mémoire en quatre chapitres et annexe comme suit :
Dans le premier chapitre, nous rappelons des résultats préliminaire de l'analyse fonctionnelles.
Pour le deuxième chapitre, nous étudions quelques théorèmes principales du point fixe on particulier le théorème de Picard, de Brouwer, de Schauder et de Kranosel'ski.
Le troisième chapitre, Dans ce chapitre nous présentons un rappel sur les équations différentielles et certaines de leurs méthodes de résolution.
Et le dernier chapitre, représente l'importance de ce mémoire, l'application de la théorie du point fixe sur les équations différentielles.
À la fin, comme annexe on va résoudre les équations différentielles numériquement par la méthode du point fixe pour trouver une solution approchée et comparer avec la solution exacte de cette équation à l'aide des exemples en Matlab.

Chapitre I

PRÉLIMINAIRES ET GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous rappelons des résultats préliminaires de l'analyse fonctionnelles et quelques notions topologiques importants nous utiliserons dans la suite du ce mémoire .

I.1 Espace Fonctionnelle :

Dans ce partie, on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec le corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I.1.1 Espace vectoriels normés :

Définition 1 *[14] On appelle norme sur E une application,*

$$\begin{aligned} ||.||: \quad & E \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto ||x|| \end{aligned}$$

vérifient les axiomes suivantes :

i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(séparation)*

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ *(homogénéité)*

iii) $\forall x, y \in E : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire)*

Pour $u \in E$ donné, le nombre réel positif $||u||$ est appelé norme de u.

Définition 2 *[14] Un espace vectoriel normé est un couple $(E, ||.||)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $||.||$ est une norme sur E.*

Définition 3 *[14] Deux normes $||.||_1$ et $||.||_2$ sur E sont équivalentes s'il existe des constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tel que :*

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1 \qquad \forall x \in E$$

I.1.2 Espace métriques :

Définition 4 *[14] Une distance (métrique) sur un ensemble $E \neq \varnothing$ est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in E$

ii) $d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall x, y \in E$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall x, y, z \in E$

Définition 5 *[14] Un espace métrique est un couple (E,d) où E est un ensemble et d est une distance.*

I.1.3 Espace de Banach :

Définition 6 *[8] Un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est appelé espace de Banach si E, muni de la distance canonique associé à $||.||$ est un espace métrique complet.*

Proposition 1 *[8] Tout espaces vectoriels normés de dimension fini est un espace de Banach.*

Proposition 2 *[8] soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur un espace vectoriel E sont équivalentes alors $(E, ||.||_1)$ est un espace de Banach si et seulement si : $(E, ||.||_2)$ est un espace de Banach.*

Définition 7 *[8] Soit E un espace vectoriel normé, une série de terme générale $x_n \in E, n \in \mathbb{N}$ est dite normalement convergente si et seulement si la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} ||x_n||_E$ est convergente.*

Théorème 1 *Soit E un espace vectoriel normé les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) E est un espace de Banach.

ii) Toute série d'éléments de E normalement convergente est convergente.

I.1.4 Espace Séparable :

Définition 8 *[5] On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Proposition 3 *[5]*

Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E alors F est séparable.

Théorème 2 *[5] Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable alors E est séparable.*

I.2 Quelques notions de topologies :

I.2.1 Compacités :

Définition 9 *[14] Soit E un ensemble quelconque et A une partie de E*
un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ des parties de E vérifiant : $A \subset \cup_{i\in I} B_i$.

Définition 10 *[14] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé on dit que E est relativement compact(précompact) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dans le diamètre est inférieur à ϵ.*

Définition 11 *[14] Soit $X \subset E$ une partie d'un espace métrique (E, d),*
on dit que X est relativement compact si $\overline{X}$ est compact.

Corollaire 1 *[14] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension fini, les parties relativement compacts de E sont les parties bornées.*

Définition 12 *[14] Un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est dit compact s'il est relativement compact et complet.*

Théorème 3 *[14] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension fini, alors les parties compacts de E sont les parties fermées et bornées de E.*

Opérateur Compact :

Définition 13 *Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G, il existe sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans F.*

Définition 14 *(Opérateur linéaire compact)*

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoi tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F.
Autrement dit : la fermeture $\overline{A(G)}$ est compact.

Théorème 4 *Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E la suite $(Ax_n)_n$ contient une sous suite convergente de F.*

Proposition 4 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 5 *Soient A et B deux opérateurs bornés, le produit AB est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Théorème 6 *L'opérateur identique $I : E \to E$ est compact si et seulement si E est de dimension finie .*

Théorème 7 *Soient E un espace normé et F un espace de Banach et soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateur compact de E dans F, alors A est compact.*

I.2.2 Convexité :

Définition 15 *[14] Soit $A \subset E$, on dit que A est convexe si*

$$\forall u \in A, \forall v \in A, \forall \lambda \ \in]0,1[; \quad \lambda u + (1-\lambda)v \in A.$$

Proposition 5 *Soient E un espace vectoriel, A et B deux parties convexes de E, Alors : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; l'ensemble $\alpha A + \beta B$(ensemble des $\alpha x + \beta y$ où x parcourt A et y parcourt B) est convexe.*

I.2.3 Rétraction :

Définition 16 *[8]*

On appelle rétraction de l'espace topologique E sur un fermé F de E toute fonction continue de E dans F qui est l'identité sur F.

I.2.4 Différentiabilité :

Définition 17 *[8] (différentielle première)*

Soient E et F deux espaces vectorielles normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et soit U un ouvert de E.
On dit que $f : U \to F$ est différentiable au point $a \in U$, s'il existe une application $g_a \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant :

$$f(a+h) - f(a) = g_a(h) + \theta(h).$$

où $\theta(h)$ est un élément de F tel que :

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\theta(h)||_F}{||h||} = 0, \qquad h \in E$$

- *l'application* g_a *est appelée la différentielle de* f *au point* $a \in U$, *on l'a note* df_a *ou* $Df(a)$.

- $Df : U \to \mathcal{L}(E,F)$ *est appelée l'application différentielle.*

- *Si de plus* Df *est continue, on dit que* f *est continument différentiable sur* U *ou* $f \in C^1(U,F)$.

Définition 18 *[8] (Différentielle d'ordre supérieure)*

On dit que f *est* n *fois différentiable au point* $a \in U$ *si l'application :*

$$\begin{aligned} D^{n-1}f : \ & U \to \mathcal{L}_n(E,F) \\ & a \mapsto D^{n-1}f(a) \end{aligned}$$

est différentiable au point $a \in U$.
ainsi $D^n f(a) = D(D^{n-1}f)(a)$, *donc la différentielle d'ordre* n *de* f *au point* $a \in U$ *est une application n-linéaire continue de* E^n *dans* F

I.2.5 Degré topologique :

Définition 19 *[2] (Homotopie)*

Si X *et* Y *sont des espaces métriques et si* $f, g : X \to Y$ *sont des applications continues, on dit que f est homotope à g s'il existe une application continue* $F : X \times [0,1] \to Y$ *telle que* $F(x,0) = f(x)$ *et que* $F(x,1) = g(x)$ *pour tout* $x \in X$. *on dit alors que* F *est une homotopie entre f et g. De plus la relation "f est homotope à g" est une relation d'équivalence.*

Définition 20 *[2] (Degré de Leray-Schauder)*

Soient X *un espace de Banach,* Ω *un ouvert borné de* X, $T : \overline{\Omega} \to X$ *un opérateur compact sans point fixe sur* $\partial\Omega$. *Alors pour* $\varepsilon > 0$, *et* $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ *étant donné on considère* F, *un sous espace vectoriel de dimension finie contenant* E_ε *et tel que* $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \varnothing$. *On définit le degré topologique de Leray-Schauder par*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F)$$

Cette définition ne dépend que T *est de* Ω. *Si* $b \in X$ *est tel que* $b \notin (I-T)(\partial\Omega)$, *le degré de* $I - T$ *dans* Ω *par rapport à la cible* b *est défini comme étant*

$$deg(I - T, \Omega, b) = deg(I - T - b, \Omega, 0)$$

Propriété: 1 *[2] (Existence)*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N$ un point cible n'appartenant pas à $f(\partial\Omega)$. Si $deg(f, \Omega, b) \neq 0$ alors l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans Ω.

Propriété: 2 *[2] (Identité)*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. En désignant par I l'application identité, on a :

$$deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & si\ b \in \Omega \\ 0 & si\ b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

Chapitre II

QUELQUES THÉORÈMES DU POINT FIXE

II.1 Introduction :

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application,
on dit que $x \in E$ est un point fixe de f si :

$$f(x) = x$$

Si l'application f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cette propriété se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative de f et la première bissectrice du repère se coupent en le point (x, x).

Dans ce chapitre, nous étudions et représentons quelques théorèmes du point fixe en particulier de Picard, de Brouwer, de Schauder et de Kranosel'skii.

II.2 Quelques théorèmes du point fixe :

II.2.1 Théorème du point fixe de Picard :

Le Théorème du point fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Définition 21 *(Contraction) [6]*

Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$. On dit que φ est contractante si φ est lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est-à-dire s'il existe $k < 1$ tel que :

$$\forall x, y \in E \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq kd(x, y)$$

Théorème 8 *(Picard) [6]*

Soit (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$ une application contractante (i.e lipschitzienne de rapport $k < 1$).
Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$.

