الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمـــي
Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Témouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et Informatiques

MÉMOIRE
Pour l’obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatiques
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations différentielles et modélisation

# Applications sur les C0 semi-groupes

**Présenté Par :**
Mr BENACEUR Seif Eddine

**Devant le jury composé de :**
Dr. Mr KHIAR Hamid (M C B) UAT.B.B (Ain Témouchent) Président
Dr. Mme TCHOUAR Fatima Zahraa (M C B) UAT.B.B (Ain Témouchent) Examinateur
Dr. Mme MEKHALFI Kheira (M C A) UAT.B.B (Ain Témouchent) Encadrant

*Année Universitaire 2020/2021*

**Dédicaces**

**J**e dédie ce modeste travail à :

**A** mes chers père et mère source d'amour et de tendresse qui m'ont accompagné

le long de mes étude et qui ont sacrifié toujours pour me voir réussir

**A** mes frères et mes soeurs

**A** toute ma famille

**A** toute mes amis

**E**t à tous ceux qui ont contribué , pour que ce travail soit possible, je vous dis merci

## Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier **"ALLAH"** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme ma formation et pour pourvoir réaliser ce mémoire.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de madame **MEKHALFI KHEIRA**, je la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.

Je suis sensible à l'honneur que me fait monsieur **KHIAR HAMID**, en présidant le jury de ce mémoire. Je rends hommage à ses qualités et scientifiques. Je lui adresse mes vifs remerciements.

Je suis heureux également de remercier, madame **TCHOUAR FATIMA ZAHRA**, d'avoir acceptée d'examiner ce mémoire et de participer au jury. Je sensible à sa générosité qu'elle me témoigné.

Nos remerciement s'adresses également à tous mes professeurs pour leur générosité et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ce parcours universitaire.

Je remercie particulièrement mes parents qui m'ont stimulée et encouragée pendant la réalisation de ce mémoire.

# Table des matières

# Introduction

Actuellement, les semi-groupes sont omniprésents dans la majorité des disciplines mathématiques. On trouve plusieurs applications de cette théorie dans domaines classiques comme la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques, mais les semi-groupes aujourd'hui deviennent un outil très puissant dans la résolution des équations intégro-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie. Les méthodes des semi-groupes sont également appliquées aujourd'hui dans la résolution des équations concrètes qui se produisent dans la dynamique de la population ou dans la théorie du transport.
Ce travail contient trois chapitre : Dans le premier chapitre on a les définitions et les propriétés élémentaires de $C_0$-semi-groupes, des exemples, et la transformée de Laplace d'un $C_0$-semi-groupe.
La deuxième chapitrés concerne le théorème de Hille Yosida et sa preuve (condition nécessaire et suffisante).
Le troisième chapitre c'est l'application des les $C_0$-semi-groupes, nous étudions trois systèmes.
Le premier c'est le problème de Cauchy homogène :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad \forall t \in j = [0, a] \\ \\ y(0) = x \end{cases} \tag{1}$$

Le deuxième est le problème de Cauchy non homogène :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad t \geqslant 0 \\ \\ y(0) = x \end{cases} \tag{2}$$

et le troisième est problème semi linéaire :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \quad t \geqslant 0 \\ \\ y(0) = x \end{cases} \tag{3}$$

Où $A$ est le générateur infinitésimal d'un $\mathrm{C}_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur un espace de Banach $E$, $f$ est une fonction continue et $x$ la valeur initiale.

# Chapitre 1

# $C_0$ semi-groupe

Dans ce chapitre on s'intéresse aux définitions et propriétés élémentaires des $C_0$-semi-groupe et à la transformée de Laplace d'un $C_0$-semi-groupe. Pour plus des détailes voir [7, 2, 3].

## 1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Dans la suite, nous noterons par $E$ un espace de Banach sur le corps des nombres complexe $\mathbb{C}$. $B(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés définis de $E$ à valeur de $E$ muni de la norme :

$$\|f\|_{B(E)} = sup\left\{\left|f(x)\right|; |x| = 1\right\}$$

**Définition 1.1.1** *Une famille $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $E$ est dite semi-groupe si :*

1. $T(0) = I$
2. $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0$

**Définition 1.1.2** 1. *Le semi groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est dit* ***uniformément continu*** *si :*

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|T(t) - I\|_{B(E)} = 0$$

2. *Le semi groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est dit* ***fortement continu*** *ou $C_0$* ***semi-groupe*** *si :*

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0 \quad \forall x \in E$$

*Ou bien :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} T(t)x = x \quad \forall x \in E$$

*i.e*

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)x \in E \qquad \textit{est continue au point t=0}$$

**Remarque.**

1. L'application $t \to T(t)$ est fortement continue au point $t = 0$ c'est pourquoi on l'appelle $C_0$ semi-groupe.

2. Puisque
$$\|T(t)x - x\| \leqslant \|T(t) - I\|_{B(E)}\|x\|$$
pour tout $x \in E$ et pour tout $t \geqslant 0$,il en résulte que les semi groupes uniformément continus sont des $C_0$ semi-groupes. Mais il existe des $C_0$ semi-groupes qui ne sont pas uniformément continus.

