



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire BELHADJ Bouchaib d'Ain Temouchent

Institut des Sciences de la matière

POLYCOPIÉ DE COURS

***Matières: Electrostatique (cours & exercices résolus)
1^{ere} Année Sciences de la Matière***

Présenté par: Dr. Belkadi Amina

Année Universitaire : 2017-2018

AVANT-PROPOS

Ce manuscrit représente une partie du cours physique²

(l'électrostatique). Il est adressé aux étudiants de la 1^{ère} année Science de la matière, et il est divisé en trois chapitres.

Le chapitre 1 : fournit des outils mathématiques utiles pour l'électrostatique, le chapitre 2 : la force électrostatique et le champ électrique, et finalement, le chapitre 3 : le théorème de Gauss et le potentiel électrique.

Les objectifs principaux de ce polycopié est de fournir à l'étudiant le cours détaillé avec une présentation claire et logique des concepts et des principes fondamentaux de l'électrostatique. Et pour mieux comprendre ces concepts, le cours a été renforcé grâce à une gamme d'exercices avec leurs solutions. En plus, nous avons tenté de motiver l'étudiant à travers des exercices supplémentaires.

« Un physicien moderne étudie la physique quantique les lundis, mercredis et vendredis et médite sur la théorie de la relativité gravitationnelle les mardis, jeudis et samedis. Le dimanche, il prie pour que quelqu'un trouve la corrélation entre les deux. »

*Norbert Wiener,
mathématicien américain, 1864-1964.*

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS.....	1
I-OUTILS MATHEMATIQUES, COMPLEMENTS D'ELECTROSTATIQUE	7
I-1. INTEGRALES LINEIQUES, SURFACIQUES, ET VOLUMIQUES : CIRCULATION, FLUX, ELEMENTS DE VOLUME.....	7
I-1.1 Intégrales linéiques.....	7
I-1.2 Intégrales surfaciques (intégrale double)	9
I-1.3 Intégrales volumiques (intégrale triple).....	9
I-2. SYSTEMES DE COORDONNEES.....	10
I-2.1 Coordonnées cartésiennes.....	10
I-2. 2 Coordonnées polaires :.....	10
I-2.3 Coordonnées cylindriques	12
I- 4 Coordonnées Sphériques	13
I-2.6 Éléments de surface et de volume	14
I-2.6.1 coordonnées polaires	14
I-2.6.2 coordonnées cylindriques.....	15
I-2.6.3 coordonnées Sphériques.....	15
I-2.6.4 Applications	16
Application 1 : La surface S d'un carré de coté a	16
Application 2 : La surface S d'un cercle de rayon V	16
Application 3 : Le volume V d'une sphère de rayon R	17
I-3. TRANSFORMATION DES INTEGRALES	19
I-3.1 Formule de Green-Ostrogradski (théorème de flux-divergence).....	19
I-3.2 Formule de Stokes	19
I-4.ANGLE SOLIDE.....	19
I-4. RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL	20
I-4. 1. Grandeur vectorielle.....	21
I-4. 2. La sommation des vecteurs	21
I-4. 3. Les composantes d'un vecteur	23
I-4. 3. 1. Les composantes d'un vecteur dans un plan :	23
I-4. 3. 1. 1. Le Module du vecteur en 2D:.....	24
I-4. 3. 1. 1. Le vecteur unitaire en 2D:	25
I-4. 3. 1. Les composantes d'un vecteur dans l'espace :	26
I-4. 4. Produit des vecteurs.....	27
I-4. 4. 1.Produit scalaire.....	27
I-4. 4. 2.Produit vectoriel.....	30
I-4. 4. 1.Produit mixte	33
I-4. 5. Les opérateurs	34
I-4. 5.1 L'opérateur Nabla	34
I-4. 5.2 Le gradient	34
I-4. 5.3 La divergence.....	35
I-4. 5.3 Le rotationnel.....	35
II- LA FORCE ELECTROSTATIQUE ET LE CHAMP ELECTROSTATIQUE.....	38
II-1. ELECTRISATION ET LA CHARGE ELECTRIQUE.....	38
II-1.1 Charge électrique	38
II-2.2 Conducteurs et isolants	40
II-3. 3 Types d'électrisation.....	41
II-3.3.1 Electrification par frottement	41

II-3.3.2 Electrification par contact	43
II-3.3.3 Electrification par influence	44
II-2. LOI DE COULOMB	44
2. 2. 1 La force électrostatique	45
II-2. 2 Comparaison entre la force électrostatique et gravitationnel.....	47
II-2. 3 Le principe de superposition des forces.....	48
II-3. LE CHAMP ELECTROSTATIQUE.....	51
II- 3. 1 Introduction	51
II- 3. 2 Le vecteur champ électrique	53
II-3.3 Les lignes de champs	54
II- 3. 4 Le calcul du champ électrostatique.....	55
II- 3. 4.1 le champ électrostatique d'une charge ponctuelle.....	55
II- 3. 4.2 Le champ électrostatique d'un système de n charges (distribution discrète de charge)....	57
II- 3. 4.3 Le champ électrostatique produit par une distribution continue de charges.....	60
II- 3. 5 Applications.....	61
II- 3. 5. 1 Le champ électrique produit par un fil de longueur infinie portant une charge linéique positive et de densité constante: :	61
II- 3. 5. 2 Le champ électrique produit par un anneau portant une charge linéique positive et de densité constante :	62
II- 3. 5. 3 Le champ électrique produit par un disque fin et portant une charge surfacique positive de densité constante :	64
III- LE THEOREME DE GAUSS ET LE POTENTIEL ELECTRIQUE.....	68
III-1. LE THEOREME DE GAUSS	68
III-1.1 Le flux électrique.....	69
III-1.1.1 Définition du flux électrique d'un champ uniforme.....	69
III-1.1.2 Définition du flux électrique d'un champ non uniforme	70
III-1.1.3 Application du Flux électrique	71
III-1.1.3. 1. Le flux électrique à travers un disque :	71
III-1.1.3. 2. Le flux électrique à travers un cube :	72
III-1.1.3. 3. Le flux électrique à travers une sphère) :	73
III-1.2 Théorème de Gauss.....	74
III-1.2.1 Charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface sphérique	75
III-1.2.2 La forme générale du théorème de Gauss.....	75
III-1.3 Applications du théorème de Gauss.....	77
III-1.3.1 Le champ électrique crée une sphère conductrice	77
III-1.3.2 Le champ électrique crée une sphère pleine chargée uniformément	79
III-1.3.3 le champ électrique crée par une tige de longueur infinie uniformément chargée	81
III-1.3.4 Le champ électrique produit par un plan infini chargée.....	81
III-1.4 La forme différentielle du théorème de Gauss	83
III-1.5 La relation entre flux et angle solide	85
III-2. POTENTIEL ELECTRIQUE	86
III-2.1 Énergie potentielle électrique et de travail	87
III-2.2 La différence du potentiel et le potentiel électrique.....	88
III-2.2.1 Le potentiel électrique produit par une charge ponctuelle.....	89
III-2.2.2 Le potentiel électrique produit par n charge ponctuelle.....	90
III-2.2.3 Le potentiel électrique produit par une distribution continue de charge	91
III-2.3 Applications	91
III-2. 3. 1 Le potentiel électrique produit par un anneau chargé	91
III-2. 3. 2 Le potentiel électrique produit par un disque chargé.....	92
III-2. 3. 3 Le potentiel électrique produit par un disque chargé.....	94
III-2.4 Le champ électrique en fonction du potentiel	95
III-2.5 Le dipôle électrique	96
III-2.5.1 Le potentiel électrique créé par un dipôle.....	96

III-2.5.2 Le champ électrique créé par un dipôle..... 97

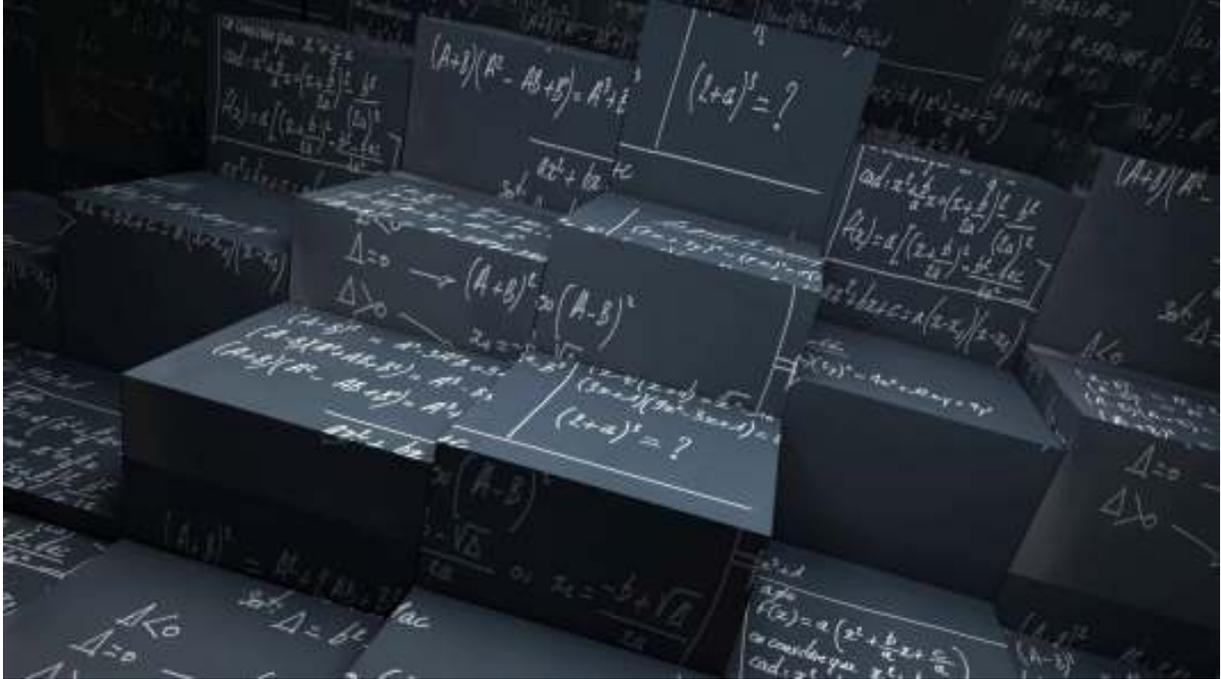
EXERCICE SUPPLEMENTAIRE 99

REFERENCES :.....102

Chapitre I

Outils mathématiques, compléments
d'électrostatique

I-OUTILS MATHÉMATIQUES, COMPLÉMENTS D'ELECTROSTATIQUE



I-1. INTEGRALES LINEAIQUES, SURFACIQUES, ET VOLUMIQUES : CIRCULATION, FLUX, ELEMENTS DE VOLUME

Afin de simplifier la compréhension du cours d'électricité, il est nécessaire de faire une révision des outils mathématiques commençant par les intégrales. Dans ce rappel on va étudier trois types d'intégrales : linéique, surfacique et volumique.

I-1.1 Intégrales linéiques

Cette intégral pourra être utilisé :

1- Pour calculer des grandeurs le long d'un contour, exemple :

$$\text{-La masse d'un fil } m = \int_A^B \mu(r) dr \quad \text{(I.1)}$$

$$\text{-La longueur } L = \int_A^B dl \quad \text{(I.2)}$$

$$\text{-La } q = \int_A^B \lambda(r) dr \quad \text{(I.3)}$$

Avec $\mu(r)$, $\lambda(r)$ représente la masse linéique et densité linéique respectivement.

Exercice I.1 : trouver la masse d'une tige droite dans l'intervalle $[0, 1]$ sachant que sa densité varie de la forme $\mu(x) = x^3$.

On a la masse de la tige m égale à :

$$m = \int_0^1 \mu(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = 0.25$$

2- Pour calculer la circulation d'un champ vectoriel \vec{A} le long du contour (C) (Figure I.1) avec :

$$C = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Remarque : l'intégrale est sur une courbe fermée on remplace les bornes de l'intégration par un rond.

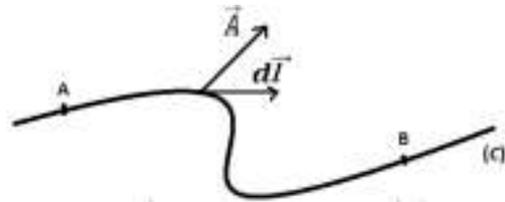


Figure I.1 : Trajectoire AB

$$C = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Exercice I.2 : On considère le champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z) = (x + y)\vec{i} + y\vec{j}$ Calculer la circulation de $\vec{A}(x, y, z)$ le long du cercle C de centre O et de rayon $R = 1$.

Solution :

$$\text{Puisque } \begin{cases} \vec{A}(\vec{r}) = (x + y)\vec{i} + y\vec{j} \\ \text{et} \\ d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (x + y)dx + y dy.$$

Et considérant :

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin \theta d\theta \\ dy = \cos \theta d\theta \end{cases}$$

Et puisque on calcule la circulation le long du cercle donc $0 \leq \theta \leq 2\pi$. donc la circulation sera :

$$C = \int_0^{2\pi} ((\cos \theta + \sin \theta)(-\sin \theta) + \cos \theta \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 \theta) d\theta$$

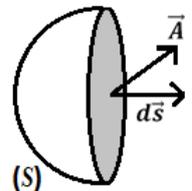
Et comme $\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \sin^2 \theta$, on obtient :

$$C = -\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{2\pi} = -\pi$$

I-1.2 Intégrales surfaciques (intégrale double)

Ce type d'intégrale est utilisable pour calculer des grandeurs exemple : une surface $S = \iint ds$, une charge q :

$$q = \iint \sigma ds \tag{I.4}$$



avec σ est une densité surfacique. Et pour calculer le flux Φ d'un champ vectoriel à travers la surface S avec :

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{I.5}$$

Figure I.2 : Un champ \vec{A} traversant une surface S

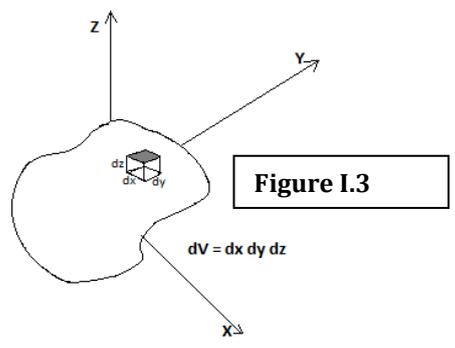
I-1.3 Intégrales volumiques (intégrale triple)

Sert à calculer des volumes, et des charges etc., avec.

- Volume V égale $V = \iiint dx dy dz$ (I.6)

- La charge : $q = \iiint \rho dv$, (I.7)

- ρ représente la densité volumique et dv le volume



élémentaire.

I-2. SYSTEMES DE COORDONNEES

La méthode de calcul des intégrales linéiques, surfaciques ou volumiques dépend du système de coordonnées employées. Le système le plus général est celui des coordonnées cartésiennes (x, y, z) mais on verra que suivant les symétries du système on aura intérêt à employer d'autres systèmes de coordonnées comme polaires, cylindriques ou sphériques.

I-2.1 Coordonnées cartésiennes

Le point M est repéré par les coordonnées cartésiennes

$$(x, y, z) . (-\infty < x, y, z < +\infty)$$

Le vecteur position en coordonnée cartésienne est

donné par :

$$\overline{OM} = \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (I.8)$$

Et le déplacement élémentaire est défini par :

$$d\overline{OM} = d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (I.9)$$

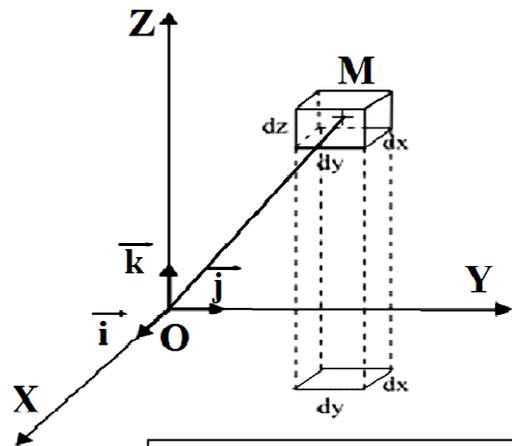


Figure I.4 : Représentation du vecteur position dans un repère cartésien.

I-2. 2 Coordonnées polaires :

Le système de coordonnées polaires est défini par l'origine O , du rayon ρ ($0 < \rho < +\infty$) et un angle polaire $0 < \theta < 2\pi$ et donc il est défini par les coordonnées polaire (ρ, θ) . Soit un point M dans le plan polaire, Le vecteur position \overline{OM} est défini par :

$$\overline{OM} = \vec{\rho} = \rho \vec{u}_\rho \quad (I.10)$$

Avec \vec{u}_ρ est le vecteur unitaire donné par la relation suivante :

$$\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \tag{I.11}$$

Dans le système polaire il y'a deux vecteurs unitaire, (\vec{u}_ρ et \vec{u}_θ) avec :

$$\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \tag{I.12}$$

La relation entre les deux systèmes de coordonnées est donné par les transformations suivantes :

Coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \tag{I.13}$

Coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires : $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{x}{y} \end{cases} \tag{I.14}$

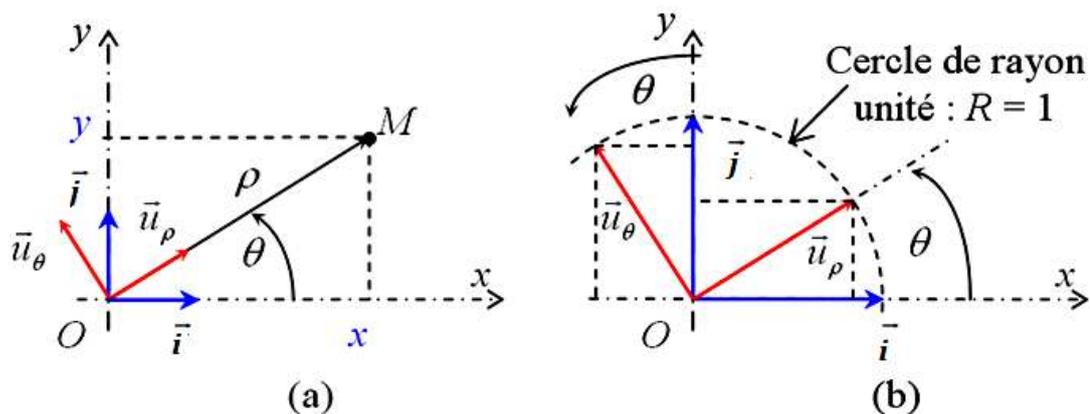


Figure I.5 : Le vecteur position dans un système de coordonnées polaire

Exercice I.3 : Trouver (a) Coord. Cartésienne de P dont les Coord. Polaire est $(2, \frac{\pi}{3})$; et (b) les Coord. Polaire de Q dont Coord. cartésienne est $(-1, -1)$.

Solution :

a.

$$\begin{cases} x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1 \\ y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$$

b. $\begin{cases} \rho = \sqrt{1+1} \\ \tan \theta = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou bien } \theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

Puisque $(-1, -1)$ se trouve dans le troisième quadrant, nous choisissons $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

Et donc Q dans les coord. Polaire est $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$

I-2.3 Coordonnées cylindriques

Si maintenant la trajectoire se trouve dans un espace (3D), des fois il sera plus pratique d'utiliser autres coordonnées que cartésiennes pour calculer certain propriétés, comme un exemple : les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r + z \vec{k} \quad \text{(I.15)}$$

Avec \vec{u}_r et \vec{u}_θ sont les même donnés dans les deux équations (I.11) et (I.12) respectivement.

La relation entre les deux systèmes de coordonnées est donnée par les transformations suivantes :

Coordonnées cylindrique aux coordonnées cartésiennes :

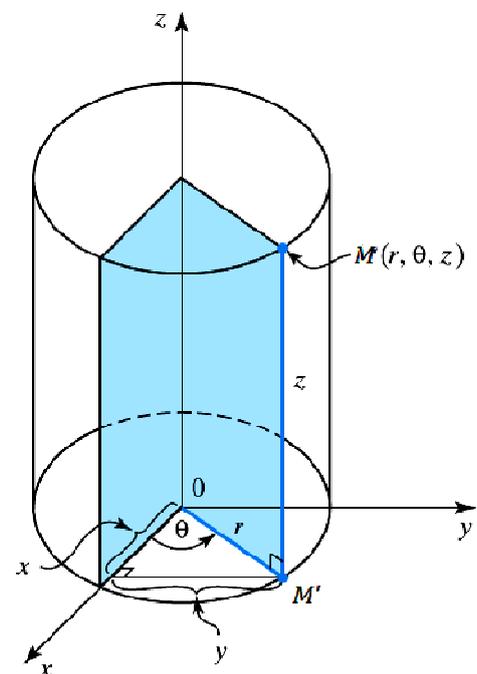


Figure I.6 : Coordonnée cylindrique

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

Coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindrique :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{x}{y} \\ z = z \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Si $z = 0$ nous serons dans le système de coordonnée polaire (donc les coordonnées polaires est un cas particulier des coordonnées cylindriques).