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a.

Démonstration:

Montrons d'abord l'unicité puis l'existence d'un point fixe

i) **L'unicité :**

Supposons qu'il existe $a, b \in E$ avec $a \neq b$ tel qu'on ait $\varphi(a) = a; \varphi(b) = b$.
Alors on a

$$\begin{aligned} d(\varphi(a), \varphi(b)) \quad &= d(a, b) \\ &\Rightarrow \tfrac{d(\varphi(a),\varphi(b))}{d(a,b)} = 1 \\ &\Rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

d'autre par : on a φ application contractante $\Rightarrow k < 1$ ce qui conduit à une contraction et donc il existe unique point fixe .

ii) **L'existence :**

Soit x_0 un point initiale quelconque et (x_p) la suite itérée associée, on a :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) \quad &= d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \\ &\leq k^p d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Maintenant on va montrer par récurrence la propriété suivante :

$$(P) : d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$$

– <u>Initialisation</u> : Pour $p = 0$ (évident)

– Généralisation : Supposons que la propriété (P) est vraie pour un certain entier p et prouvons la validité de cette propriété pour $p+1$, alors :

$$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_{p+2}) &= d(\varphi(x_p), \varphi(x_{p+1})) \\ &\leq kd(x_p, x_{p+1}) \\ &\leq kk^p d(x_0, x_1) \\ &\leq k^{p+1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

donc, la propriété (P) est toujours vraie.

On a alors $\forall q > p$:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \sum_{n=p}^{q-1} d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=p}^{q-1} k^n d(x_0, x_1) = (\sum_{n=p}^{q-1} k^n) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

De plus, pour tout $q > p$: $\displaystyle\sum_{n=p}^{q-1} k^n \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} k^n = \frac{k^n}{1-k}$ d'où $d(x_p, x_q) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$

On en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$. De plus on a $\varphi(x_p) \to \varphi(a)$ quand $p \to +\infty$ car φ est continue et $\varphi(x_p) = x_{p+1}$. Or $x_{p+1} \to a$ quand $p \to +\infty$, d'où par unicité de la limite on a $\varphi(a) = a$.

Généralisation : [6] Le théorème précédent reste entièrement valable si on remplace l'hypothèse que φ est contractante par l'hypothèse que φ est continue et qu'il existe une certaine itérée $\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{mfois}$ qui sont contractante

En effet : dans ce cas, l'hypothèse que φ^m soit contractante implique que φ^m admet un unique point fixe a. On a donc $\varphi^m(a) = a$ et en appliquant φ à cette égalité on trouve :

$$\varphi^m(\varphi(a)) = \varphi^{m+1}(a) = \varphi(\varphi^m(a)) = \varphi(a)$$

de sorte que $\varphi(a)$ est encore un point fixe de φ^m. L'unicité du point fixe de φ^m entraine $\varphi(a) = a$. Par ailleurs, comme tout point fixe de φ est aussi un point fixe de φ^m, ce point fixe est nécessairement unique. En fin, pour tout point initial x_0, la sous-suite $x_{mp} = \varphi^{mp}(x_0) = (\varphi^m)^p(x_0)$ (correspondant aux indices multiples de m) converge vers a. Il résulte que $x_{mp+r} = \varphi^r(x_{mp})$ converge aussi vers $\varphi^r(a) = a$, pour $r = 0, 1, \ldots, m-1$, et on en déduit $\lim\limits_{q\to\infty} x_q = a$.

Théorème 9 *(Théorème de Picard à paramètre)* [6]

Soit X un espace métrique complet, A un espace métrique et $F : X \times A \to X$ une application continue que l'on suppose uniformément contractante en x. Alors pour tout λ il existe un unique $x(\lambda)$ point fixe et l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

Contre Exemple :

Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème 8 est réellement nécessaire.

1. <u>X n'est pas stable par φ :</u> $\varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0,1]$ or X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus, $\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow sup_{x\in X}|\varphi'(x)| < 1 \Rightarrow \varphi$ est contractante.

   Mais φ n'a pas de point fixe car $\varphi([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$, $i.eX$ n'est pas stable par φ.

2. <u>φ n'est pas contractante :</u> $\varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, \infty[$ or $\varphi : X \to X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet.

   Mais $sup_{x\in X}|\varphi'(x)| = 1$ donc φ n'est pas contractante.

3. <u>X n'est pas complet :</u> $\varphi(x) = \frac{sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \frac{\pi}{4}]$ or $\varphi(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$ et $sup_{x\in X}|\varphi'(x)| = \frac{1}{2} < 1$; donc φ est contractante.

   Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc n'est pas complet.

II.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer :

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

- Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation.

Théorème 10 *Sur $\mathbb{K}$ une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Il existe alors $x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = x$.*

Les parties compactes et convexes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prends donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 11 *Si $f : [a,b] \to [a,b]$ est continue, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que ;*
$f(x) = x$.

Démonstration:

Si f est continue de $[a, b]$ dans lui même, la fonction $g \mapsto f(x) - x$ est continue, et prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f.

De même dans le plan, Les parties compactes et convexes sont les disques fermés ou bien les boules fermées, la forme du théorème de Brouwer prend la forme suivante :

Théorème 12 *Toute application T continue sur disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.*

Remarque 1 *Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de $\mathbb{K}$ est un point fixe de l'application identité.*

Il est possible de généraliser en toute dimension finie. Donc dans un espace euclidien, on retrouve

Théorème 13 *Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.*

Il peut encore être un peu plus général, en considérant toute partie convexe compact d'un espace euclidien :

Théorème 14 *Toute application T continue d'un convexe compact $\mathbb{K}$ d'un espace euclidien à valeur dans $\mathbb{K}$ admet un point fixe.*

Nous allons donner un résultat général du théorème de Brouwer qu'on aura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder.

- Soient $N \geq 1$, $R > 0$ et $f \in C(B_R, B_R)$ avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N,\ ||x|| \leq R\}$. (on muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $||.||$)

Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in B_R$ tel que $f(x) = x$.

Définition 22 *[3]*

On dit qu'un espace topologique X est a la propriété du point fixe si toute application continue $T : X \to X$ possède un point fixe.

Théorème 15 *(Brouwer) [3]*

Soit B_n la boule unité fermé de $\mathbb{R}^N$. La boule B_n est a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Schauder a généralisé le résultat de Brouwer en dimension infinie.

II.2.3 Théorème du point fixe de Schauder :

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique, est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.
Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 16 *(théorème du point fixe de Schauder) [3]*

Soient Ω un sous ensemble convexe, fermé, borné non vide d'un espace de Banach X et $k : \Omega \to \Omega$ une application compacte alors k admet au moins un point fixe.

Démonstration:

étape 01 : On considère Ω comme une boule fermée $\overline{B}(0,r)$ de centre 0 et de rayon r.

i) S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que : $k(x_0) = x_0$, il n'y a rien à démontrer.

ii) Si $k(x) \neq x, \ \forall x \in \partial\Omega$
Introduisons homotopie suivante : $k_t(x) = (I - tk)(x)$ pour $t \in [0,1]$.
vérifiant que $deg(k_t, \Omega, 0)$ est bien défini ($ie : 0 \notin k_t(\partial\Omega)$)
supposons qu'il existe $x \in \partial\Omega$ tel que :

$$\begin{aligned} k_t(x) = 0 \ &\Rightarrow (I - tk)(x) = 0 \\ &\Rightarrow I(x) = tk(x) \\ &\Rightarrow x = tk(x) \end{aligned}$$

Ce qui donne pour $t \in [0,1[;\ r = ||x|| = t||k(x)|| \leq rt$ et pour $t = 1;\ k(x) = x$ ce qui conduit a une contraction. Le degré donc est bien défini et vaut par la propriété d'homotopie on a $deg(k_t, \Omega, 0) = c$ tel que c est une constante donc :

$$\begin{aligned} deg(k_0, \Omega, 0) = deg(k_1, \Omega, 0) \ &\Rightarrow deg(I, \Omega, 0) = deg(I - k, \Omega, 0) \\ &\Rightarrow 1 = deg(I - k, \Omega, 0) \neq 0 \end{aligned}$$

d'après la propriété d'existence on a :
il existe $x_0 \in \Omega$ tel que : $(I - k)(x_0) = 0$ ainsi $k(x_0) = x_0$.

étape 02 : maintenant soit Ω un convexe compact, non vide on considère une rétraction continue $R : X \to \Omega$ et B une boule contenant Ω.

Soit le diagramme suivant : $B \xrightarrow{R} \Omega \xrightarrow{k} B$. L'application $k \circ R$ est compact. D'après la première étape il existe $x_0 \in B$ tel que $(k \circ R)(x_0) = x_0 \Rightarrow k(R(x_0)) = x_0$.
puisque $k(\Omega) \subset \Omega$ et $R(x_0) \in \Omega$, alors $x_0 \in \Omega$
comme $R(x_0) = x_0$, donc : $(k \circ R)(x_0) = k(x_0) = x_0$ ainsi $\exists\ x_0 \in \Omega$ tel que : $k(x_0) = x_0$.

Théorème 17 *(théorème du point fixe de Schauder généralisé :) [3]*

Soit F un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach X et soit $T : F \to F$ une application continue telle que $T(F)$ est un sous-ensemble relativement compact de F alors, T admet un point fixe.