3. On dit que$\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un $C_0$-groupe si ces propriétés restent valables pour $t$ et $s$ négatifs.

**Définition 1.1.3** *L'opérateur linéaire :*

$$A : D(A) \in E \longrightarrow E$$

*tel que :*

$$D(A) = \left\{ \ x \in E : \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \quad \textit{dans} \quad E \ \right\}$$

*et*

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \quad \forall x \in D(A) \tag{1.1}$$

*est appelé* ***le générateur infinitésimal*** *d'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.*

**Remarque.**
Dans le cas oú $D(A) = E$ et $A \in B(E)$, la famille d'opérateurs linéaires bornés $\{e^{At}\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe uniformément continu de générateur infinitésimal $A$.

**Lemme 1.1.1** *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction continue, alors :*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a)$$

**Preuve.**
pour tout $t \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\, ds - f(a) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} (f(s) - f(a)) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sup_{s \in [a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \int_a^{a+t} ds \\
&\leq \frac{1}{t} .t \sup_{s \in [a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \\
&= \sup_{s \in [a,a+t]} \|f(s) - f(a)\|
\end{aligned}$$

La continuité de $f$ nous permet de conclure.

**Théorème 1.1.1** *Un opérateur linéaire $A$ bornée est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur $E$ si seulement si $A$ est un opérateur linéaire borné sur $E$.*

**Preuve.**
$\Longleftarrow$) Soit A un opérateur linéaire borné sur $E$. Posons pour tout $t \geq 0$,

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Cette série ,ainsi définie, converge en norme et définie un opérateur linéaire borné $T(t)$ pour tout $t \geq 0$.
Il est claire que $T(0) = I$, et par un calcul simple, on a pour tout $t, s \geq 0$,

$$T(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As} = T(t)T(s)$$

Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| T(t) - I \right\|_{B(E)} &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{\left\| A^n \right\|}{n!} \\
&\leqslant e^{t\|A\|} - 1 \longrightarrow_{t \to 0^+} 0
\end{aligned}$$

d'oǜ

$$\lim_{t \to 0^+} \left\| T(t) - I \right\| = 0$$

D'autre part, pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\| \frac{T(t)-I}{t} - A \| &= \| \frac{e^{At}-I}{t} - A \| \\
&= \| \frac{e^{At}-I-tA}{t} \| \\
&\leqslant \frac{1}{t} \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} t^n \frac{\| A^n \|}{n!} \\
&\leqslant \frac{1}{t} \left( e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\| \right) \longrightarrow_{t\to 0^+} 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-I}{t} = A$$

Ainsi, $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E de générateur infinitésimal A

$\Rightarrow$ ) Réciproquement, soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe uniformément continue d'opérateurs linéaires bornés sur E de générateur infinitésimal $A$.
L'application :

$$T(.) : \mathbb{R}^+ \to B(E)$$

$$t \mapsto T(t)$$

est continue, donc $\displaystyle\int_0^t T(s)\ ds \in B(E), \forall t \geqslant 0$ D'après le lemme (1.1.1 on a :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\ ds = T(0) = I$$

Il existe alors $\rho > 0$ tel que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\ ds - I \right\| < 1$$

ce qui implique que $\displaystyle\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\ ds$ est inversible et donc $\displaystyle\int_0^\rho T(s)\ ds$ est de aussi inversible.
Pour tout $h > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(h)-I}{h}\right) \left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right) &= \frac{1}{h} \int_0^\rho T(h)T(s)\ ds - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(s)\ ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\rho T(s+h)\ ds - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(s)\ ds
\end{aligned}$$

On pose $u = h + s$ alors $du = ds$. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} u = h & si \quad s = 0 \\ u = h + \rho & si \quad s = \rho \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right) &= \frac{1}{h}\int_h^{h+\rho} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^\rho T(s)\ ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{h+\rho} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\ ds - \int_0^\rho T(s)\ ds \\ &= \int_0^\rho T(s)ds + \frac{1}{h}\int_\rho^{h+\rho} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\ ds \\ &= \frac{1}{h}\int_\rho^{h+\rho} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\ ds \end{aligned}$$

Donc, puisque $\int_0^\rho T(s)\ ds$ est inversible on a :

$$\frac{T(t)-I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{h+\rho} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\ ds\right)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right)^{-1}$$

Compte tenu du lemme (1.1.1), on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h} = (T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right)^{-1}$$

Ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est l'opérateur linéaire borné

$$A = (T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right)^{-1}$$

**Théorème 1.1.2** *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $E$, alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :*

$$\|T(t)\|_{B(E)} \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

*On note $SG(M,\omega)$ l'ensemble des $C_0$-semi-groupe exponentiellement bornés.*

**Définition 1.1.4** *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $E$.*

1. *$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est dit* ***uniformément borné*** *sur $E$ s'il existe $M \geq 1$ telle que :*

$$\left\|T(t)\right\|_{B(E)} \leq M \quad \forall t \geq 0$$

2. $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est dit un* $C_0$***-semi-groupe de contraction*** . *Si*
$$\|T(t)\|_{B(E)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

**Proposition 1.1.1** *Soient* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ *et* $A$ *son générateur infinitésimal. Si* $x \in D(A)$*, alors* $T(t)x \in D(A)$ *et on a l'égalité :*
$$T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0.$$

**Preuve.**
Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geqslant 0$ on a :
$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \end{aligned}$$
Donc $T(t)x \in D(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geqslant 0$.

**Remarque.** On voit que :
$$T(t)D(A) \subseteq D(A), \quad \forall t \geqslant 0.$$

**Théorème 1.1.3** *Soit* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *un* $C_0$*-semi-groupe. Alors pour tout* $x \in E$*, l'application* $[0,+\infty[\ni t \to T(t)x \in E$ *est continue sur* $[0,+\infty[$.

**Preuve.**
Pour montrer que $T(.)x$ est continue sur $[0,+\infty[$, il suffit de montrer que $T(.)x$ est continue au point $t_0$, $\quad \forall t_0 \geqslant 0 \quad$ c-à-d :
$$\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)x$$
En effet :
**Cas 01** : $t > t_0$ :
$$\begin{aligned} \|T(t)x - T(t_0)x\| &= \|T(t - t_0 + t_0)x - T(t_0)x\| \\ &= \|T(t-t_0)T(t_0)x - T(t_0)x\| \\ &\leqslant \|T(t_0)\|\|T(t-t_0x) - x\| \\ &\leqslant Me^{\omega t_0}\|T(t-t_0)x - x\| \longrightarrow_{t\searrow t_0^+} 0 \end{aligned}$$
donc : $\quad \lim\limits_{t\to t_0^+} T(t)x = T(t_0)x$
**Cas 02** : Pour $t < t_0$ on a :
$$\begin{aligned} \|T(t)x - T(t_0x\| &= \|T(t)x - T(t_0 + t - t)x\| \\ &= \|T(t)x - T(t_0 - t)T(t)x\| \\ &= \|T(t)(x - T(t_0 - t)x)\| \\ &\leqslant \|T(t)\|\|x - T(t_0 - t)x\| \\ &\leqslant Me^{\omega t}\|x - T(t_0 - t)x\| \longrightarrow_{t\searrow t_0^-} 0 \end{aligned}$$

donc : $\lim_{t \to t_0^-} T(t)x = T(t_0)x$

d'où : $\lim_{t \to t_0} T(t)x = T(t_0)x$

**Proposition 1.1.2** *Soient* $\{T(t)\}_{t \geqslant 0} \in SG(M, \omega)$ *et* $A$ *son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rl} T(.)x : [0, +\infty[ & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto T(t)x \end{array}$$

*est dérivable sur* $[0, +\infty[$*, pour tout* $x \in D(A)$ *et on a :*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0.$$

**Preuve.**
Soient $x \in D(A), \quad t \geqslant 0$ *et* $h > 0$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| & = & \left\| \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| \\ & \leqslant & \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\ & \leqslant & Me^{\omega t} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \end{array}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

d'où :

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Si $t - h > 0$, alors on a :

$$\begin{array}{rcl} \left\| \dfrac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right\| & = & \left\| \dfrac{T(t-h)x - T(t-h+h)x}{-h} - T(t-h+h)Ax \right\| \\ & = & \left\| \dfrac{T(t-h)x - T(t-h)T(h)x}{-h} - T(t-h)T(h)Ax \right\| \\ & \leqslant & \|T(t-h)\| \left\| \dfrac{x - T(h)x}{-h} - T(h)Ax \right\| \\ & \leqslant & Me^{\omega(t-h)} \left\| \dfrac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax \right\| \\ & \leqslant & Me^{\omega(t-h)} \left( \left\| \dfrac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \left\| Ax - T(h)Ax \right\| \right) \end{array}$$

Par suite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax,$$

i.e :

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax, \quad \forall t\geqslant 0$$

Alors l'application considérée dans l'énonce est dérivable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x\in D(A)$. De plus, on a l'égalité :

$$\tfrac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x, \quad \forall t\geqslant 0,$$

