Université de Ain Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Polycopié pédagogique

Titre

Algèbre 1, Cours et Exercices Corrigés

Réalisé par : Dr. Mohamed HARIRI

Ce cours est destiné aux étudiants de la première année LMD Mathématiques et Informatiques.

Année : 2023-2024

Notations

1. Ensembles usuels en mathématiques

   On désigne généralement les ensembles usuels par une lettre à bouble barre :
   $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels
   N^* : l'ensemble des entiers strictement positifs
   $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls)
   $\mathbb{Z}^*$: l'ensemble des entiers non nuls
   $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels $\left(\frac{p}{q} \textbf{ tel que } p \in \mathbb{Z} \;\; et \;\; q \in \mathbb{Z}^*\right)$
   $\mathbb{R}$: l'ensemble des réels
   $\mathbb{R}^*$: l'ensemble des réels autres que 0
   $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.
   $P(E)$: ensemble des parties de $E \subset \mathbb{C}$

2. Eléments de logique et quelques symboles
   $>$: strictement supérieur
   $<$: strictement inférieur
   $\geq$: supérieur ou égal
   $\leq$: inférieur ou égal
   $\neq$: différent
   $\equiv$: équivaut (équivalence logique)
   $\not\equiv$: non équivalence
   $\{ \ \}$: ensemble
   $A \backslash B$: l'ensemble des éléments de E qui appartiannent à A et qui n'appartiennent pas à B. Il est appelé **difference**, car A et B dans un ensemble E
   $A \Delta B$: difference symetrique
   $\varnothing$: ensemble vide
   $\in$: appartient

$\notin$: n'appartient pas
$\forall$: pour tout (quantificateur universel)
$\exists$: il existe (quantificateur universel)
$\nexists$: il n'existe pas
$\exists!$: il existe un et un seul
$\subset$: est sous-ensemble (est contenu ou inclus)
$\cup$: union d'ensembles
$\cap$: intersection d'ensembles
$\wedge$: et
$\vee$: ou
$\neg$: non
$\Longrightarrow$: si,..., alors ; implique
$\Longleftrightarrow$: si et seulement si : **ssi** : equivalence

Introduction

L'algèbre. Branche des mathématiques qui, dans sa partie classique, se consacre à la résolution par des formules explicites des équations algébriques et, dans sa partie moderne, étudie des structures (groupes, anneaux, corps, idéaux) et se prolonge par les algèbres linéaire et multilinéaire.

L'objectif de l'algèbre est de déterminer quelles sont les valeurs inconnues, afin de trouver une solution à un problème. L'algèbre reste une discipline non seulement utile pour obtenir de bons résultats en mathématiques, mais aussi pour calculer des inconnus dans notre vie quotidienne. L'algèbre reste accessibles à tous, à force de travail.

Ce polycopié intitulé Algèbre I est destiné aux étudiants de la première année L.M.D Mathématiques et Informatiques. Ce manuscrit permettra aux étudiants d'apprendre quelques notions liées contenant cinq principaux parties :

- Notions de logique.
- Ensembles et applications.
- Relation binaire sur un ensemble.
- Structures algébriques.
- Anneaux de polynômes.

Mode d'évaluation : Examen (60%) contrôle continu (40%).

Chaque partie répond aux exigences de bases que les étudiants auront besoin dans leurs parcours. Puisse ce manuel aider les étudiants dans leurs apprentissage des mathématiques. Ce polycopié peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, prière de les signaler afin d'améliorer le contenu de ce manuscrit.

Chapitre Premier

Notions de logique

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui.

1.1 Tables de vérité

La méthode des tables de vérité est une méthode élémentaire pour tester la validité d'une formule du calcul propositionnel. Les énoncés étant composés à partir des connecteurs (non), (et), (ou), (si,..., alors), (si et seulement si).

Proposition logique. c'est un assemblage de termes auxquele on peut attribuer sans anbiguité la valeur **vraie** ou **fausse**
$P = 0 \to P$ est fausse
$P = 1 \to P$ est vraie.

Equivalence. Deux propositions sont equivalentes si élles sont vrais ou fausses en même temps, on note par $P \Leftrightarrow Q$.

Négation. La négation de P notée $\overline{P}$ ou non P. Elle est fausse lorsque P est vraie et inversement.

Table de vérité. Soient les propositions P et $\overline{P}$

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Remarque 1.1.1. *Deux proposition sont equivalents si elles ont une même table de verité.*

Exemple 1.1.1. *Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vrais ou fausses :*

1. *(2< 3) et (4 divise 8),*
2. $\neg(2 < 5)$ *ou (2 divise 7).*

1. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ *où* $P = 2 < 3$ *et* $Q = \neg(4 \text{ divise } 8)$. *Puisque* P *et* Q *sont vraies, la proposition est vraie.*
2. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ *où* $P = \neg(2 < 5)$ *et* $Q = 2 \text{ divise } 7$. *Puisque* P *et* Q *sont fausses, la proposition est fausse.*

Connecteurs logiques : Soient P et Q deux propositions mathématiques. Notons dans le tableau 1.1 tous les connecteurs logiques et leurs significations.

Il existe deux connecteurs loqiques, (et) et (ou)

1. Connecteur (et). On appelle conjonction logique P et Q (notée $P \wedge Q$) la proposition vraie si P et Q sont, et fausse dans tous les autres cas.

Table de vérité. Soient les propositions P et Q

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Propriétés 1.1.2. *Soient* P, Q *et* R *trois propositions*

1. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
2. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
3. $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

Preuve. *Les propriétés 1 et 2.*

P	Q	$P \wedge P$	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

3.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Disjonction logique. P ou Q notée $P \vee Q$ posède deux seus.

1. ou exclusif $P \vee Q$ n'est vraie que si l'une des deux propositions est vraie.
2. ou inclusif $P \vee Q$ n'est vraie que si l'une des propositions est vraie ou si les deux sont vraies.

Propriétés 1.1.3. *(ou inclusif). Soient P, Q et R trois propositions*

1. $P \vee P \Leftrightarrow P$
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
3. $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R.$

Propriétés 1.1.4. *Pour le ou exclusif*

1. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P}$ *ou* $\overline{Q}$
2. $P \vee Q \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}.$

L'implication. L'implication de P et Q notée $P \Rightarrow Q$ est une proprieté qui est fausse si Q est fausse et P est vraie

Propriétés 1.1.5. *Soient P, Q et R trois propositions*

1. $P \Rightarrow P$ *est une proposition vraie*
2. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
3. $[(P \Rightarrow Q)$ *et* $(Q \Rightarrow R)] \Rightarrow P \Rightarrow R.$

Preuve. *De propriété 2*

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Remarque 1.1.2. *Une equivalence est une double implication*

Résumé des Connecteurs logiques

Tableau 1.1 – *Connecteurs logiques*

Notations	Connecteurs logiques	Définitions
$\neg P, \overline{P}$	Négation, non P	$\neg P$ est vraie si P est fausse et vise-versa
$P \wedge Q$	Conjonction,P et Q	$P \wedge Q$ est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies,elle est fausse si l'une au moins des deux est fausse
$P \vee Q$	Disjonction, **ou** inclusif	$P \vee Q$ est vraie si l'une au moins des deux est vraie,elle est fausses si P et Q sont fausses toutes les deux
$P \Rightarrow Q$	p implique Q, si P alors Q	$P \Rightarrow Q$ est fausses uniquement dans le cas où p est vraie et Q est fausse, sinon elle est vraie
$P \Leftrightarrow Q$	P est équivalente à Q, P si et seulement si Q	$P \Leftrightarrow Q$ est vraie dans les deux cas : $\begin{cases} P \text{ et } Q \text{ sont vraies toutes les deux} \\ P \text{ et } Q \text{ sont fausses toutes les deux} \end{cases}$

Propriétés 1.1.6. *Soient P, Q et R trois propositions*

1. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$;
2. $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$;
3. $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$;
4. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$;
5. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$;
6. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$;
7. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ *(la distribution de $\wedge$ sur $\vee$);*
8. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ *(la distribution de $\vee$ sur $\wedge$)*

Preuve. Dans le tableau suivant on montre que (1) est vraie. De la même façon, on démontre les autres propriétés.

Tableau 1.2 - Tables de vérité associé à (1)

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Exemple 1.1.7.
On considère les propositions suivantes .

1. $h_1(x) = \sqrt{3x}$ *est dérivables sur* $\mathbb{R} \Rightarrow h_1(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *;*
2. $h_2(x) = 4e^{-2x}$ *est croissante et continue ;*
3. 2 *est paire* $\Leftrightarrow 5$ *est un nombre premier.*

Solution.

1. Propostion 1 $P \Rightarrow Q$, telle que P est fausse ($\sqrt{3x}$ n'est pas dérivable au point zéro) et Q est vraie,donc elle est vraie.
2. La forme de proposition 2 est $P \wedge Q$, telle que P est fausse et Q est vraie, donc elle est fausse.
3. La proposition 3 est $P \Leftrightarrow Q$, telle que P est vraie et Q est vraie, donc elle est vraie.

1.2 Les quantificateurs

Si on veut exprimer que la proposition P est vraie pour **au moins** un objet, on ecrit $\exists x, P(x)$, $\exists$ est le quantificateur existenciel. Si on veut exprimer qu' une proposition P est vraie pour tous les objects, on ecrit : $\forall x, P(x)$. $\forall$ est le quntificateurs universel. En mathématiques, il existe trois quantificateurs logiques représentés dans le Tableau 1.3.

Tableau 1.3 Quantificateurs logiques

Quantificateurs	Proposition	Description
$\forall$: quelque soit, pour tout	$\forall x \in \mathbb{E} : P(x)$	La proposition est vraie si $P(x)$ est vraie quelque soit x, sinon elle est fausse
$\exists$: il existe, il existe au moins	$\exists x \in \mathbb{E} : P(x)$	La proposition est vraie s'il existe x tel que $P(x)$ est vraie, s'il n'existe pas ce x elle est fausse
$\exists!$: il existe un unique	$\exists! x \in \mathbb{E} : P(x)$	La proposition est vraie s'il existe un x qui est unique vérifiant $P(x)$. Elle est fausse si ce x n'existe pas ou s'il existe plusieurs x vérifiant $P(x)$

Propriétés 1.2.1.

1. $\overline{\forall x \in \mathbb{R} : P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{E} : \overline{P(x)}$;
2. $\overline{\exists x \in \mathbb{E} : P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E} : \overline{P(x)}$;
3. $$\begin{aligned} \overline{\exists! x \in \mathbb{E} : P(x)} &\Leftrightarrow \overline{\exists x \in E :\ P(x) \wedge\ x \textit{ est unique}} \\ &\Leftrightarrow \overline{\exists x \in \mathbb{E} : P(x)} \vee \overline{\ x \textit{ est unique}} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{E} : \overline{P(x)}) \vee (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{E} : P(x_1) \wedge P(x_2)). \end{aligned}$$

Exemple 1.2.2.
la nègation des propositions suivantes $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $\forall x \in \mathbb{R} : h_1(x) = h_2(x)$. *La négation de cette proposition est*

$$\exists x \in \mathbb{R} : h_1(x) \neq h_2(x)$$

2. $\exists! x \in \mathbb{Z} : h_1(x) = 0$. *La négation de cette proposition est*

$$(\forall x \in \mathbb{Z} : h_1(x) \neq 0) \vee (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{Z} : h_1(x_1) = 0 \wedge h_1(x_2) = 0)$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : P(x) \equiv h_1(x) < h_2(y)$. *La négation de cette proposition est :*

$$\exists x \in \mathbb{R} : \overline{P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : h_1(x) \geq h_2(x).$$

1.3 Raisonnement mathématique.

• **Prouver une implication** $P \Rightarrow Q$. Soient P et Q deux propositions pour prouver que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie il existes des règles des raisonnnements.

1. **Règle du syllogysme**

$$[H_1 \Rightarrow H_2 \;\; et \;\; H_2 \Rightarrow H_3] \Rightarrow [H_1 \Rightarrow H_3]$$

2. **Disjonction des cas** $(P \Rightarrow Q \;\; et \;\; \overline{P} \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ est vraie.
3. **Règle de démonstration par l'absurde.**

Ce raisonnement est basé sur le fait que pour démontrer qu'une proposition P est vraie,on suppose que $\overline{P}$ est vraie et on en déduit une contradiction. Soit l'implication $P \Rightarrow Q$. Supposons (par l'absurde) que l'ont ait $\overline{Q}$ alors P ne serait pas vrai. Ceci contredit l'hypothèse de depart qui est la proposition P.

4. **Règle de contraposée.**

C'est l'equivalence

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Alors, pour montrer que $p \Rightarrow q$, il suffit de montrer que $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Exemple 1.3.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *montrons par contraposée que :*

$$n^2 \textit{ est pair} \Rightarrow n \textit{ est pair}.$$

C'est à dire

$$n \textit{ est impair} \Rightarrow n^2 \textit{ est impair}.$$

En effet, il existe $k \in \mathbb{N}$, *tel que* $n = 2k + 1$, *donc :*

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{m} + 1, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

• **Prouver une équivalence** $P \Leftrightarrow Q$. Soient P et Q deux assertions, pour prouver que l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie on peut

1. En montre les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ avec l'une des méthodes du paragraphe précédent,
2. En procéde directement par équivalences : $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow Q$.

Règle de démonstration par récurrence.

On écrit en deux étapes.
– On montre que la proposition $P(n)$ est vraie pour le plus petit indice (n=0 ou n=1 ou n=2).
– Si on suppose la proposition $P(n)$ est vraie pour le rang n, alors elle est vraie pour le rang $(n+1)$.
$P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ est vraie.

Exemple 1.3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite du terme général*

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

démontrons par récurrence
1. si $n = 1$, $S_1 = 1$
2. vrai pour n implique vrai pour $n+1$

$$S_{n+1} = 1+2+3+...+n+n+1 = S_n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

1.4 Exercices

Exercice 1. Soient P , Q et R trois propositions données

1. Simplifier l'expression :

$$K = (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q)$$

2. Montrer que : $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$
3. Construire la table de vérité des propositions suivantes :

$$R = \overline{(P \vee Q)} \vee (\bar{P} \vee \bar{Q}) \quad \text{et} \quad S = [P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow R.$$

Exercice 2 . Former la négation des propositions suivantes :

1. $\overline{(P \vee Q)} \vee [(P \Rightarrow Q) \wedge R]$
2. $[(P \vee Q) \vee R] \Rightarrow (P \wedge R)$
3. $(P \wedge \overline{Q}) \Leftrightarrow R$.

Exercice 3 Donner la négation des propositions suivantes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = g(x)$
2. $\exists! \ x \in \mathbb{Z} \quad : \quad f(x) = 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ (\exists y \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x))$.

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et *à* valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les **quantificateurs** les propriétés suivantes, puis donner leur négation.

1. f prend toujours la valeur 2.
2. f prend au moins une fois la valeur 2.
3. Il existe un unique x sur l'intervalle $[-2, 2[$ tel que f s'annule.
4. Pour tout entier x, pour tout entier y, la relation $y < x$ implique la relation $y < x + 3$.
5. Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 2.
6. Pour chaque réel x, il existe un réel tel que leur somme soit strictement positif.

Exercice 5. Utiliser le **raisonnement par l'absurde**. Montrer que :

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel ; tel que $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels
2. $\forall x, y \geq 0 : \dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x} \Rightarrow x = y$.

Exercice 6. Utiliser le **raisonnement par contraposée**. Montrer que :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$: $\quad n^2$ impair $\Rightarrow$ n impaire. Est-ce-que la réciproque est vraie.
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \neq 2 \quad et \quad y \neq 2 \quad \Rightarrow \quad xy - 2x - 2y + 4 \neq 0.$$

Exercice 7. Démontrer par **récurrence** les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+3) = n(n+4)$.