• Dans les espaces semi-linéaire le théorème du point fixe de Schauder prend une autre forme :

Théorème du point fixe de Schauder dans un espace semi-linéaire :

Dans cette section, nous prouvons le théorème du point fixe de Schauder pour l'espace semi-linéaire de Banach.

• Rappelons qu'un espace métrique semi-linéaire est un espace semi-linéaire S avec une métrique $d : S \times S \to \mathbb{R}^+$ invariante à la translation et positivement homogène qui est :

i) $d(a + c, b + c) = d(a, b)$

ii) $d(\lambda a, \lambda b) = \lambda d(a, b)$

pour tout $a, b, c \in S$ et $\lambda \geq 0$.

Dans ce cas, on peut définir une norme sur S par :

$$||x|| = d(x, \widetilde{0})$$

où $\widetilde{0}$ est un élément zéro dans S.

• Si S est un espace métrique semi-linéaire, alors l'addition et le produit scalaire sur S sont continues. Si S est un espace métrique complet, alors nous disons que S est un espace semi-linéaire de Banach.

• Soit S un espace semi-linéaire ayant la propriété d'annulation. Définir une relation d'équivalence $\sim$ sur S par :
$(a, b) \sim (c, d)$ si et seulement si : $a + d = b + c$.

pour tout $(a, b), (c, d) \in S \times S$, et soit $< a, b >$ la classe d'équivalence contenant (a, b).

• Soit G l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de $S \times S$. Sur G définir l'addition et le produit scalaire comme suit :

$$< a, b > + < c, d > = < a + c, b + d >$$

et

$$\lambda < a, b > = \begin{cases} < \lambda a, \lambda b > & si\ \lambda \geq 0 \\ < -\lambda a, -\lambda b > & sinon \end{cases}$$

pour tout $(a, b), (c, d) \in S \times S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus on définie $j : S \to G$ par $j(a) := < a, \widetilde{0} >$ pour tout $a \in S$. Soit S un espace semi-linéaire métrique. Sur G, on définit une norme $||.|| : G \to \mathbb{R}^+$ par :

$$|| < a, b > || := d(a, b)$$

pour tout $< a, b > \in G$.

Maintenant, rappelons deux théorèmes importants pour la démonstration :

Théorème 18 *[12]*

Supposons que S est un espace semi-linéaire ayant la propriété d'annulation. Alors G est un espace vectoriel satisfait : $G := j(S)$ et j est une injection tel que :

i) $j(a + b) = j(a) + j(b)$

ii) $j(\lambda a) = \lambda j(a)$

pour tout $a, b \in S$ et $\lambda \geq 0$.

Théorème 19 *[12]*

Supposons que S est un espace métrique semi-linéaire. Alors l'ensemble des classes d'équivalence G, construites ci-dessus, est un espace vectoriel métrique et j est une isométrie.

Théorème 20 *(Théorème de Schauder sur un espace semi-linéaire)*

Soient B un sous ensemble convexe fermé, borné non vide d'un espace semi-linéaire de Banach S ayant la propriété d'annulation, et soit $P : B \to B$ est un opérateur compact. Alors P admet au moins un point fixe dans B.

Démonstration:

De théorème (18) il existe une injection $j : S \to G$. Soit B un sous ensemble non vide, fermé borné et convexe de S. Puisque j est isométrie, il en résulte que $j(B)$ est aussi un sous-ensemble fermé borné de G.

Pour la convexité, soit $u, v \in j(B)$ et $\lambda \geq 0$. Alors il existe $\overline{u}, \overline{v} \in B$ tel que : $u = j(\overline{u})$ et $v = j(\overline{v})$; de théorème (18), on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda u + (1-\lambda)v &= \lambda j(\overline{u}) + (1-\lambda)j(\overline{v}) \\ &= j(\lambda\overline{u} + (1-\lambda)\overline{v}) \end{aligned}$$

puisque B est convexe, on a $\lambda\overline{u} + (1-\lambda)\overline{v} \in B$ ainsi $\lambda u + (1-\lambda)v \in j(B)$, donc $j(B)$ est convexe.

Maintenant soit $\widetilde{P} : j(B) \to j(B)$ définie par $\widetilde{P} = j \circ P \circ j^{-1}$ donc $P = j^{-1} \circ \widetilde{P} \circ j$.

Montrons d'abord que $\widetilde{P}$ est un opérateur compact, notez que $\widetilde{P}$ est un opérateur continu car j, P et j^{-1} sont continus. De plus, on a :

$$\widetilde{P}(j(B)) = (j \circ P \circ j^{-1})(j(B)) = j(P(B))$$

puisque $P(B)$ est relativement compact, il s'ensuit que $j(P(B))$ est aussi relativement compact. Par conséquent, par le théorème du point fixe de Schauder (16) $\widetilde{P}$ admet un point fixe $u_0 \in j(B)$ tel que : $\widetilde{P}(u_0) = u_0$.

Soit $v_0 = j^{-1}(u_0) \in B$, alors :

$$\begin{aligned} P(v_0) = (j^{-1} \circ \widetilde{P} \circ j)(v_0) &= (j^{-1} \circ \widetilde{P} \circ j)j^{-1}(u_0) \\ &= j^{-1}(\widetilde{P}(u_0)) \\ &= j^{-1}(u_0) \\ &= v_0. \end{aligned}$$

et donc $v_0 \in B$ est un point fixe de P.

II.2.4 Théorème du point fixe de Kranosel'skii :

Le théorème de point fixe du Kranosel'skii affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

On a vu précédemment deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder et le théorème de Picard. Kranosel'skii a combiné ces deux théorèmes.

Théorème 21 *(Kranosel'skii) [11]*

Soit F un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach X. T_1 et T_2 sont deux applications de F dans X telles que :

1. $T_1(x) + T_2(y) \in F, \quad \forall x, y \in F.$
2. T_1 *est contraction.*
3. T_2 *est compacte et continue.*

Alors, $T_1 + T_2$ admet un point fixe dans F.
Autrement dit : il existe $x \in F$ tel que $T_1(x) + T_2(x) = x$.

Démonstration:

Supposons que l'application T_1 satisfaite les hypothèses du théorème. En particulier, il existe $k \in (0, 1)$ tel que :

$$||T_1(x) - T_1(y)|| \leq k||x - y||$$

Ceci donne

$$||(I - T_1)x - (I - T_1)y|| \geq ||x - y|| - ||T_1(x) - T_1(y)|| \geq (1 - k)||x - y||,$$

$$||(I - T_1)x - (I - T_1)y|| \leq ||x - y|| + ||T_1(x) - T_1(y)|| \leq (1 + k)||x - y||$$

Par conséquent, $I - T_1 : F \to (I - T_1)(F)$ est un homéomorphisme et $(I - T_1)^{-1}$ existe, puisque $(I - T_1)(F)$ est continue. De plus on remarque que pour tout $y \in F$, l'équation

$$x = T_1(x) + T_2(y)$$

a une solution unique $x \in F$ selon le théorème du point fixe de Picard. De cette dernière équation nous concluons que $T_2(y) \in (I - T_1)(F)$ pour tout $y \in F$ et que $(I - T_1)^{-1}T2 : F \to F$ est bien définie comme étant une application continue. Puisque T_2 est une application compacte, il s'ensuit que $(I - T_1)^{-1}T2 : F \to F$ est aussi une application compacte. Finalement, le théorème du point fixe de Schauder généralisé nous garantit la conclusion du théorème.

Chapitre III

INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

III.1 Introduction :

Les équations différentielles jouent un rôle important en mathématiques et plus particulièrement en dynamique de population, en physique mathématiques, en électronique, en électrodynamique...

les équations différentielles sont l'outil principal permettant de modéliser un mouvement. En effet une équation différentielle est une équation liant une fonction et ses dérivées.

La forme générale d'une telle équation dans le cas d'une seule fonction dépendant d'une seule variable est :

$$y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(x)y = d(x)$$

où $A_i(x), \quad i = \widehat{1,\ldots,n}$ sont des coefficients qui n'ont pas nécessairement constantes.

On obtient ainsi les équations à coefficients constants d'importance pratique considérable et que nous étudierons.

III.2 Formulation des équations différentielles :

III.2.1 Équation différentielle ordinaire(EDO) :

Définition 23 *[4]*

Une équation différentielle ordinaire, également noté EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ au point t

définie par :

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{III.1}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$, on prendra t dans un intervalle I, (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

La solution x en générale sera à valeur dans $\mathbb{R}^n$. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeur dans $\mathbb{R}$.

Équation différentielle normale : *On dit que l'équation différentielle est sous forme normale (ou résolue par rapport à la dérivée d'ordre supérieure) si on peut l'écrire sous la forme suivante :*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \tag{III.2}$$

Équation différentielle autonome : *On appelle équation différentielle autonome d'ordre n tout équation de la forme suivante :*

$$x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)}) \tag{III.3}$$

Autrement dit : f ne dépend pas explicitement de t.