Exercice I.4 : Trouver l'équation cylindrique pour l'ellipsoïde : $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

Solution : en utilisant l'équation (I.16) on aura :

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4(r \cos \theta)^2 + 4(r \sin \theta)^2 + z^2 = 4r^2 + z^2$$

Donc l'équation devient : $4r^2 + z^2 = 1$

I- 4 Coordonnées Sphériques

Dans l'espace il y'a un autre type de système de coordonnée il est connu par: système de coordonnée sphérique (r, θ, φ) . Avec $(0 < r < +\infty)$ et $0 < \theta < 2\pi$ et $0 < \varphi < \pi$

On peut démontrer géométriquement les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

(I.18)

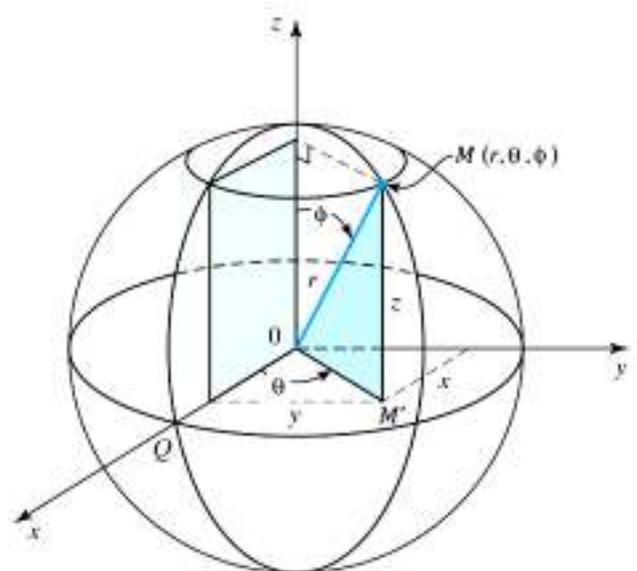


Figure I.7 : Coordonnée sphérique

Et la relations opposée :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{x}{y} \\ \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Le vecteur position dans ce système est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r \quad (\text{I.20})$$

Avec :

$$\vec{u}_r = \cos \theta \sin \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \varphi \vec{k} \quad (\text{I.21})$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \quad (\text{I.22})$$

$$\vec{u}_\varphi = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \cos \varphi \vec{j} - \sin \varphi \vec{k} \quad (\text{I.23})$$

I-2.6 Éléments de surface et de volume

Dans le paragraphe précédent nous avons vu les différents types des systèmes de coordonnées mais il nous reste à déterminer l'élément de longueur, surface ou bien de volume dans ces différents systèmes de coordonnées. Et cela dans le but de faciliter les calculs.

De même pour calculer des flux ou des intégrales volumiques, parfois il nous faut pour transformer les coordonnées cartésiennes dans les nouveaux systèmes de coordonnées.

I-2.6.1 coordonnées polaires

Le déplacement élémentaire dans le système polaire est :

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \end{cases} \Rightarrow d\overrightarrow{OM} = \begin{cases} dx = \cos \theta d\rho + -\rho \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 d\overline{OM} &= (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})d\rho + \rho (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})d\theta \\
 d\overline{OM} &= d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta
 \end{aligned} \tag{I.24}$$

I-2.6.2 coordonnées cylindriques

C'est similaire aux coordonnées polaires

$$\overline{OM} = \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \\ dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \\ dz = dz \end{cases} \Rightarrow d\overline{OM} = \begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \\ dz = dz \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 d\overline{OM} &= (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})dr + r (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})d\theta + dz \vec{k} \\
 d\overline{OM} &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}
 \end{aligned} \tag{I.25}$$

I-2.6.3 coordonnées Sphériques

En utilisant les équations (I.18)

$$\begin{aligned}
 d\overline{OM} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \\
 \overline{OM} &= \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \\ dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\overline{OM} = \begin{cases} dx = \cos \theta \sin \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi \\ dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz = \cos \phi dr - r \sin \phi d\phi \end{cases}$$

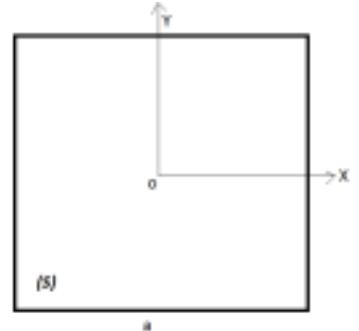
Après simplification :

$$d\overline{OM} = dr \vec{u}_r + r \sin \phi d\theta \vec{u}_\theta + r d\phi \vec{u}_\phi \tag{I.26}$$

I-2.6.4 Applications

Application 1 : La surface S d'un carré de coté a

C'est le cas le plus simple dont on n'a pas besoin de faire transformation des systèmes coordonnés et donc calculer la surface dans



les coordonnées cartésiennes. $dS = dx dy$

$$S = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \left(\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dy \right) dx = a^2$$

Figure I.6 : Intégration sur la surface d'un carré en choisissant un sens de parcours

Application 2 : La surface S d'un cercle de rayon R

La surface est déterminée par :

$$S = \iint dx dy$$

Dans ce cas il sera compliqué et long si nous envisageons de calculer la surface en utilisant les coordonnées cartésiennes. De préférences, il faut utiliser les coordonnées polaires (ρ, θ) avec $0 \leq \rho \leq R$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

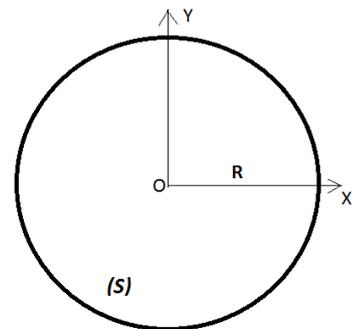


Figure I.7 : Intégration sur la surface d'un cercle en choisissant un sens de parcours

Donc remplacer dx et dy par $d\rho$ et $d\theta$. L'élément de surface dS dans les coordonnées polaires est égal au :

$$dS = dx dy = |J| d\rho d\theta \tag{I.27}$$

J représente la matrice jacobienne, elle est formée des dérivées des anciennes coordonnées par rapport aux nouvelles.

Ainsi comme

$$\begin{cases} dx = \cos \theta d\rho + -\rho \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta \end{cases}$$

La matrice Jacobienne sera :

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \rho \cos^2 \theta - (-\rho) \sin^2 \theta = \rho$$

Dans les coordonnées polaires :

$$J = \rho \quad \text{(I.28)}$$

Finalement la surface est :

$$S = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=R} \rho d\rho d\theta = 2\pi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^R = \pi R^2$$

Application 3 : Le volume V d'une sphère de rayon R

Le système adapté pour ce genre de forme est le système des coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) avec $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \pi$.

L'expression de l'élément de volume en cartésiennes est :

$$dV = dx dy dz$$

Et en sphérique est :

$$dV = dx dy dz = |J| dr d\phi d\theta \quad \text{(I.29)}$$

Utilisant l'équation :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} dx = \cos \theta \sin \phi \, dr - r \sin \theta \sin \phi \, d\theta + r \cos \theta \cos \phi \, d\phi \\ dy = \sin \theta \sin \phi \, dr + r \cos \theta \sin \phi \, d\theta + r \sin \theta \cos \phi \, d\phi \\ dz = \cos \phi \, dr - r \sin \phi \, d\phi \end{cases}$$

La matrice Jacobienne sera :

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos^2 \phi - r^2 \cos^2 \theta \sin \phi \cos^2 \phi) + 0 - (r^2 \cos^2 \theta \sin^3 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^3 \phi) \\ &= -r^2 \cos^2 \phi \sin \phi - r^2 \sin^3 \phi = -r^2 \sin \phi \end{aligned}$$

Finalement la valeur absolue du jacobien est :

$$|J| = r^2 \sin \phi \quad \text{(I.30)}$$

Et l'élément de volume est :

$$V = \int_{r=0}^{r=R} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \sin \phi \, d\phi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

C'est un résultat connu depuis longtemps. Aux étudiants de calculer le volume d'un cylindre et la surface d'une sphère.

On en déduit l'élément de surface de la sphère :

$$dS = |J| \, d\phi \, d\theta = R^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi$$

De la même manière on trouvera :

$$S = 4\pi R^2$$

Remarque : dans certain calculer, on a besoin du vecteur surface qui est définie par :

$$\vec{dS} = R^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, \vec{u}_r$$

I-3. TRANSFORMATION DES INTEGRALES

I-3.1 Formule de Green-Ostrogradski (théorème de flux-divergence)

Considérons une surface fermée Senserrant un volume V , le théorème de flux-divergence nous sera utile pour établir la forme différentielle du théorème de Gauss, il est donné par :

$$\Phi = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{A} \, dV \quad (\text{I.31})$$

\vec{A} représente le champ vectoriel. Remarquons que l'homogénéité dimensionnelle (une dérivée a la dimension de la grandeur divisée par une distance) et que ce genre de théorème transforme un double intégrale à un triple.

I-3.2 Formule de Stokes

Soit un contour C enserrant une surface S , en utilisant le rotationnel on peut établir la formule suivante, dite formule de Stokes, pour un champ vectoriel \vec{A} :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.32})$$

I-4. ANGLE SOLIDE

L'angle solide élémentaire Ω est défini par le rapport de surface élémentaire dS au carré du rayon :

$$d\Omega = \frac{dS \vec{u}}{R^2} \quad (I.33)$$

L'unité de l'angle solide est le stéradian.

\vec{n} est le vecteur unitaire normal à dS , et \vec{u} le vecteur unitaire du rayon.

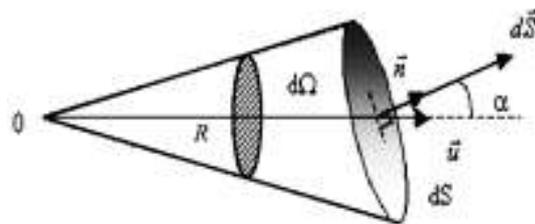


Figure I.8 : L'angle solide

$$\Omega = \iint \frac{dS \cos \alpha}{R^2} \quad (I.34)$$

Donc il suffit de calculer dS pour trouver l'angle, α étant l'angle entre le vecteur \vec{u} et la normale à l'élément de surface \vec{n} .

Angle solide en coordonnées sphériques

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{u}_r \quad (I.35)$$

$$dS = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint \frac{R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{R^2} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

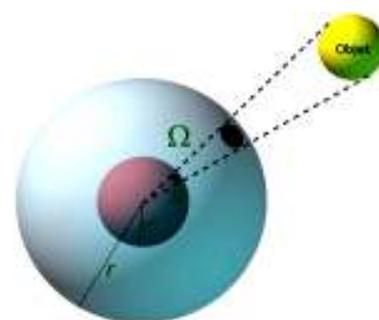


Figure I.9 : Exemple d'un atome représente les électrons, n et p représentent le proton et le neutron respectivement.

Si $\alpha = \pi$ l'angle solide est $\Omega = 4\pi$

Si $\alpha = \pi/2$ on aura une demi-sphère $\Omega = 2\pi$

Relation entre flux et angle solide

L'angle solide est utilisé aussi dans l'électrostatique précisément pour calculer le flux.

I-4. RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL

Certaines grandeurs physiques, telles que le temps, la température, la masse, la densité de la charge électrique, peuvent être décrites par un nombre avec une unité. Cependant, beaucoup d'autres quantités ont une qualité directionnelle et ne peuvent pas être décrites par

un seul nombre par exemple la vitesse, la force, le champ électrique le champ magnétique et plusieurs.

I-4. 1. Grandeur vectorielle

Quand une grandeur physique est décrite par un seul nombre, nous l'appelons une quantité **scalaire**. En revanche, un **vecteur** a à la fois une magnitude (le module) et une direction dans l'espace.

\vec{V} représente un vecteur et \vec{u} le vecteur unitaire, avec :

$$\vec{V} = V \vec{u} \quad \text{(I.36)}$$

V représente le module du vecteur \vec{V} .

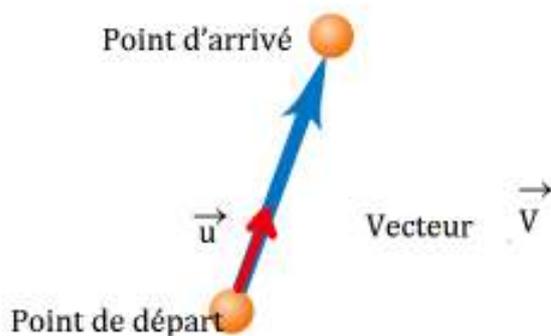


Figure I.10 : Représentation du vecteur et du vecteur unitaire

I-4. 2. La sommation des vecteurs

Sommons maintenant deux vecteurs arbitraires \vec{V}_1 et \vec{V}_2 . Le résultat de l'addition de ces deux vecteurs est un vecteur résultant \vec{V} . Ceci peut être représenté graphiquement en étalant le premier vecteur \vec{V}_1 dans la direction horizontale et en plaçant ensuite la queue du second vecteur \vec{V}_2 à la pointe du vecteur \vec{V}_1 comme indiqué sur la **Figure I. 11**.

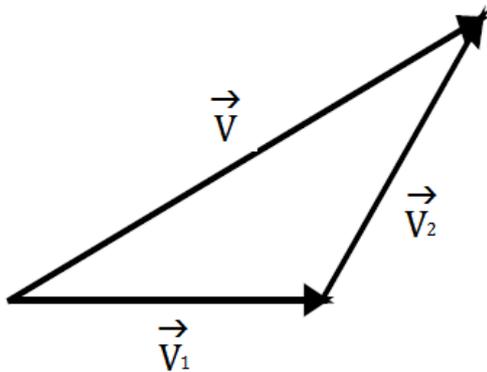


Figure I.11 : La sommation de deux vecteurs

Le vecteur résultant est écrit mathématiquement comme :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (\text{I.37})$$

Rappelez-vous que dans cette somme, nous ne voulons pas dire l'addition scalaire. Le vecteur résultant est la somme vectorielle des vecteurs individuels \vec{V}_1 et \vec{V}_2 . Bien qu'un vecteur soit une grandeur qui a à la fois une grandeur (un module) et une direction. Par conséquent, un vecteur peut être déplacé parallèlement à lui-même sans changer ses caractéristiques. Parce que le module du vecteur déplacé est toujours le même ainsi que sa direction est la même, ce qui est équivalent à dire que le vecteur est le même. Ainsi, en ajoutant les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , le vecteur \vec{V}_1 peut être déplacé parallèlement à lui-même jusqu'à ce que la pointe de \vec{V}_1 touche la pointe de \vec{V}_2 . De même, le vecteur \vec{V}_2 peut être déplacé parallèlement à lui-même jusqu'à ce que l'extrémité de \vec{V}_2 touche l'extrémité arrière du vecteur \vec{V}_1 . En déplaçant les vecteurs parallèlement à eux-mêmes, un parallélogramme a été formé, comme le montre la **Figure I. 12**.

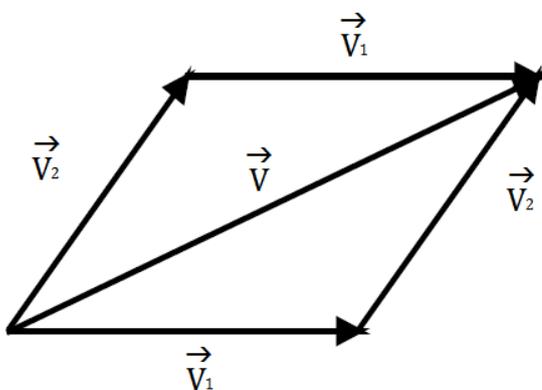


Figure I.12 : la sommation de vecteurs par la méthode du parallélogramme

D'après la **Figure I.12** on voit que la résultante des deux vecteurs est la diagonale principale du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , donc nous appelons ce procédé la méthode du parallélogramme de la sommation vectorielle. L'addition des vecteurs est commutative :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \quad (\text{I.38})$$

I-4. 3. Les composantes d'un vecteur

Chaque vecteur dans un système peut être considéré comme étant la somme de deux ou bien trois vecteurs.

I-4. 3. 1. Les composantes d'un vecteur dans un plan :

On peut dessiner un vecteur arbitraire \vec{V} dans un système de coordonnées x, y sur la **Figure I.13**. Le vecteur \vec{V} fait un angle θ avec l'axe des x . Pour trouver la composante du vecteur \vec{V} suivant l'axe x ou bien l'axe y , on fait la projection sur ces deux axes pour avoir les deux vecteurs \vec{V}_x et \vec{V}_y (voir la **Figure I.13**).

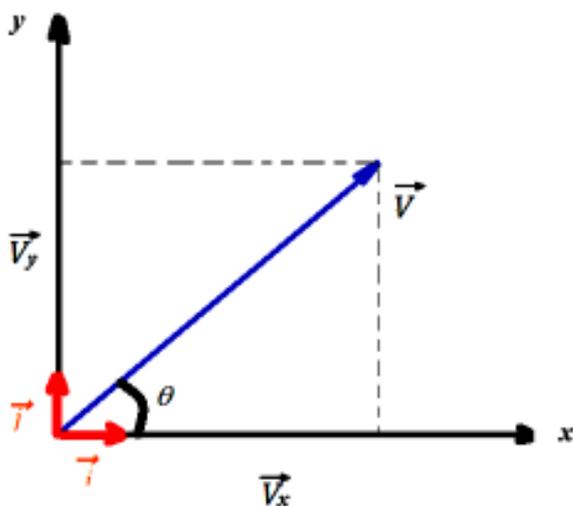


Figure I.13 : Les composantes d'un vecteur dans un plan

A partir de la trigonométrie, la composante du vecteur suivant l'axe x est trouvée par :

$$\cos \theta = \frac{V_x}{V}$$

La composante V_x du vecteur \vec{V} est obtenue comme :

$$V_x = V \cos \theta \quad \text{(I.39)}$$

La composante du vecteur \vec{V} suivant y est trouvée par :

$$\sin \theta = \frac{V_y}{V}$$

Par conséquent, la composante V_y du vecteur \vec{V} est :

$$V_y = V \sin \theta \quad \text{(I.40)}$$

Exercice I.5 : Trouver les composants d'un vecteur. L'amplitude du vecteur a est de 10,0 unités et le vecteur fait un angle de 30,00 avec l'axe des x . Trouvez les composants de a .

Solution :

La composante x du vecteur \vec{V} est trouvée à partir de l'équation 1.5 :

$$V_x = V \cos \theta = 10 \cos 30 = 8.66 \text{ unités}$$

La composante y de \vec{V} est trouvée à partir de l'équation 1.6

$$V_y = V \sin \theta = 10 \sin 30 = 5.00 \text{ unités.}$$

I-4. 3. 1. 1. Le Module du vecteur en 2D:

L'amplitude du vecteur est déterminée par le théorème de Pythagore :

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad \text{(I.41)}$$

Par conséquent, le module du vecteur \vec{V} est :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad \text{(I.42)}$$

Il est donc très simple de trouver la grandeur d'un vecteur une fois que ses composantes sont connues.

Pour trouver l'angle θ que le vecteur \vec{V} fait avec l'axe des x , la définition de la tangente est utilisée, à savoir,

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{V_y}{V_x} \quad (\text{I.43})$$

Exercice I.6 : Les composantes d'un certain vecteur V sont données comme $V_x = 7.55$ et $V_y = 3.25$. Trouve le module du vecteur et l'angle θ qu'il fait avec l'axe des x .

Solution :

Le module du vecteur est trouvé à partir de l'équation (I.42)

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(7.55)^2 + (3.25)^2}$$

$$V = 8.22$$

L'angle θ est trouvé à partir de l'équation (I.43) comme :

$$\theta = \tan^{-1} \frac{V_y}{V_x} = \tan^{-1} \frac{3.25}{7.55}$$

$$\theta = 23.3^\circ$$

I-4. 3. 1. 1. Le vecteur unitaire en 2D:

D'après la **Figure I.13** on a $\vec{V}_x = V_x \vec{i}$ et $\vec{V}_y = V_y \vec{j}$ et puisque $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$ on aura donc :

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \quad (\text{I.44})$$

Et en utilisant les deux équations (I.39) et (I.40) dans l'équation (I.44) on aura :

$$\vec{V} = V \cos \theta \vec{i} + V \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{V} = V(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \quad (\text{I.45})$$

Or $\vec{V} = V \vec{u}$, donc le vecteur unitaire \vec{u} est donné par :

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad (\text{I.46})$$

Et si on calcule le module du vecteur unitaire on trouve :

$$u = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1 \quad (\text{I.47})$$

I-4. 3. 1. Les composantes d'un vecteur dans l'espace :

Avec le même raisonnement, on trouve : $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ (Figure I.14) avec :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{V_x}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{V_y}{\rho} \\ \cos \phi = \frac{V_z}{V} \\ \sin \phi = \frac{\rho}{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = V \cos \theta \sin \phi \\ V_y = V \cos \theta \sin \phi \\ V_z = V \cos \phi \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Donc le vecteur s'écrit comme suit :

$$\vec{V} = V(\cos \theta \sin \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \phi \vec{k}) \quad (\text{I.49})$$

Alors le vecteur unitaire \vec{u} est donné par :

$$\vec{u} = \cos \theta \sin \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \phi \vec{k} \quad (\text{I.50})$$

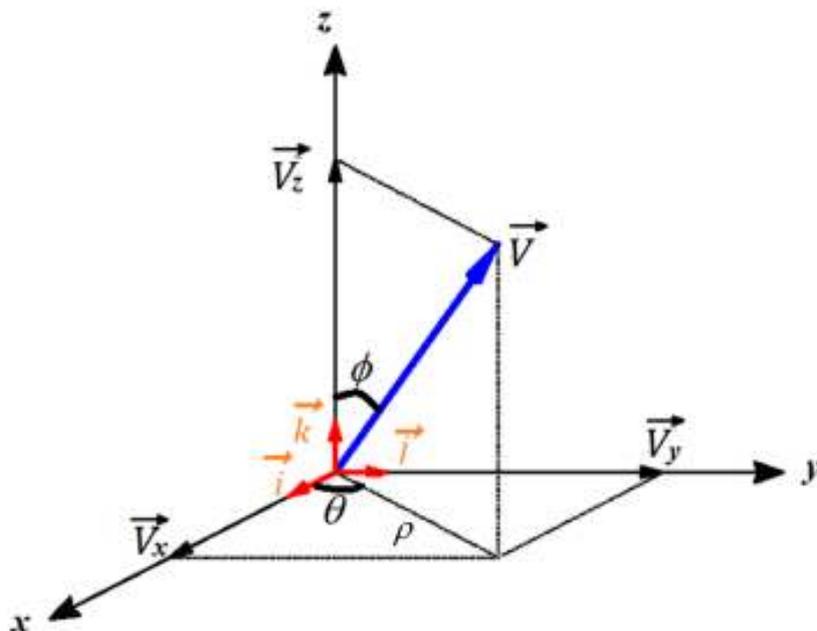


Figure I.14 : Les composantes d'un vecteur dans un espace

Le module du vecteur unitaire est égal à 1 et le module du vecteur V est donné par :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (\text{I.51})$$

Exercice I.7 : Trouver la résultante des trois vecteurs suivants : $\vec{V}_1 = -1\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{V}_2 = 4\vec{i} + 3\vec{k}$ et $\vec{V}_3 = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$.