Exercice 8

1. Soit P et Q deux propositions. Montrer
$$\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}.$$
2. Soint P, Q et R trois propositions. Montrer l'équivalence logique :
$$\left[P \vee (Q \wedge R)\right] \equiv \left[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)\right].$$
3. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :
   a . $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ ([(x^2 > 0) \Rightarrow (2x^2 > x^2)])$.
   b . $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ ,(\forall n \in \mathbb{N})\ \ [(n+p > p) \Rightarrow (n+3p > 3p)]$.
   c . $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ ,(\exists y \in \mathbb{R})\ \ x+y > 0$.
   d . $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ ,(\exists y \in \mathbb{R})\ \ (x+y > 0) \vee (x+y = 0)$.
4. Dons les cas c et d, indiquer celle qui est (sont) vraie !.
5. Donner la contraposée de les deux propositions a et b.
6. Montrer par récurrence que : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 9. (Examen Janvier 2022, Département MI Université Ain-temouchent)

1. Soit P et Q deux propositions. Montrer l'équivalence logique
$$\overline{(P \wedge Q) \Longrightarrow \overline{P}} \equiv (P \wedge Q) \wedge P$$
2. Donner la négation :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad (x-3 > 0) \Longrightarrow (2x > 0)$
   (b) $\forall \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : \quad (x+y > 2) \Leftrightarrow (x+y > 0)$
3. Donner la contraposée de proposition (a).

4. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 10. (Examen Janvier 2023, Département MI Université Ain-temouchent)

Soient P et Q deux prédicats (propositions). On considère les connecteurs logiques et : $\wedge$, ou :$\vee$, implique : $\Rightarrow$, négation :$\overline{P}$. Compléter le tableau de vérité.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\vee Q$	$\overline{P}\vee Q$	$P\Rightarrow Q$	$\overline{\overline{P}\vee Q}$	$Q\Rightarrow\overline{\overline{P}\vee Q}$	$(Q\Rightarrow\overline{\overline{P}\vee Q})\wedge(P\vee Q)$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

1.5 Solutions

Exercice 1. Soient P, Q deux propositions

1. Simplifier l'expression :

$$K = (\bar{P} \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \vee (P \wedge Q)$$

Écrivons la table de vérité

P	Q	$\vec{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \wedge Q$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$	$(\bar{P} \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q})$	$(P \wedge Q)$	K	$P \Rightarrow Q$
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Remarque : $k \equiv (p \Rightarrow q)$
2. Utilisant la table de vérité $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

3. Écrivons la table de verité des propositions

$$R = (\overline{P \vee Q}) \vee (\bar{P} \vee \bar{Q})$$

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$	R
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

et

$$S = [P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow R$$

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	S
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Exercice 2. La négation des proposition.

1. $$\begin{aligned} \overline{(P \vee Q) \vee [(P \Rightarrow Q) \wedge R]} &\equiv \overline{(P \vee Q)} \wedge \overline{[(P \Rightarrow Q) \wedge R]} \\ &\equiv (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \wedge \overline{[P \Rightarrow Q]} \vee \bar{R} \\ &\equiv (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \wedge (P \wedge \bar{Q}) \vee \bar{R} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \overline{[(P \vee Q) \vee R] \Rightarrow (P \wedge R)} &\equiv [(P \vee Q) \vee R] \wedge \overline{(P \wedge R)} \\ &\equiv [(P \vee Q) \vee R] \wedge (\bar{P} \vee \bar{R}). \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \overline{(P \wedge \bar{Q}) \Leftrightarrow R} &\equiv \overline{[(P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow R] \wedge [R \Rightarrow (P \wedge \bar{Q})]} \\ &\equiv \overline{[(P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow R]} \vee \overline{[R \Rightarrow (P \wedge \bar{Q})]} \\ &\equiv [(P \wedge \bar{Q}) \wedge \bar{R}] \vee [R \wedge \overline{(P \wedge \bar{Q})}] \\ &\equiv (P \wedge \bar{Q}) \wedge \bar{R} \vee R \wedge \bar{P} \vee \bar{\bar{Q}} \\ &\equiv P \wedge \bar{Q} \wedge \bar{R} \vee R \wedge \bar{P} \vee Q. \end{aligned}$$

Exercice 4. Les quantificateurs logiques

1) $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2$
$\overline{P_1} : \exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 2$

2) $P_2 : \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\quad f(x) = 2$
$\overline{P_2} : \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $\quad f(x) \neq 2$

3) $P_3 : \exists x \in [-2; 2[$ tel que $\quad f(x) = 0$
$\overline{P_3} : \forall x \in [-2, 2[$ tel que $\quad f(x) \neq 0$

4) $P4 : \forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} \quad (y < x) \Rightarrow y < x + 3$
$\overline{P}_4 : \exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \quad (y < x) \wedge \quad y \geqslant x + 3$

5) $P_5 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $\quad x \cdot y > 2$
$\overline{P_5} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}$ tel que $\quad x \cdot y \leq 2$

6) $P_6 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\quad x + y > 0$
$\overline{P_6} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ tel que $\quad x + y \leqslant 0.$

Exercice 5.

1. Soit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel

on suppose que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel donc s'écrit

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = m$ Où $m \in \mathbb{Q}$ avec $m \neq 0$. D'ou

$\sqrt{3} = m - \sqrt{2} \Rightarrow 3 = m^2 - 2m\sqrt{2} + 2 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m^2-1}{2m} \in \mathbb{Q}$
ce qui est faux car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Soient $x, y \geqslant 0$, Supposons que $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$ et $x \neq y$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} &\Rightarrow x(1+x) = y(1+y) \\
&\Rightarrow x^2 - y^2 = y - x \\
&\Rightarrow (x-y)(x+y) = -(x-y) \qquad \text{cas } x \neq y \\
&\Rightarrow x + y = -1 \qquad \text{car } x \neq y
\end{aligned}$$

donc finalement une contradiction .

Exercice 6. Raisonnement par contraposée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$: $\quad n^2$ impair $\Rightarrow n$ impair

On note $A =$ "n^2 impair " est $B =$ n impair, donc pour montres que $A \Rightarrow B$ on va utilises un raisonnement par contraposée et montres l'enoncé équivalent $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

$$\begin{aligned}
\overline{B} \quad \text{vrai} &\Rightarrow B \text{ faux} \\
&\Rightarrow n \text{ pair} \\
&\Rightarrow n = 2k \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N}. \\
&\Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2) \\
&\Rightarrow n^2 \text{ pair} \\
&\Rightarrow A \text{ faux} \\
&\Rightarrow \bar{A} \text{ vrai}
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

-La réciproque $B \Rightarrow A$ est vraie :

$$\begin{aligned}
B \text{ vrai } &\Rightarrow n \text{ impair} \\
&\Rightarrow n = 2k+1 \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N}. \\
&\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 2\left(2k^2+2k\right)+1 \Rightarrow n^2 \text{ impair} \\
&\Rightarrow A \text{ vrai.}
\end{aligned}$$

Donc on conclut que $A \Leftrightarrow B$ et n^2 impair si et seulement si n impair .

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ par raisonnement de contraposée.

$$(xy - 2x - 2y + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ où } y = 2.$$

On suppose que $\quad xy - 2x - 2y + 4 = 0,\quad$ on a

$$\begin{aligned}
xy - 2x - 2y + 4 = 0 \quad &\Rightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 0 \\
&\Rightarrow (x-2)(y-2) = 0 \\
&\Rightarrow x = 2 \text{ où } y = 2.
\end{aligned}$$

Exercice 7. Raisonnement par récurrence.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\quad P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

– pour $n = 1$ si $p(1)$ La somme se réduit a 1 est égale a $\dfrac{1 \cdot (2)}{2} = 1$

– On suppose $p(n)$ est Vrai c'est-a -dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Le résultat est donc Vrai pour l'entier $n+1$.

2. Soit $p(n) : \sum_{i=1}^{n}(2i+3) = n(n+4) \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

- pour $n = 1$, $p(1)$ et la somme se réduit $2(1) + 3 = 5$ et elle égale à 1(1+4)=5,
- on suppose maintenant que $p(n)$ est vrai.

Alors $\sum_{i=1}^{n+1}(2i+3) = \sum_{i=1}^{n}(2i+3) + (2(n+1)+3)$

$$\begin{aligned} &= n(n+4) + 2n + 2 + 3 \\ &= n^2 + 4n + 2n + 5 \\ &= n^2 + 6n + 5 = (n+1)(n+5). \end{aligned}$$

Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

Chapitre Deux

Ensembles et applications

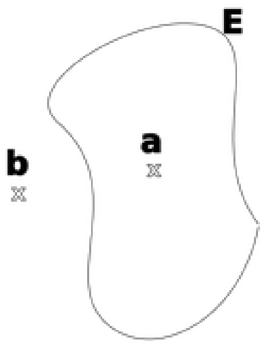
La notation d'ensemle qui est intuitivement une collection d'objets mathématique appelés éléments. Pour caractériser un ensemble, nous disposons de deux moyens : donner la liste de tous ses éléments ou des propriétés communes les caractérisants. Sans entrer dans les détails de la théorie axiomatique des ensembles, cette définition suffira pour l'instant.

2.1 Théorie des ensembles

Soit E un ensemble

1. **Appartenances :**
   On dit :"a" est l'élement de l'ensemble E, ou "a" appartient à E et on note $a \in E$.
   Au contraire $b \notin E$ (b n'appartient pas à E.

Figure 2.1 – *d'un ensemble E*



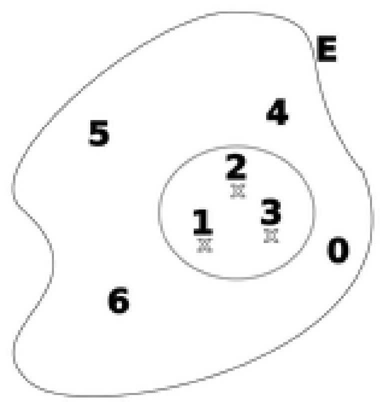
2. (a) **En éxtension**
   On enumère tous les éléments de l'ensemble.
   $E = \{1, 2, a, b, c\}$.

   (b) **En compréhension**
   On considère un critère d'appartenance dans ce cas, on dira que "x" est un élément de l'ensemble E, s'il vérifie le critère
   $E = \{x : D(x)\}$.

   Exemple 2.1.1. *Soit* $E = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\} =]a; b[$.

   Définition 2.1.2. ***(inclusion)*** *L'ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E, ce que l'on note $F \subset E$. Parfois on écrit $E \supset F$.*

   Figure 2.2 – *Inclusion*



   Exemple 2.1.3. *Soit*
   (a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   (b) $F = \{1, 2, 3\}$.

   Remarque 2.1.1. *On dit aussi " F et une partie de E " ou encore F est un sous-ensemble de E.*

3. **Ensemble des parties d'un ensemble.** C'est l'ensemble qui est formé de tous les sous ensembles de E.
   $P(E) = \{A : A \subset E\}$,
   $E \in P(E)$ et $\varnothing \in P(E)$.

Propriétés 2.1.4. *Soient E, F, G, Z des ensembles.*

1. $E \subset E$.
2. $\varnothing \in E$.
3. $[F \subset E \text{ et } E \subset G] = F \subset G$.
4. $[F \subset E \text{ et } E \subset F] \Leftrightarrow E = F$.

Exemple 2.1.5. *Écrire l'ensemble des parties de E, noté $P(E)$ dans les cas suivants :*

1. $E = \{0\}$
2. $E = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = -1\}$
3. $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0\}$
4. $E = \{a, b, c\}$
5. $E = \mathbb{R}^+$

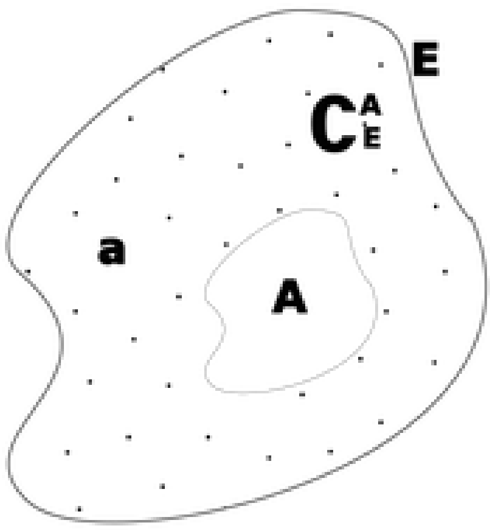
Solution. Remarque chaque fois que le nombre d'éléments de $P(E)$ si " 2 puissance le nombre d'éléments de E ".

1. On a : $P(E) = \{\varnothing, \{0\}\}$.
2. Puisque l'équation $\sqrt{x^2 + 1} = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors $E = \varnothing$ et donc
$$P(E) = \{\varnothing\}.$$
3. On a : $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0\} = \{2; -2\}$
et donc
$$P(E) = \{\varnothing, \{-2\}, \{2\}, \{-2; 2\}\}.$$
4. $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$
$P(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, E\}$.
5. $E = \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}$: On ne peut pas écrire tous ses éléments .
Donc en général, on écrit $P(\mathbb{R}^+) = P(\mathbb{N})$.

2.1.1 Opérations sur les ensembles

Définition 2.1.6. ***(Complémentaire d'un ensemble)*** *Soit E un ensemble donné et soit $A \subset E$, le complémentaire de A dans E est l'ensemble noté C_E^A composé des éléments de E qui ne sont pas élément de A.*
On a
$$a \in C_E^A \Leftrightarrow a \in E \quad et \quad a \notin A.$$

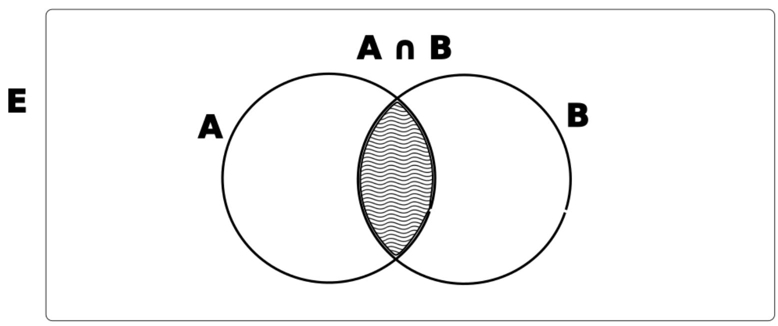
Figure 2.3 – Complmentaire d'un ensemble



Définition 2.1.7. ***(Inter-section de deux ensembles)*** *On appelle intersection de deux ensembles(sous-ensemble) A et B dans l'ensemble E. l'ensemble noté $A \cap B$ (A inter B), constitué des éléments communs à A et B. On a donc*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad et \quad x \in B.$$

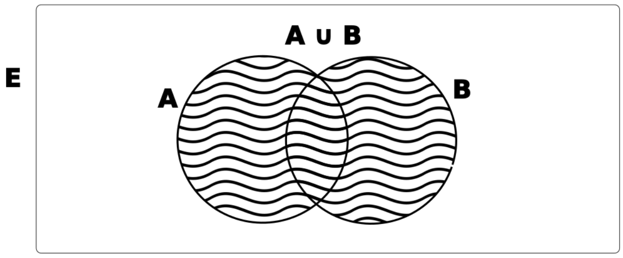
Figure 2.4 – Intersection de deux ensembles



Définition 2.1.8. ***(Union de deux ensembles)*** *On appelle union de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté $A \cup B$ (A union B) constitué des éléments qui appartiennent à A ou B.*

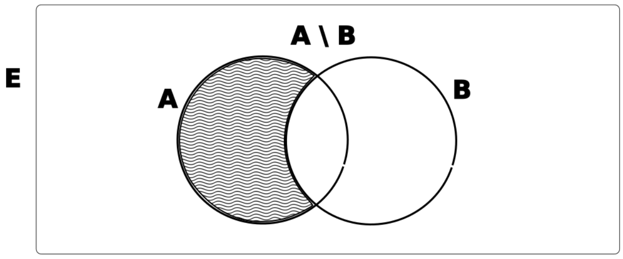
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad ou \quad x \in B.$$

$$Figure\ 2.5 - \ Union\ de\ deux\ ensembles$$



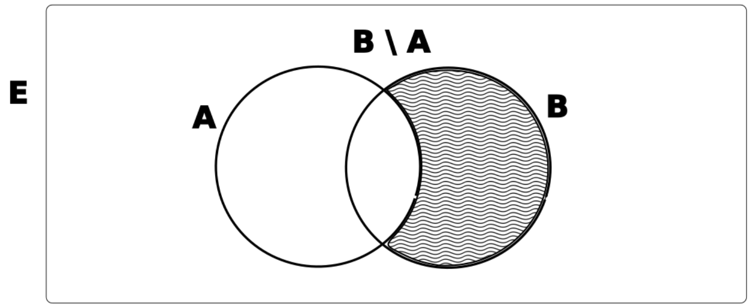
Définition 2.1.9. ***(Différence)***
*$\{A \setminus B\}$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. Il est appelé **difference**.*

$$Figure\ 2.6 \ - \ Diffrence\ (A \setminus B)$$



$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in E, x \in A \ et \ x \ \notin B\} \\ &= (C_E^B) \cap A \\ &= C_A^{A \cap B}. \end{aligned}$$

Figure 2.7 – $Diffrence\ (B \setminus A)$

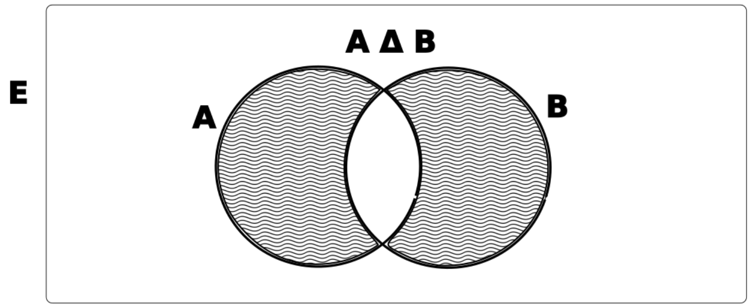


$$
\begin{aligned}
B \setminus A &= \{x \in E,\ x \notin\ A\ et\ x\ \in B\} \\
&= (C_E^A) \cap B \\
&= C_B^{A\cap B}.
\end{aligned}
$$

Définition 2.1.10. ***(Difference symétrique)***

$$
\begin{aligned}
A\Delta B &= \{x\ \in E/(x\ \in A\ et\ x \notin B)\ ou\ (x \notin A\ et\ x \in B)\} \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&= (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A).
\end{aligned}
$$

Figure 2.8 $-$ *Difference symétrique* $(A\Delta B)$



Propriétés 2.1.11. *Soientt A, B et C des parties d'un ensemble E,* $\varnothing$ *:*

1. $A \cap E = A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cap C_E^A = \varnothing$.
4. $A \cap B = B \cap A$.
5. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. $A \cup E = E$.
7. $A \cup \varnothing = A$.
8. $A \cup A = A$.
9. $A \cup C_E^A = E$.
10. $A \cup B = B \cup A$.
11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
12. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
13. $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cap C_E^B$.
14. $C_E^{(A\cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$.