- *Toute équation différentielle scalaire peut être écrite comme un système d'équations différentielles de premier ordre en introduisant $n-1$ fonctions définies comme :*

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}$$

L'équation scalaire se met sous la forme du système d'EDO d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_2 \\ x_2^{'} = x_3 \\ \vdots \\ x_n^{'} = f(t, x, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

- *Soient U ouvert d'un espace de Banach E et I ouvert de $\mathcal{R}$ pour $f : I \times U \to E$, considérons une équation différentielle ordinaire du premier ordre :*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{III.4}$$

  - *Une solution x de (III.4) est une fonction de classe C^1 sur un intervalle $J \subset I$ et à valeur dans U.*
  - *On appelle conditions initiale de l'équation (III.4) une valeur $(t_0, x_0) \in I \times U$ tel que la solution cherchée x satisfaite à la condition $x(t_0) = x_0$.*

Problème de Cauchy :

Définition 24 *[4]*

On appelle problème de Cauchy ou problème à valeur initiale le problème qui consiste à trouver une fonction $x(t)$ définie sur un intervalle $[t_0, T] \subset I$ tel que :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)); \;\; \forall t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{III.5}$$

- *Une solution du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ avec une condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times U$ est une fonction dérivable $x : I \to \mathbb{R}^n$ tel que :*

i) *Pour tout* $t \in I, \;\; (t, x(t)) \in I \times U$

ii) *Pour tout* $t \in I, \;\; x'(t) = f(t, x(t))$

iii) $x(t_0) = x_0$

L'équivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale :

Théorème 22 *[6]*

Soit $f : I \times U \to E$ une application continue, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U ouvert non vide d'un espace de Banach E et (t_0, x_0) un point fixe de $I \times U$ et x une fonction définie sur J ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient t_0

Alors x est une solution du problème de Cauchy (III.5) sur J si et seulement si :

i) $\forall t \in J, \;\; (t, x(t)) \in J \times U$

ii) *x est continue sur J.*

iii) $\forall t \in J, \;\; x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$

Démonstration:

Soit $x : J \to U$ une fonction continue sur J

" $\Rightarrow$ " Supposons que x est une solution du problème de Cauchy (III.5) alors x est dérivable sur I et vérifie :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)); \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \ &\Rightarrow [x(s)]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Supposons que $\forall t \in J, x$ vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Alors d'après la condition de x et f, on dérive x par rapport à t on obtient :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in J$$

et x vérifie $x(t_0) = x_0$ d'où x est la solution de problème (III.5).

Solution maximale et globale :

Définition 25 *(Prolongement) [9]*

Soient (x, I) et $(\widetilde{x}, \widetilde{I})$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que $(\widetilde{x}, \widetilde{I})$ est un prolongement de (x, I) si $I \subset \widetilde{I}$ et $\widetilde{x}/_I = x$.

Définition 26 *(solution maximale) [9]*

Soient I_1 et I_2 deux intervalles sur $\mathbb{R}$ tel que : $I_1 \subset I_2$ on dit qu'une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si : x n'admet pas de prolongement $(\widetilde{x}, \widetilde{I})$ solution d'équation différentielle tel que : $I_1 \subset \widetilde{I} \subset I$.

Définition 27 *(solution globale) [9]*

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.

Remarque 2 *i) En reprenant les mêmes notations que dans les définitions précédentes, si une solution (x, I_1) peut se prolonger sur l'intervalle I_2 tout entier, alors x est globale dans I_2.*

ii) Tout solution globale est maximale mais la réciproque est fausse.

Exemple 1 *(E) $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cherchons les solutions $t \to y(t)$ de (E).*

- *On a d'une part la solution $y(t) = 0$.*
- *Si y ne s'annule pas, (E) s'écrit $\frac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration*

$$\frac{-1}{y(t)} = t + c \Rightarrow y(t) = \frac{-1}{t+c}$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -c[$ et sur $]-c, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (E).

Régularité des solutions :

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.

Théorème 23 *[9]*

Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k, toute solution de (E) $x' = f(t, x)$ est de classe C^{k+1}.

Démonstration: On raisonne par récurrence sur k.
pour $k = 0$, f est continue
Par hypothèse $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est dérivable, donc continue. Par conséquent $x'(t) = f(t, x(t))$ est continue, donc x est de classe C^1.

Si le résultat est vrai à l'ordre $k-1$, alors x est au moins de classe C^k. Comme f est de classe C^k, il s'ensuit que x' est de classe C^k, donc x est de classe C^{k+1}

L'existence et l'unicité de solution :

Rappelons maintenant deux résultats d'existence et d'unicité pour (III.5).

1. **Existence local et unicité :** On suppose $f(t;x)$ localement Lipschitzienne en $(t_0;x_0)$ par rapport à x, ce qui signifie qu'il existe une boule ouverte $J \subseteq I$ centrée en t_0 de rayon r_J, une boule ouverte B centrée en x_0 de rayon r_B et une constante $L > 0$ telles que :

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \ \forall t \in J, \ \forall x_1, x_2 \in B \tag{III.6}$$

   Sous cette hypothèse, le problème de Cauchy (III.5) admet une unique solution dans une boule ouverte de centre x_0 et de rayon r_0 avec $0 < r_0 < min(r_J; r_B/M; 1/L)$; où M est le maximum de $|f(t,x)|$ sur $J \times B$.

   Cette solution est appelée solution local

2. **Existence global et unicité :** Le problème de Cauchy admet une solution globale unique si on peut prendre dans (III.6)

$$J = I, \quad B = \mathbb{R};$$

   C'est-à-dire, si f est uniformément Lipschitzienne par rapport à x : En vue de l'analyse de stabilité du problème de Cauchy, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) + \delta(t), \ t \in I \\ y(t_0) = x_0 + \delta_0, \end{cases}$$

   Où $\delta_0 \in \mathbb{R}$ et δ une fonction continue sur I.

   Le problème (III.6) est déduit de (III.5) en perturbant la donnée initiale x_0 et la fonction f. Caractérisons à présent la sensibilité de la solution y par rapport à cas perturbations

III.2.2 Équation aux dérivées partielles(EDP) :

Définition 28 *(EDP d'ordre 1) [9]*

une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre est une fonction de la forme :

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{du}{dx_1}, \dots, \frac{du}{dx_n}) = 0 \tag{III.7}$$

avec :

u : *la fonction chercher*

$(x_1, \dots, x_n)$: *les variables indépendants*

$(\frac{du}{dx_1}, \dots, \frac{du}{dx_n})$: $\overrightarrow{grad}(u) = \nabla u(x)$ *les dérivées partielles du premier ordre du* u.

- *Dans le cas de deux variables* x, y *on a :*

$$F(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}) = 0$$

De manière générale : *une équation aux dérivées partielles (EDP)est une relation entre une fonction de plusieurs variables et ses dérivées. Elle est de la forme* $(m \geq 1)$ *: pour tout* $x \in \Omega$

$$F(u, \frac{du}{dx_1}, \dots, \frac{du}{dx_n}, \dots, \frac{d^m u}{dx_n^m})(x) = f(x) \tag{III.8}$$

où f *est une fonction donnée définie sur* Ω. *L'ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *s'appelle le domaine de l'EDP. L'indice de plus haut degré des dérivées dans* (III.8) *ici* m *est son degré, si* $f = 0$ *l'EDP est dite homogène. Si* F *et* u *sont des fonctions à valeurs vectorielles, alors L'EDP est dite linéaire.*

III.3 Classification des équations différentielles :

Après avoir donné un aperçu des fondements de la théorie des équations différentielles, nous allons passer à la recherche des solutions de ces équations du premier ordre. Mais il n'y a pas de méthode générale pour rechercher ces solutions, tout dépend du type de l'équation.

On considère trois grandes classes principales d'équations du premier ordre : [6]

1. Équations dont on peut séparer les variables, et de la forme suivante :

$$y'(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

Méthode de résolution :

$$\begin{aligned} y'(x) = \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{\varphi(x)}{\psi(y)} &\Rightarrow \psi(y)dy = \varphi(x)dx \\ &\Rightarrow \int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx + k \end{aligned}$$

tel que : k constante

2. Équations homogènes par rapport à x et y :

Définition 29 *Une fonction $f(x,y)$ est dite homogène de degré m si pour tout (x,y) on a :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$$

Définition 30 *On appelle équation homogène par rapport à x et y toute équation de la forme suivante :*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

où M et N sont homogène de même degré.

Méthode de résolution : Posons $y = tx \Rightarrow dy = tdx + xdt$

$$\begin{aligned} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 &\Rightarrow M(x,tx)dx + N(x,tx)(tdx + xdt) = 0 \\ &\Rightarrow xM(1,t)dx + xN(1,t)(tdx + xdt) = 0 \\ &\Rightarrow M(1,t)dx + tN(1,t)dx + xN(1,t)dt = 0 \\ &\Rightarrow (M(1,t) + tN(1,t))dx + xN(1,t)dt = 0 \\ &\Rightarrow (M(1,t) + tN(1,t))dx = -xN(1,t)dt \\ &\Rightarrow \tfrac{dx}{x} = \tfrac{-N(1,t)dt}{M(1,t)+tN(1,t)} \end{aligned}$$

3. Équations linéaires où y et y' sont au premier degré.

Définition 31 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{III.9}$$

La solution générale de l'équation (III.9) est la somme de la solution générale de l'équation homogène $a(x)y' + b(x)y = 0$ et une solution particulière de l'équation (III.9).

- En dehors de ces types généraux, nous étudierons un certain nombre de types spéciaux comme les équations de Bernoulli, de Riccati et de Lagrange.

4. **Équations de Bernoulli :** Ce sont des équations non linéaire de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^{\alpha} \tag{III.10}$$

avec les fonctions $a(x); b(x)$ et $c(x)$ sont continues sur un intervalle I et α est un exposant réel différent de I.