Solution :

La résultante est la sommation des trois vecteurs et elle est donné par :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (-1 + 4)\vec{i} + (2 + 0 + 1)\vec{j} + (-4 + 3 + 1)\vec{k}$$

$$\vec{V} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Le module du vecteur résultant est alors :

$$V = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18}$$

I-4. 4. Produit des vecteurs

La multiplication des vecteurs (produit vectoriel) est importante car de nombreuses lois physiques sont exprimées comme le produit de vecteurs.

Il y a trois types de multiplication impliquant des vecteurs (scalaire, vectoriel et mixte)

I-4. 4. 1. Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , **Figure I.15**, est défini comme étant :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos \theta \quad (\text{I.52})$$

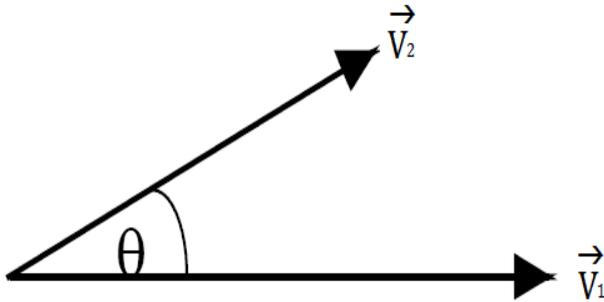


Figure I.15 : Le produit scalaire

où θ est l'angle entre les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , et V_1 et V_2 sont les modules des deux vecteurs. Le symbole de ce type de multiplication est le point, (\cdot), entre les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 . La définition du produit scalaire est donnée par l'équation **(I.52)**. Comme on peut l'observer sur la **Figure I.15**, $V_2 \cos \theta$ est la composante du vecteur \vec{V}_2 dans la direction \vec{V}_1 . Ainsi, le produit scalaire est la composante du vecteur \vec{V}_2 dans la direction du vecteur \vec{V}_1 , multipliée par la grandeur du vecteur \vec{V}_1 lui-même. On peut aussi dire que la quantité, $V_1 \cos \theta$, est la composante du vecteur \vec{V}_1 dans la direction \vec{V}_2 et donc le produit scalaire est aussi la composante du vecteur \vec{V}_1 dans la direction \vec{V}_2 , multipliée par la grandeur du vecteur \vec{V}_2 lui-même. L'une ou l'autre description est correcte. Si les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont parallèles l'un à l'autre, alors l'angle θ entre \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est égal à zéro. Dans ce cas, le produit scalaire devient :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos 0 = V_1 V_2 \quad (\text{I.53})$$

D'autre part, si \vec{V}_1 est perpendiculaire à \vec{V}_2 , alors l'angle entre les deux vecteurs est 90° , et le produit scalaire devient :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos 90 = 0 \quad (\text{I.54})$$

Si les vecteurs sont exprimés en termes de vecteurs unitaires, le produit scalaire devient :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \quad \text{(I.55)}$$

Avec : $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Et le produit scalaire entre les vecteurs unitaires est donné par :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = (1)(1) \cos 0 = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} \quad \text{(I.56)}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (1)(1) \cos 90^\circ = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{(I.57)}$$

En utilisant les résultats des équations (I.56) et (I.57), le produit scalaire de deux vecteurs devient :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \quad \text{(I.58)}$$

Un cas particulier de l'équation (I.58) est le produit scalaire d'un vecteur par lui-même. Et c'est :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = V_1^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \quad \text{(I.59)}$$

Et donc de l'équation (I.59) le module de tout vecteur est donnée par

$$V = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Et c'est la loi déjà donnée dans l'équation (I.51)

Exercice I.8 : Calculer l'angle qui se trouve entre deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sachant que :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

Solution :

Soit θ l'angle compris entre les deux \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , utilisant la loi du produit scalaire, on aura :

$$\cos \theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1 V_2}$$

Avec :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (-6 + 0 + 16) = 10$$

$$V_1 = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ et } V_2 = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

Donc :

$$\cos \theta = \frac{10}{30} \Rightarrow \theta = 70,52^\circ$$

I-4. 4. 2. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est définie comme étant

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = V_1 V_2 \sin \theta \vec{u} \tag{I.60}$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , et est représenté sur la **Figure I.16** . Le symbole de la multiplication est désigné par le signe de croix, "×", entre les deux vecteurs. Le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs, \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , est un autre vecteur, \vec{W} , qui est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

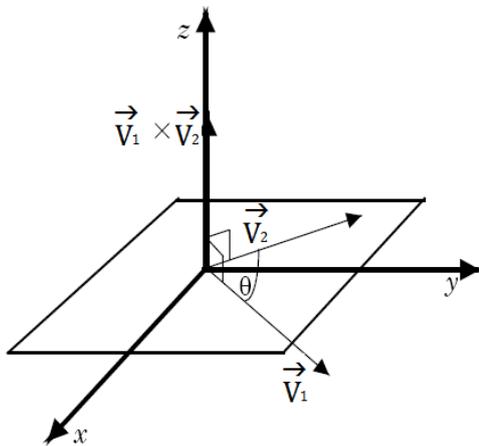


Figure I.16 : Le produit scalaire

La direction de \vec{W} est trouvée en prenant votre main droite avec les doigts dans la même direction que le vecteur \vec{V}_1 , votre paume tournée vers le vecteur \vec{V}_2 , puis en tournant votre main droite à travers l'angle entre a et b. Votre pouce pointerait alors dans la direction de \vec{V}_1 et \vec{V}_2

comme le montre la **Figure I.17**. Le nouveau vecteur est à la fois perpendiculaire au vecteur \vec{V}_1 et au vecteur \vec{V}_2 . Cette règle est appelée la règle de la main droite.

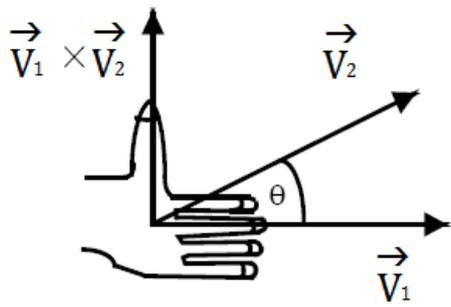


Figure I.17 : La règle de la main droite

Une des caractéristiques de ce produit vectoriel est que l'ordre de la multiplication est très important, car comme on peut le voir sur la **Figure I.18**.

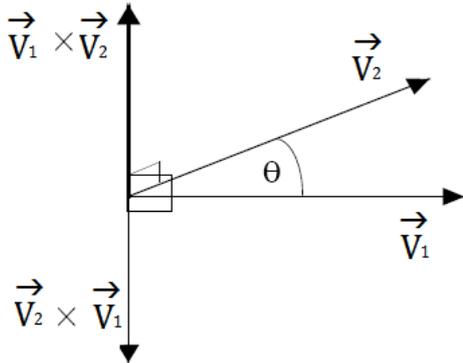


Figure I.18 : La direction du produit vectoriel

Le module du produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ est la même que le module du produit vectoriel $\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$ et il est donné par :

$$|\vec{w}| = |\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = |\vec{V}_2 \times \vec{V}_1| = V_1 V_2 \sin \theta \tag{I.61}$$

Alors que les directions des deux produits sont opposées l'une par rapport à l'autre comme le montre la **Figure I.18**. Ce résultat est souvent indiqué comme suit: les produits vectoriels sont non commutatifs.

Si les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont parallèles l'un par rapport à l'autre, alors $\theta = 0^\circ$ et :

$$|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = 0 \tag{I.62}$$

Et si le vecteur \vec{V}_1 est perpendiculaire au vecteur \vec{V}_2 , alors $\theta = 90^\circ$ et

$$|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = V_1 V_2 \quad (\text{I.63})$$

Notez que ces deux cas sont l'opposé de ce qui a été trouvé pour le produit scalaire. C'est parce que le produit scalaire contient le terme $\cos \theta$, tandis que le produit vectoriel contient le $\sin \theta$. Les $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont des fonctions complémentaires et elles sont déphasés de 90° .

Si les vecteurs sont exprimés en termes de vecteurs unitaires, le produit vectoriel devient :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 \vec{i} \times \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \times \vec{k} + \\ &\quad y_1 x_2 \vec{j} \times \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \times \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \times \vec{k} + \\ &\quad z_1 x_2 \vec{k} \times \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \times \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

Sinon on utilise $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ le résultat est le même.

Le produit vectoriel des vecteurs unitaires sont :

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = (1)(1) \sin 0 \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{I.65})$$

Et

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad (\text{I.66})$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (\text{I.67})$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \text{(I.68)}$$

Comme le produit vectoriel est non commutatif, le produit vectoriel $\vec{j} \times \vec{i}$ pointera dans la direction opposée à \vec{k} . Par conséquent, nous avons :

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad \text{(I.69)}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad \text{(I.70)}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad \text{(I.71)}$$

En utilisant les résultats des équations **(I.65)** à **(I.71)**, dans l'équation **(I.64)**, et après un calcul mathématique on obtient le produit vectoriel de deux vecteurs égal à :

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (-x_1 z_2 + x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} \quad \text{(I.72)}$$

Exercice I.9 : Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ sachant que : $\vec{V}_1 = \alpha \vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 1\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}$. Si α est égal à 0 calculer la surface formée par ces deux vecteurs.

En utilisant l'équation **(I.72)** on aura :

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (5) \vec{i} + (3 - 2\alpha) \vec{j} + (-\alpha - 1) \vec{k}$$

La surface S est déterminée par le module du produit vectoriel, et puisque $\alpha = 0$ donc

$$S = \sqrt{25 + 9 + 1} = 5.91$$

I-4. 4. 1. Produit mixte

Le produit mixte est le mélange entre le produit scalaire et vectoriel, et le résultat c'est un scalaire. Soit trois vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 , le produit mixte est donné par la relation suivante :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) \quad (\text{I.73})$$

I-4. 5. Les opérateurs

Soit une fonction scalaire $f(x, y, z)$ et la fonction vectorielle $\vec{V}(x, y, z) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$.

I-4. 5.1 L'opérateur Nabla

L'opérateur Nabla ∇ est défini comme suit :

• En coordonnées cartésiennes par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.74})$

• En coordonnées cylindriques par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.75})$

• En coordonnées sphériques par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{u}_\phi \quad (\text{I.76})$

Dans ce qui suit les définitions données sont en coordonnée cartésienne.

Le rôle de l'opérateur Nabla est de faire des dérivées partielles sur une fonction scalaire ou bien sur un vecteur. Ces dérivées partielles seront par rapport aux variables x, y et z . Cependant, comme l'opérateur Nabla contient des vecteurs unitaires \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} , alors il est une dérivée vectorielle.

I-4. 5.2 Le gradient

Si l'opérateur Nabla dérive une fonction scalaire, le résultat est appelé le gradient et Il est noté par : $\overrightarrow{\text{grad}}f$ ou bien $\vec{\nabla}f$. Par conséquent, le gradient de f est donné, en coordonnées cartésiennes, par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.77})$$

Si la fonction f est seulement une fonction d'une variable, disons x , alors le gradient se réduira à un dérivé ordinaire. Autrement dit, si $f = f(x) = V(x)$, alors $\partial f / \partial y = 0$, et $\partial f / \partial z = 0$.

I-4. 5.3 La divergence

Puisque Nabla est un vecteur, il peut être aussi multiplié par d'autres vecteurs. Et comme il existe deux types différents de multiplication (produit scalaire et produit vectoriel), alors il existe deux quantités différentes qui peuvent être obtenues en fonction du type de multiplication impliqué. Si le produit est un produit scalaire entre $\vec{\nabla}$ et un vecteur disons \vec{V} le résultat est appelé la divergence de \vec{V} , et elle est notée par : $div \vec{V}$ ou bien $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$.

La divergence d'un vecteur $\vec{V}(x, y, z)$ est un scalaire donné par :

$$div \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{(I.78)}$$

I-4. 5.3 Le rotationnel

Maintenant si le produit entre l'opérateur Nabla et un vecteur \vec{V} est un produit vectoriel.

Le résultat est un vecteur nommé rotationnel notée par : $\overrightarrow{rot} \vec{V}$ ou bien $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, le résultat est :

$$\overrightarrow{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad \text{(I.79)}$$

Exercice I.10 : Soit la fonction scalaire $f(x, y, z) = x^3 y^2 z^3 + 3x^2$ et la fonction vectorielle $\vec{V}(x, y, z) = (x^3 y) \vec{i} + (x^2 z + 1) \vec{j} + (3z^2 + 2) \vec{k}$.

- a- Calculer le gradient de la fonction scalaire $f(x, y, z)$,
- b- Calculer la divergence de $\vec{V}(x, y, z)$ et
- c- Calculer le rotationnel de $\vec{V}(x, y, z)$.

Solution :

a- En utilisant l'équation **(I.77)** on aura :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = (3x^2y^2z^3 + 6x)\vec{i} + (2x^3yz^3)\vec{j} + (3x^3y^2z^2)\vec{k}$$

b- Et d'après l'équation **(I.78)** on aura :

$$\text{div } \vec{V} = 3x^2y + 6z$$

c- A l'aide de l'équation **(I.79)** on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^3y) & (x^2z + 1) & (3z^2 + 2) \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = -(x^2)\vec{i} + (0)\vec{j} + (2xz - x^3)\vec{k}$$

Remarque : Si après un calcul du rotationnel d'un certain vecteur \vec{V}' vous auriez un vecteur nul, dit que \vec{V}' dérive d'un potentiel

Chapitre II

La force électrostatique et le champ électrostatique

II- LA FORCE ELECTROSTATIQUE ET LE CHAMP ELECTROSTATIQUE



Électrostatique est l'étude des phénomènes et des propriétés des charges électriques fixes ou lents, c'est-à-dire des charges sans accélération.

II-1. ELECTRISATION ET LA CHARGE ELECTRIQUE

Afin de comprendre les phénomènes de l'électrostatique, il est nécessaire d'être familier avec certain concept fondamental commençant par la définition de la charge.

II-1.1 Charge électrique

La charge est mesurée en Coulomb (C) , est donnée par :

$$q = \pm n e \quad \text{(II.1)}$$

Avec n représente un nombre entier et e la charge élémentaire avec :

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{II.2})$$

Le Coulomb est défini comme 1 ampère. Second.

Un atome est constitué des électrons, des protons et des neutrons (**Figure II.1**). Le proton est une charge positive situé dans le nucléon de l'atome alors que l'électron est une charge négative est qui existe hors du nucléon. Le tableau suivant représente la charge et la masse des principaux constituants de la matière.

	Atome		
	Proton	Neutron	électron
Masse (Kg)	$1.6726 \cdot 10^{-27}$	$1.675 \cdot 10^{-27}$	$9.1094 \cdot 10^{-31}$
Charge (C)	$1.6 \cdot 10^{-19}$	0	$-1.6 \cdot 10^{-19}$

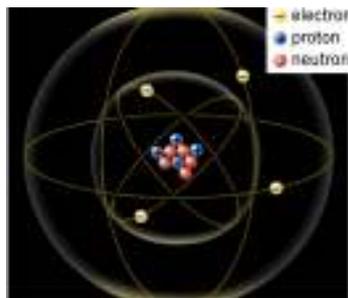


Figure II.1 : exemple d'un atome représente les électrons, n et p représentent le proton et le neutron respectivement.

Dans ce cours on va étudier les propriétés électrostatiques on utilisant des charges ponctuelles ou bien des distributions continues de charges. Cette dernière est définie par la densité de charge, qui est égale à :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{dq}{dl} & \text{Pour une distribution de charge linéique} \\ \sigma = \frac{dq}{dS} & \text{distribution surfacique} \\ \rho = \frac{dq}{dV} & \text{distribution volumique} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Avec λ, σ et ρ sont des densités de charge : linéique, surfacique et volumique respectivement. Et dl, dS et dV représentent élément de longueur, de surface et de volume respectivement.

II-2.2 Conducteurs et isolants

Supposons que nous avons deux sphères métalliques, l'une fortement chargée et l'autre électriquement neutre (**Figure II.2 a**). Si on place maintenant un objet métallique (par exemple un clou), de sorte qu'il touche les deux sphères (**Figure II.2 b**), la sphère précédemment non chargée devient rapidement chargée. Si, au lieu de cela, nous avons relié les deux sphères par une tige en bois ou une pièce de caoutchouc (**Figure II.2 c**), la balle non chargée ne devienne pas chargée. Les matériaux comme le clou de fer sont des **conducteurs** d'électricité, alors que le bois et le caoutchouc sont des non-conducteurs ou des **isolateurs**.

Les métaux sont généralement de bons conducteurs, alors que la plupart des autres matériaux sont isolateurs (bien que même les isolateurs conduisent l'électricité très légèrement). Presque tous les matériaux naturels tombent dans l'une ou l'autre de ces deux catégories distinctes. Cependant, quelques matériaux (notamment le silicium et le germanium) tombent dans une intermédiaire catégorie connue sous le nom de semi-conducteurs.

Du point de vue atomique, les électrons dans un matériau isolant sont liés très étroitement aux noyaux. Dans un bon conducteur de métal, d'autre part, Certains électrons sont étroitement liés et peuvent se déplacer librement dans le cadre de métal (bien qu'ils ne puissent pas quitter le métal facilement) et sont souvent appelés des électrons libres ou des électrons de conduction. Lorsqu'un objet chargé positivement est amené près ou touche un conducteur, les électrons libres dans le conducteur sont attirés par cet objet chargé de façon positive et se déplacent rapidement vers lui. Si négativement l'objet chargé est rapproché du conducteur, les

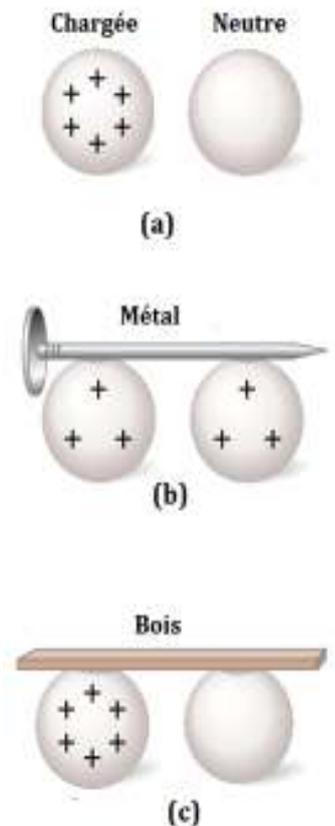


Figure II.2 : (a) Une sphère métallique chargée et une sphère métallique neutre. (b) Les deux sphères reliées par un conducteur (un clou métallique), qui conduit une charge d'une sphère à l'autre. (c) Les deux sphères originales reliées par un isolant (bois); presque aucune charge n'est menée.

électrons libres dans le conducteur déménagez-vous rapidement. Dans un semi-conducteur, il y a beaucoup moins de free des électrons, et dans un isolant, presque aucun.

II-3. 3 Types d'électrisation

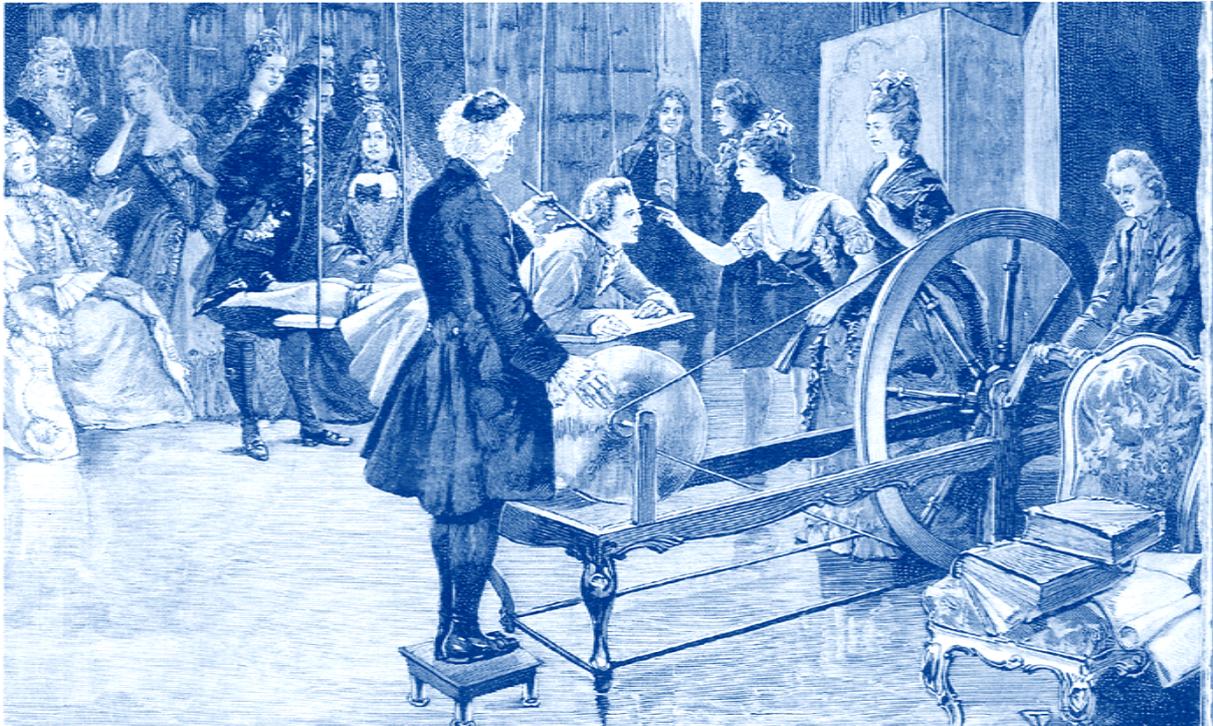


Figure II.3 : L'abbé Nollet présentait, dans les années 1740, des expériences de physique dans les salons grâce à des machines comportant une roue et un globe de verre permettant de générer des phénomènes électriques spectaculaires.

Il existe 3 types d'électrisation : par frottement, par influence et par contact.

II-3.3.1 Electrification par frottement

On va étudier ce genre d'électrisation avec deux types de corps : isolant et conducteur.

Isolant : Si nous prenions une règle en plastique et frottons la avec un morceau de laine (**Figure II.4 a**), la règle acquiert la propriété d'attirer les corps légers comme les confettis de papier. On dit que le bâton s'est électrisé. (**Figure II.4 b**).