Exemple 2.1.12. *Soit l'ensemble*

$$A = \{\{1;2;3\},\{4;5\},\{6;7;8\},\{9;10\}\}$$

- Quel est le CardA ?

A est un ensemble d'ensemble, donc il faut compter les ensembles à l'interieurs. Il y a donc quatre éléments dans A qui sont $\{1;2;3\},\{4;5\},\{6;7;8\},\{9;10\}$. *Ainsi* $CardA = 4$

Exemple 2.1.13. *Soient A, B deux parties dans E. Montrer que*

1. $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$
   Rappelons que

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

   *Donc, par négation **(Attention)**.*
   On a

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B$$

   et

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B.$$

   Supposons que $A \subset B$ et montrons que $C_E^A \subset C_E^B$ si $x \in C_E^B$, alors par définition $x \notin B$ or $A \subset B$. Donc $x \notin A$ c'est à dire $x \in C_E^A$.

   De la même manière, on montre l'implication réciproque.

2. ***Montrer que***

$$C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B.$$

   Pour montrer l'égalité, on montre les deux inclusions

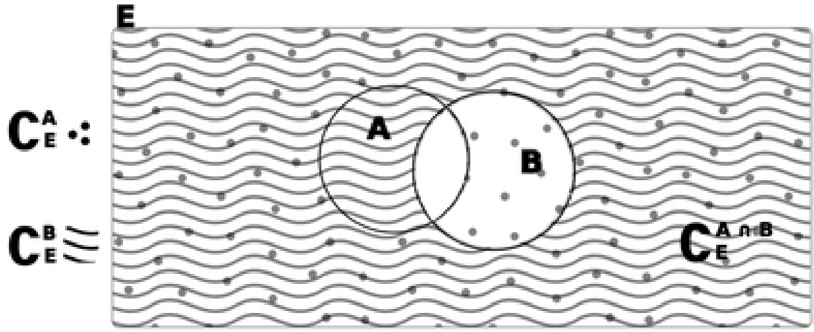
$$C_E^{A \cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B \text{ et } C_E^{A \cap B} \supset C_E^A \cup C_E^B.$$

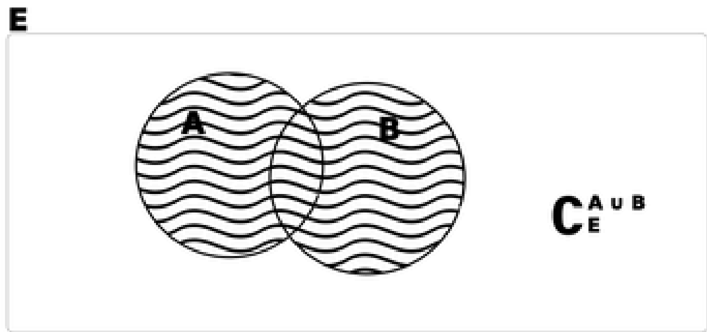
   – *Soit $C_E^{A \cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$, $x \in C_E^{A \cap B}$, alors $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$ d'où $x \in C_E^A$ ou $x \in C_E^B$.*

   – *Soit $C_E^{A \cap B} \supset C_E^A \cup C_E^B$ et $x (\in C_E^A \cup C_E^B)$, alors $x \in C_E^A$ où $x \in C_E^B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, c'est à dire $x \notin A \cap B$, ainsi $x \in C_E^{A \cap B}$*

3. $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

$$\begin{array}{lcl} x \in C_E^{A \cup B} & \Leftrightarrow & x \notin A \cup B \\ & \Leftrightarrow & x \notin A \text{ et } x \notin B \\ & \Leftrightarrow & x \in C_E^B \text{ et } x \in C_E^B \\ & \Leftrightarrow & x \in C_E^A \cap C_E^B. \end{array}$$





2.2 Applications

Définition 2.2.1. *Ètant donnés deux ensemble E, F et une loi de correspondance f associant à chaque élément x de E un élément y de F, la correspondance f est dite application de E dans F et on note*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longrightarrow & y = f(x). \end{array}$$

2.2.1 Restriction et prolongement d'une application

- On appelle **restriction** de f à une partie $A \subset E$, l'application notée $f \mid_A : A \to F$ définie par :

$$f \mid_A (x) = f(x), \forall x \in A.$$

- On appelle prolongement de f à un ensemble E' contenant E, toute application g de E' vers F dont la restriction est f.

Remarque 2.2.1. *La restriction d'une application est unique.*

2.2.2 Images et images réciproques

L'ensemble E est dit ensemble de **départ** et F est dit ensemble **d'arrivée**. L'élément x est dit **l'antécédent** et y est dit **l'image** de x par f.

Définition 2.2.2. ***(l'image directe)***
*Si $A \subset E$, **l'image directe** de A par f est un sous-ensemble de F donnée par :*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Définition 2.2.3. ***(l'image réciproque)***
*Si $B \subset F$, **l'image réciproque** de B par f est un sous-ensemble de E donné par :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Propriétés 2.2.4. *Soient $A \subset E$, $B \subset F$, f l'application de E vers F et f^{-1} l'application réciproque (l'inverse).*
Alors

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f(f^{-1}(B)) \subset B$
4. $f(A) = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$.

Exemple 2.2.5. *Soit $f : E \to F$ une fonction ou E et F sont des ensembles. Soient A, B, C, E. Montrer que :*

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

- Supposons que $A \subset B$ et montrons que $f(A) \subset f(B)$.

Soit $y \in f(A)$, par définition de l'image directe, il éxiste au moins un x dans A tel que $y = f(x)$. Puisque $A \subset B$, alors $y = f(x) \in f(B)$.

Exemple 2.2.6. *Soit $g : E \to F$ une fonction où E et F sont des ensembles.*
Soient $A, B \subset F$. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).$$

- Supposons que $A \subset B$ et montrons que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ par définition de l'image réciproque. $f(x) \in A$. D'où $f(x) \in B$ par hypothèse. Ainsi $x \in f^{-1}(B)$.

Exemple 2.2.7. *Soient E, F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application, soient $A_1, A_2 \subset E, B_1, B_2 \subset F$.*

- Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, en montre les deux inclusions.
– Soit

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A_1 \cup A_2) & \Rightarrow & \exists x \in A_1 \cup A_2 \ : y = f(x) \\ & \Rightarrow & y = f(x) : x \in A_1 \ ou \ y = f(x), x \in A_2 \\ & \Rightarrow & y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{array}$$

– On a

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A_1) \cup f(A_2) & \Rightarrow & y \in f(A_1) \ ou \ y \ \in f(A_2) \\ & \Rightarrow & y = f(x); x \in A_1 \ ou \ y = f(x), x \in A_2 \\ & \Rightarrow & y = f(x); x \in A_1 \cup A_2 \\ & \Rightarrow & y \in f(A_1 \cup A_2). \end{array}$$

Exemple 2.2.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Trouver
$f([-1;1]), f([-1;2]), f^{-1}([1]), f^{-1}([-1]), f^{-1}([0;4]), f^{-1}([-2;4])$ *et* $f^{-1}([-2;1])$

Solution.

1. $f([-1;1]) = \{f(x) : x \in [-1;1]\} = \{x^2 : x \in [-1;1]\}$

$$\begin{array}{rcl} x \in [-1;1] & \Leftrightarrow & -1 \leq x \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq x^2 \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq f(x) \leq \ \ Ainsi : f([-1;1]) = [0;1]. \end{array}$$

2. $f([-1;2])$. Soit $[-1;2] = [-1;1] \cup [1;2]$. D'aprè l'exemple 2.2.7 et propriété 2.2.4

$$f([-1;2]) = f([-1;1]) \cup f([1;2])$$

et
$$f([1;2]) = \{x^2 : x \in [1;2]\} = [1;4].$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} f([-1;2]) & = & f([-1;1]) \cup f([1;2]) \\ & = & [0;1] \cup [1;4] = [0;4]. \end{array}$$

3. On a $f^{-1}(\{x\}) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$
   la solution réelle de l'équation $x^2 = 1$ est $x = \pm 1$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1; 1\}.$$
4. Soit $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$
   la solution de l'équation n'éxiste pas dans $\mathbb{R}$.
5. Soit
$$f^{-1}([0;4]) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0;4]\} : 0 \leq x^2 \leq 4$$
   $x \in \mathbb{R}$ n'est pas nécessairement positif $-2 \leq x \leq 2$ où $\mid x \mid \leq 2$
$$f^{-1}([0;4]) = [-2;2].$$

2.2.3 Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit l'application $f : E \to F$ est bijective, si et seulement si,
$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x).$$

Injection. C'est une application de E vers F qui à tout élément $y \in F$, image par f correspond au plus un antécédent $x \in E$
$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Surjection. C'est une application de $E \to F$ qui a pour tout élément une image par $f, y \in F$ correspond au moins un antécédent $x \in E$
$$\forall y \in F, \exists x \in E \ tel\ que\ y = f(x).$$
C'est à dire : $f(E) = F$.

Remarque 2.2.2. *Si f est bijective alors $Card(E) = Card(F)$ en plus*
- *surjective*
- *injectiveé.*

Si f n'est pas injective ou n'est pas surjective alors elle n'est pas bijective.

Exemple 2.2.9. *Soit l'application*
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty) \\ x & \longrightarrow & y = f(x) = x^2 + 1. \end{array}$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Donc f *est injective. D'autre part, soit* $y \in [1, +\infty)$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y - 1 \in \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \in \mathbb{R}_+, \quad car \;\; y \in [1, +\infty) \\ &\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}_+, \;\; y = f(x). \end{aligned}$$

Donc, f *est surjective, ainsi elle est bijective.*

2.2.4 Composition d'applications

Définition 2.2.10. *Soient* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$*, alors :*

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Exemple 2.2.11. *Soit*

1. $$\begin{aligned} Id_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow Id_E(x) = x \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{1}{x} \end{aligned} \quad et \quad \begin{aligned} g :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\} \\ x &\longrightarrow g(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\} \\ x &\longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\tfrac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{1+x}. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.12. *Soit* g *la fonction de* E *dans* F *définie par* $g(x) = 2 + x^2$

1. *Supposons que* $E = F = \mathbb{R}$*. Montrer que*
   (a) g *est une application.*

   (b) *g n'est pas une application injective.*
   (c) *g n'est pas une application surjective.*
2. *Supposons que* $E =]-1; 0[$ *et* $F = [2; +\infty[$.
   (a) *Montrer que l'application g est une application bijective.*
   (b) *Trouver l'application* g^{-1} *réciproque par g.*

Solution.

1. Si $E = F = \mathbb{R}$
   (a) Puisque $D_g = E$, la fonction g est une application.
   (b) Une application $g : E \to F$ est injective.
   $$\forall (x_1, x_2) \in E^2 : \ \ g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$
   puisque $g(\pm 1) = 3$, f n'est pas une application injective.
   (c) Une application $g : E \to F$ est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = g(x)$, puisque $1 \in F$ mais l'équation $1 = g(x)$ n'est pas une application surjective.
2. La restriction de g $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = g(x)$.
   (a) $y = 2 + x^2 \Leftrightarrow y - 2 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-2}$ qui existe car $y = F$ donc g est bijective.
   (b) Étant g une application bijective, l'application g^{-1} réciproque g pour g est :
   $$\begin{array}{rcl} g^{-1} : F & \to & E \\ \text{y} & \mapsto & -\sqrt{y-2}. \end{array}$$

2.3 Exercices

Exercice 1. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.
Montrer que

1. $C_E^{C_E^A} = A$
2. $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$
3. $C_E^{(A \cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$ *et* $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$

Exercice 2 . Écrire l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, dans les cas suivants

1. $E = \{0\}$;
2. $E = \{x \in \mathbb{R} \;\; x^2 + 3 = 0\}$;
3. $E = \{x \in \mathbb{R} \;\; x^2 - 9 = 0\}$;
4. $E = \{a, b, c\}$;
5. $E = \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.
La différence symétrique de A et B est l'ensemble, noté $A\Delta B$, définie par

$$A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

1. La différence symétrique de deux ensembles est-elle commutative ?
2. Expliciter les ensembles suivants : $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$, *et* $A\Delta B$ si $A \subset B$
3. Expliciter l'ensemble $(A\Delta B) \cup (A\Delta C_E^B)$

Exercice 4. Soient les applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$. Montrer que

1. f et g bijectives $\Longrightarrow g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
2. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
3. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
4. $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives $\Longrightarrow f$, g et h bijectives.

Exercice 5. (Examen Janvier 2022, Département MI Université Ain-temouchent.)

Soit f une fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1} \end{array}$$

1. Montrer que f est une application .
2. Montrer que f est injective , f est-elle bijective ?.
3. Quelle restriction doit-on faire sur l'ensemble d'arrivée pour que f devienne une bijection ?.
4. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

2.4 Solutions

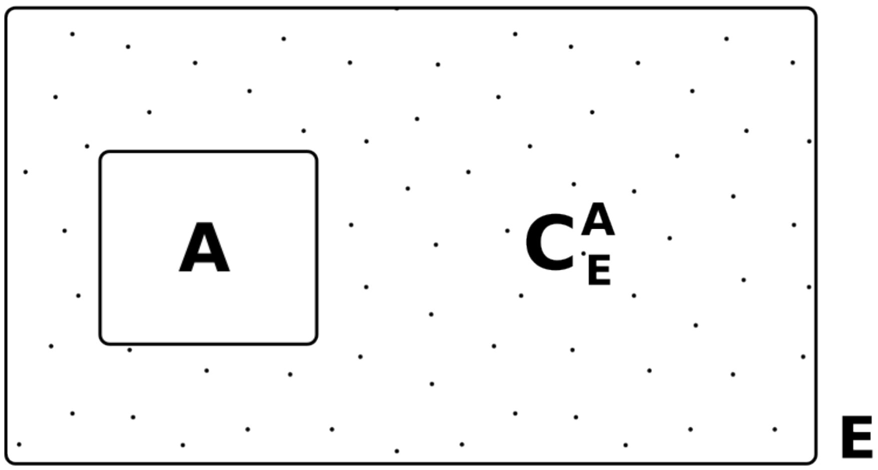
Exercice 1.