**Remarque.**
Si $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un $C_0$-semi-groupe différentiable de générateur infiniésimal A, alors pour tout $x\in X$ :

1. $\frac{d}{dt}T(t)x=AT(t)x$ pour t $>0$

2. $t\longmapsto AT(t)x$ est lipschitzienne pour t $>$0

**Lemme 1.1.2** *Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur E. Alors, on a :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\ ds=T(t)x$$

*quels que soient $x\in E$ et $t\geqslant 0$.*

**Preuve.**
Montrer que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\ ds=T(t)x$$

revient à montrer que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\ ds-T(t)x=0$$

En effet, soient $x\in E$ et $h>0$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\ ds-T(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x-T(t)x\ ds\right\|\\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left\|T(s)x-T(t)x\right\|\ ds\\ &\leqslant \frac{1}{h}\sup_{s\in[t,t+h]}\left\|T(s)x-T(t)x\right\|\left(\int_t^{t+h}\ ds\right)\\ &\leqslant \frac{1}{h}.h\sup_{s\in[t,t+h]}\left\|T(s)x-T(t)x\right\|\\ &\leqslant \sup_{s\in[t,t+h]}\left\|T(s)x-T(t)x\right\|\to_{h\searrow 0} 0\end{aligned}$$

Par la continuité de l'application $[0,+\infty[\ni t \mapsto T(t)x \in E$. On a alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = T(t)x$$

**Théorème 1.1.4** *Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ et $A$ son générateur infinitésimal. Alors :*

1. *Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in E$, $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ et :*
$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x \tag{1.2}$$
2. *$x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si*
$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.3}$$
3. *Pour tout $x \in D(A)$ :*
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\,d\tau \tag{1.4}$$

**Preuve.**

1. Soient $x \in E$ et $h > 0$. Alors :
$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h)T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds\\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds\end{aligned}$$
On pose $u = h + s$ alors $du = ds$. Il s'ensuit que :
$$\begin{cases} u = h & si \quad s = 0\\ u = h + t & si \quad s = t\end{cases}$$
Donc on a :
$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(u)x\,du - \int_0^t T(u)x\,du\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} T(u)x\,du - \int_0^h T(u)x\,du - \int_0^t T(u)x\,du\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(u)x\,du - \int_0^h T(u)x\,du\right)\end{aligned}$$
Par passage a la limite quand $h \to 0$ et d'après le lemme (1.1.2) , on obtient :

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x, \quad \forall t \geqslant 0 \quad \text{et} \int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$$

2. $\Longrightarrow$) si $x \in D(A)$ et $Ax = y$, alors on a :

$$\tfrac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y, \quad \forall s \in [0,t], t \geqslant 0$$

Par intégration sur [0,t] :

$$\begin{aligned}\int_0^t T(s)y\,ds &= \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x\,ds\\ &= [T(s)x]_0^t\\ &= T(t)x - T(0)x\\ &= T(t)x - x\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ ) Soient $x, y \in$ E tel que :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Alors pour t $>$ 0, on a :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds, \quad \forall t \geqslant 0.$$

d'où

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds, \quad \forall t \geqslant 0.$$

et d'après le lemme (1.1.2) on a :

$$Ax = T(0)y = y, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Finalement on voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

3. Soit $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\int_s^t T(u)Ax\,du &= \int_s^t AT(u)x\,du\\ &= \int_s^t \frac{d}{du}T(u)x\,du\\ &= T(t)x - T(s)x\end{aligned}$$

**Théorème 1.1.5** *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et $A$ son générateur infinitésimal. Alors :*

1. $\overline{D(A)} = E$
2. *$A$ est un opérateur fermé.*

**Preuve.**

1. Soient $x \in E$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} t_n = 0$ alors pour :
$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\ ds\ \in D(A),\ \forall n \in \mathbb{N}$$
on a :
$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n & = & \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{t_n}\displaystyle\int_0^{t_n} T(s)x\ ds \\ & = & T(0)x \\ & = & x\end{array}$$
Par conséquent : $\overline{D(A)} = E$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset\ D(A)$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors Par (1.4) de Théoréme ( 1.1.4) on a :
$$T(t)x_n - T(s)x_n = \int_s^t T(\tau)Ax_n\ d\tau,\ \forall n\ \in \mathbb{N},\ \forall t, s \geq 0.$$
Pour $s = 0$ on a :
$$T(t)x_n - T(0)x_n = T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\tau)Ax_n\ d\tau,\ \forall n\ \in \mathbb{N},.$$
d'où
$$\lim_{n\to\infty} T(t)x_n - x_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(\tau)Ax_n\ d\tau,\ \forall n\ \in \mathbb{N},.$$
et :
$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)y\ d\tau.$$
car :
$$\begin{array}{rcl}\left\|\displaystyle\int_0^t T(\tau)Ax_n\ d\tau - \int_0^t T(\tau)Ay\ d\tau\right\| & = & \left\|\displaystyle\int_0^t T(\tau)(Ax_n - y)\ d\tau\right\| \\ & \leq & \displaystyle\int_0^t \|T(\tau)\|\|Ax_n - y\|\ d\tau \\ & \leq & M\displaystyle\int_0^t e^{\omega\tau}\ \|Ax_n - y\|\ d\tau \\ & \leq & M\left[\dfrac{e^{\omega}\tau}{\omega}\right]_0^t \|Ax_n - y\| \\ & \leq & M\left(\dfrac{e^{\omega t}-1}{\omega}\right)\|Ax_n - y\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0\end{array}$$