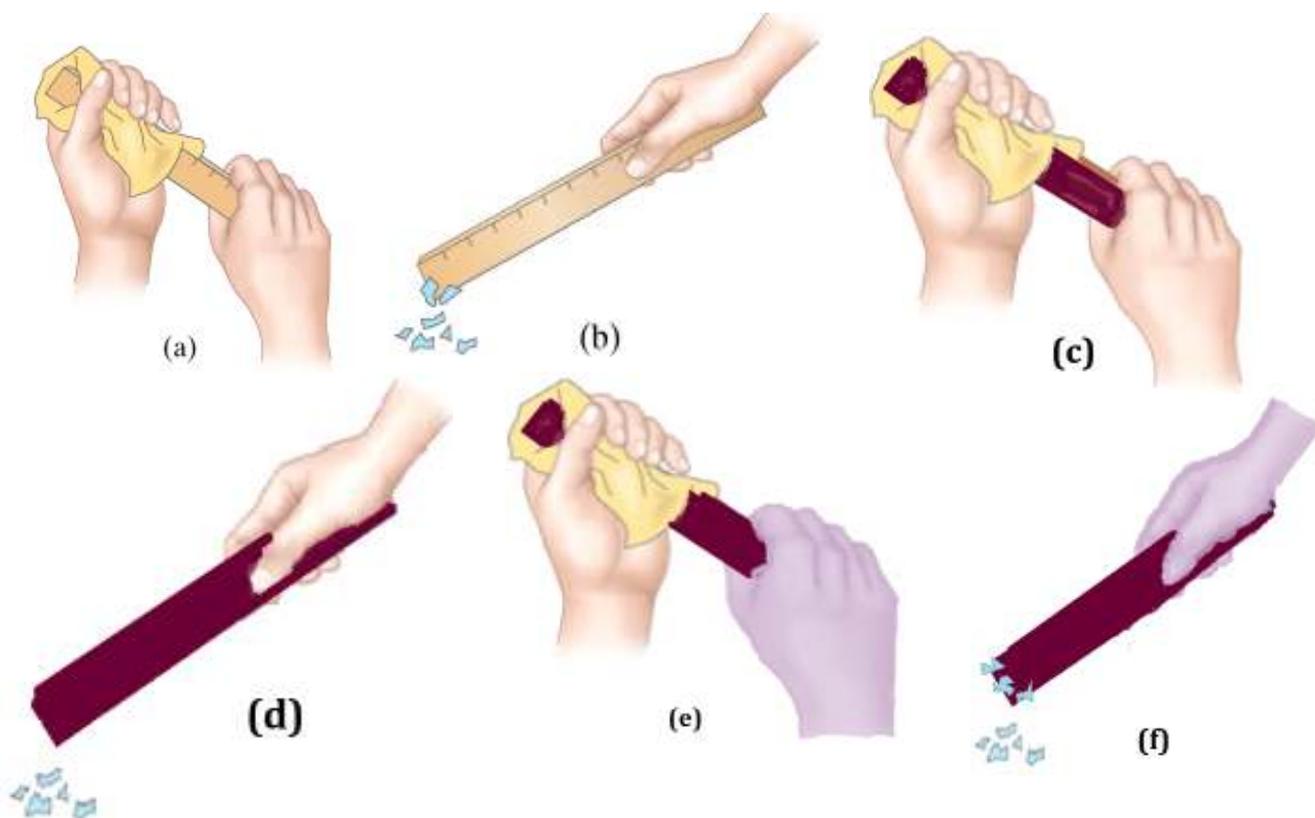


Figure II.4 : (a) frottement d'une règle avec la laine (b) la règle attire les confettis, (c) frottement d'un bâton de cuivre avec la laine, (d) il n'y a aucune réaction, (e) tenir le bâton du cuivre frotté avec la laine et (f) il y a l'électrisation.

Conducteur : répétons la même expérience mais avec un bâton de cuivre tenu à la main au lieu de la résine (**Figure II.4 c**). Nous n'observons aucune action sur les confettis de papier (**Figure II.4 d**). Si maintenant nous prenons la précaution de tenir le bâton de cuivre avec des gants (isolant) l'électrisation apparaît de nouveau (**Figure II.4 f**).

D'une façon générale, tous les corps peuvent s'électriser par frottement, pour certains la charge créée reste localisée juste sur la surface frottée (si le corps est isolant comme le verre, résine ...) et pour d'autres, la charge électrique se déplace le long du corps frotté (si le corps est un conducteur comme des métaux, des graphites...). Il a été prouvé expérimentalement qu'il existe deux cas d'électrisation correspondant à deux types de charges électriques : des charges positives et des charges négatives.

II-3.3.2 Electrification par contact

Nous suspendons une petite balle de sureau 'électriquement neutre' à un fil de soie. Approchons un bâton de verre électrisé par frottement (noté par le corps B) de la balle de sureau (noté par le corps A) (**Figure II.5 a**) jusqu'au contact (**Figure II.5 b**) puis ensuite éloignons un peu le bâton (**Figure II.5 c**). Approchons maintenant le bâton du verre de la balle (**Figure II.5 d**). on remarque que la balle est repoussée par ce même bâton. On dit qu'il y'a une répulsion entre le corps A et le corps B.

Cette expérience montre que lorsqu'un corps A (corps électriquement neutre) est mis en contact avec un corps B chargé avec une charge q , cette charge se répartit entre les deux corps A et B donnant q_A et q_B . Et donc les deux corps sont de même signe, c'est pour cette raison on eu une répulsion entre A et B.

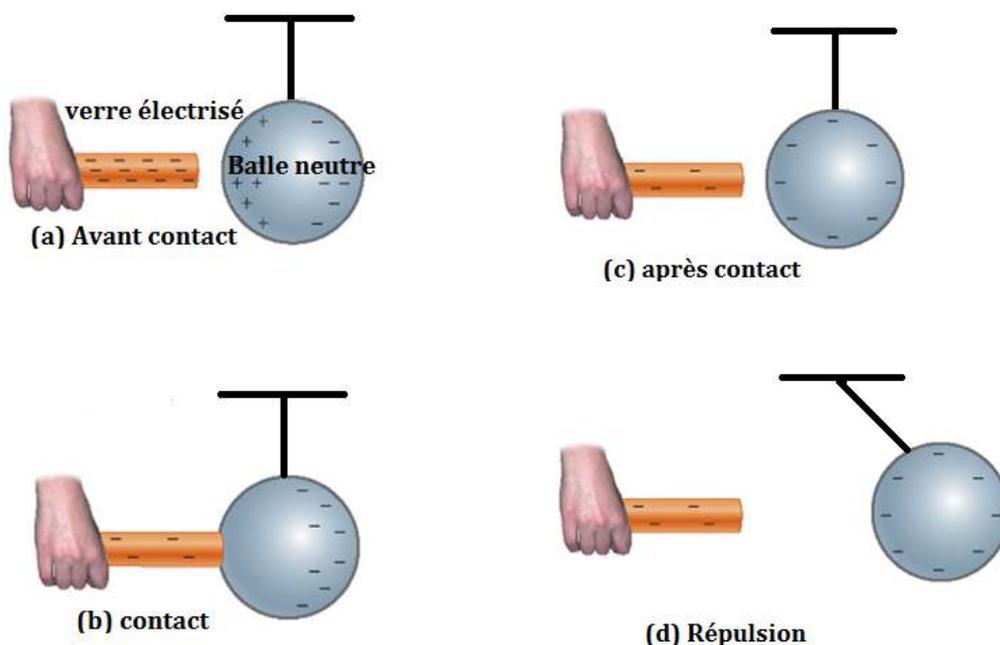


Figure II.5 : Electrification par contact

II-3.3.3 Electrification par influence

On refait la même expérience précédente, mais cette fois il n'y a pas le contact. Donc approchons un bâton de verre électrisé d'une balle neutre, sans la toucher (**Figure II.6 a**). Nous constatons que la balle est attirée par le bâton (**Figure II.6 b**). La balle a été électrisée par influence, dans ce cas c'est une influence partielle. Dans le chapitre des conducteurs en équilibre on va donner plus de détails sur ce genre d'électrification.

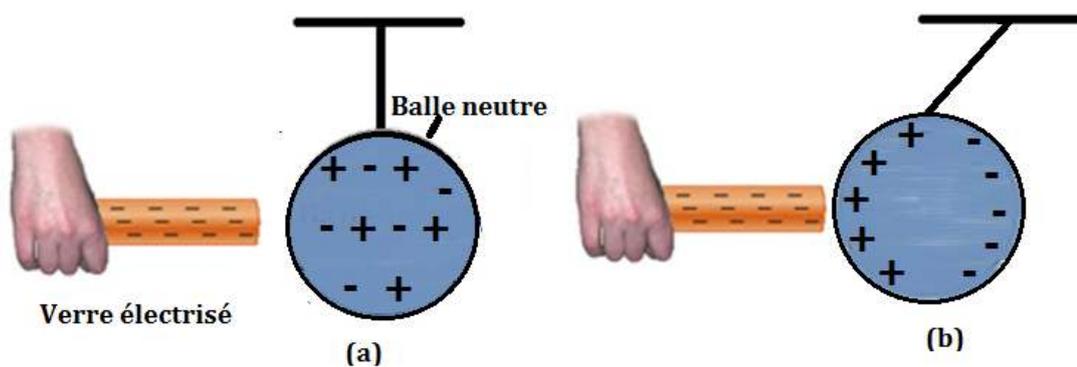


Figure II.6 : Electrification par influence

Remarque : Il a été prouvé expérimentalement qu'il existe deux cas d'électrification correspondant à deux types de charges électriques : des charges positives et des charges négatives.

II-2. LOI DE COULOMB

La loi de Coulomb est une loi formulée en 1785 par le français Charles Augustin de Coulomb. Coulomb a effectué une série de mesures à l'aide d'une balance de torsion (**Figure II.8**), dans le but de déterminer la force interagissant entre les particules chargées électriquement, cette force est nommée force électrostatique ou force coulombienne.

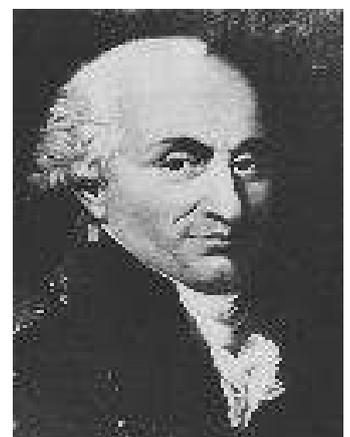


Figure II.7 : Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)

Si les charges sont en mouvement l'une par rapport à l'autre il y aura une force additive nommée la force magnétique.

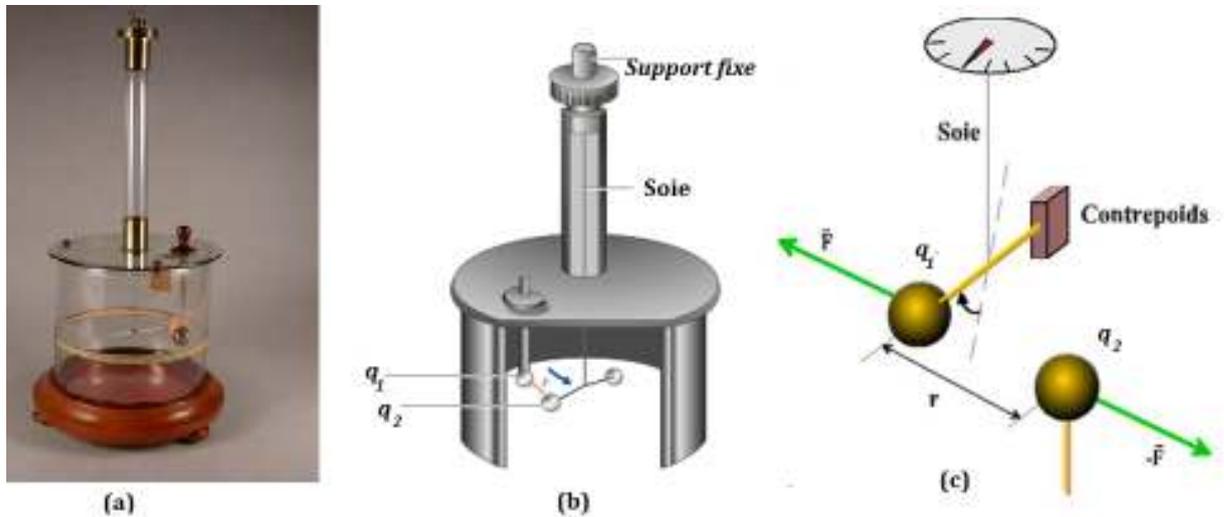


Figure II.8 : Balance à torsion construite par Coulomb pour vérifier sa loi.

2. 2. 1 La force électrostatique

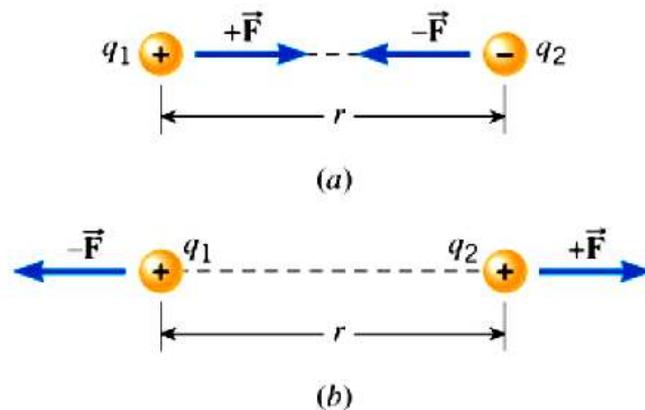


Figure II.9 : La représentation de la force électrique entre deux charges électriques.

La force électrostatique entre les deux charges ponctuelles q_1 et q_2 (**Figure II.9 a** et **Figure II.9 b**) est directement proportionnel au produit des deux charges et inversement proportionnel au carré de la distance entre les deux charges ponctuelles.

Mathématiquement exprimée par :

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad (\text{II.4})$$

Avec K et une constante nommée la constante de Coulomb, q_1 et q_2 des charges (C) et r la distance entre les deux charges et c'est en mètre. La constante de Coulomb $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}} = 9 \cdot 10^9 \text{N} \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$ avec ϵ_0 est connue par permittivité dans le vide et c'est en Farads (F) par mètre (m).

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

μ_0 et c représentent constante magnétique et la célérité respectivement. Avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{kg m A}^{-2} \text{s}^{-2}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{m s}^{-1}$

Et donc :

$$K \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}} = 9 \cdot 10^9 \text{N} \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Le module de la force électrostatique est défini par :

$$F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{II.5})$$

Discussion :

Si q_1 et q_2 sont de signe contraire ($q_1 q_2 < 0$), F_{12} est une force d'attraction (**Figure II.10**).

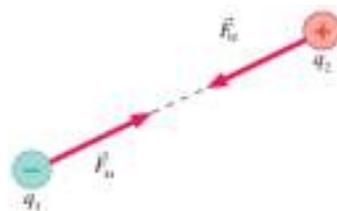


Figure II.10 : La représentation de la force d'attraction entre deux charges

Si q_1 et q_2 sont de même signe ($q_1q_2 > 0$), F_{12} est une force de répulsion ((**Figure II.11**) :

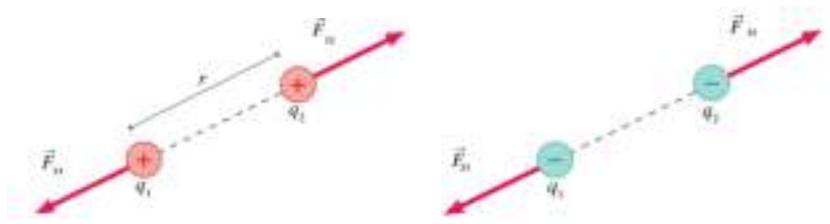


Figure II.11 : La représentation de la force de répulsion entre deux charges

II-2. 2 Comparaison entre la force électrostatique et gravitationnel

Force Coulombienne (électrostatique)	Vs.	Force Newtonienne (gravitationnel)
<p>q_i, m_i, et r sont les charges électriques, les masses et distance entre les deux charges respectivement.</p>		
$\vec{F}_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$		$\vec{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u} \quad \text{(II.6)}$
$K = 9 \cdot 10^9 N \frac{m^2}{C^2}$		$G = 6.7 \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{Kg}$
<p>K constante de Coulomb</p>		<p>G constante gravitationnel</p>

Il sera facile de trouver une relation entre les deux forces.

Exercice II.1 : Calculer le rapport entre la force électrostatique et gravitationnel entre un proton et un électron.

Solution :

D'après les équations (II.5) et (II.6) . On aura :

$$F_e = K \frac{e^2}{r^2}$$

et

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{r^2}$$

Le rapport entre la force électrostatique et gravitationnel entre électron et proton est :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K}{G} \frac{e^2}{m_p m_e} = 22.7 \cdot 10^{38}$$

Exercice II.2 : Soit deux charges ponctuelles positives séparées par une distance de $10 \mu\text{m}$. La force électrostatique entre les deux charges est de $8 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

- Quelle sera la distance entre ces deux charges si le module de la force est de

Solution :

$$F_e = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$Q_1 Q_2 = \frac{F_e r^2}{K} = \frac{F_e' r'^2}{K}$$

$$F_e r^2 = F_e' r'^2$$

$$r' = \sqrt{\frac{F_e r^2}{F_e'}} = 14.14 \mu\text{m}$$

II-2. 3 Le principe de superposition des forces

Dans le cas général, on a un système de n charges électriques (**Figure II.12**). La force électrostatique dans ce genre du système sera la sommation vectorielles des n forces électrostatiques et c'est ce qu'on le nomme par le principe de superposition.

Le principe de la superposition indique que dans un système de charges $q_1, q_2, q_3, q_4 \dots q_n$, la force sur q_1 en raison de q_2 est la même que celle donnée par la loi

de Coulomb, c'est-à-dire qu'elle n'est pas affectée par la présence des autres charges q_3, q_4, \dots, q_n . La force totale \vec{F}_1 sur la charge q_1 , due à toutes les autres charges, est alors donnée par la somme vectorielle des forces

$$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}, \dots, \vec{F}_{1n} \quad :$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} \quad (\text{II.6})$$

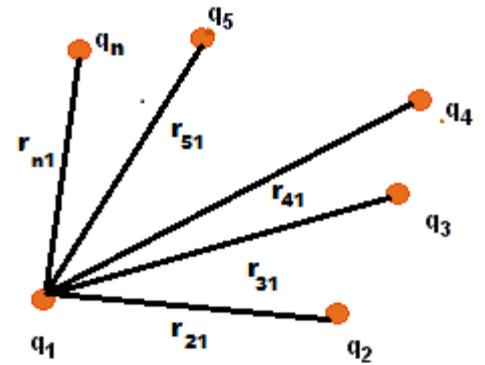
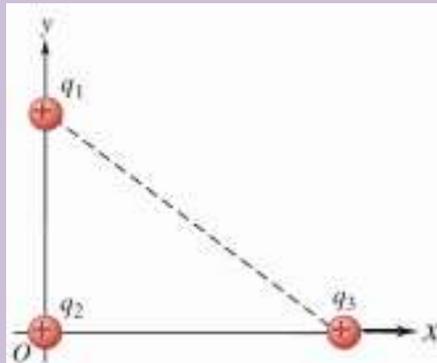


Figure II.12 : Principe de superposition des forces.

La résultante de la force est obtenue comme d'habitude par la loi parallélogramme d'addition de vecteurs.

Exercice II.3 : Soit quatre charges ponctuelles dans les positions montrée dans le schéma

suivant :



Avec $q_1 = 2 \text{ mC}$ située sur l'axe $y = 0.33 \text{ m}$ et une charge $q_2 = 2 \text{ mC}$ se trouve à l'origine.

Trouver le module et la direction de la force totale exercée par les deux charges sur la charge

$q_3 = 4 \text{ mC}$ qui se trouve sur l'axe $x = 0.40 \text{ m}$

Calculer la force exercée sur la charge q_c et représenter la.

Solution :

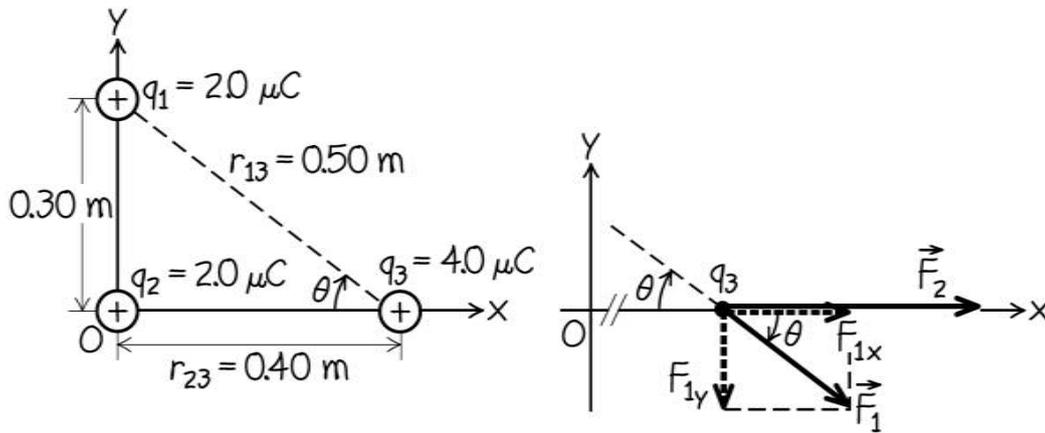


Figure II.13 : Principe de superposition des forces.