1/ $C_E^{C_E^A} = A\,?.$

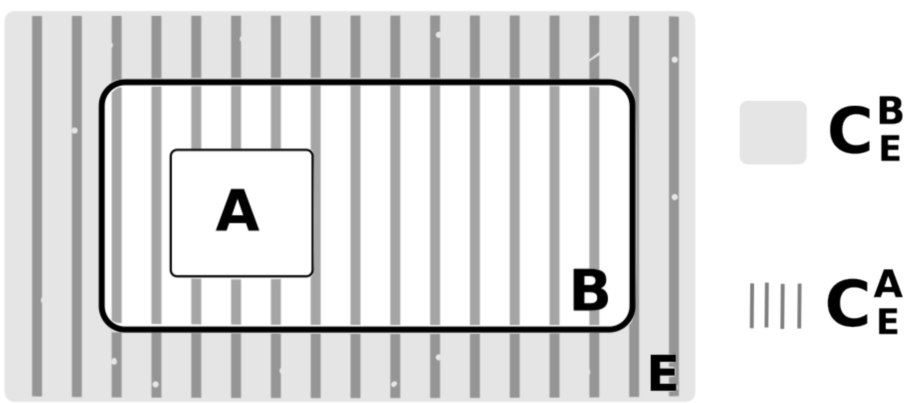
Soit $x \in C_E^{C_E^A} \Leftrightarrow x \notin C_E^A$

$\Leftrightarrow x \in A$

donc $C_E^{C_E^A} = A$



2/ $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A\,?$



Rappelons que

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ ou } x \in B$$
$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ et } x \in B.$$

Donc La négation : $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$

$x \notin A \cap B \quad \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \in B$.

Supposons que $A \subset B$ et montrons que $C_E^B \subset C_E^A$, soit.

Méthode 01

$$x \in C_E^B \overset{\text{par définition}}{\Longrightarrow} x \notin B. \text{ or } A \subset B \text{ donc } x \notin A$$
$$\text{i.e } x \in C_E^A.$$

De même manière, on montre l'implication réciproque (inverse).

Méthode 02

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \\ &\Leftrightarrow \overline{x \in B} \Rightarrow \overline{x \in A} \\ &\Leftrightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \quad \Leftrightarrow x \in C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \end{aligned}$$

3/ $C_E^{(A\cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$,
on peut montrer les deux inclusions

$$C_E^{A\cup B} \subset C_E^A \cap C_E^B \qquad \text{et} \qquad C_E^A \cap C_E^B \subset C_E^{A\cup B}$$

car par définition $[F = G \Leftrightarrow F \subset G$ et $G \subset F]$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in C_E^{A\cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \text{ et } x \in C_E^B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \cap C_E^B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in C_E^A \cap C_E^B &\Rightarrow x \in C_E^A \text{ et } x \in C_E^B \\ &\Rightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in C_E^{A\cup B}, \end{aligned}$$

pour $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

La démonstration de cette égalité (les deux inclusions).

$$\underbrace{C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B}_{a} \quad \text{et} \quad \underbrace{\left(C_E^A \cup C_E^B\right) \subset C_E^{A\cap B}}_{b}$$

(a) $C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$.

Soit $x \in C_E^{A\cap B}$, alors $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ on $x \notin B$ d'ou $x \in C_E^A$ ou $x \in C_E^B$. Ainsi $x \in C_E^A \cup C_E^B$

(b) $\left(C_E^A \cup C_E^B\right) \subset C_E^{A\cap B}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in C_E^A \cup C_E^B \Rightarrow &\quad x \in C_E^A \ \text{ ou } \ x \in C_E^B \text{ et donc} \\ \Rightarrow &\quad x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ \Rightarrow &\quad x \notin A \cap B. \text{ Ainsi } x \in C_E^{A\cap B}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

1/ On a $\quad P(E) = \{\varnothing, \{0\}\}$.

2/ puisque l'équation $x^2 + 3 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors $E = \varnothing$ et donc $P(E) = \{\varnothing\}$.

3/ Si La solution de
$E = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0\right\} = \{-3; 3\}$ et donc
$P(E) = \{\varnothing, \{-3\}, \{3\}, \{-3; 3\}\}$.
4/ On a : $P(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$

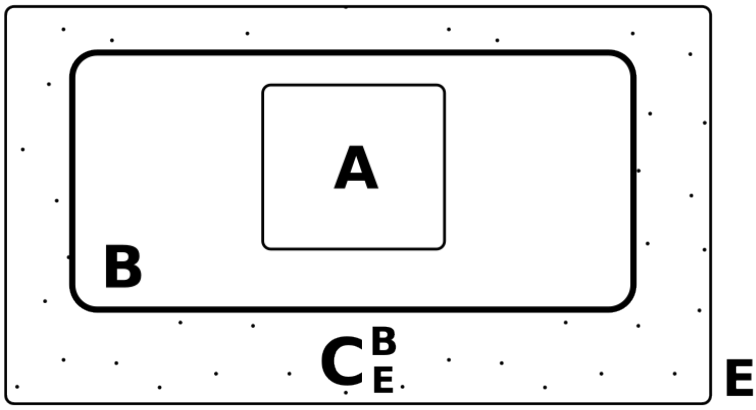
Remarque. Le nombre d'éléments de $P(E)$ si égale "2 puissance le nombre d'éléments de E"

5/ Si $E = \mathbb{N}$ ne peut pas écrire tous ses éléments. Donc en général, on écrit $P(\mathbb{N})$.

Exercice 3. Soit

$$A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

1/ si $\cup$ est commutative donc la différence symétrique est commutative.

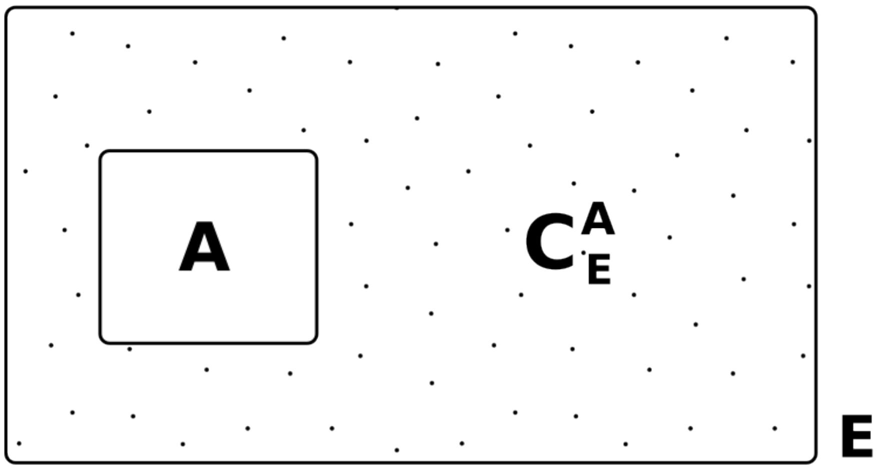


2/ utilisant que $A\backslash B = A \cap C_E^B$ et $B\backslash A = B \cap C_E^A$
alors remarque que $A \cap C_E^B = \varnothing$ et $C_E^{C_E^B} = B$
par définition :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \\ &= \left(A \cap C_E^B\right) \cup \left(B \cap C_E^A\right) \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} A\Delta\varnothing &= (A \cap C_E^{\varnothing}) \cup \left(\varnothing \cap C_E^A\right) \\ &= (A \cap E) \cup \varnothing = A \cap E = A \end{aligned}$$



(2)

$$\begin{aligned} A\Delta A &= \left(A\cap C_E^A\right)\cup\left(A\cap C_E^A\right) \\ &= \varnothing\cup\varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

(3) Supposons $A\subset B\Rightarrow A\cap C_E^B=\varnothing$

$$A\Delta B=\left(A\cap C_E^B\right)\cup\left(B\cap C_E^A\right)=\varnothing\cup\left(B\cap C_E^A\right)=B\backslash A$$

Remarque $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

3/ Soit $T=(A\Delta B)\cup\left(A\Delta C_E^B\right)$

$$\begin{aligned} A\Delta B &= \left(A\cap C_E^B\right)\cup\left(B\cap C_E^A\right) \text{ et} \\ A\triangle C_E^B &= \left(A\cap C_E^{C_E^B}\right)\cup\left(C_E^B\cap C_E^A\right) \\ &= (A\cap B)\cup\left(C_E^B\cap C_E^A\right) \quad car \quad C_E^{C_E^B}=B \end{aligned}$$

pour l'union étant associative et commutative, on a

$$\begin{aligned}
T &= \left[\left(A\cap C_E^B\right)\cup\left(B\cap C_E^A\right)\right]\cup\left[(A\cap B)\cup\left(C_E^B\cap C_E^A\right)\right]\\
&= \left[\left(A\cap C_E^B\right)\cup(A\cap B)\right]\cup\left[\left(B\cap C_E^A\right)\cup\left(C_E^B\cap C_E^A\right)\right]\\
&= \left[A\cap\left(C_E^B\cup B\right)\right]\cup\left[\left(B\cup C_E^B\right)\cap C_E^A\right].\\
&= (A\cap E)\cup\left[E\cap C_E^A\right]\\
&= A\cup C_E^A = E \quad \text{car} \quad \begin{array}{l} A\cap E = A\\ E\cap C_E^A = C_E^A\\ A\cup C_E^A = E.\end{array}
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $\quad f : E \longrightarrow F \quad g : F \longrightarrow G \quad h : G \longrightarrow H.$

1) f et g bijective $\Rightarrow g\circ f$ bijective et $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ utiliser la définition d'une application bijective

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}.$$

En effet soit $u = g\circ f$, supposons que le résultat n'est pas donné il faut alors chercher u^{-1} tel que

$$\begin{aligned} g\circ f :&E \longrightarrow G\\ &u(x) = (g\circ f)(x)\end{aligned}$$

i) $u\circ u^{-1} = Id_G$

ii) $u^{-1}\circ u = Id_E; Id_E$: l'application identité de E. On a

$$\begin{aligned}
&Id_G = (g\circ f)\circ(g\circ f)^{-1} = g\circ\left[f\circ(g\circ f)^{-1}\right]\\
&g^{-1} = f\circ(g\circ f)^{-1}\\
&\text{ et } f^{-1}\circ g^{-1} = (g\circ f)^{-1}
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
&(g\circ f)^{-1}\circ(g\circ f) = Id_E\\
&\text{où } \left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)\circ(g\circ f) = Id_E.
\end{aligned}$$

2) $g\circ f$ injctive $\Rightarrow f$ injctive

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] \qquad \begin{aligned} g\circ f :&E \longrightarrow G\\ &x \longrightarrow (g\circ f)(x) = z\end{aligned}$$

$g\circ f$ injective

$$\forall x_1, x_2 \in E : g\left[f\left(x_1\right)\right] = g\left[f\left(x_2\right)\right].$$

C'est-à-dire $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, l'application $g \circ f$ étant injective donc $x_1 = x_2$.

3) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective. Soit z un élément quelconque appartenant a G.

Comme $g \circ f$ surjective alors il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$$\underbrace{\underset{x}{E} \xrightarrow{f} \underset{y}{F} \xrightarrow{g} \underset{z}{G}}_{g \circ f} \qquad \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longrightarrow f(x) = y. \end{array}$$

Or

$f(x) \in F$ et $z \in G$.

$z = g(f(x)) = g(y)$ (La définition de surjective).

4) $g \circ f$ et $h \circ g$ bijective $\Rightarrow f, g$ et h bijectives. Utiliser 1) et 2) pour prouver que g est bijective, si g bijective donc g^{-1} existe (est bijective).

En suite on pose

$$\varphi = g \circ f \quad et \quad \psi = h \circ g$$

c'est-à-dire que

φ et ψ sont bijectives.

$$\varphi = g \circ f$$

implique $g^{-1} \circ \varphi = g^{-1} \circ g \circ f = Id_F \circ f = f$ donc f est bijective,

$$\psi = h \circ g$$

alors $\psi \circ g^{-1} = h \circ g \circ g^{-1} = h \circ Id_G = h$ donc h est bijective

Remarque 2.4.1. *Soit* $g : F \longrightarrow G$

1. Id_F *: l'application identité de* F *(a gauche),*
2. Id_G *: l'application identité de* G *(a droit).*

Chapitre Trois

Relations binaires sur un ensemble

La structure d'un ensemble E, fini ou infini, est caractérisée par une relation d'équivalence ou relation d'ordre.

3.1 Définitions de base

Définition 3.1.1. *Une relation binaire $\mathfrak{R}$ sur un ensemble E est une propriété portant sur les couples d'éléments de E. On notera $a\mathfrak{R}b$ le fait que la propriété est vraie pour le couples $(a, b) \in E \times E$.*

Définition 3.1.2. *Soit $\mathbb{R}$ une relation sur E. Pour tous $x, y, z \in E$, on dit que $\mathbb{R}$ est :*

1. *Reflexive si :* $\forall x \in E, x\mathfrak{R}x$.
2. *Symetrique si :* $\forall x, y \in E, x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$.
3. *Transitive si :* $\forall x, y, z \in E, [x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z] \Rightarrow x\mathfrak{R}z$.
4. *Anti-symètrique si :* $\forall x, y \in E, [x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}x] \Rightarrow x = y$.

3.2 Relation d'équivalence

Définition 3.2.1. *Une relation binaire $\mathfrak{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Définition 3.2.2. *Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur E, on appelle classe d'équivalence d'un élément a de E, l'ensemble des éléments de E en relation avec a par $\mathfrak{R}$, noté*

$$C_{(a)} = C_a = \overline{a} = a^\circ = \{x \in E / x\mathfrak{R}a\} \quad enplus \quad C_{(a)} \subset E.$$

La classe d'équivalence a est non vide car $\mathfrak{R}$ est réflexive et contient de ce fait au moins a. On notera par

$$E/\mathfrak{R} = \{a, a \in E\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence appelé l'ensemble quotient de E par la relation $\mathfrak{R}$ noté par

$$E/_{\mathfrak{R}} = \{a^\circ; a \in E\},$$

$$E/_{\mathfrak{R}} = \{C_a : a \in E\} = \{a^\circ; a \in E\}.$$

Propriétés 3.2.3. *Si $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur E et si $a, b \in E$ vérifient $a\mathfrak{R}b$, alors a et b ont la même classe d'équivalence.*

Théorème 3.2.4. *Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur E. Les classes d'équivalence $(C(x))_{x\in E}$ constituent une partition de E.*

Définition 3.2.5. *Si X est une partie non vide de E muni de la relation d'ordre $\leq$.*

1. *L'élément $\alpha \in X$ est le plus grand élément de X si et seulement si*

$$\forall x \in X, x \leq \alpha.$$

2. *L'élément $\alpha \in X$ est un majorant de X si et seulement si*

$$\forall x \in X, x \leq \alpha.$$

3. *L'élément $\alpha \in X$ est l'élément maximal de X si et seulement si*

$$\forall x \in X, [\alpha \leq x \Rightarrow x = \alpha].$$

Exemple 3.2.6. *Les relations $\mathfrak{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'équivalences sur $\mathbb{C}$?.*

1. $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$
2. $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow e^x = e^y$.

Solution.

La relation $\mathfrak{R}$ d'équivalence sur $E = \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{R} : Reflexive \\ \\ \mathfrak{R} : Symetrique \\ \\ \mathfrak{R} : Transitive \end{cases}$$

1. $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$?
   (a) $x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow |x| = |x|$, la relation est réflexive.
   (b) $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow |x| = |y| \Rightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y\mathfrak{R}x$, la relation est sémetrique.
   (c) $\forall x, y$ et $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \\ et \\ \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ \\ et \\ \\ |y| = |z| \end{cases} \Rightarrow |x| = |z| \Leftrightarrow x\mathfrak{R}z.$$

   La relation est transitive. Donc la relation $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

2. $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow e^x = e^y$
   (a) $e^x = e^x \Leftrightarrow x\mathfrak{R}x$, la relation est réflexive.
   (b) $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow e^x = e^y \Rightarrow e^y = e^x \Leftrightarrow y\mathfrak{R}x$, la relation est symétrique. $\forall x, y$ et $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \\ et \\ \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = e^y \\ \\ et \\ \\ e^y = e^z \end{cases} \Rightarrow e^x = e^z \Leftrightarrow x\mathfrak{R}z.$$

La relation est transitive. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

3.3 Relation d'ordre

Définition 3.3.1. *Soit E un ensemble, on nomme* ***relation d'ordre*** *sur E toute relation binaire* $\mathfrak{R}$.

1. *Réflexive si :* $x\mathfrak{R}x$
2. *Anti-symétrique si :* $[x\mathfrak{R}x \text{ et } y\mathfrak{R}x] \Rightarrow x = y$
3. *Transitive si :* $[x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z] \Rightarrow x\mathfrak{R}z$

Définition 3.3.2. *Soit E un ensemble, on nomme* ***relation d'ordre strict*** *sur E toute relation binaire* $\mathfrak{R}$.