Pour $t > 0$ on a :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)y\ d\tau$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)y\ d\tau\ \Rightarrow Ax = T(0)y = y$$

d'où $x\ \in D(A)$ et $Ax = y$, par suite il résulte que $A$ est un opérateur fermé

On a vu dans la définition précédente (1.1) qu'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ admet un unique générateur infinitésimal. Ce $C_0$-semi-groupe est-il unique pour le générateur infinitésimal $A$ ?

La réponse affirmative est donnée par le théorème suivante :

**Théorème 1.1.6 ( Unicité de l'engendrement)** *Soient deux $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur $A$. Alors*

$$T(t) = S(t), \quad t \geq 0$$

**Preuve.**
Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. On définit l'application :

$$[0,t]\ \ni s \mapsto U(s) = T(t-s)S(s)x \in D(A)$$

D'après la proposition (1.1.2) $U$ est dérivable . Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}U(s)x &= -\frac{d}{ds}T(t-s)S(s) + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x\\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x\\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x\\ &= 0\end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$. Par intégration sur $[0,t]$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{ds}U(s)x\ ds = 0 \ &\Rightarrow\ U(s)x - U(0)x = 0\\ &\Rightarrow\ U(t)x = U(0)x, \quad \forall x \in D(A)\end{aligned}$$

d'oừ :

$$U(0)x = T(t)x = U(t)x = S(t)x$$

Alors :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A) \text{ et } t \geq 0.$$

puisque $\overline{D(A)} = E$, on obtient que :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in E \text{ et } t \geq 0.$$

## 1.2 Exemples

**Exemple 1.2.1** *:*
*Soit*

$$C = \{f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \textbf{\textit{f est uniformement continue et bornée}}\}$$

*Avec la norme :*

$$\|f\|_c = \sup_{\alpha \in [0,+\infty[} |f(\alpha)|.$$

*L'espace $C$ est un espace de Banach.*
*Définissons :*

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \quad \forall t \geqslant 0 \quad \alpha \in [0, +\infty[$$

*Évidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et en plus on a :*
*Soit $f \in C$*

$$\begin{aligned} \big\|T(t)f\big\|_c &= \sup_{\alpha \in [0 \ \infty[} \big|T(t)f(\alpha)\big| \\ &= \sup_{\alpha \in [0 \ \infty[} \big|f(t+\alpha)\big| \end{aligned}$$

*on pose $\alpha + t = \beta$ si $\alpha = 0$ alors $\beta = t$ et si $\alpha = \infty$ alors $\beta = \infty$*

$$\begin{aligned} \big\|T(t)f\big\|_c &= \sup_{\beta \in [t \ \infty[} \big|f(\beta)\big| \\ &\leq \sup_{\beta \in [0 \ \infty[} \big|f(\beta)\big| \\ &\leq \big\|f\big\|_c \end{aligned}$$

*donc $\big\|T(t)f\big\|_c \leq \big\|f\big\|_c$*

*d'où $\big\|T(t)\big\|_c \leq 1$*

*Alors $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ est linéaire bornée*
**.** *De même $T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow B(C)$ est un $C_0$-semi-groupe .*

*i) $T(0)f = f(0+\alpha) = f(\alpha)$ donc $T(0) = I$*

*ii) Pour $s, t \geq 0$ :*

$$\begin{aligned} (T(t+s)f)(\alpha) &= f(t+s+\alpha) \\ &= T(t)f(s+\alpha) \\ &= T(t)T(s)f(\alpha) \end{aligned}$$

*Donc :*

$$T(t+s)f = T(t)T(s)f \qquad \forall\ f \in C$$

*iii)*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left\|T(t)f-f\right\|_c &= \lim_{t\to 0}\sup_{\alpha\in[0\ \infty[}\left|f(\alpha+t)-f(\alpha)\right| \\ &= 0\end{aligned}$$

*Par conséquent* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* $C_0$*-semi-groupe*

*Déterminer le générateur infinitésimal* $A$ *de* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.