On représente la force agissante sur la charge q_3 (**Figure II.13**), qui est la somme vectorielle des deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . Nous utilisons la loi de Coulomb pour trouver les grandeurs F_1 et F_2 des forces:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= K \frac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2} \\
 &= (8.99 \times 10^9) \frac{(2 \times 10^{-6})(4 \times 10^{-6})}{(0.5)^2} \\
 &= 0.288 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= K \frac{|q_2 q_3|}{r_{23}^2} \\
 &= (8.99 \times 10^9) \frac{(2 \times 10^{-6})(4 \times 10^{-6})}{(0.4)^2} \\
 &= 0.450 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Nous calculons maintenant les composantes des \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (suivant x et y). D'après la **Figure II.13** on a :

$$\sin \theta = \frac{0.30}{0.5} = 0.6 \text{ et } \cos \theta = \frac{0.40}{0.5} = 0.8$$

Et puisque la composante de \vec{F}_2 suivant y est zéro, donc $\vec{F}_2 = F_2 \vec{i} = 0.450 \vec{i}$.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= F_{1x} \vec{i} + F_{1y} \vec{j} \\ &= 0.288 \cos \theta \vec{i} - 0.288 \sin \theta \vec{j} \\ &= 0.2304 \vec{i} - 0.173 \vec{j}\end{aligned}$$

La force \vec{F}_3 est donc égale à :

$$\vec{F}_3 = 0.680 \vec{i} - 0.1728 \vec{j}$$

Et le module de \vec{F}_3 est donné par :

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = 0.70 \text{ N}$$

$$\tan \varphi = \frac{F_{3x}}{F_{3y}} = -\frac{0.173}{0.680} \text{ et donc } \varphi = -14^\circ$$

II-3. LE CHAMP ELECTROSTATIQUE

II- 3. 1 Introduction

Lorsque deux particules chargées électriquement interagissent dans des espaces vides, comment chacune «sait» que l'autre est là? Que se passe-t-il réellement dans l'espace entre eux pour transmettre l'effet de chacune à l'autre? Nous pouvons commencer à répondre à ces questions et, en même temps, reformuler la loi de Coulomb d'une manière très utile, en utilisant le concept de *champ électrique*. Pour introduire ce concept, regardons la répulsion mutuelle de deux objets chargés positivement A et B (**Figure II.14 a**). Supposons que B soit une charge

ponctuelle q_0 , et que \vec{F} soit la force sur B, comme le montre la figure. Une façon de penser à cette force est en tant que force d'*action à distance*, c'est-à-dire en tant que force qui agit dans l'espace vide sans avoir besoin de matière (p. Ex. Une toupie ou une corde) pour la transmettre à travers l'espace intermédiaire.

Maintenant, pensez à l'objet A comme ayant pour effet de modifier en quelque sorte les propriétés de l'espace qui l'entoure. Nous supprimons l'objet B et étiquetons sa position antérieure en tant que point P (**Figure II.14 b**). Nous disons que l'objet chargé A produit ou provoque un champ électrique au point P (et à tous les autres points du quartier). Puis, lorsque la charge ponctuelle B est placée au point P et est

actionnée par la force \vec{F} , nous prenons le point de vue que la force est exercée sur B par le champ électrique à P. Parce que B serait actionné par une force en tout point du voisinage de A, le champ électrique existe en tous points dans la région autour de A. (On pourrait aussi dire que la charge de point B met en place un champ électrique qui, à son tour, exerce une force sur l'objet A.)

Pour découvrir expérimentalement s'il existe un champ électrique à un point particulier, nous mettons un objet chargé, que nous appelons une charge de test, au point (**Figure II.14 c**). Si nous constatons que la charge de test rencontre une force électrique non nulle, il y a un champ électrique à ce point.

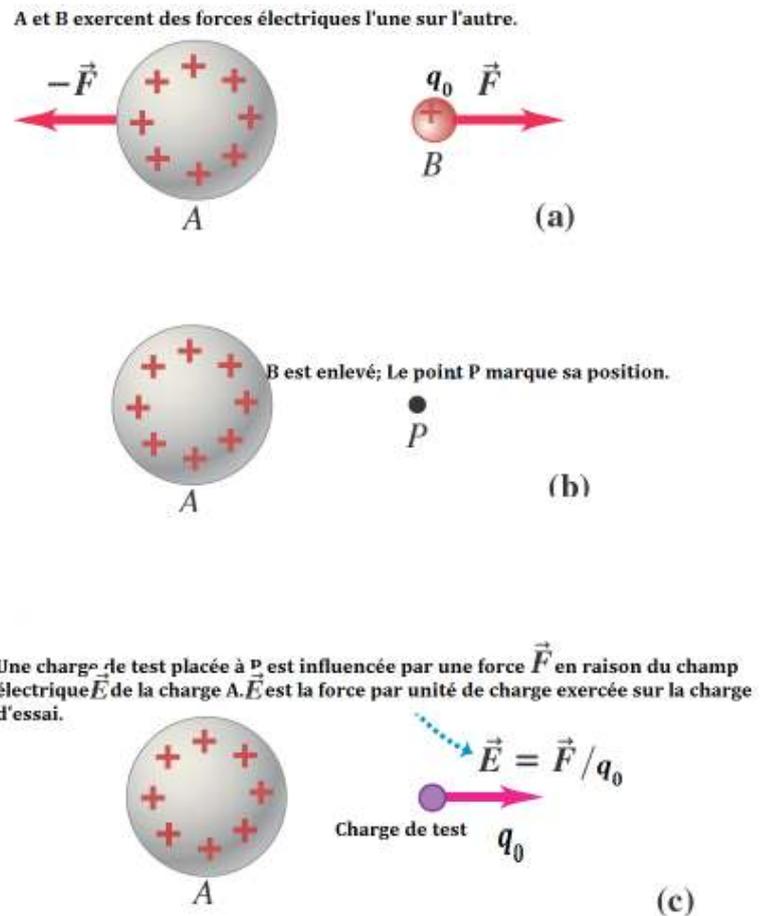


Figure II.14 : Un objet chargé crée un champ électrique dans l'espace qui l'entoure.

II- 3. 2 Le vecteur champ électrique

La force est une quantité de vecteur, donc le champ électrique est également une quantité de vecteur. Pour définir le champ électrique \vec{E} en tout point, on place une charge de test q_0 au point et mesure la force électrique \vec{F} sur elle (Figure 17.15c). Nous définissons \vec{E} à ce point pour être égal à \vec{F} divisé par q_0 . Il est mesuré par le newton / coulomb ou bien par volt/ mètre.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (N/C) \quad \left(\frac{volt}{m}\right) \quad \text{(II.7)}$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad \text{(II.8)}$$

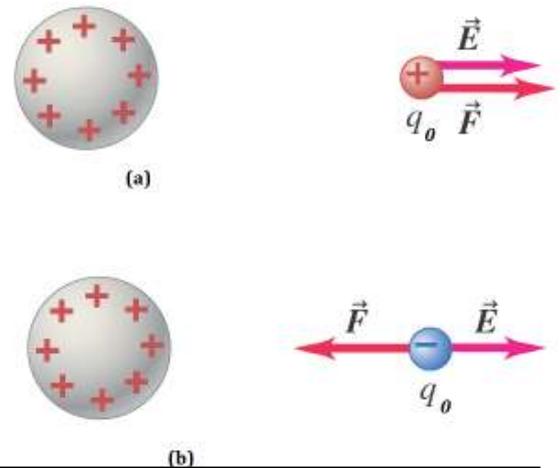


Figure II.15 : La direction de la force électrique sur les charges de test positives(a) et négatives (b) par rapport à la direction du champ électrique.

La charge de test q_0 peut être positive ou négative. Si c'est positif, les directions d' \vec{E} et \vec{F} sont les mêmes (**Figure II.15 a**); Si c'est négatif, ils sont opposés (**Figure II.15 b**).

La force agissant sur la charge q_0 varie de point en point, alors le champ électrique est également différent à différents points. Assurez-vous que vous comprenez que \vec{E} n'est pas une seule quantité vectorielle, mais un ensemble infini de quantités vectorielles, associées à chaque point de l'espace. Nous appelons ça un champ vectoriel (une quantité vectorielle associée à chaque point d'une région de l'espace et, différente à différents points). En général, chaque composant du champ électrique \vec{E} dépend de (c'est-à-dire, est une fonction de) toutes les coordonnées du point.

Si un champ électrique existe dans un conducteur, le champ exerce une force sur chaque charge dans le conducteur, ce qui entraîne le déplacement des charges libres. Par définition, le concept de l'électrostatique est l'étude des propriétés électrique dans les charges ne se

déplacent pas. Nous en concluons que dans l'électrostatique, le champ électrique à chaque point dans le matériau d'un conducteur doit être nul. (**Regardez la section des conducteurs en équilibre**)

En général, la grandeur et la direction d'un champ électrique peuvent varier d'un point à l'autre. Si, dans une situation particulière, le module et la direction du champ sont constantes dans une certaine région, nous disons que le champ électrique est uniforme dans cette région.

II-3.3 Les lignes de champs

Le concept d'un champ électrique peut sembler assez abstrait ; vous ne pouvez pas voir ou sentir un (bien que certains animaux puissent). Il est souvent utile de dessiner un diagramme qui vous aide à visualiser les champs électriques à différents endroits de l'espace, ce qui est aussi connu par la notion de lignes de champs électriques. Une ligne de champ électrique est une ligne imaginaire tracée dans une région d'espace de sorte que, à chaque point, elle est tangente à la direction du vecteur de champ électrique à ce point. L'idée de base est illustrée à la **Figure II.16**.

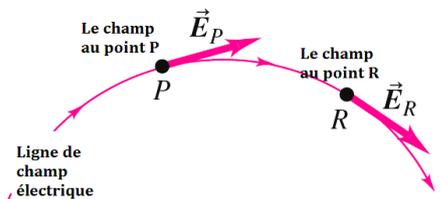


Figure II.16 : La direction du champ électrique à n'importe quel point est tangente à la ligne de champ par ce point.

Les lignes de champs électriques montrent la direction de \vec{E} à chaque point, à n'importe quel point particulier, le champ électrique a une direction unique, donc une seule ligne de champ peut traverser chaque point du champ. En d'autres termes, les lignes de champs ne se croisent jamais.

Les lignes de champs électriques ont toujours ces caractéristiques :

- À chaque point de l'espace, le vecteur de champ électrique \vec{E} est tangent à la ligne de champ électrique à ce point.

- Les lignes de champ électrostatique vont toujours des charges positives vers les charges.

(Figure II.17)

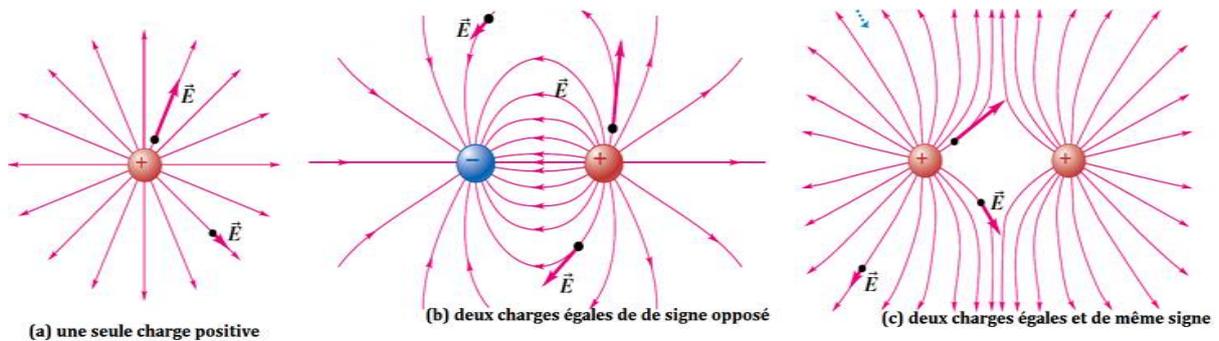


Figure II.17 : Les lignes de champs électriques pour différentes distributions de charges.

II- 3. 4 Le calcul du champ électrostatique

Dans cette section, nous discuterons de plusieurs situations dans lesquelles un champ électrique est produit par une charge ponctuelle, un ensemble de charge ou bien des distributions de charges. Le champ électrique, donc peut être déterminé avec des calculs assez simples.

II- 3. 4.1 le champ électrostatique d'une charge ponctuelle

Si la source de distribution électrique est une charge ponctuelle unique q (Figure II.18), il est facile de trouver le champ électrique qu'elle produit. Nous appelons la position de la charge ponctuelle par un point source M, et nous appelons le point P où nous déterminons le champ par le point de champ. Si on place une petite charge q_0 au point de champ P, à une distance r du point source, le module de la force \vec{F} est donnée par la loi de Coulomb, l'équation II.5:

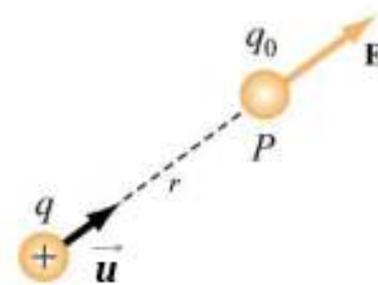


Figure II.18 : Le champ électrique produit par une charge ponctuelle.

$$F = K \frac{|qq_0|}{r^2}$$

On trouve le module du champ électrique E à P :

$$E = K \frac{|q|}{r^2} \quad (\text{II.9})$$

Le vecteur du champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \vec{u} = K \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (\text{II.10})$$

Sachant que $\vec{r} = r \vec{u}$, et \vec{u} représente le vecteur unitaire.

Exercice II.4 : trouver le module du champ électrique à la distance 0.50 m de la charge $q = 3.00 \mu\text{C}$

Solution :

En utilisant l'équation (II.9) on aura :

$$E = K \frac{q}{r^2}$$

$$= \frac{(9 \times 10^9)(3 \times 10^{-6})}{(5 \times 10^{-1})^2}$$

$$E = 1.08 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Exercice II.5 : Une charge ponctuelle, $q = 5,64 \mu\text{C}$, est placée dans un champ électrique de $2,55 \times 10^3 \text{ N/C}$. Trouvez le module de la force agissant sur la charge.

Le module de la force agissante sur la charge du point se trouve à partir de l'équation (II.8) :

$$F = qE$$

$$F = (5,64 \times 10^{-6} \text{ C}) (2,55 \times 10^3 \text{ N / C})$$

$$F = 1,44 \times 10^{-2} \text{ N}$$

II- 3. 4.2 Le champ électrostatique d'un système de n charges (distribution discrète de charge)

Pour ce cas (**Figure II.19**), le champ est déterminé par le principe de la superposition, que nous avons mentionné dans la **section 17.4**. Le champ électrique total produit par deux charges ou plus est la somme vectorielle des champs qui seraient produits à ce moment par les charges individuelles.

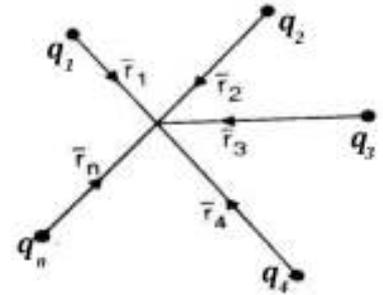
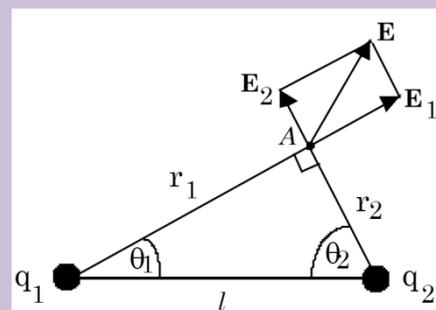


Figure II.19 : Les champs électriques produits par n charges.

Donc pour trouver le champ causé par plusieurs charges, nous imaginons que la source est constituée de nombreuses charges ponctuelles. Nous appelons la position de l'un de ces points par un *point source* (désigné par M), et le point où nous voulons trouver le champ s'appelle *le point de champ* (désigné par P). Nous calculons les champs $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4 \dots \dots \vec{E}_n$ au point P causé par les charges ponctuelles individuelles $q_1, q_2, q_3, q_4 \dots \dots q_n$ (respectivement) situés aux points $M_1, M_2, M_3, M_4 \dots \dots M_n$ (respectivement). Puis prendre leur somme vectorielle (en utilisant le principe de superposition) pour trouver le total du champ \vec{E} total au point P ; C'est-à-dire :

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{n=1}^i \vec{E}_i \quad \text{(II.11)}$$

Exercice II.6 : Si deux charges positives égales ($q_1 = q_2 = 2 \mu\text{C}$) sont situées comme indiqué, à la figure ci-dessous, trouvez l'intensité du champ électrique résultant au point A . La distance $r_1 = 0.819 \text{ m}$, $r_2 = 0.574 \text{ m}$ et $l = 1.00 \text{ m}$.



Le module du champ électrique produite par q_1 se trouve à partir de l'équation **(II.9)** comme :

$$E_1 = K \frac{q_1}{r_1^2}$$

$$= \frac{(9 \times 10^9)(2 \times 10^{-6})}{(0.819)^2}$$

$$E_1 = 2.68 \times 10^4 N/C$$

Le module du champ électrique produite par q_2 :

$$E_2 = K \frac{q_2}{r_2^2}$$

$$= \frac{(9 \times 10^9)(2 \times 10^{-6})}{(0.570)^2}$$

$$E_2 = 5.46 \times 10^4 N/C$$

La résultante du champ électrique est la sommation entre les deux champs E_1 et E_2 :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Avec :

$$\vec{E}_1 = \cos \theta_1 \vec{i} + \sin \theta_1 \vec{j}$$

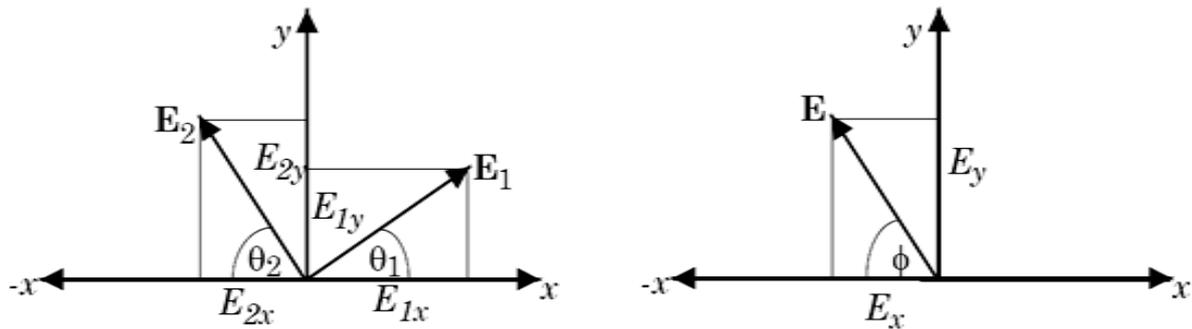
Et :

$$\vec{E}_2 = -\cos \theta_2 \vec{i} + \sin \theta_2 \vec{j}$$

De la figure il est facile de calculer les deux angles θ_1 et θ_2 , et on a trouvé :

$$\theta_1 = \arctan \frac{r_2}{r_1} = 35^\circ$$

$$\theta_2 = 90^\circ - \theta_1 = 55^\circ$$



Et donc

$$\vec{E}_1 = 2.2 \times 10^4 \vec{i} + 1.54 \times 10^4 \vec{j}$$

Et :

$$\vec{E}_2 = 3.13 \times 10^4 \vec{i} + 4.47 \times 10^4 \vec{j}$$

Après des calculs et des simplifications on aura :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}$$

$$\vec{E} = -0.93 \times 10^4 \vec{i} + 6.01 \times 10^4 \vec{j}$$

Le module de \vec{E} est :

$$E = 6.08 \times 10^4 \text{ N/C}$$

Pour déterminer la direction du vecteur champ électrique, il faut calculer l'angle ϕ :

$$\phi = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan\left(\frac{6.01 \times 10^4}{-0.93 \times 10^4}\right)$$

$$\phi = -81.2^\circ$$

Puisque E_x est négatif, l'angle ϕ se situe dans le deuxième quadrant. L'angle que fait le vecteur E avec l'axe positif x est $\phi + 180^\circ = 98.8^\circ$.

II- 3. 4.3 Le champ électrostatique produit par une distribution continue de charges

Si maintenant, on a un nombre infini de charges (**Figure II.20**) (une distribution de charge élémentaire dq) qui peuvent être réparties uniformément suivant une droite dans le cas d'une distribution de charge linéique $dq = \lambda dl$, sur une surface pour une distribution de charge surfacique $dq = \sigma ds$, ou bien dans un volume si on a une distribution de charge volumique $dq = \rho dV$ (Chapitre I rappel mathématique). Dans ce cas le principe de superposition est

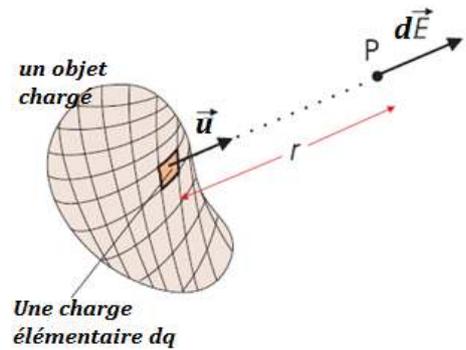


Figure II.20 : Le champ électrique produit par une distribution continue charge.

toujours valable, il faut juste remplacer le champ électrique \vec{E} par un champ élémentaire $d\vec{E}$ et la somme Σ par l'intégrale simple \int , multiple \iint , ou bien triple \iiint si on a une longueur, une surface ou bien un volume respectivement.

Chaque élément de charge dq agit comme une charge ponctuelle et produira un champ électrique élémentaire d'intensité, $d\vec{E}$, au point P, donné par :

$$d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad (\text{II.12})$$

Le champ électrique total d'une répartition continue de charge se calcule comme suit :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K \int \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad (\text{II.13})$$

Remarque : il ne faut pas confondre $\vec{E} = \int d\vec{E}$ par $E = \int dE$, puisqu'il s'agit des vecteurs qui ont des projections et qu'ils ne sont pas forcément parallèles entre eux.