1. *Anti-réflexive.*
2. *Transitive*

Définition 3.3.3. *-Une relation d'ordre* $\mathfrak{R}$ *sur E est dit* ***relation d'ordre total*** *si deux éléments quelconques de E sont comparables, c'est à dire on a situation* $x\mathfrak{R}y$ *ou bien* $y\mathfrak{R}x$. *Si par contre il éxiste au moins un couple* (x, y) *où x et y ne sont pas comparables la relation* $\mathfrak{R}$ *est dite* ***relation d'ordre partiel****.*

Exemple 3.3.4. *Les relations* $\mathfrak{R}$ *définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur* $\mathbb{R}$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x \leq y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow e^x \leq e^y$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

Solution.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x \leq y$
   $\forall x, \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow x \leq x$, la relation est réflexive. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ et \\ y\mathfrak{R}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ et \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = z \Leftrightarrow x\mathfrak{R}z.$$

   La relation est antisyétrique. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ et \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ et \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq z \Leftrightarrow x\mathfrak{R}z.$$

La relation est transitive, donc finalement $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow e^x \leq e^y$
$e^x \leq e^x \Leftrightarrow x\mathfrak{R}x$, la relation est réflexive.

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \\ et \\ \\ y\mathfrak{R}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \leq e^y \\ \\ et \\ \\ e^y \leq e^x \end{cases} \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y.$$

la relation est anti-symétrique.

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \\ et \\ \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \leq e^y \\ \\ et \\ \\ e^y \leq e^z \end{cases} \Rightarrow e^x \leq e^z \Leftrightarrow x\mathfrak{R}z.$$

La relation est transitive.Donc finalement $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre.

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| \leq |y| \Leftrightarrow x\mathfrak{R}y$.
$|x| \leq |x| \Leftrightarrow x\mathfrak{R}x$, la relation est réflexive.
Anti-symétrique :

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \\ et \\ \\ y\mathfrak{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq |y| \\ \\ |y| \leq |x| \end{cases} \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Donc $x \neq y$ car

$$|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = y \\ ou \\ x = -y. \end{array}$$

Donc finalement la relation n'est pas anti-symétrique.

Exemple 3.3.5. *On définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ la relation $\leq$ suivante :*

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y \leq y'$$

1. *Montrer que c'est une relation d'ordre.*
2. *Comparer deux à deux mes éléments suivants :*$(1; 2), (-1; 2), (1; -2), (1; 3)$, *l'ordre est-il total ?.*

Solution. Soit

$$(x,y) \leq (x^{'},y^{'}) \Leftrightarrow x = x^{'} \ \ et \ \ y = y^{'}$$

1. $\leq$ **est réflexive.** On a
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x$ et $y \leq y$ donc : $(x,y) \leq (x,y)$, d'où $\leq$ est réflexive.

   $\leq$ **est anti-symétrique.**
   Soient $(x,y);(x^{'},y^{'}) \in \mathbb{R}^2$, tels que

$$\begin{cases} (x,y) \leq (x^{'},y^{'}) \\ \\ et \\ \\ (x^{'},y^{'}) \leq (x,y) \end{cases}$$

$$(x,y) \leq (x^{'},y^{'}) \Rightarrow \begin{cases} x = x^{'}.....(1) \\ \\ et \\ \\ y \leq y^{'}....(2) \end{cases}$$

$$(x^{'},y') \leq (x,y) \Rightarrow \begin{cases} x^{'} = x.....(3) \\ \\ et \\ \\ y^{'} \leq y....(4) \end{cases}$$

   d'aprés les équations (1),(2),(3) et (4) $(x,y) = (x',y')$. D'où $\leq$ est antisymétrique.

   $\leq$ **est transitive.** Soient $(x,y);(x^{'},y^{'});(x^{''},y^{''}) \in \mathbb{R}^2$, tel que $(x,y) \leq (x^{'},y^{'})$ et $(x',y') \leq (x^{''},y^{''})$ implique $(x,y) \leq (x^{''},y^{''})$?

$$(x,y) \leq (x^{'},y^{'}) \Rightarrow \begin{cases} x = x^{'}.........(5) \\ \\ et \\ \\ y \leq y^{'}.........(6) \end{cases}$$

$$(x^{'}, y') \leq (x^{''}, y^{''}) \Rightarrow \begin{cases} x^{'} = x^{''}.......(7) \\ \\ et \\ \\ y^{'} \leq y^{''}......(8) \end{cases}$$

d'après (5)et (7) implique $x = x''$ et (6) et (8) implique $y \leq y''$.

D'où

$$(x, y) \leq (x^{''}, y^{''}),$$

par suite $\leq$ est transitive.On conclut donc que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour comparer deux à deux les éléments suivants :
$(1; 2), (-1; 2), (1; -2), (1; 3)$. L'ordre est -il total ?
$1 \neq -1$ donc $(1; 2)$ et $(-1; 2)$ ne sont pas comparables. En plus

$$(-1; 2) \leq (1; 2) \leq (1; 3)$$

$1 = 1$ et $-2 \leq 3 \Rightarrow (1; -2) \leq (1; 3)$
et
$-1 \neq 1$ donc : $(-1; 2)$ et $(1; 2)$ ne sont pas comparables. L'ordre n'est pas total puisque il éxiste

$$(x, y) = (1, 2) \;\; et \;\; (x^{'}, y^{'}) = (-1, 2)$$

qui ne sont pas comparables donc c'est un ordre partiel.

3.4 Exercices

Exercice 1. On définit la relation binaire $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comme suit :

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences $\overline{1}$ et $\overline{2}$.
3. Trouver une classe d'équivalence pour tout réel x qui contient exactement deux éléments.

Exercice 2 . Les relations $\mathfrak{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathfrak{R}$

1.$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathfrak{R}y \iff x < y$ 2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathfrak{R}y \iff x \leq y$

3.$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathfrak{R}y \iff e^x \leq e^y$ 4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathfrak{R}y \iff |x| \leq |y|$.

Exercice 3. Soit $\mathfrak{R}$ la relations définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$x\mathfrak{R}y \iff \frac{x}{x^2+1} \geq \frac{y}{y^2+1}.$$

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 4. On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathfrak{R}$ comme suit

$$x\mathfrak{R}y \iff x \ divise \ y$$

- Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
- L'ordre est-il total. ?

Exercice 5. On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathfrak{R}$ par

$$x\mathfrak{R}y \iff (x-y) \quad \text{est divisible par 5.}$$

1. Vérifier que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathfrak{R}$.

Exercice 6. La relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ comme suit

$$x\mathfrak{R}y \iff x \text{ divise y.}$$

1. Soit $A = \{2, 5, 7\}$. Trouver l'ensemble des majorants et des minorants de A. Trouver $\sup A$ et $\inf A$. $\max A$ et $\min A$ existent-ils ?
2. Même questions avec l'ensemble suivant $B = \{4, 10, 12\}$ au lieu A.

En plus.
- Si M est un majorant de A, alors il doit vérifier $\forall x \in A : x\mathfrak{R}M$, i.e. $\forall x \in A : x$ divise M.
- Si m est un minorant , alors $\forall x \in A : m\mathfrak{R}x$, i.e. $\forall x \in A : m$ divise x.

Exercice 7. (Examen Janvier 2023, Département MI Université Ain-temouchent.)

On définit la relation binaire $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comme suit

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences $\overline{1}$ et $\overline{2}$.
3. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation. (Exactement deux éléments).

3.5 Solutions

Exercice 1.

1. Soit la relation

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

$$\mathbf{1}/ \ \mathfrak{R} \text{ est une relation d'équivalence ssi : } \begin{array}{l} a) \ \mathfrak{R} \text{ est reflexive} \\ b) \ \mathfrak{R} \text{ est symetrique} \\ c) \ \mathfrak{R} \text{ est transitive} \end{array}$$

$a)$ $\mathfrak{R}$ est reflexive : $x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$ donc la relation $\mathfrak{R}$ est reflexive.

b) $\mathfrak{R}$ est symétrique, si $x\mathfrak{R}y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$ et

$$\begin{aligned} y\mathfrak{R}x &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow -\left(x^2 - y^2\right) = -(x - y) \\ &\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow x\mathfrak{R}y \end{aligned}$$

donc la relation $\mathfrak{R}$ est symétrique.

c) $\mathfrak{R}$ est transitive, soit $x, y, z \in E \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ \\ y\mathfrak{R}z \Leftrightarrow y^2 - z^2 = y - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ \\ \Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \Leftrightarrow xRz \end{array}$$

et

donc $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit a une classe d'équivalence.

$$\bar{a} = \dot{a} = \{x \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}a\}.$$

Soit $\overline{1} = \{x \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}1\}$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{1} \Leftrightarrow x\mathfrak{R}1 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = (x-1) \\ &\Leftrightarrow (x+1) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Donc $\overline{1} = \{0; 1\}$.

Soit $\overline{2} = \{x \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}2\}$

$$\begin{aligned} x \in \overline{2} \Leftrightarrow x\mathfrak{R}2 &\Leftrightarrow x^2 - 2^2 = x - 2 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-2) = (x-2) \\ &\Leftrightarrow (x+2) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Donc $\overline{2} = \{-1; 2\}$.

3.

$$\text{Soit } x \in \dot{a} \Rightarrow x\mathfrak{R}a \Leftrightarrow x^2 - a^2 = x - a \qquad \cdots (1)$$

$$\Rightarrow x^2 - x - a^2 + a = 0. \qquad \cdots (2)$$

Pour trouver $\dot{a}$, donc résoudrons l'équation (2)

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow &\quad (x+a)(x-a) = x - a \\ \Leftrightarrow &\quad (x+a)(x-a) - (x-a) = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad (x-a)(x+a-1) = 0, \end{aligned}$$

donc $x = a$ ou $x = 1 - a$.

Ou $\dot{a} = x$ ou $a = x - 1$.

Ainsi, $\dot{a} = \{x, 1-x\} = \{a, 1-a\}$, pour $x \in \dot{a}$ alors

$$\left\{\begin{array}{l} a = x \\ \\ a = 1 - x \end{array}\right. \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

donc finalement,

$$\dot{a} = \left\{\begin{array}{ll} \{a, 1-a\}, & \text{si } a \neq \frac{1}{2} \\ \\ \quad \frac{1}{2}, & \quad \text{sinon} \end{array}\right.$$

Exercice 3.

Soit $\mathfrak{R}$ définie sur $]1;+\infty[$

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \geqslant \frac{y}{y^2+1}.$$

Si $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre ?

$\mathfrak{R}$ réflexive : $x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \geqslant \frac{x}{x^2+1}$, la relation est réflexive,

$\mathfrak{R}$ antisymétrique

$$\left.\begin{array}{l} x\mathfrak{R}y \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \geqslant \frac{y}{y^2+1} \\ \text{ et} \\ y\mathfrak{R}x \Rightarrow \frac{y}{y^2+1} \geqslant \frac{x}{1+x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{y^2+1}$$

$$\begin{aligned} \text{en plus : } \ x\left(1+y^2\right) = y\left(1+x^2\right) &\Rightarrow x + xy^2 = y + yx^2 \\ &\Rightarrow x - y + xy^2 - yx^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-y) + xy(y-x) = 0 \\ &\Rightarrow (x-y) - (x-y)xy = 0 \\ &\Rightarrow (x-y)(1-xy) = 0 \end{aligned}$$

alors $x - y = 0 \Rightarrow x = y$, en plus $(1 - xy) \neq 0$ car $x > 1$ et $y > 1$ en particulier. Donc, la relation $\mathfrak{R}$ est antisymétrique.

Et $\mathfrak{R}$ transitive $\forall x, y$ et z dans $]1;+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} x\mathfrak{R}y \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \geqslant \frac{y}{y^2+1} \\ \text{et} \\ y\mathfrak{R}z \Rightarrow \frac{y}{y^2+1} \geqslant \frac{z}{z^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \geqslant \frac{z}{z^2+1} \qquad \text{c'est a dire } \ x\mathfrak{R}z.$$

Donc, la relation $\mathfrak{R}$ est transitive. Finalement, $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

$\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre total ?.

Méthode 1. Soit f une fonction définie par

$$\begin{aligned} f :]1;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow f(t) = \frac{t}{t^2+1} \end{aligned}$$

en plus, $f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} < 0$.
f est décroissante sur $]1;+\infty[$.

$$x\mathfrak{R}y \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \geqslant \frac{y}{y^2+1} \text{ et } y\mathfrak{R}x \Rightarrow \frac{y}{y^2+1} \geqslant \frac{x}{x^2+1}$$

$\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre total.

Car $x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x$ est comparables.

Méthode 2. Si $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

Soit

$$\frac{x}{1+x^2} \geqslant \frac{y}{y^2+1} \Rightarrow x\mathfrak{R}y$$

et

$$\frac{y}{y^2+1} \geqslant \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow y\mathfrak{R}x.$$

Donc, $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 4.

La relation $\mathfrak{R}$ dans $\mathbb{N}^*$

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x \text{ divise } y$$

Si x divise y dans $\mathbb{N}^+ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = kx$, $k \in \mathbb{N}$.

$\mathfrak{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

1. $x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow x$ divise x (pour $x = 1x$), la relation est réflexive.
2. $\mathfrak{R}$ est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{array}{l} x\mathfrak{R}y \Rightarrow x \text{ divise } y \\ \text{et} \\ y\mathfrak{R}x \Rightarrow y \text{ divise } x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \exists k, k' \in \mathbb{N}^* \\ y = kx \text{ et } x = k'y. \end{array}$$

D'ou

$y = kx = kk'y \Rightarrow kk' = 1$ car $y \neq 0$
donc pour k et k' vérifient $kk' = 1$ c'est-dire $k = 1$ et $k' = 1$.

Ainsi, on obtient $x = y$, la relation R est antisymétrique.

3. $\mathfrak{R}$ transitive : $\forall x, y$ et $z \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{array}{l} x\mathfrak{R}y \\ \text{et} \\ y\mathfrak{R}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = kx \\ \text{et} \\ z = k'y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = kk'x \\ \text{c'est a dire } x \text{ divise } z. \end{array}\right.$$

La relation $\mathfrak{R}$ est transitive.

L'ordre n'est pas total, il faut trouver deux entiers non nuls x et y non comparables . Cette relation est une relation partielle, par exemple 3 et 7 ne sont pas comparables car : 3 ne divise pas 7 et 7 ne divise pas 3.

Exercice 5.

La relation $\mathfrak{R}$ définie dans $\mathbb{Z}$ par

$$x\mathfrak{R}y \iff (x - y) \quad \text{est divisible par 5.}$$

1. La relation $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence ssi
a) $\mathfrak{R}$: réflexive
b) $\mathfrak{R}$: symétrique
c) $\mathfrak{R}$: transitive.

a) $\forall x \in \mathbb{Z}, x\mathfrak{R}x \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x - y$ est divisible par 5

b) $\mathfrak{R}$ symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}z \\ \\ \text{et} \\ \\ y\mathfrak{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=5k \\ \\ y-x=5k' \quad ; \quad k \text{ et } k' \in Z \end{cases}$$

$x-y+y-x=5k+5k' \Rightarrow k=-k' \Rightarrow$ la relation est symétrique.

c) $\mathfrak{R}$ est transitive

$$\left.\begin{array}{l} x\mathfrak{R}y \Rightarrow \frac{5}{x-y} \\ \\ \text{et} \\ \\ y\mathfrak{R}z \Rightarrow \frac{5}{y-z} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{x-z} \Leftrightarrow x\mathfrak{R}z \qquad \begin{array}{l} x-y=5k \\ y-z=5k' \\ x-z=5k'' \end{array}$$

la relation $\mathfrak{R}$ est transitive. Donc $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

2. L'ensemble quotient (Les classes d'équivalence)

cherchons Les classes d'équivalence de quelque éléments
commençons par 0.

$$\begin{aligned} \dot{a} = \{x \in \mathbb{Z}; x\mathfrak{R}a\} &\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{Z} : 5/(x-a)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x-a \text{ divisible par } 5\} \end{aligned}$$

$x-a=5k$
$x=5k+a$

$\dot{0} = \{x \in \mathbb{Z} : x\mathfrak{R}0\} = \{x \in \mathbb{Z} \quad x \text{ est divisible par } 5\} = \{5k+0, k \in \mathbb{Z}\}$.
$\dot{1} = \{x \in \mathbb{Z} : x\mathfrak{R}1\} = \{x-1 \text{ est divisible par } 5\} = \{5k+1; k \in \mathbb{Z}\}$,
$\dot{2} = \{x \in \mathbb{Z} : x\mathfrak{R}2\} = \{x-2 \text{ est divisible par } 5\} = \{5k+2; k \in \mathbb{Z}\}$,
$\dot{3} = \{x \in \mathbb{Z} : x\mathfrak{R}3\} = \{x-3 \text{ est divisible par } 5\} = \{5k+3; k \in \mathbb{Z}\}$,
$\dot{4} = \{x \in \mathbb{Z} : x\mathfrak{R}4\} = \{x-4 \text{ est divisible par } 5\} = \{5k+4\}; k \in \mathbb{Z}\}$.