Méthode de résolution : Pour les valeurs de x où le coefficient $a(x)$ ne s'annule pas en divisant l'équation (III.10) par $a(x)$ on obtient : $y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}y^{\alpha}$
Puis en divisant par y^{α} avec $y^{\alpha} \neq 0$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{b(x)}{a(x)}\frac{1}{y^{\alpha-1}} = \frac{c(x)}{a(x)}$$

Effectuons le changement de fonction inconnue

$$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} \Leftrightarrow z' = \frac{1-\alpha}{y^{\alpha}}y'$$

On obtient l'équation linéaire $\frac{1}{1-\alpha}z' + \frac{b(x)}{a(x)}z = \frac{c(x)}{a(x)}$
La résolution de celle ci donne $z(x)$ puis $y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)$

5. **Équations de Riccati :** Ce sont des équations de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^2 + d(x) \tag{III.11}$$

Les fonctions $a(x); b(x); c(x)$ et $d(x)$ sont continues sur un intervalle I

Méthode de résolution :

- Pour les valeurs de x où le coefficient $a(x)$ ne s'annule pas en divisant l'équation (III.11) par $a(x)$ on obtient : $y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}y^2 + \frac{d(x)}{a(x)}$

- La méthode de résolution d'une telle équation nécessite la connaissance d'une solution particulière y_p vérifie : $y_p' + \frac{b(x)}{a(x)}y_p = \frac{c(x)}{a(x)}y_p^2 + \frac{d(x)}{a(x)}$

Effectuons le changement de fonction inconnue

$$z = y - y_p \Leftrightarrow y = z + y_p$$

alors on obtient :

$$\begin{aligned} y' + \tfrac{b(x)}{a(x)}y = \tfrac{c(x)}{a(x)}y^2 + \tfrac{d(x)}{a(x)} \quad &\Leftrightarrow (z + y_p)' + \tfrac{b(x)}{a(x)}(z + y_p) = \tfrac{c(x)}{a(x)}(z + y_p)^2 + \tfrac{d(x)}{a(x)} \\ &\Leftrightarrow z' + \tfrac{b(x)}{a(x)}z + y_p' + \tfrac{b(x)}{a(x)}y_p = \tfrac{c(x)}{a(x)}z^2 + 2\tfrac{c(x)}{a(x)}zy_p + \tfrac{c(x)}{a(x)}y_p^2 + \tfrac{d(x)}{a(x)} \\ &\Leftrightarrow z' + (\tfrac{b(x)}{a(x)} - 2\tfrac{c(x)}{a(x)}y_p)z = \tfrac{c(x)}{a(x)}z^2 \end{aligned}$$

est une équation différentielle de Bernoulli pour $(\alpha = 2)$

En effectuant un nouveau changement de fonction $u(x) = \frac{1}{z(x)}$ pour se ramener à une équation différentielle linéaire $u'(x) + (\frac{b(x)}{a(x)} - 2\frac{c(x)}{a(x)}y_p)u = \frac{c(x)}{a(x)}$

après résolution de cette dernière équation, la solution de $y(x)$ de l'équation de Riccati sera obtenue par $y(x) = z(x) + y_p(x)$ avec $z(x) = \frac{1}{u(x)}$.

6. **Équations de Lagrange :** Ce sont des équations linéaire en x et y, soit :

$$y + \alpha(y')x + b(y') = 0 \tag{III.12}$$

on pose $y' = \frac{dy}{dx} = s$. L'équation (III.12) s'écrit : $y + \alpha(s)x + b(s) = 0$

En dérivant par rapport à x on trouve :

$$\begin{aligned} s + \alpha(s) + x\alpha'(s)\tfrac{ds}{dx} + b'(s)\tfrac{ds}{dx} = 0 \quad &\Rightarrow s + \alpha(s) + [x\alpha'(s) + b'(s)]\tfrac{ds}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow [s + \alpha(s)]\tfrac{dx}{ds} + x\alpha'(s) + b'(s) = 0 \\ &\Rightarrow [s + \alpha(s)]x' + \alpha'(s)x = -b'(s) \end{aligned}$$

Chapitre IV

QUELQUES APPLICATIONS DES THÉORÈMES DU POINT FIXE AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

IV.1 Introduction :

On applique dans ce chapitre les théorèmes cités ci-dessus au problème de Cauchy : étant données une condition initiale (x_0, t_0) et une équation différentielle $\frac{d}{dt}x = f(t, x)$, existe-il une solution, et est-elle unique ? Les réponses à ces questions sont données par le théorème de Cauchy-Lipschitz (si f est localement Lipschitzienne) et de Cauchy-Arzela (si f est seulement continue). On retrouve que ces comportements différents résultent des différences entre les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder.

Une autre application du théorème de Picard dans ce partie est la démonstration du théorème d'inversion locale. En effet, on montre qu'une certaine fonction est une bijection en utilisant le Théorème de Picard pour montrer l'existence (surjectivité) et l'unicité (injectivité) d'un point fixe. Dans ce cas, il était possible de construire une contraction ; par contre, on ne pourrait pas appliquer le théorème de Schauder car on a besoin de l'unicité.

IV.2 Théorème de Cauchy Lipschitz :

Ce théorème est une application du théorème de Picard. En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec E un ensemble de fonctions et φ une application bien choisie. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On introduit le problème de Cauchy (C) suivant : Étant donné $(t_0, x_0) \in U$, trouver une solution $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle (E) $x' = f(t, x)$, $(t, x) \in U$ telle que $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$.

Définition 32 *(Cylindre de sécurité :) [6]*

Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C) si toute solution $x : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(x_0, r_0)$.

Définition 33 *[6]*

f est localement lipschitzienne par rapport à la variable x sur U si $\forall (r_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage V de (r_0, x_0) dans U et une constante $k = k(V)$ telle que $\forall (t, x_1), (t, x_2) \in V$, on ait $||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq k||x_1 - x_2||$.

Théorème 24 *(Cauchy-Lipschitz) [6]*

Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à x sur U, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ le problème de Cauchy (C) admet une unique solution $x : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$.
De plus, si on pose $\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite itérée $\Phi^p(x)$ converge uniformément vers la solution exacte.

Démonstration:

On commence par construire un cylindre de sécurité pour (C).
Soit V un voisinage de (t_0, x_0) sur lequel f est k-lipschitzienne par rapport à x, et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(x_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathcal{R}^{m+1}$ donc compact. Et on en déduit alors que f est bornée sur C_0.

Soit $M = sup_{(t,x) \in C_0} ||f(t, x(t))||$, on pose $T = min(T_0, \frac{r_0}{M})$.
On va montrer que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C).

Soit $x : I \subset [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \to \mathbb{R}^m$ avec $x(t_0) = x_0$ et $x' = f(t, x), \quad \forall t \in I$. Supposons qu'il existe $\tau \in [t_0, t_0 + T[$ tel que $x(\tau) \notin \overline{B}(x_0, r_0)$. De plus,
supposons que $J = \{t \in [t_0, t_0 + T[: x(t) \notin \overline{B}(x_0, r_0)\}$ soit non vide. On pose $\tau = inf J$, alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0)$, et de plus $d(x_0, x(\tau)) = r_0$. Comme $(t, x(t)) \in C_0, \quad \forall t \in [t_0, \tau]$ et $x' = f(t, x)$ on a, par le théorème des accroissement finis,

$$\begin{aligned} r_0 = ||x_0 - x(\tau)|| = ||x(t_0) - x(\tau)|| &\leq |t_0 - \tau| \ sup_{t \in [t_0, \tau]} |x'(t)| \\ &< MT \leq r_0 \end{aligned}$$

Donc par passage à la limite ($\overline{B}(x_0, r_0)$ étant fermé) on a $x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0) \ \ \forall t \in [t_0, t_0 + T] \cap I$. De même on montre que $x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0) \ \ \forall t \in [t_0 - T, t_0] \cap I$ et donc $x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0) \ \ \forall t \in I$.

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a $sup_C |f| = M$ et f est k-lipschitzienne par rapport à x sur C.
On note $F = C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(t_0, x_0))$ muni de la distance $d = ||.||_\infty$, et pour tout $x \in F$ on associe $\Phi(x)$ définie par :

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du.$$

On montre d'abord l'équivalence suivante : x est solution de $(C) \Leftrightarrow x$ est un point fixe de Φ,

($\Leftarrow$) Supposons que x est un point fixe de Φ. Alors $\forall x \in F$ on a $\Phi(x) = x$ d'où $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du$. Or f est continue sur U donc x est continue sur U, de plus x est dérivable sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ et sa dérivée égale $f(t, x(t)) \ \ ie : x'(t) = f(t, x(t))$.
On a aussi $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(u, x(u))du = x_0$. Donc f est solution du problème de Cauchy (C).
($\Rightarrow$) Supposons maintenant que x est solution de (C). On a alors $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$. On peut intégrer x' par rapport à u car $x'(u) = f(u, x(u))$ et $u \mapsto f(u, x(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} x'(u)du = \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du &\Rightarrow [x(u)]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du \\ &\Rightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du \\ &\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du \\ &\Rightarrow x(t) = \Phi(x)(t) \end{aligned}$$

donc x est un point fixe de Φ.