Dans le système des coordonnées cartésiennes, on a :

$$d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j} + dE_z \vec{k} \quad (\text{II.14})$$

II- 3. 5 Applications

II- 3. 5. 1 Le champ électrique produit par un fil de longueur infinie portant une charge linéique positive et de densité constante: :

Déterminons le champ électrique produit au point P par l'ensemble de charge que porte le fil infini (**Figure II.21**),

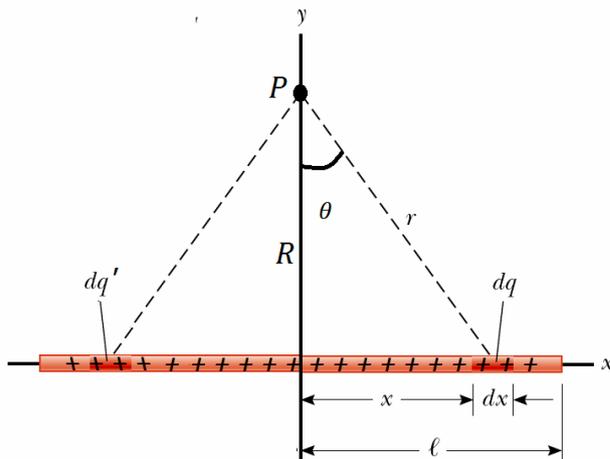


Figure II.21 : Le champ électrique produit par un fil infini

Solution : Pour calculer le champ électrique au point P , on prend un segment rectiligne de longueur dx et donc une distribution de charge $dq = \lambda dx$ et alors on calcule le champ élémentaire dE avec :

$$dE = K \frac{dq}{r^2} = K \frac{\lambda dx}{r^2}$$

Sachant que : $d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j}$

D'après la **Figure II.21** :

$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin \theta = \int K \frac{\lambda dx}{r^2} \sin \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cos \theta = \int K \frac{\lambda dx}{r^2} \cos \theta$$

On remarque que ce n'est pas évident de trouver la solution puisque l'intégral contient 3 variable. A fin de trouver la solution on vas minimiser le nombre des variable. D'après la **Figure II.21** on a :

$$x = R \tan \theta \Rightarrow dx = (R/\cos^2 \theta) d\theta$$

$$r = R/\cos \theta$$

En utilisant ces deux dernières équations on aura :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(R/\cos^2 \theta)}{(R/\cos \theta)^2} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(R/\cos^2 \theta)}{(R/\cos \theta)^2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

A cause de la symétrie, il était évident qu'on va trouver $E_x = 0$.

Finalement on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \vec{j}$$

De la même façon on peut calculer le champ électrique d'un anneau fin.

II- 3. 5. 2 Le champ électrique produit par un anneau portant une charge linéique positive et de densité constante :

Solution : Pour résoudre ce genre d'exercice, on va suivre le même raisonnement que celui de l'application précédente. Et on aura :

$$E_x = \int K \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta$$

Avec dl est la longueur élémentaire d'un anneau, et λ c'est la densité de charge linéique (supposée positive dans cette application).

De la **Figure II.22** on peut voir que :

$$\cos \theta = x/r = x/(a^2 + x^2)^{1/2} \text{ et } \int dl = 2\pi a$$

Le champ donc sera :

$$\begin{aligned} E_x &= K\lambda \int \frac{x dl}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= K\lambda \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dl \\ &= K\lambda \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} 2\pi a \end{aligned}$$

Par conséquent, le champ électrique au point x en produit par un anneau chargé et de rayon "a" est donné par :

$$\vec{E} = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

On peut aussi écrire la champ en fonction de charge, sachant que $q = \lambda \int dl = \lambda 2\pi a$ et donc :

$$\vec{E} = K \frac{x q}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

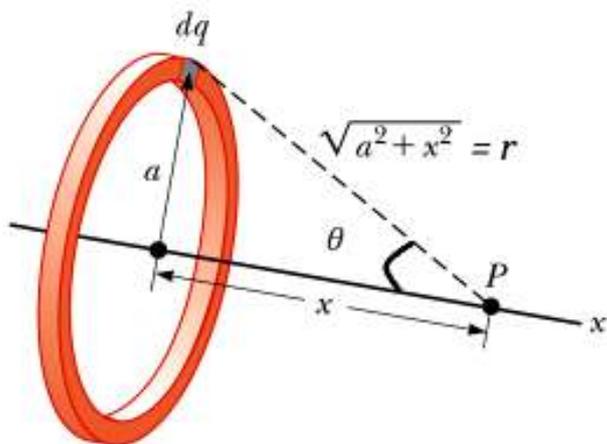


Figure II.22 : Le champ électrique produit par un anneau chargé.

II- 3. 5. 3 Le champ électrique produit par un disque fin et portant une charge surfacique positive de densité constante :

Un disque de centre O et de rayon R porte un charge uniforme de densité surfacique σ . Soit Ox l'axe perpendiculaire au disque en son centre O (Figure II.23.) Calculer le champ électrique en un point P (étudier les trois cas $x > 0$, $x < 0$ et $x = 0$).

Solution :

Étant donné qu'un disque peut être généré en additionnant de nombreux anneaux de rayons différents, le champ électrique d'un disque de charge peut être généré en additionnant (intégrant) le champ électrique de nombreux anneaux de charge. Ainsi, le champ électrique d'un disque de charge sera donné par :

$$E_{\text{disque}} = \int dE_{\text{anneau}}$$

Nous avons trouvé dans l'application précédente que le champ électrique sur l'axe à la distance x du centre d'un anneau de charge de rayon " a " était donné par :

$$\vec{E}_{\text{anneau}} = K \frac{x q}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Dans l'application actuel, l'anneau sera de rayon y et ajouterons tous les anneaux d'un rayon de 0 au rayon " a ", le rayon du disque. Par conséquent, le champ devient :

$$\vec{E}_{\text{anneau}} = K \frac{x q}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Nous considérons maintenant que la charge de cet anneau est un petit élément dq de la charge totale qui se trouve sur le disque. Cet élément de charge dq produira alors un champ électrique élémentaire dE , qui se trouve le long de l'axe du disque dans la direction \vec{i} . C'est,

$$d\vec{E}_{\text{anneau}} = K \frac{x dq}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

$$E_{disque} = \int dE_{anneau} = \int K \frac{x dq}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Dans cette application, on a une charge électrique répartie sur une surface d'un disque. Par conséquent, la charge est la multiplication entre une densité de charge surfacique σ et l'élément de surface dS de l'anneau et elle est donnée par :

$$dq = \sigma dS$$

Et puisque on a un disque, l'élément de surface (voir chapitre I) est :

$$dS = 2\pi r dr$$

La charge élémentaire est donc :

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

Le champ électrique est alors :

$$E_{disque} = \int K \frac{x \sigma 2\pi r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = Kx \sigma 2\pi \int \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x \sigma}{2\epsilon_0} \int \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_{disque} = \frac{x \sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x \sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_0^R$$

$$E_{disque} = \frac{x \sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

Et donc le vecteur champ électrique est :

$$\vec{E}_{disque} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$

Discussion :

$$x > 0 \Rightarrow \vec{E}_{disque} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$

Dans ce cas le champ est suivant \vec{i}

$$x < 0 \Rightarrow \vec{E}_{disque} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 + \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$

Dans ce cas le champ est suivant \vec{i} mais dans le sens contraire.

$$x = 0 \Rightarrow \vec{E}_{disque} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{i}$$

Si on remplace le disque par un plan infini portant une charge surfacique positive et une densité surfacique constante, on trouve un champ électrique égal à :

$$\vec{E}_{plan} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{i}$$

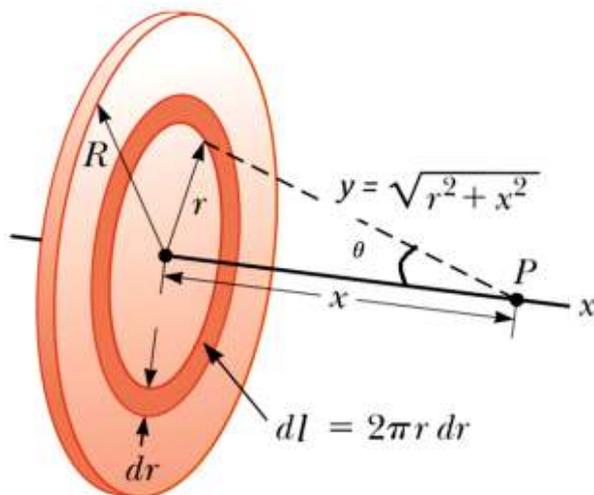


Figure II.23: Le champ électrique produit par un disque.

Chapitre III

Le théorème de gauss et le potentiel électrique

III- LE THEOREME DE GAUSS ET LE POTENTIEL ELECTRIQUE



Pour calculer le champ électrique, On peut juste utiliser les lois citées dans le chapitre II . Sinon pour certain cas, ce n'est pas vraiment facile de trouver le champ avec ces lois et donc on n'a besoin de autres lois plus pratiques telles que les lois trouvés en utilisant le théorème de Gauss et les lois trouvés par l'utilisation du potentiel électrique.

III-1. LE THEOREME DE GAUSS

Le théorème de Gauss est une formulation alternative des principes de l'électrostatique. Mathématiquement, il est équivalent à la loi de Coulomb, mais pour certains problèmes, il constitue une approche alternative utile pour calculer les champs électriques. La loi de Coulomb nous permet de trouver le champ à un point P causé par une seule charge ponctuelle q . Pour calculer les champs produits par une distribution continue de charge, nous devons représenter

cette distribution en tant que un assemblage de charges ponctuelles et puis utiliser le principe de superposition. Le théorème de Gauss prend une vision plus globale, il est considéré comme un outil important pour simplifier le calcul du champ électrique en basant sur les symétries dans le système. Entre autres choses, le théorème de Gauss peut nous aider à comprendre comment les charges électriques se répartissent sur les corps conducteurs. En Tenant compte de toute distribution de charges, le théorème de Gauss consiste à entourer cette charge par une surface imaginaire (souvent appelée surface de Gauss) qui renferme la charge. Ensuite, nous regardons le champ électrique à différents points sur cette surface imaginaire.

III-1.1 Le flux électrique

Pour formuler le théorème de Gauss, nous devons avoir une idée sur le concept de flux électrique (déjà cité dans la **section I-1.2 équation I.5**), également appelé flux du champ électrique. Dans cette section nous allons définir ce concept d'abord, puis nous allons expliquer son rôle sur le théorème de Gauss.

III-1.1.1 Définition du flux électrique d'un champ uniforme

La définition du flux électrique implique une surface S et le champ électrique à des points différents de la surface. La surface n'a pas besoin d'être la surface d'un objet réel ; en fait, ce sera généralement un espace imaginaire dans l'espace. Considérons d'abord une petite surface plate S perpendiculaire à un champ électrique uniforme \vec{E} (**Figure III.1a**). On dénote le flux électrique par Φ ; nous définissons le flux électrique Φ dans la surface S par :

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad \text{(III.1)}$$

En gros, on peut imaginer Φ en fonction du nombre de lignes de champs qui traversent S . En élargissant la surface le nombre de lignes traversant cette surface augmente, et donc par conséquent un flux plus élevé.

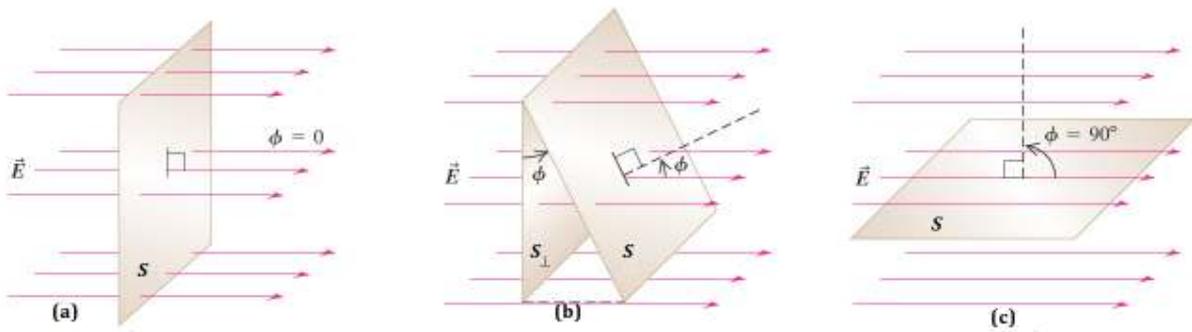


Figure III.1 : Le flux électrique à travers une surface plane à différentes orientations par rapport à un champ électrique uniforme.

Discussion :

- Si le champ est parallèle à la surface (**Figure III.1a**) : $\Phi = E S$.
- Si le champ forme un angle θ avec la surface (**Figure III.1b**) : $\Phi = E S \cos \theta$.
- Si le champ est perpendiculaire à la surface $\theta = \frac{\pi}{2}$ (**Figure III.1c**) : $\Phi = 0$

L'unité du flux est le Weber (Wb)=N m²/C.

III-1.1.2 Définition du flux électrique d'un champ non uniforme

La définition du flux donné précédemment correspond à un champ électrique uniforme. Qu'est ce qu'il se passe si maintenant nous avons un champ électrique \vec{E} qui n'est pas uniforme et qui varie d'un point à l'autre sur la surface ? On commence par diviser la surface S en plusieurs petits éléments dS , chacun ayant un vecteur unitaire \vec{n} perpendiculaire à celui-ci et donc le vecteur surface sera donné par $d\vec{S} = dS \vec{n}$. Puis nous calculons le flux électrique à travers chaque élément et intégrons les résultats pour obtenir le flux total :

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot dS \vec{n} \quad \text{(III.2)}$$

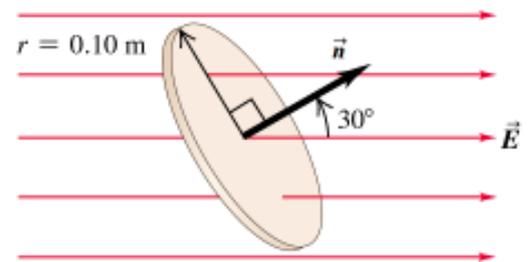
Dans ce qui suit, nous verrons la connexion entre le flux électrique total traversant n'importe quelle surface fermée, quelle que soit sa forme et la quantité de charge incluse dans cette surface.

III-1.1.3 Application du Flux électrique

Maintenant nous étudions quelques exemples pour voir la connexion entre le flux électrique et le champ électrique, quelle que soit la forme de la surface et la quantité de charge incluse dans cette surface.

III-1.1.3. 1. Le flux électrique à travers un disque :

Un disque de rayon de 0,1 m est orienté par 30° par rapport au champ électrique uniforme \vec{E} (le module de $E = 2 \times 10^3 \text{ N/C}$) (Figure III.2).



- Quel est le flux électrique à travers le disque ?
- Quel est le flux à travers le disque s'il est tourné de sorte que \vec{n} soit perpendiculaire à \vec{E} ?
- Quel est le flux à travers le disque si \vec{n} est parallèle à \vec{E} ?

Figure III.2 : Le flux électrique d'un champ électrique uniforme traversant un disque.

Solution

- a) la surface est définie par : $S = \pi (0.1)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$. D'après la définition du flux :

$$\Phi = E S \cos \theta \quad \text{(III.3)}$$

$$\Phi = (2 \times 10^3)(0.0314) \cos 30$$

$$\Phi = 54 \text{ Wb}$$

- b) le vecteur surface est maintenant perpendiculaire au champ électrique ($\theta = 90^\circ$), le flux est donc égale à :

$$\Phi = 0 \text{ Wb}$$

- c) le vecteur surface est parallèle au champ électrique ($\theta = 0^\circ$), donc $\cos \theta = 1$ et le flux est donc égale à :

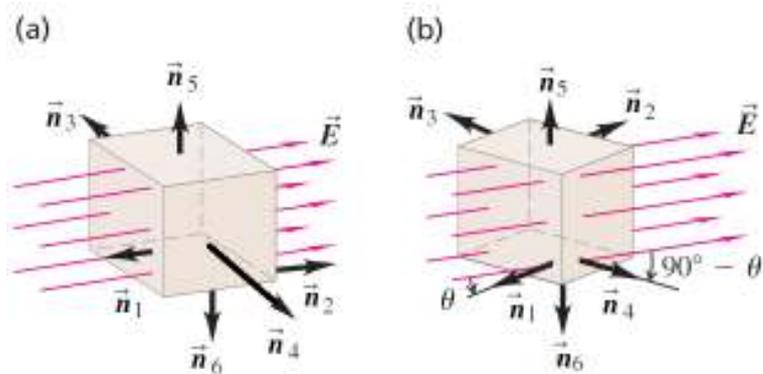
$$\Phi = 63 \text{ Wb}$$

Exercice de pratique : Quel est le flux traversant le disque si son axe fait un angle de 45° avec le champ électrique ? Réponse : 44 Wb

III-1.1.3. 2. Le flux électrique à travers un cube :

Une surface cubique imaginaire du côté L , est une région d'un champ électrique uniforme \vec{E} . Trouver le flux électrique à travers chaque face du cube et le flux total à travers le cube lorsque (a) il est orienté de façon que deux de ses faces sont perpendiculaires à \vec{E} (**Figure III.3a**) et (b) le cube est tourné d'un angle θ par rapport à un axe vertical (**Figure III.3b**).

Figure III.3 : le flux électrique d'un champ électrique uniforme traversant une boîte cubique



Solution :

Puisque le champ \vec{E} est uniforme et que chacune des six faces du cube est plate, on peut facilement calculer le flux Φ_i en utilisant l'équation (III.2). Le flux total traversant le cube est la somme des six flux individuels.

$$\Phi_{\vec{E}} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} + \Phi_{S_4} + \Phi_{S_5} + \Phi_{S_6} \quad \text{(III.4)}$$

- a) La **Figure III.3a** montre les vecteurs unitaires \vec{n}_1 à \vec{n}_6 pour chaque face ; chaque vecteur unitaire pointe vers l'extérieur de la surface fermée du cube. L'angle entre \vec{E} et \vec{n}_1 est de 180° , l'angle entre \vec{E} et \vec{n}_2 est 0° , et l'angle entre \vec{E} et chacun des quatre autres vecteurs

unitaires est de 90° . Chaque face du cube a une surface $S = L^2$, donc les flux à travers les faces sont :

$$\Phi_{S_1} = \vec{E} \cdot S \vec{n}_1 = EL^2 \cos 180 = -EL^2$$

$$\Phi_{S_2} = \vec{E} \cdot S \vec{n}_2 = EL^2 \cos 0 = EL^2$$

$$\Phi_{S_3} = \vec{E} \cdot S \vec{n}_3 = \Phi_{S_4} = \Phi_{S_5} = \Phi_{S_6} = EL^2 \cos 90 = 0$$

Le flux total dans le cube est : $\Phi_{\vec{E}} = 0$.

- b) Le champ \vec{E} est dirigé vers les deux faces 1 et 3, de sorte que les flux qui les traversent sont négatifs ; \vec{E} est dirigé sur les faces 2 et 4, de sorte que les flux qui les traversent sont positifs. Nous trouvons :

$$\Phi_{S_1} = EL^2 \cos (180 - \theta) = -EL^2 \cos \theta$$

$$\Phi_{S_2} = EL^2 \cos \theta$$

$$\Phi_{S_3} = EL^2 \cos (90 + \theta) = -EL^2 \sin \theta$$

$$\Phi_{S_4} = EL^2 \cos (90 - \theta) = EL^2 \sin \theta$$

$$\Phi_{S_5} = \Phi_{S_6} = EL^2 \cos (90) = 0$$

Le flux total sera donc : $\Phi_{\vec{E}} = 0$ (le flux traversant le cube est encore zéro).

III-1.1.3. 3. Le flux électrique à travers une sphère) :

Soit une charge ponctuelle positive d'une grandeur de 3,0 mC, placée au centre d'une sphère de rayon 0,20 m (**Figure III.4**).

Trouvez le flux électrique à travers la sphère en raison de cette charge.

Solution

La surface n'est pas plate et le champ électrique n'est pas uniforme, alors pour calculer le flux électrique, nous devons utiliser la définition générale, l'équation (III.2). Puisque la charge ponctuelle est au centre de la sphère, le champ sera donc dirigé vers l'extérieur de la sphère. Et par conséquent, \vec{E} sera perpendiculaire à la surface (La direction de \vec{E} est la même que \vec{n}). Et le flux sera défini par :

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E \, dS$$

Le module du champ électrique produit par la sphère de rayon r (nommé aussi par un champ électrique radial) est donné par :

$$E = k \frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Par conséquent, E peut être pris en dehors de l'intégrale du flux, ce qui donne :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} S$$

Où S est la surface de la sphère : $S = 4\pi r^2$. Finalement, le flux total dans la sphère est :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = 3.4 \cdot 10^5 \text{ Wb}$$

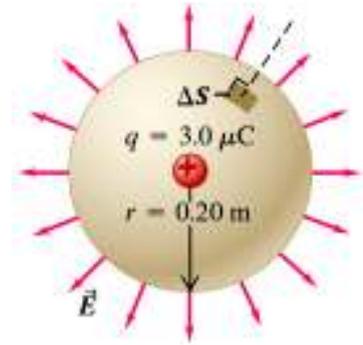


Figure III.4 : Le flux traversant une sphère de rayon r .

III-1.2 Théorème de Gauss

Théorème de Gauss est une alternative à la loi de Coulomb. Bien que complètement équivalent à la loi de Coulomb, Théorème de Gauss offre une manière différente d'exprimer la relation entre la charge électrique et le champ électrique. Il a été formulé par Carl Friedrich Gauss (1777-1855), l'un des



Figure III.5 : Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

plus grands mathématiciens de tous les temps (**Figure III.5**).

III-1.2.1 Charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface sphérique

Le théorème de Gauss stipule que le flux électrique total à travers une surface fermée est proportionnel à la charge électrique totale à l'intérieur de la surface. Considérons une charge ponctuelle q entourée par une surface sphérique de rayon R . La charge q est placée au centre de la sphère (**Figure III.6**), le module du champ électrique (équation II.9) partout sur la surface de la sphère est donné par :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \quad (\text{III.5})$$

Notez que le champ électrique est perpendiculaire à la surface sphérique en tous points sur la surface. Le flux électrique à travers la surface $S=4\pi R^2$ est donc défini par :

$$\begin{aligned} \Phi &= E S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 \\ \Phi &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

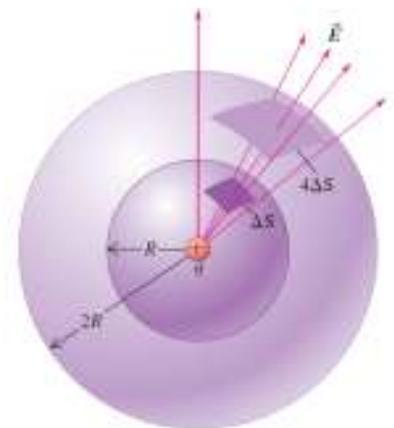


Figure III.6 : Lignes de champ traversant les deux surfaces dS (surface d'une sphère de rayon R) et $4dS$ (une sphère de rayon $2R$).