Mais en calculant la classe 5, on retrouve la classe 0 en calculant la classe de 6, on trouve la classe de 1 ...etc.

Ainsi les classe d'équivalence sont seulement $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}$ et $\dot{4}$.
Alors $\mathbb{Z}/\mathfrak{R} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$.

Chapitre Quatre

Structures Algébriques

La structure algébrique est la plus ancienne et plus simple des structures. Son étude s'était imposée aux mathématiciens bien avant que la notion générale n'ait été formulée. C'est Evariste Galois (1811-1832). Le premier, la notatio de groupe fini, en particulier les groupes de permutations. Dans ce chapitre. On parlera de structures plus précises de groupes abéliens. Et structure d'anneau a été introduite par Dedekind (1831-1919) dont les travaux fondamentaux sur les nombres irrationnels datent de 1872. le mot **anneau** a été introduit par Hilbert (1862-1943). La structure de corps a été découverte dans le cadre des recherches sur la théorie des nombres.

4.1 Lois de compositions internes

Définition 4.1.1. *Soit $E \neq \varnothing$. Une* ***loi de composition interne*** *sur E est une application de $E \times E$ dans E.*

$$\begin{array}{rcl} N : E \times E & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longrightarrow & N(a,b) = a * b. \end{array}$$

Cette loi (opération) est notée $*$

Exemple 4.1.2.

1. *Si $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'addition $(+)$ est la multiplication $(\times)$ sont des lois de composition internes.*
2. *Si $\mathbb{N}$, la solution $(-)$ n'est pas une loi interne, mais elle l'est dans $\mathbb{Z}$.*
3. *Division $(\div)$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas une loi interne, mais la division dans $\mathbb{R}^*$ l'est.*

4. *Si* $\mathbb{N}^*$, *l'exponentiation, c'est à dire l'application*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{N}^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^+ \\ (a,b) & \longrightarrow & a^b. \end{array}$$

Le $PGCD$ ou le $PPCM$ sont des lois internes.

5. *E étant donné, l'intersection ($\bigcap$) et la réunion ($\bigcup$) sont des lois de composition interne dans l'ensemble des parties $P(E)$.*

4.1.1 Propriétés d'une loi de composition interne

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = x * y \end{array}$$

1. **Commutativité**

   Définition 4.1.3.
   $*$ est commutative $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 : x * y = y * x$

2. **Associativité**

   Définition 4.1.4.
   $*$ est associative $\Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in E^3 : (x * y) * z = x * (y * z)$

3. **Distribution d'une loi sur une autre**

   Définition 4.1.5. *Soient E un ensemble non vide et $*, T$ deux lois de composition internes sur E.*

$$T \text{ est distributive sur } * \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x,y,z) \in E^3 \\ xT(y * z) = (xTy) * (xTz) \\ et \\ (y * z)Tx = (yTx) * (zTx) \end{cases}$$

4.1.2 Éléments particuliers

1. **Élément neutre**

   Définition 4.1.6. *Soient $E \neq \varnothing$ et $*$ une loi interne sur E.*
   *Soit $e \in E$ est **éléement neutre** pour* $* \Leftrightarrow \forall x \in E : e * x = x * e = x$.
   $*$ admet un élément neutre dans e $\Leftrightarrow \exists e \in E : \forall x \in E : x{*}e = e{*}x = x$.

Exemple 4.1.7.

(a) *Dans l'ensemble* $\mathbb{C}$

i. *élément* 0 *est un élément neutre pour l'addition et*

ii. *élément* 1 *est un élément neutre pour la multiplication.*

(b) *Dans l'ensemble* $P(E)$

i. E *est un élément neutre pour l'addition* $\bigcap$.

ii. $\varnothing$ *est un élément neutre pour la réunion* $\bigcup$.

iii. $E = \{1; 2; 3\}; P(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2, 3\}, E\}$.

2. **Élément symétrique**

Définition 4.1.8. *Soit* $*$ *une loi interne sur un ensemble* E. *Possèdant un élément neutre* e, *soit* $x \in E$. *On dit que* x *admet un symétrique* $x^{'}$ *pour loi* $*$, *si* $x * x^{'} = e = x^{'} * x$.

Exemple 4.1.9. *Dans* $E = \mathbb{C}^{\star}$
$*$ *est multiplication dans* $\mathbb{C}^{\star}$ *le symétrique d'un complexe non nul* z *et* $\frac{1}{z} = z^{-1}$ *(s'appelle l'inverse de* z*)*

$$z * z^{-1} = z^{-1} * z = 1$$

car

$$x * x^{'} = x^{'} * x = e$$

par exemple

$$z = i \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = -i$$

alors

$$z * z^{-1} = 1 \Rightarrow i * (-i) = 1.$$

4.2 Structure de groupe

4.2.1 Groupes

Définition 4.2.1. *Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (notée $*$) et $(G,*)$ est un groupe si et seulement si*

1. *$*$ est associative.*
2. *$*$ possède un **élément** dans G.*
3. *Tout élément de G possède une **symétrique** pour $*$ dans G.*
   *Si de plus $*$ est commutative, le groupe $(G,*)$ est dit commutatif ou **abélien**.*

Exemple 4.2.2. *Soit $*$ une loi interne sur $\mathbb{R} = G$*

$$\begin{aligned} * : \mathbb{R} * \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

- Montrer $(G,*)$ un groupe commutatif.

Solution.

1. $*$ interne,$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$
2. $*$ **est associative**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x * y) * z = x * (y * z)?$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} * z &= ([(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}]^3 + z^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= (x^3 + y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= (x^3 + [(y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}}]^3)^{\frac{1}{3}} = (x^3 + y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Donc $*$ est associative.

3. $*$ **possède un élément neutre**
   $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x * e = x$ ou $e * x = x$

$$\begin{aligned} x * e = x &\Leftrightarrow (x^3 + e^3)^{\frac{1}{3}} = x \\ &\Leftrightarrow x^3 + e^3 = x^3 \\ &\Leftrightarrow e^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow e = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e * x = x &\Leftrightarrow (e^3 + x^3)^{\frac{1}{3}} = x \\ &\Leftrightarrow e^3 + x^3 = x^3 \\ &\Leftrightarrow e^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow e = 0. \end{aligned}$$

Donc $*$ admet un élément neutre $e = 0$.

4. **Élément symétrique**

Tout élément de $G = \mathbb{R}$ possède un symétrique pour $*$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x^{'} \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{array}{lll} x * x^{'} & = e = & 0 \\ x^{'} * x & = e = & 0. \end{array}$$

$$\begin{aligned} x * x' = e = 0 &\Leftrightarrow (x^3 + x'^3)^{\frac{1}{3}} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 + x'^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 = -x'^3 \Leftrightarrow x' = -x. \end{aligned}$$

Donc il éxiste un symétrique.

$$\begin{aligned} x' * x = 0 &\Leftrightarrow (x'^3 + x^3)^{\frac{1}{3}} = 0 \\ &\Leftrightarrow x'^3 + x^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x'^3 = -x^3 \Leftrightarrow x' = -x. \end{aligned}$$

Donc il éxiste un symétrique. En plus loi (opération) $*$ est commutatif car

$$x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}} = (y^3 + x^3)^{\frac{1}{2}} = y * x.$$

Donc finalement $(G, *)$ est un groupe commutatif.

4.2.2 Sous groupes

Définition 4.2.3. *Soient $(G, *)$ est un groupe et H une partie de G, i.e., $(H \subset G)$ et H est un sous goupe de $(G, *)$ si et seulement si H est non vide. Stable pour $*$ et, muni de la induite, est un groupe.*

Comme $*$ est associative dans $G \Rightarrow$ la relation à H est aussi associative, c'est à dire

1. $H \neq \varnothing$ et $e \in H$ car est e : l'élément neutre,
2. $\forall x, y \in H; x * y \in H$,
3. $\forall x \in H; x^{-1} \in H$: car est $x^{'} = x^{-1}$ l' élément symétrique.

Exemple 4.2.4. *Soit $(G,*)$ est un groupe. On appelle la partie de G l'ensemble.*

$$H = \{x \in G : x * y = y * x, \forall y \in G\}.$$

1. *Montrer que H est un sous-groupe de G.*
2. *Que devient H si $(G,*)$ est commutatif ?.*

Solution.

Pour $G \neq \varnothing \Rightarrow H \neq \varnothing$ car $H \subset G$

1. Montrons d'abord que $e \in H$ i.e, ?

$$e * y = y * e, \forall y \in G.$$

Puisque e est l'élément neutre de G, on a même

$$\underbrace{e * y}_{y} = \underbrace{e * e}_{y}; \quad \forall y \in G.$$

Donc $e \in H$. Soit $x, x' \in H$. Il s'agit maintenant de montrer que

$$x * x'^{-1} \in H?.$$

Soit $y \in G$. Puisque $x, x' \in H$,

$$x * y = y * x$$

et

$$x' * y = y * x'.$$

D'où

$$y = x'^{-1} * y * x'$$

et alors

$$x * y = y * x \Leftrightarrow x'^{-1} * x * y = x'^{-1} * y * x.$$

Par les équations ci-dessus, on trouve facilement que

$$x * x'^{-1} * y = y * x * x'^{-1}$$

i.e., $x * x'^{-1} \in H$.

2. Si $(G,*)$ est commutatif, alors : $\forall x, y \in G; x * y = y * x$. Donc $H = G$.

4.2.3 Morphisme (homomorphisme) de groupes

Soient $(G, *)$ et $(G^{'}, *)$ deux groupes. Une application $f : G \to G^{'}$ est un morphisme de groupe si :

$$\forall x, y \in G : f(x * y) = f(x) + f(y)$$

1. Si $G = G^{'}$, on dit que f est endomorphisme.
2. Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.
3. Si f est bijective avec $G = G^{'}$, on dit que f est un automorphisme.

Exemple 4.2.5. *On définie sur $\mathbb{R}$ une loi de composition $*$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

- Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$

Solution. *Soit :* $\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}, *) & \to & (\mathbb{R}, +) \\ x & \mapsto & f(x) = x^3. \end{array}$

f est une fonction bijective. De plus, on a pas tout x, y

$$f(x * y) = (x * y)^3 = [(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}]^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$$

i.e. : f est un homorphisme, puisque il est déjà bijective.
Alors, f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

4.3 Structure d'anneaux

4.3.1 Anneaux

Définition 4.3.1. *Soit A un ensemble non vide ayant au moins deux éléments muni de deux lois de composition interne (notées $+$ et $*$). l'anneau est commutatif si et seulement si $*$ est commutative.*

$(A, +, *)$ est un anneau si et seulement si

1. *est un groupe commutatif*
2. *(a) $*$ est associative*
   (b) $*$ pessède élément neutre dans A
3. *$*$ est distributive sur $+$.*

4.3.2 Sous Anneaux

Définition 4.3.2. *Soit* $(B, +, *)$ *une partie de* $(A, +, *)$ *un anneau et* B *est un sous anneau de* A *s'il garde la structure d'un anneau par rapport à la deuxième loi* $*$.

Proposition 4.3.3. $B \subset A$ *(Anneau) est un sous anneau de* A *si et seulement si :*

1. $\forall x, y \in B : \quad [x + (-y)] \in B, \quad B \neq 0.$
2. $\forall x, y \in B : \quad x * y \in B.$

$(-y)$ *etant l'opposé de* y *par rapport à* $+$.

Remarque 4.3.1. *Soit* $B \subset A$.

1. *Si* A *est un anneau,* B *l'est aussi.*
2. *Si* A *est intègre,* B *l'est aussi.*

Définition 4.3.4. ***(Idéal d'un anneau commutatif)***
Soit$(A, +, *)$ *un anneau commutatif. Soit* $I \subset A$. I *est idéal de* A *si et seulement si :*

1. $\forall x, y \in I : \quad [x + (-y)] \in I, \quad I \neq 0.$
2. $\forall x \in I, \quad \forall y \in A : \quad x * y \in A.$

Exemple 4.3.5. *L'ensemble* $\mathbb{Z}$ *n'est pas un idéal de* $(\mathbb{R}, +, *)$ *car* $\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$ *et* $3 \in \mathbb{Z}$ *alors* $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$. *Tout sous-groupe de* $\mathbb{Z}$ *est de la forme* $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. *Par conséquent, tout idéal de* $\mathbb{Z}$ *est de forme et inversement.*

Exemple 4.3.6. *Soit* I *un idéal de l'anneaux* A. *L'ensemble noté par*

$$\sqrt{I} = \{x \in A : x^p \in I \ \ pour \ \ un \ \ certain \ \ p\}$$

est un idéal de A *appelé radical de* I.

1. *L'intersectio des idéaux de* A *est un idéal de* A
2. A_1 *est une partie non vide de l'anneau* A, *l'intersection des idéaux de* A *qui contiennent* A_1 *est le plus petit des idéaux qui contiennent* A_1, *c'est l'idéal engendré par* A_1.
3. *L'image directe d'un idéal par un morphisme d'anneaux surjectif est un idéal.*
4. *Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.*

4.3.3 Calcules dans un anneau

Théorème 4.3.7.

1. *Soit* $(A, +, *)$ *un anneau. On note* O_A *l'élément neutre de* A *pour* $+$. $\forall x \in A, x * O_A = O_A * x = O_A$ *(l'élément neutre pour l'addition et toujours absorbant pour la multiplication).*
2. $\forall x, y \in A: \quad x * (-y) = (-x) * y = -(x * y)$.
3. $\forall x, y, z \in A: \quad x * (y - z) = (x * y) - (x * z)$.
4. $\forall x, y, z \in A: \quad (y - z) * x = (y * x) - (z * x)$.

Théorème 4.3.8. *Soit* $(A, +, *)$ *un anneau. Soient* x *et* y *deux élément de* A*. Si* x *et* y ***commutent***,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ *(formule du binôme de NEWTON)*,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $x^n - y^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-1-k}$,

avec la convention $\forall x \in A, x^0 = 1_A$.

Proposition 4.3.9. *Si* f *est homomorphisme de anneaux et* I' *un idéal de* A' *alors* $f^{-1}(I')$ *est aussi un idéal de* A*. En particulies si c'est l'élement neutre de* A', $\{e'\}$ *est un idéal de* A' *et* $f^{-1}(\{e'\})$ *idéal de* A*, donc le noyau d'un homomorphisme d'anneaux est idéal.*

4.4 Corps

Définition 4.4.1. *Soit* $(k, +, *)$ *un anneau.*$(k, +, *)$ *est un corps si et seulement si tout élément non nul de* K *admet un inverse (pour* $*$*) dans* $\mathbb{K}$*. Le corps est commutatif si et seulement si* $*$ *est commutative.*

Définition 4.4.2. *On appelle sous corps, d'un corps* $(k, +, *)$*, tout sous ensemble* K' *de* $\mathbb{K}$ *tel que, muni des restrictions des lois* $+$ *et* $-*$ *est un corps.*

Exemple 4.4.3. *L'ensemble* $(\mathbb{R}, +, *)$ *est un corps commutatif. On sait déjà que* $(\mathbb{Z}_3, +, *)$ *est un anneau commutatif unitaire d'élément neutre* $\overline{0}$ *pour l'addition et* $\overline{1}$ *pour la multiplication. Or* $\overline{1} * \overline{1} = \overline{1}$ *et* $\overline{2} * \overline{2} = \overline{1}$*, chaque élément de* $\mathbb{Z}_3$ *différent de* $\overline{0}$ *admet un inverse, donc c'est un corps.*

Exemple 4.4.4. *L'ensemble* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ *est un corps commutatif qui admet* $\mathbb{Q}$ *comme sous-corps. Les corps* $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *(p : premier) et* $\mathbb{Q}$ *n'admettent pas de sous-corps propres.*

Exemple 4.4.5. *Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
Soit $\circ$ la loi de composition de fonction usuelle. Soit $+$ définie sur E comme suit :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour toutes f et g dans E; $(E, +, \circ)$ est-il un anneau ?