*Soit* $A\ : D(A)\subset C \longrightarrow C$ *le générateur infinitésimal de* $C_0$*-semi-groupe*

*i) Si* $f\in D(A)$ , $\forall\alpha\in[0\ \infty[$ *alors :*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{T(t)f(\alpha)-f(\alpha)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t+\alpha)-f(\alpha)}{t} \\ &= f'(\alpha) \\ &= Af(\alpha)\end{aligned}$$

*Par conséquent :*

$$D(A)\subset\{f\in C/f'\in C\}$$

*ii) Si* $f\in C$ *et* $f'\in C$ *alors :*

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t)f-f}{t}-f'\right\|_C &= \sup_{\alpha\in[0\ \infty[}\left|\frac{T(t)f(\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right| \\ &= \sup_{\alpha\in[0\ \infty[}\left|\frac{f(t+\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right| \\ &= \sup_{\alpha\in[0\ \infty[}\left|\frac{1}{t}\left[f(\tau)\right]_\alpha^{t+\alpha}-\frac{1}{t}\left[f'(\alpha)\tau\right]_\alpha^{t+\alpha}\right| \\ &= \sup_{\alpha\in[0\ \infty[}\left|\frac{1}{t}\int_\alpha^{t+\alpha}\left(f'(\tau)-f'(\alpha)\right)\,d\tau\right|\end{aligned}$$

*Par le lemme* (1.1.1) *on a :*

$$\lim_{t\to 0}\sup_{\alpha\in[0\ \infty[}\left|\frac{1}{t}\int_\alpha^{t+\alpha}\left(f'(\tau)-f'(\alpha)\right)\,d\tau\right| = 0$$

*Donc :*

$$D(A)=\{f\in C/f'\in C\}$$

*Et :*

$$Af = f'$$

**Exemple 1.2.2** *Soient* $p \in [1, \infty)$ *et*

$$l_p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

*Avec la norme*

$$\left\| (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \right\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{\frac{1}{p}} \right)^p$$

*Considérons une suite des nombres réel positifs* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et définissons une famille* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *d'opérateurs linéaires sur l'espace* $l_p$ *par :*

$$T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(e^{-a_n t} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad t \geqslant 0$$

*est un* $C_0$*-semi-groupe d'opérateur linéaire bornés sur* $l_p$ *et son générateur infinitésimal* $A$ *est défini sur*

$$D(A) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l_p / (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l_p\}$$

*par*

$$A(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

**Exemple 1.2.3** *Soit* $\varepsilon$ *l'espace des fonctions continues* $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *avec la norme de la convergence uniforme, alors la famille* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *définie par :*

$$(T(t)\phi)(x) = \phi(xe^{-t});\ t \geqslant 0,\ \phi \in \varepsilon,\ x \in [0,1]$$

*est un* $C_0$*-semi-groupe sur* $\varepsilon$ *et son générateur infinitésimal* $A$ *est défini sur :*

$$\begin{aligned} D(A) &= \{\phi \in C([0,1], \mathbb{R}) : \phi'() \text{ exist et il est continu pour } x \in [0,1]\} \\ &= C^1([0,1], \mathbb{R}) \end{aligned}$$

*Par* $A\phi = \phi$

## 1.3 Transformée de Laplace d'un $C_0$-semi-groupe

Dans la suite pour $\omega \geqslant 0$ on désigne par : $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / Re\lambda > \omega\}$.

Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M, \omega)$. Nous avons :

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t},\ \forall t \geqslant 0$$

et on voit que :

$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \leqslant e^{-Re\lambda t}\|T(t)\|\|x\| \leqslant Me^{-(Re\lambda-\omega)}t\|x\|, \forall x \in E.$$

Définissons l'application :

$$R(\lambda) :\ E \longrightarrow E,$$

Par :

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt.$$

Il est claire que $R(\lambda)$ est un opérateur linéaire. De plus, on a :

$$\|R(\lambda)x\| \leqslant \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\|\ dt \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|x\|, \forall x \in E$$

d'où il résulte que $R(\lambda)$ est un opérateur linéaire borné.

**Définition 1.3.1** *L'application :*

$$\begin{aligned} R(.,A) : \rho(A) &\longrightarrow B(E) \\ \lambda &\longrightarrow R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

*S'appelle la résolvante de A*

**Définition 1.3.2** *Soit l'application :*

$$\begin{aligned} R_\lambda : \Lambda_\omega &\longrightarrow B(E) \\ \lambda &\longrightarrow R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt \end{aligned}$$

*qui vérifie la propriété $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda.R_\mu\ \forall\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$ s'appelle une pseudo-résolvante.*

**Définition 1.3.3** *L'opérateur :*

$$\begin{aligned} R : \Lambda_\omega &\longrightarrow B(E) \\ \lambda &\longrightarrow R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt \end{aligned}$$