Ce résultat indique que le flux électrique à travers une sphère qui entoure une charge q est égal à la charge divisée par la constante ϵ_0 . Nous pouvons également interpréter ce résultat en termes de lignes de champ en utilisant une technique de projection. Nous

considérons deux sphères avec rayons R et $2R$ (**Figure 17.33**). Par projection, chaque ligne de champ qui traverse la plus petite sphère traverse également la plus grande sphère, donc le flux total dans chaque sphère est identique.

III-1.2.2 La forme générale du théorème de Gauss

On considère une surface fermée quelconque renfermant plusieurs charges $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ (**Figure III.7**). Le champ électrique total (résultante) \vec{E} à n'importe quel point est

la somme vectorielle des champs \vec{E} des charges individuelles. Soit Q_{int} la charge totale (la charge intérieure à la surface): $Q_{int} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n$.

L'énoncé général du théorème de Gauss est :

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{(III.7)}$$

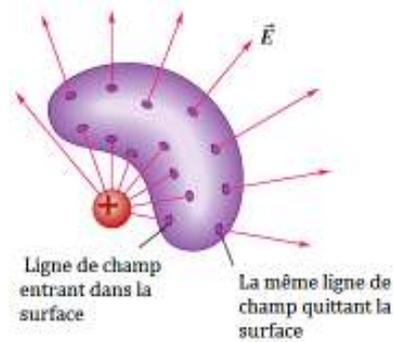


Figure III.7 : La charge ponctuelle en dehors d'une surface fermée (surface qui ne renferme aucune charge). Si une ligne de champ électrique de la charge externe pénètre dans la surface en un point, elle doit partir à une

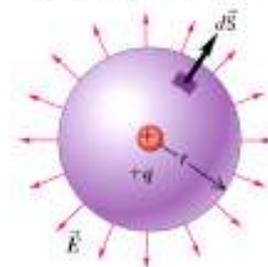
Comme un exemple, la **Figure III. 8a** montre une surface Gauss sphérique de rayon r autour d'une charge positive $+q$. Le champ électrique pointe hors de la surface de Gauss, de sorte que, à chaque point de la surface, le champ électrique est dans la même direction que dS , et le flux sera déterminé par :

$$\Phi = \oint E dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

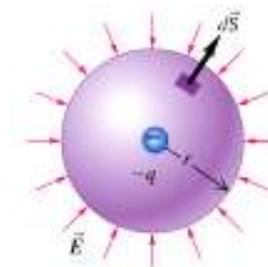
Si maintenant la surface de Gauss renferme une charge ponctuelle négative comme dans la **Figure III. 8b**, alors la direction du champ sera opposée à la direction de la surface, et le flux sera donné par :

$$\Phi = \oint E dS = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

(a) La surface de Gauss autour d'une charge positive (donnant un flux positif)



(b) La surface de Gauss autour d'une charge négative (donnant un flux négatif)



Dans la section suivant, nous allons examiner plusieurs exemples de l'utilisation du théorème de Gauss.

Figure III.8 : La surface sphérique de Gauss

III-1.3 Applications du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est valable pour tout type de distribution de charges et pour toute surface fermée. Le théorème de Gauss peut être utilisé de deux façons. Si nous connaissons la distribution des charges, et si on a suffisamment de symétrie pour évaluer l'intégrale dans le théorème de Gauss, nous pouvons facilement trouver le champ électrique. Ou si nous connaissons le champ électrique, nous pouvons utiliser le théorème de Gauss pour trouver la charge, telles que les charges sur les surfaces conductrices. Dans cette section, nous présentons des exemples de trois types d'applications. Au fur et à mesure que vous les étudiez, faites attention au rôle joué par les propriétés de symétrie de chaque système. Nous utiliserons la loi de Gauss pour calculer les champs électriques causés par plusieurs distributions de charges simples.

III-1.3.1 Le champ électrique crée une sphère conductrice

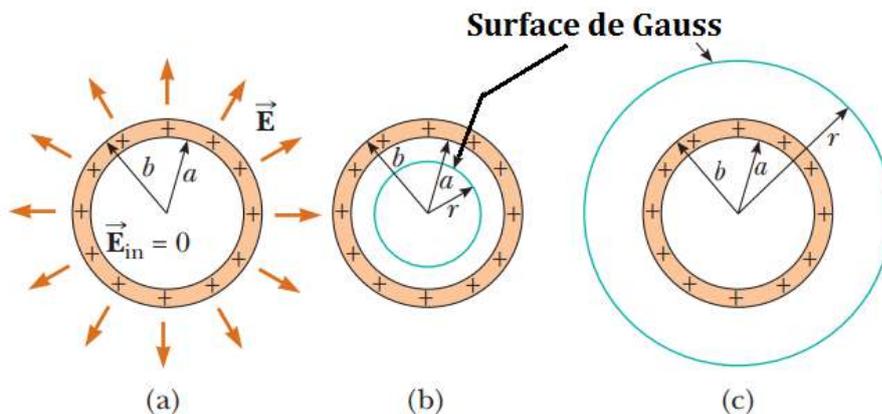


Figure III.9 : (a) $r=R$,
(b) $r < R$ et (c) $r > R$

Nous plaçons une charge positive totale q sur une sphère conductrice solide avec le rayon (**Figure III. 9**). Trouvez \vec{E} à n'importe quel point à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. Représenter le champ en fonction du rayon r .

Solution :

Pour une sphère conductrice toutes les charges doivent être sur la surface de la sphère. La charge est libre de déplacer sur le conducteur, et il n'y a pas de position préférée sur la surface; la charge est donc répartie uniformément sur la surface, et le système est sphériquement symétrique. Pour exploiter cette symétrie, nous prenons comme surface de Gauss une sphère de rayon r centrée sur le conducteur. Nous pouvons calculer le champ à l'intérieur ou à l'extérieur du conducteur en prenant $r < R$ ou $r > R$, respectivement. Dans les deux cas, le point sur lequel nous voulons calculer \vec{E} repose sur la surface Gauss.

La symétrie sphérique signifie que la direction du champ électrique doit être radiale; c'est parce qu'il n'y a pas de direction parallèle à la surface, donc \vec{E} ne peut pas avoir une composante parallèle à la surface. Le module du champ électrique sur la surface de la sphère dépend de la distance r .

Pour $r < R$: Il n'existe aucune charge à l'intérieur de la sphère et donc le flux est nul et le champ sera :

$$E = 0$$

Pour $r > R$: L'ensemble des charges se trouve sur la surface. La surface de Gauss est $4\pi r^2$ et le champ est uniforme sur la surface et perpendiculaire à celle-ci à chaque point. Le flux est donc égal à :

$$\Phi = E S = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Le champ sera donc :

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Pour $r = R$: Le champ est égale à $E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R^2}$.

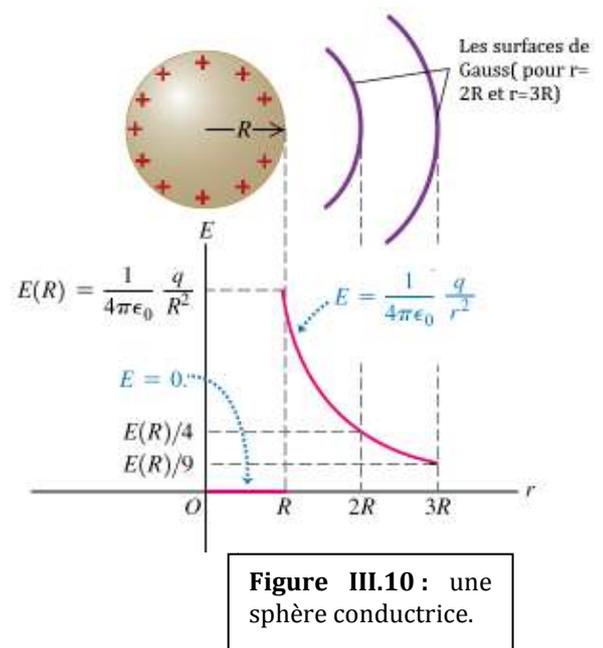


Figure III.10 : une sphère conductrice.

Le champ électrique en fonction du rayon est représenté dans la **Figure III.10**.

III-1.3.2 Le champ électrique créé une sphère pleine chargée uniformément

La charge électrique positive Q est répartie uniformément dans tout le volume d'une sphère de rayon R . Trouver le du champ électrique à un point P qui se trouve à une distance r du centre de la sphère. Puis représenter le champ en fonction du rayon r .

Solution :

Comme dans l'exemple précédent (**section III-1.3.1**), le système est sphériquement symétrique. Pour calculer le champ, nous choisissons comme surface de Gauss une sphère avec rayon r , concentrique à la distribution de charge et d'une surface qui est $S = 4\pi r^2$. Et puisque on a une distribution de charge volumique la charge interne est donc $Q_{int} = \rho V$ (ρ est la densité de charge volumique et V c'est le volume).

On applique le théorème de Gauss :

$$\Phi = E S = 4\pi r^2 E = \frac{\rho V}{\epsilon_0}$$

Et donc le champ est :

$$E = \frac{\rho V}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Maintenant, on doit calculer le champ électrique à l'intérieur ($r < R$) de la sphère chargée puis à l'extérieur ($r > R$) et même sur la surface ($r = R$).

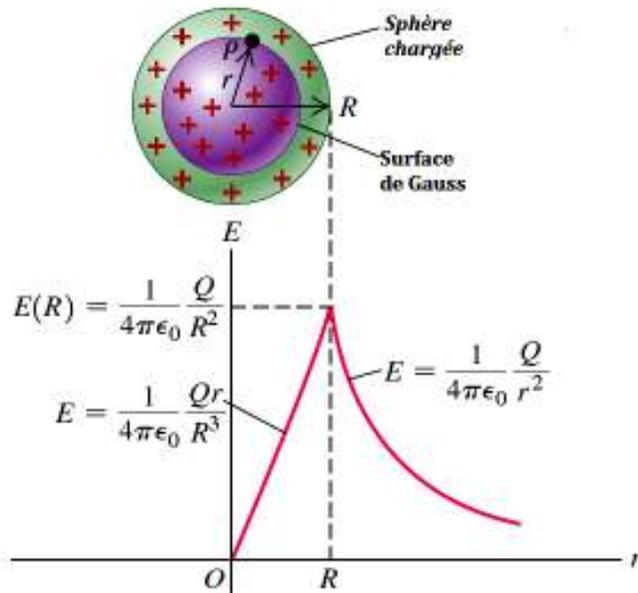


Figure III.11 : une sphère conductrice.

Pour $r < R$: la charge interne est égale à :

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Le champ électrique à l'intérieur de la sphère est donc donné par :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Pour $r > R$ la charge interne est égale à :

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Donc le champ en dehors de la sphère est égal à :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Pour $r = R$ le champ est tout simplement : $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R$.

Le champ électrique est représenté dans la **Figure III.11**.

III-1.3.3 le champ électrique créée par une tige de longueur infinie uniformément chargée

La charge électrique est répartie uniformément le long d'un fil mince infiniment long. La densité de charge linéaire est λ (supposé positif). Trouvez le champ électrique en utilisant le théorème de Gauss.

Solution :

Pour ce genre d'exercice on suggère que nous utilisons une surface de Gauss cylindrique, de rayon r et de longueur l , coaxiale avec le fil et avec ses extrémités perpendiculaires au fil (Figure III.12).

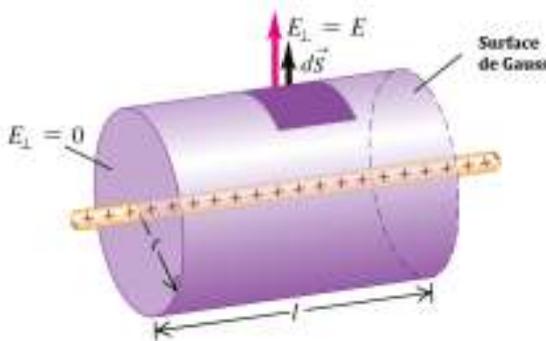


Figure III.12 : un fil chargé uniformément

Le flux qui traverse les extrémités de la surface Gauss est nul puisque le champ électrique est perpendiculaire à la surface des deux extrémités (le champ électrique est parallèle à la surface latérale. La surface d'un cylindre est connue par $S = 2\pi r l$, et puisque nous avons une distribution de charge linéique $Q_{int} = \lambda l$, donc le flux sera :

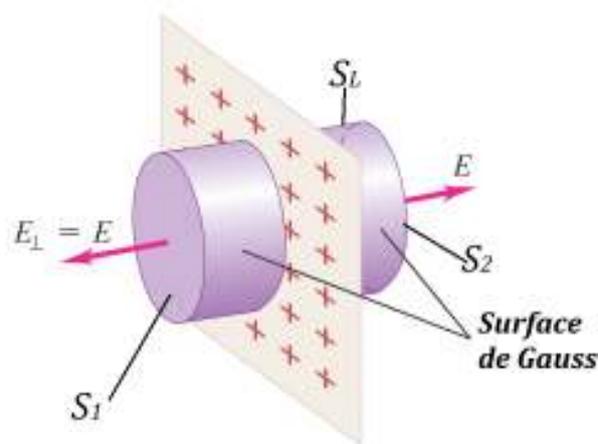
$$\Phi = E S = 2\pi r l E = \lambda l / \epsilon_0 \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

III-1.3.4 Le champ électrique produit par un plan infini chargé

Utilisez la loi de Gauss pour trouver le champ électrique causé par une feuille mince, plate et infinie avec une densité de charge de surface positive uniforme σ .

Solution :

Figure III.13 :un fils chargé uniformément



Dans l'exemple d'un plan infini (**section II- 3. 5. 3**), nous avons constaté que le champ électrique d'un plan infini chargé uniformément est normal au plan, et que son module est indépendant de la distance entre un point choisi et le plan chargé. Pour profiter de ces propriétés de symétrie, nous utilisons une surface cylindrique de Gauss qui est perpendiculaire au plan chargé, la surface des deux extrémités du cylindre est S_1 et S_2 ($S_1 = S_2 = S$) et la surface latérale du cylindre est S_L (**Figure III.13**). Et puisque on a une distribution de charge surfacique, la charge est $Q_{int} = \sigma S$ avec σ est la densité de charge surfacique.

D'après le théorème de Gauss on a :

$$\Phi = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_L} = 2 \Phi_{S_1} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Le flux Φ_{S_L} est nul puisque le champ est perpendiculaire à S_L , et $\Phi_{S_2} = \Phi_{S_1} = E S$. Donc le flux est :

$$\Phi = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Après simplification on aura :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Et c'est le même résultat trouvé dans la **section II- 3. 5. 3**.

III-1.4 La forme différentielle du théorème de Gauss

Nous avons vu dans notre analyse du théorème de Gauss que si une simple symétrie se présente dans un problème, le théorème de Gauss pourrait être utile pour donner une solution très simple à ce qui concerne un problème difficile. Mais c'est une condition très restrictive, car la symétrie ne peut pas exister dans tous types de problèmes. C'est-à-dire que nous avons choisi des surfaces de Gauss telles que le champ électrique \vec{E} soit perpendiculairement ou parallèle à la surface, de sorte que l'élément de flux soit égal à $E dS$ soit égal à zéro. En plus, le module du champ électrique E a été considéré comme une constante et donc : $\int E ds = E \int ds$. Sans ces symétries, l'intégrale ne peut pas être évaluée.

Y a-t-il une façon d'utiliser toujours le théorème de Gauss mais sans faire appel aux symétries citées avant ? La réponse est oui. Nous pouvons résoudre tout problème si nous rétrécissons la surface de Gauss à une région très petite, une région infinitésimale, que l'intensité du champ électrique \vec{E} est presque constante sur cette région infinitésimale. C'est-à-dire, au lieu d'une forme intégrale du théorème de Gauss, nous développerons une forme différentielle de Gauss.

Pour notre surface de Gauss, nous dessinons une boîte infinitésimale de côtés dx, dy et dz , autour du point $P(x, y, z)$, comme le montre la figure 4.11. Déterminons le flux électrique total émanant de cette boîte. En appliquant le théorème de Gauss à la boîte infinitésimale, on obtient :

$$\Phi_{total} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{(III.8)}$$

Avec $dV = dydx dz$ est le volume élémentaire de la boîte. le flux Total de la boîte est la somme des trois flux : le flux suivant x , suivant y est suivant z :

$$d\Phi_{total} = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z$$

Calculant par exemple le flux suivant y :

Φ_y = le flux entrant + le flux sortant c'est-à-dire :

$$\Phi_y = \Phi_y(y) + \Phi_y(y + dy) = \int E_y(y) dS_y \cos(180^\circ) + \int E_y(y + dy) dS_y \cos(0^\circ)$$

$$\Phi_y = - \int E_y(y) dS_y + \int E_y(y + dy) dS_y$$

Et puisque $dS_y = dx dz$, On aura donc :

$$\Phi_y = \int [E_y(y + dy) - E_y(y)] dx dz$$

Puisque la distance dy entre les surfaces est très petite, nous pouvons écrire :

$$E_y(y + dy) - E_y(y) = \Delta E_y = dE_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$$

Le flux Φ_y devient donc :

$$\Phi_y = \int \frac{\partial E_y}{\partial y} dy dx dz \Rightarrow d\Phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} dy dx dz = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV$$

Avec le même raisonnement, et puisque la surface choisie est un cube (les surfaces sont les mêmes dans tous les côtés), on aura donc :

$$d\Phi_{total} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV + \frac{\partial E_y}{\partial y} dV + \frac{\partial E_z}{\partial z} dV = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Et donc après simplification, et puisque $\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$ représente la divergence de \vec{E} , on aura la forme différentielle de Gauss est :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{(III.9)}$$

Calculant le potentiel :

Il est connu que : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$ (section suivante) c'est à dire que :
$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$
 et alors :

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} \right)$$

On arrive finalement à :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{(III.10)}$$

Cette relation est connue par l'équation de Poisson, elle permet de calculer le potentiel électrique.

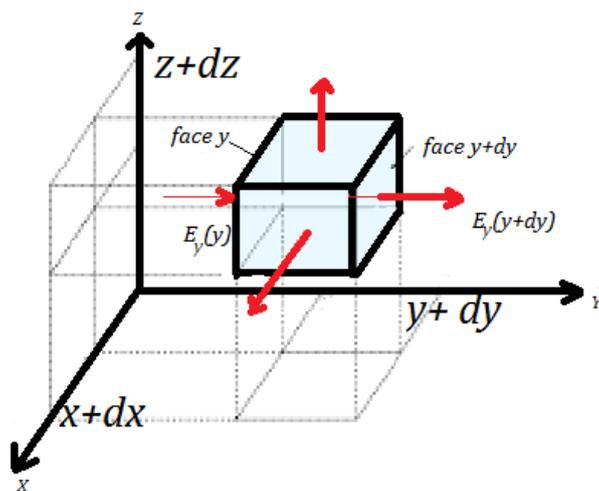


Figure III.14 : Le flux à travers un volume élémentaire

III-1.5 La relation entre flux et angle solide

On a déjà étudié l'angle solide dans le chapitre I. le flux élémentaire $d\Phi$ traversant une surface élémentaire dS située à la distance r de la charge électrique q (**Figure I. 8**) est donné par :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \quad \text{(III.11)}$$

D'après l'équation **(I.33)**, l'angle solide est définie par :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \quad \text{(III.12)}$$

Remplaçant cette équation dans l'équation (III.10) on aura :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} d\Omega \quad \text{(III.13)}$$

On intégrant le flux, on aura finalement :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \Omega \quad \text{(III.14)}$$

Si la surface utilisée est une sphère (c'est par exemple on a une surface de Gauss sphérique), l'angle solide Ω est égale à 4π et le flux est donc :

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{(III.15)}$$

III-2. POTENTIEL ELECTRIQUE

Le concept d'énergie potentielle est également d'une grande valeur dans l'étude de l'électricité. Parce que la force électrostatique est conservatrice, les phénomènes électrostatiques peuvent être décrits de manière pratique en termes d'énergie électrique potentielle. Cette idée nous permet de définir une quantité connue sous le nom de potentiel électrique. Étant donné que le potentiel électrique à n'importe quel point pour certain champ électrique est une quantité scalaire, nous pouvons l'utiliser pour décrire les phénomènes électrostatiques plus simplement que si l'on comptait seulement sur le champ électrique et les forces électriques (des grandeurs vectorielles).

Lorsqu'une charge q est placée dans un champ électrique \vec{E} créé par une distribution de charge, on dit qu'il y a une force électrique $\vec{F} = q \vec{E}$. Cette force est conservatrice car la force entre les charges décrites par la loi de Coulomb est conservatrice. Laissez-nous identifier la charge et le champ en tant que système. Si la charge est libre de se déplacer, elle le fera grâce à la

force électrique. Par conséquent, le champ électrique applique un travail sur la charge. Ce travail est interne au système. Cette situation est similaire à celle d'un système gravitationnel : lorsqu'un objet est relâché près de la surface de la Terre, la force gravitationnelle fonctionne sur l'objet. Ce travail est interne au système objet-Terre.

Lors de l'analyse des champs électriques et magnétiques, il est courant d'utiliser la notation $d\vec{l}$ pour représenter un vecteur de déplacement élémentaire qui est tangent à un certain chemin dans l'espace. L'intégrale le long de ce chemin est appelée la circulation d'un vecteur (chapitre I section I. 1.- 1.). Si par exemple on a un vecteur champ électrique \vec{E} , la circulation de ce vecteur s'écrit comme suit :

$$\text{Circulation de } \vec{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Pour déterminer le potentiel, il était important d'avoir une idée sur la circulation d'un vecteur, et plus précisément la circulation du vecteur champ électrique.