Solution. On peut vérifie facilement que $(E, +)$ est un groupe commutatif ou $(\mathbb{R}, +)$. Ce pendant, on a bien

$$\forall f, g, h \in E : (f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$$

mais en générale

$$f \circ (g+h) \neq (f \circ g) + (f \circ h)!.$$

Par exemple soient $f(x) = x - 1, g(x) = x$ et $h(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$(f \circ (g+h))(x) = f((g+h)(x)) = f(0) = -1$$

et

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) &= f(g(x)) + f(h(x)) \\ &= x - 1 - x - 1 = -2.\end{aligned}$$

Donc $f \circ (g+h) \neq (f \circ g) + (f \circ h)$. Ainsi $(E, +, 0)$ n'est pas un anneau.

4.5 Exercices

Exercice 1.

1. Considére la loi $*$ sur $\mathbb{R} = G$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

   (a) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
   (b) Est-il commutatif
   (c) $(G, *)$ est-il un groupe commutatif ou (abélien) ?

2. Soit f une fonction définie par

$$f : \begin{array}{rcl}(\mathbb{R}, *) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +) \\ x & \longrightarrow & f(x) = x^3\end{array}$$

   - Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est isomorphe *à* $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 2 . Soit $(\mathbb{R}, *)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble

$$C_G = H = \{x \in G, \forall y \in G : \quad x * y = y * x\}$$

1. Montrer que H est un sous-groupe de G.
2. Que devient H si $(G, *)$ est commutatif ?.

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois de composition interne $\top$ et $*$ comme suit

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \big(a \top b = a + b - 1 \quad \textbf{et} \quad a * b = ab - a - b + 2\big)$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un anneau commutatif.

Exercice 4. On définit l'opération $\star$ par

$$\forall x, y \in]-1; 1[, \quad x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer $(]-1; 1[, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 5. (Examen Janvier 2022, Département MI Université Ain-temouchent.)

Considére la loi interne $*$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\} : \quad x * y = x + y - xy$$

1. Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.
2. Soit f une fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R} - \{1\}, *) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, \times) \\ x & \longrightarrow & y = f(x) = 1 - x \end{array}$$

- Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est isomorphe *à* $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 6. (Examen Janvier 2023, Département MI Université Ain-temouchent.)

On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne notée $\star$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \star y = x + y + xy$$

1. Existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ let que $x \star y = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{-1\}, \star)$ est un groupe commutatif .
3. Calculer $1 \star (1 \times 1)$ et $(1 \star 1) \times (1 \star 1)$. La loi $\star$ est-elle distributive par rapport a la multiplication ?.

4.6 Solutions

Exercice 1.

I/ Soit $*$ une loi interne sur $\mathbb{R}$: $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$x * y = \left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$$(G, *) \text{ est un groupe} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a) * \text{ associative} \\ b) * \text{ possede un element neutre dans } G = \mathbb{R} \\ c) * \text{ possede un element symetrique} \end{array}$$

$*$ interne ssi $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$

$a) *$ associative

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x * y) * z = x * (y * z)?$$

$$\begin{aligned}(x * y) * z = \left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}} * z &= \left[\left(\left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 + z^3\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(x^3 + y^3 + z^3\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * \left(y^3 + z^3\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(x^3 + \left[y^3 + z^3\right]^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^3 + y^3 + z^3\right)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

donc $*$ est associative.

$b) *$ possede un element neutre dans $G = \mathbb{R}$

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad x * e = x \quad \text{ou} \quad e * x = x$$

$$\begin{array}{rl|rl} x * e = x \Leftrightarrow & \left(x^3 + e^3\right)^{\frac{1}{3}} = x & \text{ou } e * x = x \Leftrightarrow & \left(e^3 + x^3\right)^{\frac{1}{3}} = x \\ & \Leftrightarrow x^3 + e^3 = x^3 & & \Leftrightarrow e^3 + x^3 = x^3 \\ & \Leftrightarrow e^3 = 0 & & \Leftrightarrow e^3 = 0 \\ & \Leftrightarrow e = 0 & & \Leftrightarrow e = 0 \end{array}$$

donc $*$ admet un élément neutre : $e = 0$

$c) *$ possede un element symetrique

tout élément de $G = \mathbb{R}$ possède un symétrique pour $*$
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ tel que : $x * x' = e = 0$ ou $x' * x = e = 0$

$$\begin{aligned} x * x' = e = 0 \Leftrightarrow \quad & \left(x^3 + x'^3\right)^{\frac{1}{3}} = 0 \\ & \Leftrightarrow x^3 + x'^3 = 0 \\ & \Leftrightarrow x^3 = -x'^3 \quad \Leftrightarrow \quad x' = -x \end{aligned}$$

donc il existe un symétrique.

$$\begin{aligned} x' * x = 0 \Leftrightarrow & \left(x'^3 + x^3\right)^{\frac{1}{3}} = 0 \\ & \Leftrightarrow x'^3 + x^3 = 0 \Rightarrow x' = -x \end{aligned}$$ donc il exist un symetrique

donc $(G, *)$ est un groupe.

En plus loi (opération) $*$ est commutatif
car

$$x * y = \left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(y^3 + x^3\right)^{\frac{1}{3}} = y * x.$$

Donc finalement $(\mathbb{R}, *) = (G, *)$ st un groupe commutatif (abélien).

II/ soit f une fonction définie par.

$$\begin{aligned} f : & (\mathbb{R}, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ & x \longrightarrow f(x) = x^3. \end{aligned}$$

D'abord, c'est une fonction bijective. De plus $\forall x, y$

$$f(x * y) = (x * y)^3 = \left[\left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$$

i.e : f est un morphisme (homomorphisme) puisque il est déjà bijective alors f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 2.

Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$ tel que :

$$H = \{x \in G, \quad x * y = y * x; \forall y \in G\}.$$

$$H \text{ : sous-groupe ssi } \begin{cases} 1/ \ H \neq \varnothing \text{ et } e \in H & e \text{ : element neutre} \\ 2/ \ \forall x, y \in H : \quad x * y \in H. & \\ 3/ \ \forall x \in H, \quad x^{-1} \in H & \text{car element symetrique } x' = x^{-1} \end{cases}$$

pour $G \neq \varnothing \Rightarrow H \neq \varnothing$ car $H \subset G$.

Montrons d'abord que $e \in H$?

$$e * y = y * e \quad ; \quad \forall y \in G$$

puisque e est l'élément neutre de G, on a même

$$\underbrace{e * y}_{y''} = \underbrace{y * e}_{y''} \quad ; \quad \forall y \in G.$$

Donc $e \in H$,

soit $x, x' \in H$. Il s'agit maintenant de montrer que $x * x' \in H$, $y \in G$
puisque $x, x' \in H$, alors

$$x * y = y * x$$

et

$$x' * y = y * x'.$$

D'ou $\quad y = x'^{-1} * y * x'$

et alors

$$x * y = y * x \Leftrightarrow x'^{-1} * x * y = x'^{-1} * y * x$$

par les équations ci-dessus, on trouve que

$$\begin{aligned} &\underbrace{x * x'^{-1}} * y = y * \underbrace{x * x'^{-1}} \\ &e * y = y * e \\ &y = y \quad \text{i.e } \ x, x'^{-1} \in H. \end{aligned}$$

2/ Si $(G, *)$ est commutatif, alors

$$\forall x, y \in G; \quad x * y = y * x.$$

Donc $H = G$.

Exercice 3.

Soit $\top$ et $*$ deux lois de composition interne.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a \top b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a * b = ab - a - b + 2)$$

1/ pour montrer que $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe commutatif

i) La loi $\top$ est commutative sur $\mathbb{R}$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$a \top b = a + b - 1 = b + a - 1 = b \top a$$

ii) $\top$ est associative sûr $\mathbb{R}$, soit a, b et c trois réels.

$$\begin{aligned}
&(a \top b) \top c = (a + b - 1) \top c = a + b - 1 + c - 1 = a + b + c - 2 \\
&a \top (b \top c) = a \top (b + c - 1) = a + (b + c - 1) - 1 = a + b + c - 2
\end{aligned}$$

donc $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$, ce qui montre que la loi $\top$ est associative.

Élément neutre : soit $e \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&e \top a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\
&e \top a = a \Leftrightarrow e + a - 1 = a \Rightarrow e = 1 \quad \text{ou} \\
&a \top e = a \Leftrightarrow a + e - 1 = a \Rightarrow e = 1.
\end{aligned}$$

Élément symétrique

Soit $a, a' \in \mathbb{R}$ tel que $\quad a \top a' = e \quad$ où $\quad a' \top a = e$, alors

$$a \top a' = 1$$

en plus
$a + a' - 1 = 1 \Rightarrow a' = 2 - a$. cet élément appartient bien à $\mathbb{R}$ et on vérifie que

$$a \top (2 - a) = 1.$$

En Conclusion, on peut affirmer que $(\mathbb{R}, \top)$ possède une structure de groupe commutatif.

2/ $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un anneau commutatif. ssi

(1) $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe commutatif

(2) **i)** $*$ associative
ii) possède un élément neutre dans $\mathbb{R}$

(3) $*$ est distributive sûr $\top$. Donc $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe commutatif.

Alors

i) $*$ associative ssi : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$; $(a * b) + c = a * (b * c)$?

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (ab - a - b + 2) * c \\ &= (ab - a - b + 2)c - (ab - a - b + 2) - c + 2 \\ &= abc - ab - ac + a + b + c - bc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (bc - b - c + 2) \\ &= a(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2 \\ &= abc - ab - ac + a + b + c - bc\end{aligned}$$

donc $*$ est associative.

ii) Supposons que l'élément neutre pour la loi $*$ sur $\mathbb{R}$ existé.

Soit e' élément neutre par rapport à loi $*$

$$\begin{aligned}&e' * a = a; \quad a \in \mathbb{R}, \\ &\forall a \in \mathbb{R}; \quad e' * a = a \Leftrightarrow e'a - e' - a + 2 = a \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad e'(a-1) = -2 + 2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e' * a = a \Leftrightarrow e'(a-1) &= 2a - 2 = 2(a-1) \\ e' &= 2 \text{ (C'est un element de } \mathbb{R})\end{aligned}$$

donc $2 * a = a$ ou $a * 2 = a$.

3/ $*$ est distributive par rapport à loi $\top$ ssi

$a, b, c \in \mathbb{R} : a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c)$?

$$\begin{aligned} a * (b \top c) &= a * (b + c - 1) \\ &= a(b + c - 1) - a - (b + c - 1) + 2 \\ &= ab + ac - 2a - b - c + 3. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} (a * b) \top (a * c) &= (ab - a - b + 2) \top (ac - a - c + 2) \\ &= (ab - a - b + 2) + (ac - a - c + 2) - 1 \\ &= ab + ac - 2a - b - c + 3 \end{aligned}$$

donc la loi $*$ est distributive par rapport à $\top$.

Finalement les lois $\top$ et $*$ possède une structure d'anneau commutatif.

Chapitre Cinq

Anneaux de polynômes

Un polynôme est défini comme un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{K}^{\infty}$ des suites infinies sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K}$ n'est pas un corps, la notion de polynômes diffère en général de la notion élémentaire de fonctions polynomiales par exemple sur le corps $\mathbb{K} = 2\mathbb{Z}$.

5.1 Polynôme et degré

1. Un polynôme à coéfficients dans ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) est une expression de la forme :
$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$
où, $a_n \in \mathbb{K}$ sont les coéfficients de P.
2. Si $P(x) = 0$, si tous les coéfficients $a_n = 0$.
3. Le plus grand n tel que $a_n \neq 0$. S'appelle le degré de P et on note $degP$.
4. $\mathbb{K}[x]$ si l'ensemble de tous les polynôme à coéfficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 5.1.1. *Soit*

1. $P(x) = x^4 - 3x^2 + 4$, *alors* $P(x)$ *est unitaire tel que :* $degP = 4$ *et* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$.
2. $Q(x) = 2ix^3 + 2x^2 + (1 + i)x + 1$, *alors* $degQ = 3$ *et* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Remarque 5.1.1.

1. *Le terme* a_nx^n *est appelé monôme dominant. Si* $a_n = 1$, *le polynôme est dit normalisé ou unitaire.*

2. *L'ensemble $\mathbb{K}_n[x]$ des polynômes de degré inferieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ est un sous-espace de vectoriel de $\mathbb{K}[x]$ de dimension $n+1$.*
3. *On appelle valuation du polynôme P, l'entier $V(P) = \inf n$ tq $a_n \neq 0$.*

5.2 Arithmétique des polynômes

Soient P et Q deux polynômes à coéfficients dans $\mathbb{K}$ comme suit

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

et

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n.$$

1. **Égalité de deux polynômes**
   les deux polynômes P et Q sont égaux si
   $$\forall h : \quad a_h = b_h; \ \ h = 0, 1, ...n.$$
2. **Addition de polynômes**
   Soient P et Q deux polynômes, on définit leurs addition par :
   $$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n.$$
3. **Propriétés 5.2.1.**
   (a) $d^\circ(P + Q) \leq Max(d^\circ P, d^\circ Q)$
   (b) $V(P, Q) \geq Min(V(P), V(Q))$
   (c) L'ensemble de polynôme $\mathbb{K}[x]$, muni de la loi de composition interne $(+)$ admet une structure de groupe abélien.
4. **Multiplication par une constante**.
   Soit : $\alpha \in \mathbb{K}$ une constante, si
   $$\alpha P(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + ... + \alpha a_nx^n.$$
5. **Multiplication de polynômes**.
   Soient P, Q deux polynômes de degrés respectifs n, m. On définit la multiplication de P par Q par le polynôme.

$$PQ = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{n+m}x^{n+m},$$

Où

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j \quad \forall k = 0, 1, ..., n.$$

tel que

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & \sum_{i+j=0} a_ib_j = a_0b_0 \\ c_1 & = & \sum_{i+j=1} a_ib_j = a_0b_1 + a_1b_0 \\ c_2 & = & \sum_{i+j=2} a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} c_3 & = & \sum_{i+j=3} a_ib_j \\ & = & a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0. \end{array}$$

En suite de la même façon, les autres coefficients.

Propriétés 5.2.2.

– $d^\circ(PQ) = d^\circ P + d^\circ Q$
– $V^\circ(PQ) = V(P) + V(Q)$
– $(P, +, \circ)$ *a une structure d'anneau unitaire commutatif.*

Exemple 5.2.3. *Soient P et Q deux polynômes donnée par :*

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

et

$$Q(x) = x^4 - 5x^3 + 9x - 3$$

Calculons, $P + Q$, $Q - P$, $-\sqrt{3}P$ et PQ

Solution.
$P + Q = x^4 - 4x^3 + -2x^2 + 13x - 4;$
$Q - P = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 5x - 2.$
Ensuite : $-\sqrt{3}P = -\sqrt{3}x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

Pour calculerPQ :

$$PQ = \sum_{k=0}^{7} c_k x^k$$

Où : $c_0 = 3;$
$c_1 = 21;$
$c_2 = 42;$
$c_3 = -16; c_4 = 1(-1) + 4(-5) + (-2) + (0) + 1(9) = -12;$
$c_5 = 4(1) + (-2)(-5) + 1(0) = 14;$
$c_6 = (-2)(1) + 1(-5) = -7;$
$c_7 = 1(1) = 1.$

5.2.1 Divisibilité-Division Euclidienne

1. **Division suivant les puissances décroissantes .**

   Soient P et Q deux polynômes ordonnés de façon décroissante, il existe un couple (A, R) de polynômes, tel que :

   $$P = QA + R \quad si \ \ d^\circ R < d^\circ Q$$

   R est le reste , Q est le quotient.

   Remarque 5.2.1. *Lorsque* Q *divise* $P \Rightarrow R = 0$
   Soit $d^\circ P = n$, $d^\circ Q = m$
   – *Si :* $m > n \Rightarrow P = Q.0 + P$ *c'est à dire* $R = P$; $A = 0$
   – *Si :* $n > m \Rightarrow A_1(x) = \frac{P_n}{Q_m} x^{n-m}$.