*S'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M, \omega)$.*

**Théorème 1.3.1** *Soit $T : [0, \infty[ \longrightarrow B(E)$ une application fortement continue pour la-quelle il existe $M \geqslant 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \forall t \geqslant 0$$

*Alors l'application :*

$$\begin{aligned} R : \Lambda &\longrightarrow B(E) \\ \lambda &\longrightarrow R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \end{aligned}$$

*est une pseudo-résolvante si et seulement si on a :*

$$T(t+s) = T(t)T(s), \ \forall t, s \geqslant 0.$$

**Preuve**.
Soit $\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\lambda \neq \mu$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda} &= \frac{1}{\mu-\lambda}R(\lambda) - \frac{1}{\mu-\lambda}R(\mu) \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}R(\lambda)\ d\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}R(\mu)\ d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda r}T(r)\ drd\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\mu r}T(r)\ drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)\ drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\mu r}T(r)\ drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)\ drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}e^{-\lambda r}T(r)\ drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)\ drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}\ d\tau\ e^{-\lambda r}T(r)\ dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)\ drd\tau - \int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-(\mu-\lambda)v}\ dv\ e^{-\lambda r}T(r)\ dr \\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s}\ ds + \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\ dr - \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)v\ dv}\right)e^{-\lambda r}T(r)\ dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\tau e^{-(\mu-\lambda)s}\ ds\ e^{-\lambda r}T(r)\ dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\tau e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}T(r)\ dsdr \\
&= \int_0^\infty\int_s^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}T(r)\ drds \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}\int_s^\infty e^{-\lambda r}T(r)\ drds \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s}\int_s^\infty e^{-\lambda(r-s)}T(r)\ drds \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s}\int_s^\infty e^{-\lambda t}T(t+s)\ dtds \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}T(t+s)\ dtds
\end{aligned}$$

D'autre part, il est claire que :

$$R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}T(t)T(s)\ dtds$$

et par conséquent :

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda} - R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu t}[T(t+s)-T(t)T(s)]dtds$$

D'où on déduit facilement les affirmations de l'énoncé.

**Théorème 1.3.2** *Soient $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire fermé densement définit et $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset B(E)$ une famille d'opérateurs fortement continus pour laquelle il existe $M \geqslant 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \ , \ \forall t \geqslant 0$$

*Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un $C_0$-semi-groupe exponentiellement borné ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur $A$.*

2. *$\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in E$ on a :*
$$R(\lambda)x = R(\lambda, A)x.$$

**Preuve**

1) $\Longrightarrow$ 2) pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, et tout $x \in X$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h)T(t)x\ dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h+t)x\ dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h+t)x\ dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt
\end{aligned}$$

On pose $s = h + t$ alors $ds = dt$. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} s = h & si\ t = 0 \\ s = \infty & si\ t = \infty \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt
\end{aligned}$$

Par passage a la limite, on obtient :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} = \lambda R(\lambda)x - x$$

Il résulte que $R(\lambda)x \in D(A)$ et :

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \quad \forall x \in E$$

c'est à dire :

$$(\lambda I - A)\, R(\lambda)x = x, \quad \forall x \in E. \tag{1.5}$$

D'autre part, si $x \in D(A)$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax\; dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)x\; dt \\ &= \left[e^{-\lambda t}T(t)x\right]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\; dt \\ &= x + \lambda R(\lambda)x \end{aligned}$$

d'où :

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in D(A)$$

Puisque $\overline{D(A)} = E$ :

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in E$$

Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda)x = R(\lambda, A)x, \quad \forall x \in E$

*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $R(\lambda, A)x = R(\lambda)x$. Compte tenu du théorème (1.3.1) il en résulte :

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geqslant 0$$

De plus, si $T(0)x = 0$, alors $T(t)T(0)x = T(t)0 = 0$, pour tout $t > 0$. Par conséquent $R(\lambda)x = 0$, d'où il résulte $x = 0$ et par suite, $T(0) = I$. il en découle $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Alors , en appliquant la première partie de la preuve, on a :

$$R(\lambda, B) = R(\lambda) = R(\lambda, A)$$

d'où il s'ensuit que $B = A$

**Théorème 1.3.3** *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $E$ de générateur infinitésimal $A$, et soient $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tel que $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $\forall t \geqslant 0$. Si $\lambda \in \Lambda_\omega$ alors :*

1. *L'application :*

$$\begin{aligned} R_\lambda \; &: \; E \longrightarrow E \\ & \qquad x \longrightarrow R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\; ds \end{aligned}.$$

*définit un opérateur linéaire borné sur $E$ et on a :*

$$\|R_\lambda\|_{B(E)} \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}$$

*2.* $\lambda \in \rho(A)$ *et* $R(\lambda, A)x = R_\lambda x, \quad \forall x \in E$