On veut appliquer le théorème de Picard (8) à Φ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que Φ est une application de F dans F, pour cela on montre que $\Phi(x)(t) \in \overline{B}(x_0, r_0) \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

   Soit $x \in F$. On remarque que si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} ||\Phi(x)(t) - x_0|| = || \int_{t_0}^t f(u, x(u))du|| \quad &\leq \int_{t_0}^t ||f(u, x(u))||du \\ &\leq M \int_{t_0}^t du \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq MT \leq r_0 \end{aligned}$$

   Donc $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad \Phi(x)(t) \in \overline{B}(x_0, r_0)$ d'où $\Phi(x)(t) \in F$ et on a évidement la stabilité de F par Φ^p.

2. On montre maintenant que Φ^p est contractante.

   Soient $x, y \in F$ on note $x_p = \Phi^p(x)$ et $y_p = \Phi^p(y) \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre qu'on a :

$$||x_p(t) - y_p(t)|| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(x, y) \qquad\qquad (HR).$$

   - <u>Initialisation :</u> c'est évident dans le cas $p = 0$.
   - <u>Généralisation :</u> Supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait (HR). Alors,

$$\begin{aligned} ||x_{p+1}(t) - y_{p+1}(t)|| \quad &\leq || \int_{t_0}^t (f(u, x_p(u)) - f(u, y_p(u)))du|| \\ &\leq | \int_{t_0}^t k||x_p(u) - y_p(u)||du| \\ &\leq | \int_{t_0}^t k \ k^p \ \tfrac{|u-t_0|^p}{p!} \ d(x, y)du| \\ &\leq \tfrac{k^{p+1}}{p!} \ d(x, y) \ \int_{t_0}^t |u - t_0|^p du \\ &\leq \tfrac{k^{p+1}}{p!} \ d(x, y) \ [\tfrac{|u-t_0|^{p+1}}{p+1}]_{t_0}^t \\ &\leq k^{p+1} \ \tfrac{|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \ d(x, y) \end{aligned}$$

     Ce qui achève la récurrence.

Comme $|t-t_0| \leq T$, on a $d(x_p, y_p) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(x,y)$, donc Φ est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$. Et il existe un $p \in \mathcal{N}^*$ tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$ (car : $\lim_{p\to+\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$). Donc, pour $q \geq p$ Φ^q est contractante.

3. La complétude de F

   On déduit du théorème de Picard (8) que Φ^q admet un unique point fixe x. De plus $\Phi^q(\Phi(x)) = \Phi(\Phi^q(x)) = \Phi(x)$ donc $\Phi(x)$ est un point fixe de Φ^q, et par unicité du point fixe de Φ^q on a $\Phi(x) = x$. Comme les points fixes de Φ sont des points fixes de Φ^q on en déduit que x est l'unique point fixe de Φ. Ainsi x est l'unique solution de (C).

IV.3 Théorème d'Inversion Local :

Ce théorème est encore une application de théorème de Picard.

Proposition 6 *Soient E un espace de Banach, $u \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que :*

$$|||u||| = sup_{||x||=1}||u(x)|| < 1.$$

Alors l'application $(Id_E - u)$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$, ce qui est dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Théorème 25 *(Inversion Local) [13] Soient :*

- *E, F deux espaces de Banach*
- *$U \subset E$ ouvert*
- *$f : U \to F$ une application de classe C^1*
- *$a \in U$ tel que df_a soit continue et inversible (et donc df_a^{-1} est continue)*

Alors, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que :

1. *La restriction $f_{/V}$ de f à V est une bijection de V sur W*
2. *L'application inverse $g : W \to V$ est continue*
3. *g est de classe C^1 et $\forall x \in W, \quad dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.*

Démonstration:

On muni $\mathcal{L}_c(E,F)$ de la norme $|||u||| = sup_{||x||=1}||u(x)||$. Quitte à remplacer f par la fonction $x \mapsto df_x^{-1}[f(a+x) - f(a)]$, on peut se ramener au cas où $a = 0$, $f(a) = 0$ et $df_0 = df_a = Id_E$ (et donc $E = F$)

Comme f est de classe C^1, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset U$ et pour tout $x \in B(0,r)$ on a,

$$|||df_x - df_0||| = |||df_x - Id_E||| \leq \frac{1}{2}$$

On désigne $u := Id_E - df_x$ donc $df_x = Id_E - u$ avec $|||u||| \leq \frac{1}{2}$. Alors d'après la proposition (6), df_x est un isomorphisme bicontinu qui vérifie $df_x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ et donc,

$$|||df_x^{-1}||| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |||u|||^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2$$

1. On va montrer que la restriction de f à un voisinage ouvert de 0 dans $B(0,r)$ est une bijection sur $B(0, \frac{r}{2})$.

   Soit $y \in B(0, \frac{r}{2})$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} h : \ & \overline{B}(0,r) \to E \\ & x \mapsto y + x - f(x) \end{aligned}$$

   Il est clair que h est de classe C^1. De plus, $\forall x \in B(0,r), \quad |||dh_x||| = |||Id_E - df_x||| \leq \frac{1}{2}$. Donc d'après le théorèmes des Accroissements finis,

$$\forall x, x' \in \overline{B}(0,r), \qquad ||h(x) - h(x')|| \leq \frac{1}{2}||x - x'|| \tag{IV.1}$$

   En particulier, pour $x' = 0$, on a $||x - f(x)|| = ||h(x) - h(0)|| \leq \frac{1}{2}||x||$ donc,

$$\begin{aligned} \forall x \in B(0,r), \quad ||h(x)|| & \leq ||y|| + ||x - f(x)|| \\ & \leq ||y|| + \tfrac{1}{2}||x|| \\ & \leq \tfrac{r}{2} + \tfrac{r}{2} = r \end{aligned}$$

   Ainsi, h est une fonction de $\overline{B}(0,r)$ dans $B(0,r) \subset B(0,1)$. Comme de plus h est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne d'après (IV.1), d'après le théorème de Picard (8), $\exists! x \in \overline{B}(0,r)$ tel que $h(x) = x$, c'est-à-dire $f(x) = y$. Comme $x = h(x)$ et que h est à valeurs dans $B(0,r)$, on en déduit que $x \in B(0,r)$. Alors, pour tout $y \in B(0, \frac{r}{2})$; $\exists! x \in B(0,r)$ tel que $f(x) = y$. On définit $V := f^{-1}(B(0, \frac{r}{2})) \cap B(0,r)$. V est un voisinage de 0 car $f(0) = 0$ et f est continue sur $B(0,r)$. En notant $W := B(0, \frac{r}{2})$, on a alors $f_{/V} : V \to W$ est une bijection.

2. On note $g : W \to V$ l'application inverse. On utilise de nouveau h, cette fois-ci avec $y = 0$, et donc $\forall x \in U, \quad x = h(x) + f(x)$. Alors $\forall x, x' \in B(0, r)$,

$$\begin{aligned} ||x - x'|| &\leq ||h(x) - h(x')|| + ||f(x) - f(x')|| \\ &\leq \tfrac{1}{2}||x - x'|| + ||f(x) - f(x')|| \\ &\leq 2||f(x) - f(x')|| \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall y, y' \in W$

$$||g(y) - g(y')|| \leq 2||f(g(y)) - f(g(y'))|| = 2||y - y'|| \tag{IV.2}$$

g est donc lipschitzienne et par conséquent continue.

3. On fixe $x \in V$ et on pose $y = f(x) \in W$, il existe $r' > 0$ tel que $B(y, r') \subset W$, et pour tout $\omega \in B(0, r')$, on pose $\nu = g(y + \omega) - g(y)$. Donc d'après (IV.2), $||\nu|| \leq 2||\omega||$, et

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= g(y + \omega) - g(y) - df_x^{-1}(\omega) \\ &= \nu - df_x^{-1}[f(\nu + x) - f(x)] \\ &= -df_x^{-1}[f(\nu + x) - f(x) - df_x(\nu)] \end{aligned}$$

Comme $|||df_x^{-1}||| \leq 2$, on obtient :

$$||\Delta(\omega)|| \leq 2||f(\nu + x) - f(x) - df_x(\nu)|| = 2||\nu||\varepsilon(\nu) \ avec\ \lim_{\nu \to 0} \varepsilon(\nu) = 0$$

Donc,

$$||\Delta(\omega)|| \leq 4||\omega||\varepsilon(g(y + \omega) - g(y)) = 4||\omega||\varepsilon'(\omega).$$

Comme g est continue, $\lim_{\omega \to 0} \varepsilon'(\omega) = 0$, alors $||\Delta(\omega)|| = \theta(||\omega||)$. Donc, g est différentiable en y et $dg_y = df_x^{-1}$. Enfin, comme df_x^{-1} est continue (car :f est de classe C^1 et que $L \in GL(E) \mapsto L^{-1} \in GL(E)$ est continue) la fonction $dg : y \mapsto dg_y$ est continue. Ainsi, g est de classe C^1.

IV.4 Théorème de Cauchy-Arzela :

On reprend maintenant le problème de Cauchy pour l'équation $x' = F(t, x(t))$, mais ici on ne sait pas si F est Lipschitzienne. Le théorème de Schauder nous donnera l'existence d'une solution, mais pas nécessairement l'unicité.

Théorème 26 *[7]*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques avec Y complet. Alors l'ensemble $C_b^0(X, Y)$ est complet pour la distance uniforme

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \{d_Y(f(x), g(x))\}$$

.