   Application
   Calculer le reste de la division Euclidienne de : $P(x) = x^5 + 2x^3 - 3x - 2$ par $Q(x) = x^3 + x + 1$

   $$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x^3 + x + 1)(x^2 + 1) + (-x^2 - 4x - 3) \\ & = & Q(x)A(x) + R(x). \end{array}$$

2. **Division suivant les puissances croissantes.**

   Soient P, Q deux polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes.

   $$P(x) = a_0 + a_{1x} + ... + a_n x^n$$

et

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n, \quad si \ \sqrt{Q} = 0, b_0 \neq 0$$

Alors $\exists!$ (existe un et un seul)(A, R) de polynôme tel que

$$P = QA + x^{K+1} R$$

$d^\circ A \leq K$, K étant fixé à l'avance, c'est la division de P par Q à l'ordre K, A est le quotient d'ordre K, R est le reste d'ordre K.

Exemple 5.2.4. *Soient $P(x) = 1 + x$ et $Q(x) = 1 + x^2$*
Division de P par Q à l'ordre 2

Solution.
Soient $R_1 = x - x^2$, $R_2 = -x^2 - x^3$, $R_3 = -x^3 + x^4$
$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + x - x^2$.

Exemple 5.2.5. *Soient P et Q deux polynômes.*

$$P(x) = 1 \quad et \ \ Q(x) = 1 - x$$

$$P(x) = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3) + x^4 = Q(x)(1 + x + x^2 + x^3) + x^4.$$

Si on applique la formule $P = QA + x^{k+1}$. On aura

$$1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + ... + x^k) + x^{k+1} \quad avec \quad R(x) = 1$$

D'où

$$\frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + ... + x^k = \sum_{n=0}^{k} x^n$$

3. **PGCD d'un polynôme**

   (a)

   Définition 5.2.6. *On appelle PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de P et Q, le polynôme D diviseur Commun à ces deux polynômes, noté par $d(P;Q) = D$*

   (b)

   Remarque 5.2.2. *On dit que P et Q sont premiers entre eux si leur PGDC est égale à 1.*

(c) **Calcul du PGCD.** On suit l'algorithme d'Euclide.(diviseur suivant les puissances décroissantes) jusqu'à ou on arrive au dernier reste non seul, i.e. $R_n \neq 0$ et $R_{n+1} = 0$ R_n est le PGCD des deux polynômes. Soient P et Q deux polynômes non nuls tels que

$$d^\circ P \geq d^\circ Q.$$

Alors

$$\begin{array}{r|l} P & Q \\ \hline R_1 & A_1 \end{array} \Rightarrow P = QA_1 + R_1$$

en suite,on divise Q sur R_1, on a

$$\begin{array}{r|l} Q & R_1 \\ \hline R_2 & A_2 \end{array} \Rightarrow Q = R_1A_2 + R_2$$

maintenant, on effecte la division Euclidienne de R_1 par R_2.

$$\begin{array}{r|l} R_1 & R_2 \\ \hline R_3 & A_3 \end{array} \Rightarrow R_1 + R_2A_3 + R_3$$

on continue les divisions : R_2 sur R_3, sur R_4.....$R_n = 0$, tel que

$$\begin{array}{r|c} R_{k-1} & R_k \\ \hline R_{k+1} & A_{k+1} \end{array} \Rightarrow R_{k-1} = R_kA_{k+1} + R_{k+1}$$

et

$$\begin{array}{r|l} R_k & R_{k+1} \\ \hline 0 & A_{k+2} \end{array} \Rightarrow R_k = R_{k+1}A_{k+2}.$$

Le PGCD de P et Q est R_{k+1} ; $k = 2, 3, ...$; c'est à dire le dernier reste nul. Comme le PGCD est unique et unitaire.

Exemple 5.2.7. *Calculer le PGCD des polynômes :*

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^2 - x - 2$$

et

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

Solution.

$$\begin{array}{r|r} x^5 - 2x^4 + 2x^2 - x - 2 & x^3 - x^2 - x - 2 \\ \hline 2x^2 - 3x - 2 & x^2 - x \end{array} \Rightarrow P(x) = Q\underbrace{(x^2 - x)}_{A_1} + \underbrace{2x^2 - 3x - 2}_{R_1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-x-2 & 2x^2-3x-2 \\ \hline \frac{3}{4}x-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \end{array} \Rightarrow Q = R_1\,\underbrace{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}_{A_2} + \underbrace{\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}}_{R_2}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x-2 & \frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ \hline 0 & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \end{array} \Rightarrow R_{k-1} = R_2\,\underbrace{(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3})}_{A_3} + 0.$$

Ainsi, le $\text{PGCD}(P,Q) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = R_2 = \frac{3}{4}(x-2)$.

Exemple 5.2.8. *Calculer le PGCD des polynômes*

$$A(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2$$

et

$$B(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2.$$

(Division de A par B).

Solution. *PGCD*$(A,B) = -x^2 - 2x - 2$.

5.2.2 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Définition 5.2.9.
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et toute constante non nulle $\alpha \in \mathbb{K}$, on peut écrire $P = (\frac{1}{\alpha})\alpha P$. Donc, toute constante non nulle est un diviseur de P. De plus, pour toute constante non nulle $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha P$ est diviseur de P.

Définition 5.2.10.

Il existe des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ qui admettent d'autres diviseurs, à part les constantes et eux mêmes. Ces polynômes on les appelle irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 5.2.3.
Un polynôme P est réductible s'il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = QR$.

Exemple 5.2.11.

1. *Les polynômes de degré "1" sont irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.*

2. *Soient les polynômes* $Y^3 - 1$ *et* $Y^2 - \sqrt{2}$ *et* $Y^3 + 1$ *sont réductibles de* $\mathbb{R}[Y]$ *et de* $\mathbb{C}[Y]$. *En plus,*
$$Y^3 - 1 = (Y-1)\left(Y^2 + Y + 1\right).$$
$$Y^2 - \sqrt{2} = \left(Y - 2^{1/4}\right)\left(Y + 2^{1/4}\right).$$
$$Y^3 + 1 = (Y+1)\left(Y^2 - Y + 1\right).$$

3. *Le polynôme* $Y^2 + 1$ *est irréductible de* $\mathbb{R}[Y]$, *mais il est réductible de* $\mathbb{C}[Y]$, *car*
$$Y^2 + 1 = (Y - i)(Y + i).$$

Théorème 5.2.12. *(Factorisation en polynômes irréductibles). Soit* $P \in \mathbb{K}[Y]$ *un polynôme non constant, alors il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *et des polynômes* $P_1, P_2, \cdots, P_k$ *irréductibles de* $\mathbb{K}[Y]$, *tels que*
$$P = aP_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_k^{n_k}$$
Où, $a \in \mathbb{K}^*$ *et* $n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*$. *Les polynômes* $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *sont uniques à permutation près.*

Exemple 5.2.13. *Factorisons* $Y^6 - 1$ *sur* $\mathbb{R}$, *ensuite sur* $\mathbb{C}$. *En plus,*
$$\begin{aligned} Y^6 - 1 &= \left(Y^3\right)^2 - 1 \\ &= \left(Y^3 + 1\right)\left(Y^3 - 1\right) \\ &= (Y+1)\left(Y^2 - Y + 1\right)(Y-1)\left(Y^2 + Y + 1\right). \end{aligned}$$
Sur $\mathbb{R}$, *on s'arrête ici, mais sur* $\mathbb{C}$, *la factorisation est donnée par*
$$Y^6 - 1 = (Y+1)(X-1)\left(Y - \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(Y - \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(Y + \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(Y + \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

5.3 Racines simples et multiplicite

Définition 5.3.1. *Soient* P *un polynôme dans* $\mathbb{K}[Y]$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$. *On dit que* α *est une racine de* P *si* $P(\alpha) = 0$.

Théorème 5.3.2. *Soient* P *un polynôme sur* $\mathbb{K}[Y]$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$. *On dit que* α *est une racine si et seulement si le polynôme* $Y - \alpha$ *divise* P.

Preuve.

On note par Q le quotient de la division euclidienne de P par $Y - \alpha$ et R son reste, montrons que ce reste est nul. En fait,R est une constante, car $\deg R < \deg(Y - \alpha)$, sinon on continue la division. De plus,

$$P(Y) = Q(Y)(Y - \alpha) + R(Y) \Rightarrow P(\alpha) = Q(\alpha)(\alpha - \alpha) + R = 0.$$

Exemple 5.3.3.

1. *$Y^2 - 3$ admet deux racines réelles $-\sqrt{3}$ et $+\sqrt{3}$.*
2. *Le polynôme $Y^4 + 1$ n'admet pas de racines réelles, mais il a quatre racines complexes*

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

Exemple 5.3.4. *Soit P un polynôme.*

1. *Trouver un polynôme P de degré 4 dont $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ est une racine.*
2. *Déterminer les racines de P.*

Solution.

1. Posons $X = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, alors

$$X^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow X^2 - 8 = 2\sqrt{15} \Rightarrow \left(X^2 - 8\right)^2 = 60$$

Donc, nous proposons $P = (X^2 - 8)^2 - 60$ dont $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ est une racine, de plus il est de degré "4".

2. Pour trouver les racine de P, on fait un changement de variables, on pose $Y = X^2$, on obtient

$$(Y - 8)^2 = 60$$

qui a pour racines

$$Y_1 = 8 - 2\sqrt{15} = (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2, \quad Y_2 = 8 + 2\sqrt{15} = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2.$$

Ce qui implique que les racines de P sont

$$X_1 = \sqrt{3} - \sqrt{5}, \quad X_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}, \quad X_3 = \sqrt{3} + \sqrt{5}, \quad X_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{5}.$$

5.4 Exercices

Exercice 1. Soit $P(x)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

$$P(X) = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4.$$

1. Calculer $P(1)$.
2. Trouver le $PGCD(P(X), P'(X))$.
3. Trouver toutes les racines réelles de P.

Exercice 2. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 7, de

$$P = Y - \frac{Y^3}{6} + \frac{Y^5}{120} - \frac{Y^7}{5040}$$

par

$$L = 1 - \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^4}{24} - \frac{Y^6}{720}.$$

Exercice 3. Soit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{C}[Y]$

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : \quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \ \ divise \ \ b.$$

Avec $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{C}[Y]$.

Exercice 4. décomposer la fraction proposée en éléments simples dans $\mathbb{R}[Y]$

$$G(Y) = \frac{Y^2}{(Y^2+2)(Y^2+1)^3} \quad et \ \ Q(x) = \frac{Y^{2n}}{(Y^2+1)^n}, \ \ n \in \mathbb{N}^\star.$$

Exercice 5. Déterminer la multiplicité de la racine 1 pour le polynome

1. $Y^{2n} - nY^{n-1} - 1$.
2. $Y^{2n+1} - (2n+1)Y^{n+1} + (2n+1)Y^n - 1$.
3. $Y^{2n} - n^2Y^{n+1} + 2(n^2-1)Y^n - n^2Y^{n-1} - 1$.

Exercice 6. Soient a et b deux réels tels que $\cos a \neq \cos b$ et $a \notin \pi\mathbb{Z}$ et $b \notin \pi\mathbb{Z}$. On considère le polynôme $Q \in \mathbb{C}[Y]$

$$Q(x) = Y^4 - 2Y^2(\cos a + \cos b) + 2(1 + \cos a \cos b)Y^2 - 2(\cos a + \cos b)Y + 1.$$

1. En divisant par Y^2 et en posant $X = Y + \frac{1}{Y}$, chercher les racines de Q.
2. Décomposer $\frac{1}{Q}$ en élément simples dans $\mathbb{C}[Y]$.
3. Décomposer $\frac{1}{Q}$ en élément simples dans $\mathbb{R}[Y]$.

5.5 Solutions

Exercice 1.

Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

1) $P(1) = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$

2) $PGCD\,(P(X), P'(X))$
$P'(X) = 4X^3 + 6X^2 - 6X - 4$.

Si $P(1) = 0$ implique $P(X) = (X-1)\left(X^3 + 3X^2 - 4\right)$

en plus

$$\begin{aligned} P'(X) &= 4X^3 - 4 + 6X^2 - 6X \\ &= 4\left(X^3 - 1\right) + 6\left(X^2 - X\right) \\ &= 4(X-1)\left(X^2 + X + 1\right) + 6X(X-1) \\ &= 2(X-1)\left(2X^2 + 5X + 2\right) \\ &= 2(X-1)(X+2)(2X+1). \end{aligned}$$

On voit bien que 1 est une racine du polynôme $X^3 + 3X^2 - 4$

d'ou

$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X-1)\left(X^2 + 4X + 4\right) = (X-1)(X+2)^2$$

donc

$$P(x) = (X-1)^2(X+2)^2$$

finalement

$$\begin{aligned} PGCD\,(P(X), P'(X)) &= (X-1)(X+2) \\ &= X^2 + X - 2. \end{aligned}$$

3) Polynôme $P(X)$ admet deux racines doubles 1 et -2 .

Exercice 2.

Soit P et L sont que les développements limités de $\sin Y$ et $\cos Y$, en plus le quotient et ainsi de développement limité de la fonction $tg(Y)$ à l'ordre 7 du Voisinage de 0. En plus

$$P = L \times \left(Y + \frac{Y^3}{3} + \frac{2Y^5}{15} + \frac{17Y^7}{315} \right) + Y^8 R(Y).$$

Exercice 3.

La relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{C}[Y]$.

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : \quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \ \ divise \ \ b.$$

$\mathcal{R}$ est réflexive et transitive, mais ce n'est pas une relation d'ordre, car $\mathcal{R}$ n'est pas anti-symétrique. Par exemple

$$2i(Y+1) \text{ divise } 4i(Y+1)$$

et

$$4i(Y+1) \text{ divise } 2i(Y+1).$$

Mais

$$2i(Y+1) \neq 4i(Y+1).$$

Exercice 6.

1/ Soit $Q \in \mathbb{C}[Y]$ et

$$X^2 = Y^2 + \frac{1}{Y^2} + 2 \Rightarrow Y + \frac{1}{Y} = 2\cos b$$

donc les racines de Q sont e^{ia}, e^{-ia}, e^{ib} et e^{-ib}

2/Décomposition $\frac{1}{Q}$ dans $\mathbb{C}[Y]$.

$$\frac{1}{Q(Y)} = \frac{\alpha_1}{Y - e^{ia}} + \frac{\alpha_2}{Y - e^{-ia}} + \frac{\alpha_3}{Y - e^{ib}} + \frac{\alpha_4}{Y - e^{-ib}}$$

alors

$$\frac{1}{\alpha_1} = \left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\left(e^{i2a} - 2e^{ia}\cos b + 1\right)$$

$$= 2i\sin(a)e^{ia}\left(e^{ia} + e^{-ia} - 2\cos b\right)$$

$$= 4i\sin(a)e^{ia}(\cos a - \cos b).$$

En plus les trois autres coefficients α_2, α_3 et α_4 sont $-a$, b et $-b$ respectivement

3/ dans $\mathbb{R}[Y]$ on a, $\frac{1}{Q[Y]} = \frac{AY + B}{Y^2 - 2Y\cos a + 1} + \frac{CY + D}{Y^2 - 2Y\cos b + 1}$
et

$$\frac{1}{Q(Y)} = \frac{1}{2(\cos a - \cos b)}\left[\frac{-Y + 2\cos a}{Y^2 - 2Y\cos a + 1} - \frac{-Y + 2\cos b}{Y^2 - 2Y\cos b + 1}\right].$$

Conclusion

Cet polycopié à être un support pédagogique pour les étudiants du tronc commun LMD mathématiques-Informatiques.

Chaque chapitre est subdivisé en un rappel complet, de cours et d'exemples, suivi par une série d'exercices corrigés.

Bibliographie

[1] S. Balac et F. Sturm, Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Presses Polytechniques et Universitaires, 2003.

[2] C. Degrave et D. Degrave, Algèbre 1ère année : cours, méthodes, exercices résolus, Bréal, 2003.

[3] J. Franchini et J. C. Jacquens, Algèbre : cours, exercices corrigés, travaux dirigés, Ellipes, Paris, 1996.

[4] M. Hichem mortad, Exercices corrigés d'algèbre, première année LMD, Edition Houma, Oran, 2015.

[5] A. Hitta, Algèbre 1ère année : Cours d'algèbre et exercices corrigés, OPU, Ben-Aknoun Alger, 2006.

[6] M. Mignotte et J. Nervi, Algèbre : licences sciences 1ère année, Ellipses, Paris, 2004.

Table des matières