III-2.1 Énergie potentielle électrique et de travail

On considère une charge q placée dans un champ électrostatique \vec{E} , et donc elle est soumise à une force électrostatique \vec{F}_e égale à :

$$\vec{F}_e = q \vec{E}$$

Et le travail effectué (un travail interne) sur la charge par le champ électrique est :

$$W = \int \vec{F}_e \cdot d\vec{l}$$

On remplace le force par sa valeur on aura :

$$W = q \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(III.16)}$$

Il est aussi connu que le travail interne effectué dans un système est égal à la variation de l'énergie potentielle du système mais avec un signe moins, c'est-à-dire que:

$$W = -\Delta U \quad \text{(III.17)}$$

Par conséquent, lorsque la charge q est déplacée, l'énergie électrique potentielle du système de champ de charge est donnée par la quantité de :

$$\Delta U = -q \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(III.18)}$$

Pour un certain déplacement de la charge (démarrant d'un point A dans l'espace vers un autre point B), la variation de l'énergie potentielle électrique du système est :

$$\Delta U = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(III.19)}$$

L'intégrale $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ s'appelle circulation du champ électrique le long de la trajectoire de A jusqu'à B. Puisque la force électrostatique est conservatrice, cette intégrale de ligne ne dépend pas du chemin de A à B.

----- III-2.2 La différence du potentiel et le potentiel électrique -----

En divisant l'énergie potentielle par la charge, on aura une quantité physique appelée le potentiel électrique (ou tout simplement le potentiel) V :

$$V = \frac{U}{q} \quad \text{(III.20)}$$

Puisque l'énergie potentielle est une quantité scalaire, le potentiel électrique est également une quantité scalaire.

La différence de potentiel ΔV entre deux points A et B est définie comme la variation de l'énergie électrique potentielle du système lorsqu'une charge q est déplacée entre les points (équation ?????) divisé par la charge:

$$\Delta V = (V_B - V_A) = \frac{\Delta U}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{W}{q}$$

L'expression $-\vec{E} \cdot d\vec{l}$ représente dV , avec V est le potentiel électrique, c'est à dire :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(III.21)}$$

On dit que le champ électrique dérive d'un potentiel électrique.

Si maintenant au lieu que nous avons une courbe AB, on a une courbe fermé L (de A vers A par exemple). La circulation du champ électrique pour ce cas est nulle.

Démonstration :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0 \quad \text{(III.22)}$$

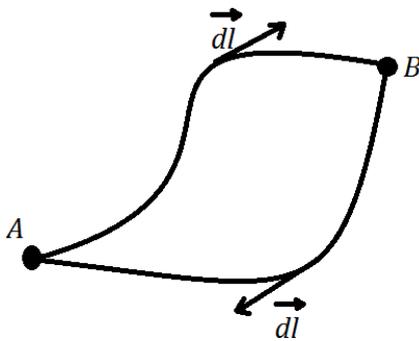


Figure III.15 : La circulation du champ suivant une courbe fermée

III-2.2.1 Le potentiel électrique produit par une charge ponctuelle

Le champ électrique produit par une charge q est radial et il est donné par :

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

\vec{u}_r est un vecteur unitaire, le potentiel est donc :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

Et puisque $d\vec{l}$ est parallèle à \vec{u}_r

$$dV = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \cos 0 = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

D'où :

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r} + C \quad \text{(III.23)}$$

C est une constante, on suppose que pour $r = \infty$ le potentiel $V = 0$ donc $C = 0$. Le potentiel est alors :

$$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{(III.24)}$$

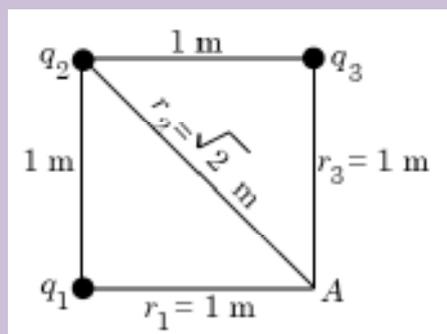
III-2.2.2 Le potentiel électrique produit par n charge ponctuelle

Dans la section (II- 3. 4.2) on a calculé le champ électrique en utilisant le principe de superposition, ce principe est valable aussi pour calculer le potentiel électrique. Donc le potentiel créé par n charges concentrées au point M est donné par :

$$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad \text{(III.25)}$$

Avec r_i est la distance entre la charge q_i est le point M .

Exercice III. 1 : Trouvez le potentiel au point A dans le diagramme si $q_1 = 2 \mu\text{C}$, $q_2 = 2 - 6 \mu\text{C}$, et $q_3 = 2 \mu\text{C}$.



Solution :

Par le principe de superposition, le potentiel au point A est :

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = \frac{k q_1}{r_1} + \frac{k q_2}{r_2} + \frac{k q_3}{r_3}$$

$$V = 5.18 \cdot 10^4 \text{ volt}$$

III-2.2.3 Le potentiel électrique produit par une distribution continue de charge

Dans ce cas on remplace la sommation par un intégrale et la charge par une charge élémentaire et donc le potentiel par dV avec :

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad \text{(III.26)}$$

III-2.3 Applications

III-2. 3. 1 Le potentiel électrique produit par un anneau chargé

- a. Trouver le potentiel électrique en un point P situé à une distance x sur l'axe central perpendiculaire d'un anneau chargé uniformément de rayon a et d'une charge totale Q .
- b. Trouver l'expression champ électrique à ce point P .

Solution :

a. De la **Figure III.16**, on note qu'il existe une symétrie puisque toutes les charges sur l'anneau sont à la même distance du point P . En plus, aucune considération vectorielle n'est

nécessaire ici car le potentiel électrique est un scalaire. Et puisque aussi nous avons une distribution de charge, le potentiel électrique est calculé par l'équation **(III.26)** :

$$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Notant que a et x sont ne varient pas malgré si en change la position de la charge élémentaire sur l'anneau, donc on peut faire sortir $\sqrt{a^2 + x^2}$ de l'intégrale et on aura :

$$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

b. Le champ électrique : Par symétrie, on remarque que le long de l'axe y le champ électrique \vec{E} ne peut avoir une composante. Par conséquent :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{x Q}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

La seule variable dans les expressions de V et E_x est x . Ce n'est pas surprenant parce que notre calcul est valable uniquement pour les points le long de l'axe x , où y et z sont les deux zéro. Ce résultat pour le champ électrique est conforme à celui obtenu par intégration directe (voir section II- 3. 5. 2).

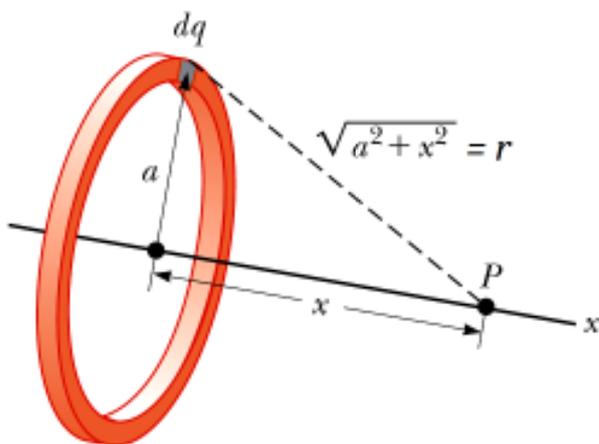


Figure III.16 : Le potentiel électrique produit par un anneau chargé

Un disque chargé uniformément a un rayon R et une densité de charge de surface σ .

- Trouver le potentiel électrique à un point P le long de l'axe central perpendiculaire du disque.
- Trouvez le composant x du champ électrique à un point P le long de l'axe central perpendiculaire du disque.

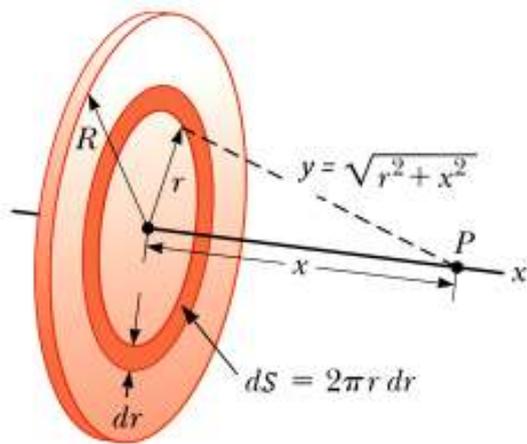


Figure III.17 : Le potentiel électrique produit par un disque chargé

Solution :

Pour résoudre cette exercice, on commence par trouver la quantité de charge dq située sur un anneau de rayon r et largeur dr comme indiqué sur la **Figure III.17** :

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Utilisant l'équation (III.26) pour trouver le potentiel dû à l'anneau:

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Pour obtenir le potentiel total en P , on va intégrer sur les limites $r = 0$ à $r = R$, notant que x est une constante:

$$V = \frac{\sigma \pi}{4\pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$

b. Le champ électrique à n'importe quel point axial est :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right)$$

III-2. 3. 3 Le potentiel électrique produit par un disque chargé

Considérons maintenant une sphère conductrice en métal solide de rayon R et d'une charge positive totale Q , comme le montre la **Figure III.18 a**. Calculer et représenter le potentiel électrique.

Comme déterminé dans la section III-1.3.1 :

Pour $r < R$: Le champ électrique est $E = 0$ le potentiel sera donc :

$$V_1(r) = -\int 0 dr = C_1$$

Pour $r > R$: Le champ est $E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$ et donc :

$$V_2(r) = -\int \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r} + C_2$$

Supposant que pour $r = \infty$ le potentiel $V_2(\infty) = 0$ et donc $C_2 = 0$. Et on aura donc :

$$V_2(r) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r} = k \frac{q}{r}$$

Pour $r = R$: $V_1(R) = V_2(R)$. En utilisant cette condition il est facile de calculer la constante C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{R}$$

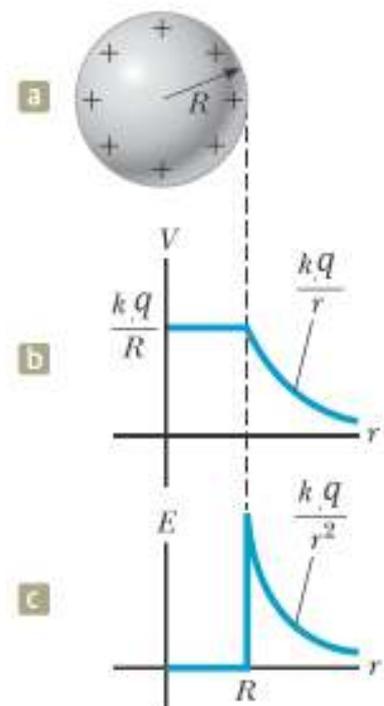


Figure III.18 : Le potentiel électrique produit par un disque chargé.

Et alors le potentiel à l'intérieur de la sphère est :

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R} = k \frac{q}{R}$$

La représentation potentiel électrique est dans la **Figure III.18b**

III-2.4 Le champ électrique en fonction du potentiel

Soit un vecteur champ électrique \vec{E} de composantes (E_x, E_y, E_z) dans un repère cartésien, c'est-à-dire que \vec{E} s'écrit comme suit :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad \text{(III.27)}$$

Le potentiel électrique est défini par :

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad \text{(III.28)}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \quad \text{(III.29)}$$

Par définition des dérivés :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad \text{(III.30)}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (\text{III.31})$$

III-2.5 Le dipôle électrique

Par définition, le dipôle électrique est un ensemble de deux charges égales et de signes opposés (**Figure II.24**). Un dipôle est caractérisé par son « moment dipolaire électrique » ou « moment dipolaire électrique ».

Le moment dipolaire électrique de cette configuration est défini par le vecteur \vec{p} , dirigé de $+q$ vers $-q$ le long de la ligne reliant les charges et ayant une grandeur :

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

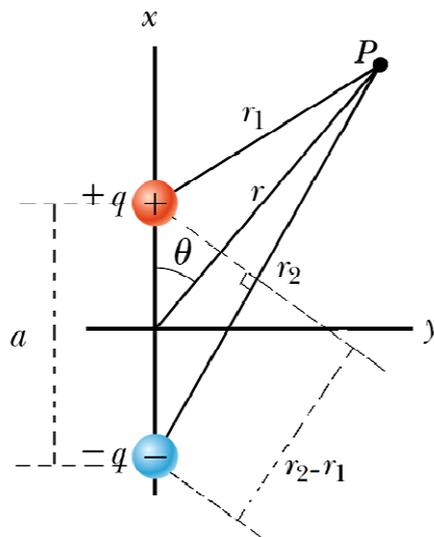


Figure III.18 : Le dipôle électrique.

III-2.5.1 Le potentiel électrique créé par un dipôle

Le potentiel électrique en un point M et produit par un dipôle électrique (**Figure III.18**) est :

$$V = \sum V_i = K \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = Kq \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

Puisque $a \ll r$, on peut faire des approximations c'est-à-dire :

$$r_1 r_2 \approx r^2 \text{ et } r_2 - r_1 = a \cos \theta$$

Et donc :

$$V = K \left(\frac{p \cos \theta}{r^2} \right)$$

III-2.5.2 Le champ électrique créé par un dipôle

Calculons le champ électrique radial en utilisant l'équation suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$$

Par définition, le gradient dans le système de coordonnées polaires est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

On obtient donc les composantes du champ électrique en coordonnées polaires :

$$E_r = \frac{\partial V}{\partial r} = 2K \left(\frac{p \cos \theta}{r^3} \right)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = K \left(\frac{p \sin \theta}{r^3} \right)$$

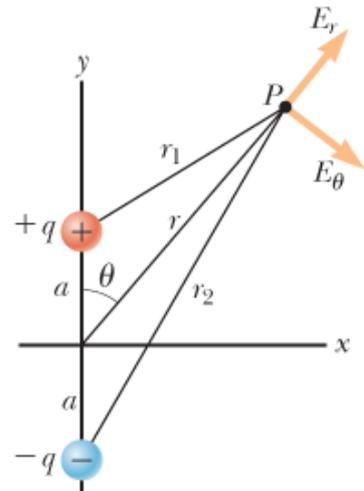


Figure III.19 : Le champ électrique d'un dipôle électrique en coordonnées polaires.

Exercice III. : Un dipôle électrique se compose de deux charges de même ampleur et d'un signe opposé séparé par une distance $2a$ comme le montre la **Figure III.20**. Le dipôle est le long de l'axe x et est centré à l'origine.

- (A) Calculer le potentiel électrique au point P sur l'axe y .
- (B) Calculer le potentiel électrique au point R sur l'axe x positif.
- (C) Calculer V en un point de l'axe x loin du dipôle.

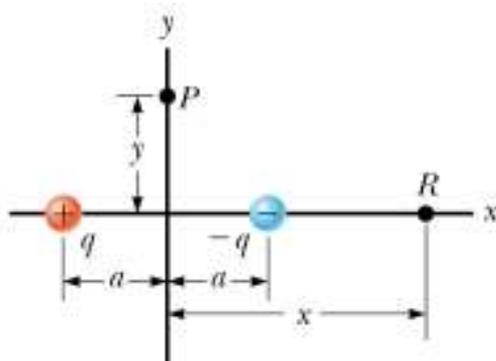
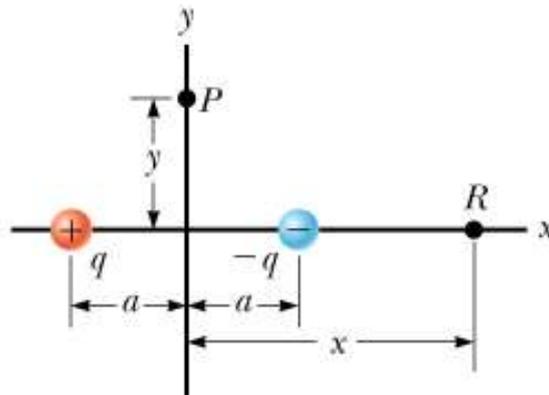


Figure III.20 : un dipôle électrique

Solution :

- a. On utilise l'équation : $V = \sum V_i = K \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$ pour trouver le potentiel électrique du dipôle au point P :

$$V = K \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) V = K \left(\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right)$$



- b. Le potentiel électrique au point R l'axe ox :

$$V = K \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = K \left(\frac{q}{x+a} - \frac{q}{x-a} \right)$$

$$V = -K \frac{2qa}{x^2 - a^2}$$

- c. Pour le point R loin du dipôle tel que $x \gg a$, On néglige a^2 dans le dénominateur de la réponse (B) et V s'écrit comme suit:

$$V_R = \lim_{x \gg a} \left(\frac{-2qa}{x^2 - a^2} \right) \approx \frac{-2qa}{x^2}$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 1 :

On considère un repère cartésien $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un point M .

1. En coordonnées polaires (r, θ) , et soit $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ la base locale liée à M :
 - a. Exprimer \overline{OM} dans les bases (\vec{i}, \vec{j}) et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
 - b. Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $d\overline{OM}$ dans les deux bases.
 - c. En déduire la surface élémentaire dS .
2. En coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$, soit $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base local liée à M :
 - a. Exprimer \overline{OM} dans les deux bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
 - b. Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $d\overline{OM}$ dans les deux bases.
 - c. En déduire les surfaces élémentaires dS_x, dS_y, dS_z , ainsi que le volume élémentaire dV
3. En coordonnées sphérique $M(r, \theta, \varphi)$, soit $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ la base local liée à M :
 - a. Exprimer \overline{OM} dans les deux bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.
 - b. Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $d\overline{OM}$ dans les deux bases.
 - c. En déduire les surfaces élémentaires dS_x, dS_y, dS_z , ainsi que le volume élémentaire dV

Exercice 2 :

1. Calculer le gradient des fonctions scalaires suivantes :

$$f(x, y, z) = (y^3 z^2)^2 + x^3$$

2. Calculer la divergence et le rotationnel des fonctions vectorielles suivantes :

$$\vec{V}(x, y, z) = (x^2 z^3) \vec{i} + (\sqrt{x^2 + y^2}) \vec{j} + (\sqrt{z^2 + y^2}) \vec{k}$$

Exercice 3 :

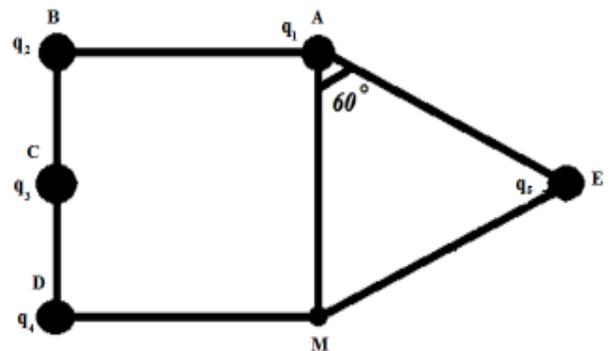
Soit deux charges négatives et égales situées près d'une sphère (S) de rayon R et chargée positivement sur la surface. La charge A est située à une distance de $2R$ à partir du bord de la sphère (S). La charge B est située à une distance de $3R$ à partir du bord de la sphère

- 1- C'est quoi le rapport de la force électrostatique exercée ?
- 2- Calculer le rapport entre la force F_{AS} et la force F_{BS} . Sachant que F_{AS} est la force électrostatique créée entre la sphère et la charge A et F_{BS} entre la sphère et la charge B .

Exercice 4

On place cinq charges électriques aux points A, B, C, D , et E . Avec $ABDM$ est un carré de côté a et AME est un triangle équilatéral de côté a (figure ci-contre).

On donne : $q_1 = +q$; $q_2 = +q$; $q_3 = -2q$; $q_4 = +q$; $q_5 = -q$



Déterminer et représenter le champ électrique créé par les cinq charges au point M .

Application numérique : $q = 10^{-9} \text{ C}$ et $a = 5 \text{ cm}$, $K = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$

Exercice 5

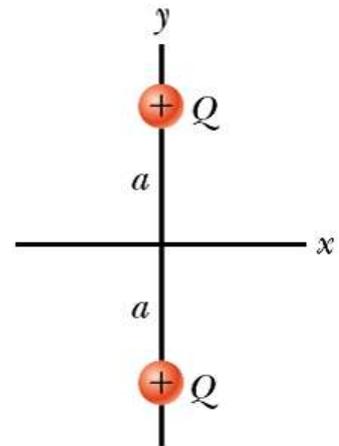
Calculer le champ électrique produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée d'une charge négative.

Exercice 6 :

Deux particules chargées de même magnitude sont situées le long de l'axe des y à des distances égales voir Figure ci-contre.

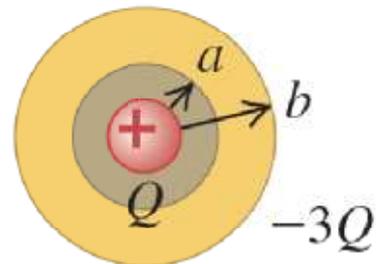
(a) Tracer le graphique du potentiel électrique à des points le long de l'axe des x sur l'intervalle $-3a < x < 3a$. Vous devez tracer le potentiel en fonction de $k_e Q / a$.

(b) Soit la charge de la particule située à $y = -a$ soit négative. Tracer le potentiel le long de l'axe des y sur l'intervalle $-4a < y < 4a$.

**Exercice 7 :**

Une sphérique conductrice creuse avec un rayon intérieur a et un rayon externe b , et elle a une charge ponctuelle positive Q situé au centre. La charge totale de sphère creuse est $-3Q$ et elle est isolée de son environnement (figure ci-contre).

Trouver les expressions pour la grandeur E du champ électrique en fonction de la distance r du centre pour les régions $r < a$, $a < r < b$ et $r > b$.



REFERENCES :

1. *Les maths en Physique* : Jean-Pierre Provost et Gérard vallée, Dunod, Paris, 2011.
2. *Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics, Vol. 3 (4th Edition)*: Douglas C. Giancoli, Pearson New International Edition, 2008.
3. *Electrostatics 2nd edition* : Niels Jonassen, Springer,2002.
1. *Cours de physique, électricité et magnétisme* : Edward M. Purcell, Dunod , 1998.
2. *Electricité et magnétisme rappels de cours et exercices corrigés*: Fizazi Ahmed, Office des publications universitaires, 2011.