Théorème 27 *(Ascoli) [7]*

Soient (X, d_X) un espace métrique compact et (Y, d_Y) un espace métrique. On se donne un sous-ensemble F de $C^0(X, Y)$ tel que :

1. *$\forall x \in X, \quad \overline{\{f(x),\ f \in F\}}$ est compact dans Y.*
2. *La famille F est équicontinue, ie $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, x' \in X,\ \forall f \in F$ on a*

$$d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

Alors $\overline{F}$ est compact dans $C^0(X, Y)$ (muni de la distance uniforme).

Théorème 28 *(Cauchy-Arzela) Soient :*

- *E un espace normé de dimension finie,*
- *U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$,*
- *F une fonction continue de U dans E,*
- *(t_0, x_0) un point de U.*

Alors l'équation différentielle $x' = F(t, x)$ a une solution au voisinage de (t_0, x_0) ie il existe un nombre $\rho > 0$ et une fonction $f : [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \to E$ de classe C^1 avec $f(t_0) = x_0$ telle que pour tout $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$

1. *$(t, f(t)) \in U$*
2. *$f'(t) = F(t, f(t))$*

Démonstration:

Soit $M > ||F(t_0, x_0)||$. Quitte à remplacer U par l'ensemble ouvert $\{(t,x) \in U : \ ||F(t,x)|| < M\}$, on peut supposer que F est majorée en norme par M sur U. Il existe donc $r > 0$ et $h > 0$ tels que : $U \supset [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B}(x_0, r)$, et on choisit $\rho = \min(h, \frac{r}{M})$.

On considère l'ensemble K des fonctions M-lipschitzienne de l'intervalle $J = [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ dans E qui valent x_0 en t_0, que l'on munit de la norme uniforme. Si f et g dans K et $s \in [0,1]$, alors $sf + (1-s)g \in K$, donc K est convexe. Si $(f_i)_{i\in\mathcal{N}}$ est une suite de Cauchy de K pour la norme uniforme, alors d'après théorème (26), il existe une fonction continue $f : J \to E$ telle que f_i converge uniformément vers f. On a alors $f(t_0) = \lim\limits_{i\to+\infty} f_i(t_0) = x_0$ et,

$$\forall t, t' \in J \qquad ||f(t) - f(t')|| = \lim_{i\to+\infty} ||f_i(t) - f_i(t')|| \leq M|t - t'|$$

et donc $f \in K$. On en déduit que K est fermé pour la norme uniforme dans $C^0(J, E)$.
De plus, pour tout $t \in J$ en tout $f \in K$, on a

$$||f(t) - x_0|| = ||f(t) - f(t_0)|| \leq M|t - t_0| \leq M\rho \leq r$$

ce qui montre que $K(t) = \{f(t) : \ f \in K\}$ est contenu dans la boule $\overline{B}(x_0, r)$, et donc $K(t)$ est relativement compact. Et puisque K est uniformément équicontinu, il résulte du théorème d'ascoli (27) que K est compact.

On peut alors définir une application $\Phi : K \to C^1(J, E)$, en posant

$$\Phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds$$

En effet, si $f \in K$, alors $f(s) \in \overline{B}(x_0, r)$ pour tout $s \in J$, ce qui montre que la fonction $s \mapsto F(s, f(s))$ est bien définie et continue sur J à valeurs dans E, et possède une primitive $\Phi(f)$ de classe C^1, valant x_0 en t_0. Puisque la fonction $g := \Phi(f)$ vérifie $g'(t) = F(t, f(t))$, on a que $||g'(t)|| \leq M$, c'est-à-dire que g est M-lipschitzienne sur J. De plus, $g(t_0) = x_0$ donc, $\Phi(K) \subset K$. Enfin, comme F est uniformément continue sur le compact $J \times \overline{B}(x_0, r)$, pour tout $\varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0$ tel que pour tout (s, x) et (s', x') appartenant à $J \times \overline{B}(x_0, r)$, on ait

$$\max(|s - s'|, ||x - x'||) < \delta \Rightarrow ||F(s, x) - F(s', x')|| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

Alors, si f et f_1 appartiennent à K et si $||f - f_1|| < \delta$, on a
$\forall s \in J, \quad ||F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))|| < \frac{\varepsilon}{\rho}$. Donc,

$$\begin{aligned} ||\Phi(f)(t) - \Phi(f_1)(t)|| &= || \int_{t_0}^{t} (F(s, f(s)) - F(s, f_1(s)))ds|| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in J} ||F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))|| \\ &\leq \rho \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Ceci montre que $||\Phi(f) - \Phi(f_1)|| \leq \varepsilon$, *ie* $\Phi : K \to K$ est une application continue. Donc, d'après théorème de Schauder, il existe un point fixe $f \in K$ de Φ, c'est-à-dire que f est une solution de problème de Cauchy.

ANNEXE

Dans cette partie on va résoudre les équations différentielles numériquement par méthode du point fixe pour trouver une solution approchée et comparer avec la solution exacte de cette équation à l'aide des exemples en matlab.

V.1 Résolution numérique des équations différentielles par la Méthode de point fixe

Définition 34 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue. On dit que $x^* \in \mathbf{R}$ est un point fixe de f si $f(x^*) = x^*$*
La résolution d'un problème à l'aide d'une formule de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$, $k \in N$ peut etre considérée comme détermination d'un point fixe de la fonction f
En effet : Soit (x_k) la suite définie par $x_{k+1} = f(x_k)$, on suppose qu'elle converge vers une valeur qu'on notera x^*. Par passage à limite dans l'expression $x_{k+1} = f(x_k)$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) &\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = f(\lim_{k\to\infty} x_k) \ \textit{(par continuité de } f\textit{)} \\ &\Leftrightarrow x^* = f(x^*) \ \textit{(car } \lim_{k\to\infty} x_k = x^*) \end{aligned}$$

et donc x^* est un point fixe de f.

Algorithme de point fixe

$$\begin{cases} x_0 = initialisation \\ x_{k+1} = f(x_k) \\ Critère\ d'arrêt\ \ |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Application :

Soit l'équation différentielle (E) $\;x' = f(t,x),\quad (t,x) \in U\;$ telle que $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$.

on associe $\Phi(x)$ définie par :

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du.$$

x est solution de $(E) \Leftrightarrow x$ est un point fixe de Φ

V.2 EXEMPLE 1

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = t + 2y(t) \end{cases}$$

et par les techniques habituelles d'équations différentielles à coefficients constants on obtenue la solution suivant :

$$y(t) = 5e^{(2t)}/4 - t/2 - 1/4$$

et par méthode du point fixe

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{k+1} = y_0 + \int_0^t (u + 2y_k)du \end{cases}$$

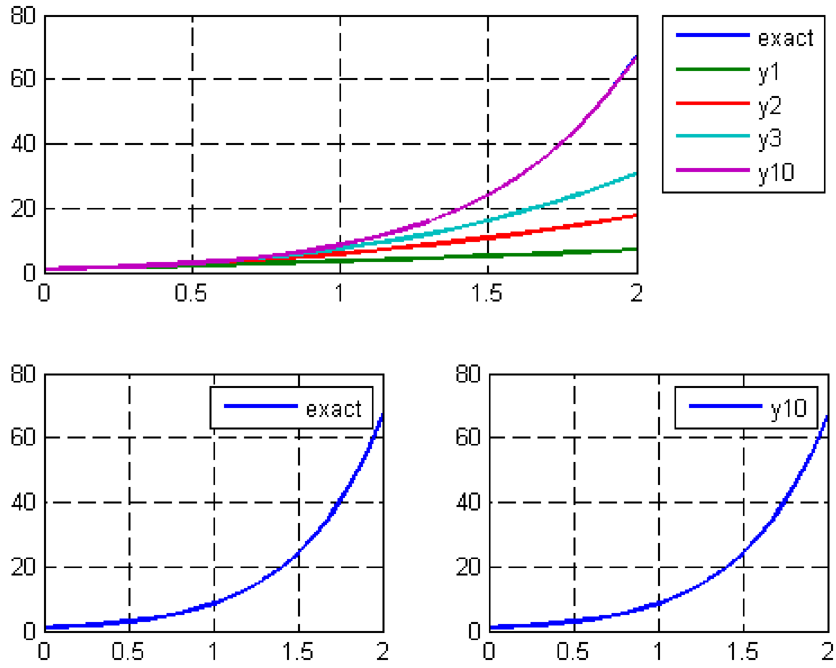


Figure V.1 – Comparaison entre les méthode du point fixe et solution exact

x	exacte	itiration 1	itiration 2	itiration 3	itiration 10
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1000	1.2268	0.0218	0.0014	0.0001	0.0000
0.2000	1.5148	0.0948	0.0121	0.0012	0.0000
0.3000	1.8776	0.2326	0.0436	0.0063	0.0000
0.4000	2.3319	0.4519	0.1106	0.0210	0.0000
0.5000	2.8979	0.7729	0.2312	0.0541	0.0000
0.6000	3.6001	1.2201	0.4281	0.1185	0.0000
0.7000	4.4690	1.8240	0.7297	0.2323	0.0000
0.8000	5.5413	2.6213	1.1706	0.4197	0.0000
0.9000	6.8621	3.6571	1.7941	0.7127	0.0000
1.0000	8.4863	4.9863	2.6530	1.1530	0.0001
1.1000	10.4813	6.6763	3.8126	1.7939	0.0002
1.2000	12.9290	8.8090	5.3530	2.7034	0.0005
1.3000	15.9297	11.4847	7.3723	3.9670	0.0012
1.4000	19.6058	14.8258	9.9911	5.6922	0.0028
1.5000	24.1069	18.9819	13.3569	8.0132	0.0062
1.6000	29.6157	24.1357	17.6503	11.0967	0.0130
1.7000	36.3551	30.5101	23.0925	15.1498	0.0259
1.8000	44.5978	38.3778	29.9538	20.4282	0.0499
1.9000	54.6765	48.0715	38.5651	27.2478	0.0928

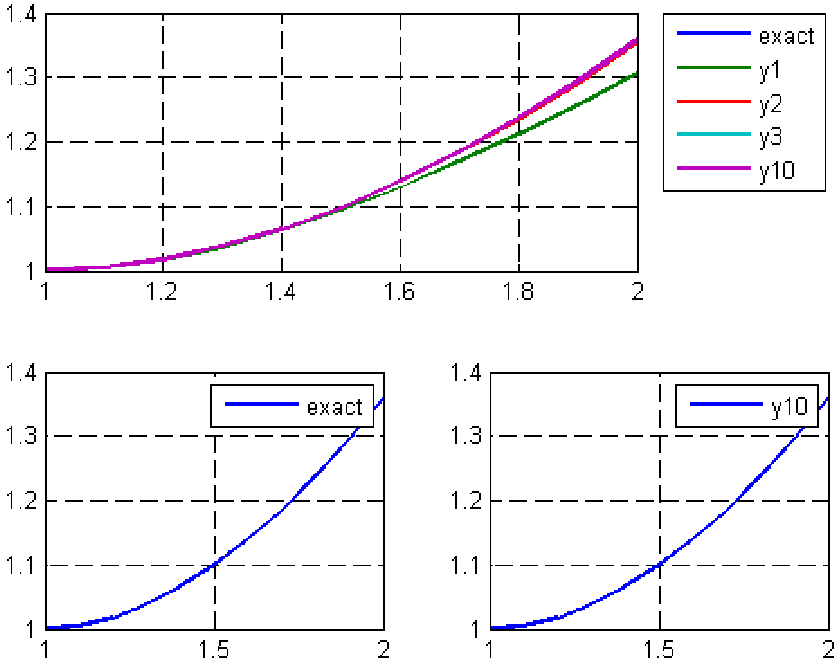
V.3 EXEMPLE 2

méthode du point fixe

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(t) = y(t) - (y(t)/t) \end{cases}$$

est obtenue par les techniques habituelles d'équations différentielles à coefficients constants. Vous pouvez vérifier que la solution est :

$$y(t) = e^{t-1}/t$$



x	exacte	itiration 1	itiration 2	itiration 3	itiration 10
1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.1000	1.0047	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.2000	1.0178	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
1.3000	1.0384	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000
1.4000	1.0656	0.0021	0.0000	0.0000	0.0000
1.5000	1.0991	0.0046	0.0001	0.0000	0.0000
1.6000	1.1388	0.0088	0.0004	0.0000	0.0000
1.7000	1.1846	0.0152	0.0008	0.0000	0.0000
1.8000	1.2364	0.0242	0.0017	0.0001	0.0000
1.9000	1.2945	0.0364	0.0031	0.0002	0.0000
2.0000	1.3591	0.0523	0.0052	0.0004	0.0000

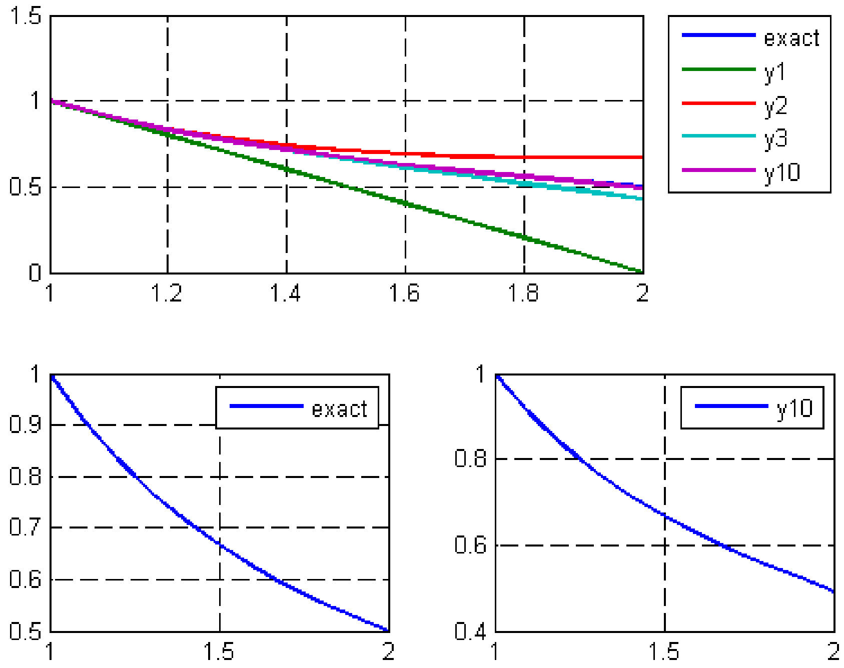
V.4 EXEMPLE 3

méthode du point fixe

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(t) = -y^2(t) \end{cases}$$

est obtenue par les techniques habituelles d'équations différentielles à coefficients constants. Vous pouvez vérifier que la solution est :

$$y(t) = 1/t$$



x	exacte	itiration 1	itiration 2	itiration 3	itiration 10
1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.1000	0.9091	0.0091	0.0006	0.0000	0.0000
1.2000	0.8333	0.0333	0.0040	0.0004	0.0000
1.3000	0.7692	0.0692	0.0118	0.0016	0.0000
1.4000	0.7143	0.1143	0.0244	0.0042	0.0000
1.5000	0.6667	0.1667	0.0417	0.0088	0.0000
1.6000	0.6250	0.2250	0.0630	0.0158	0.0001
1.7000	0.5882	0.2882	0.0874	0.0254	0.0002
1.8000	0.5556	0.3556	0.1138	0.0379	0.0005
1.9000	0.5263	0.4263	0.1407	0.0533	0.0012
2.0000	0.5000	0.5000	0.1667	0.0714	0.0081

CONCLUSION

Ce mémoire, a été concerné a étudie les théorèmes du points fixes et application aux équations différentielles.

Pour cela nous avons commencé ce travail par des résultats préliminaires que nous avons utilisés dans ce mémoire, puis on a étudie quelques théorèmes du point fixe on particulier théorème de Picard, de Brouwer, de Schauder et de Kranosel'skii.

Ainsi nous avons rappelé les équations différentielles, et on a traité les résultats d'existence et d'unicité de ces équations à l'aide des applications du théorèmes de point fixe.

En fin on a résoudre les équations différentielles numériquement par la méthode du point fixe et on a comparer la solution approchée avec la solution exacte de ces equations à l'aide des exemples en Matlab.

Bibliographie

[1] Andrei D.Polyanin, Valentin F.Zaitsev : *Handbook of Exact solutions for Ordinary Differential Equations*, Bocaratan, New York, London Tokyo, 1995.

[2] Droniou.J : *Degrés topologiques et applications*, 2006.

[3] E.Zeidler : *Non linear Functional analysis and it's applications Fixed point theorems*, Springer-verlag, New york, Berlin, Heiderberg, Tokyo, 1985.

[4] Eric Goncalvés : *Résolution numérique, Description des EDP et EDO*, Institut national polytechnique de Grenoble, Septembre 2005.

[5] H.Brezis : *Analyse Fonctionnelle,Théorie et Application*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, France, 1983.

[6] Jean-Pierre DEMAILLY : *Analyse numérique et équation différentielle*, Collection Grenoble Sciences, France, 2006.

[7] J.DIXMIER *Topologie générale*, Collection Puf, Presses universitaires de France, Paris, 1981.

[8] M.HENRI CARTAN : *I calcul Différentielle dans les espaces de Banach II Équations différentielles*, Collection Méthodes, Hermann, Paris 1967.

[9] P.G CIARLET et J.L LIONS : *Introduction à l'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection Mathématiques appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris Milan, Bercelone Mexico, 1988.

[10] PDF 206 : *Théorèmes du point fixe, Exemples et Applications*, Pierre Lissy, May 29,2010.

[11] R.P.Agarwal,Y.Zhou and Y.He : *Existence of fractional neutral functional differential équations*, Compact.Math.Appl.59(3)(2010),1095-1100.

[12] Schmidt, KD : *Embedding tjeorems for cones and Applications to classes of convex sets occurring in inerval mathematics*, In :Proceeding of the International Symposium on Inerval Mathematics, Springer, London 1985.

[13] X.GOURDON *Les maths en tête (analyse)*, ellipses,Paris, 1994.

[14] Yves SONNTAG :*Topologie et ANALYSE FONCTIONNELLE*, cours de licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés, ellipses, universités mathématiques de Provence.

Résumé :

Le but de ce travail est de savoir l'importance des théorèmes du point fixe dans l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des équations différentielles.

Mots clés : Point fixe, Équation différentielle

Abstrat :

The aim of this work is to know the importance of fixed point theorems in the study of the existence and uniqueness of the solution of differentials equations.

Key werds : Fixed point, differentials equations