**Preuve**

1. Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$, il est clair que $R_\lambda$ est un opérateur linéaire .
De plus, pour tout $s \geqslant 0$ et tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|e^{-\lambda s}T(s)x\| &\leqslant e^{-Re\lambda s}\|T(s)\|\|x\| \\ &\leqslant e^{-Re\lambda s}Me^{\omega s}\|x\| \\ &\leqslant Me^{-(Re\lambda-\omega)s}\|x\| \end{aligned}$$

Ce qui entraine alors que :

$$\begin{aligned} \|R_\lambda x\| &\leqslant \int_0^\infty \|e^{-\lambda s}T(s)x\|\, ds \\ &\leqslant M\|x\| \int_0^\infty e^{-(Re\lambda-\omega)s}\, ds \\ &\leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|x\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que $R_\lambda$ est un opérateur linéaire borné sur $E$ et que :

$$\|R_\lambda\|_{B(E)} \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}$$

**Lemme 1.3.1** *Soit* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *un* $C_0$*-semi-groupe sur* $E$ *de générateur infinitésimal* $A$ *et soit* $V$ *un opérateur linéaire borné sur* $E$*, i.e,* $V \in B(E)$*, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $T(t)V = VT(t), \quad \forall t \geqslant 0$

*(b)* $VD(A) \subseteq D(A)$ *et* $AVx = VAx, \quad \forall x \in D(A)$

**Preuve.**
1) $\Longrightarrow$ 2) Soit $V \in B(E)$ tel que $T(t)V = VT(t)$, $\forall t \geqslant 0$.
Soit $x \in D(A)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)Vx - Vx}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{VT(t)x - Vx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} V\left(\frac{T(t)x - x}{t}\right) \\ &= VAx. \end{aligned}$$

Donc $Vx \in D(A)$ et $AVx = VAx$
2) $\Longrightarrow$ 1) Soit $V \in B(E)$ tel que $VD(A) \subseteq D(A)$ et $AVx = VAx$,

$\forall x \in D(A)$
Pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in D(A)$ définissons la fonction $s \ni [0,t] \longmapsto W(s) = T(t-s)VT(s)x \in D(A)$.
Alors :

$$\begin{aligned} \frac{dW(s)}{ds} &= -\frac{d}{ds}T(t-s)VT(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}VT(s)x \\ &= -AT(t-s)VT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= -T(t-s)VAT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par intégration sur $[0,t]$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds}W(s)xds = 0 &\Longrightarrow W(t)x - W(0)x = 0 \\ &\Longrightarrow W(t)x = W(0)x. \quad \forall x \in D(A) \end{aligned}$$

Comme :

$$W(0)x = T(t)Vx = W(t)x = VT(t)x$$

On a :

$$T(t)Vx = VT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Comme $\overline{D(A)} = E$ et $T(t)V = VT(t)$ sont continus alors :

$$T(t)V = VT(t), \quad \forall t \geqslant 0,$$

**Corollaire 1.3.1** *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $E$ de générateur infinitésimal $A$, et soient $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tel que $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $\forall t \geqslant 0$. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et pour tout $x \in D(A)$ on a :*

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax.$$

**Preuve** On a d'une part :

$$R(\lambda, A) = R_\lambda \in B(E) \tag{1.6}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
T(t)R_\lambda &= T(t)\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)\ ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(t)T(s)\ ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(t+s)\ ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s+t)\ ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)T(t)\ ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)\ dsT(t) \\
&= R_\lambda T(t)
\end{aligned}$$

Donc :

$$T(t)R_\lambda = R_\lambda T(t) \tag{1.7}$$

D'après (1.6) et (1.7), en appliquant le lemme 1.3.1 le corollaire est prouvé

# Chapitre 2

# Approximation de Hille Yosida

Dans ce chapitre, nous présentons l'un des résultats les plus importants concernant les $C_0$-semi-groupes. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de $\mathrm{C}_0$-semi-groupe.
On citera à titre d'exemple le travail de lemle [7].

**Théorème 2.0.1 (Banach Steinhaus)** *Soit $E$ un espace de Banach, et $F$ un espace vectoriel normé. Soit $B \subset L(E, F)$.*

$$\forall x \in E \qquad \sup_{T \in B} \|Tx\| < \infty$$

*Alors :*

$$\sup_{T \in B} \|T\|$$

## 2.1 Théorème de Hille-Yosida

**Théorème 2.1.1 ( Hille-Yosida)** *. Un opérateur linéaire (non borné) $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t \geqslant 0} \in SG(1, 0)$ sur $E$ si et seulement si :*

*(a)* $\overline{D(A)} = E$ *et $A$ un opérateur fermé*

*(b)* $]0, +\infty[ \subset \rho(A)$ *et pour tout $\lambda > 0$ on a* $\|R(\lambda, A)\|_{B(E)} \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

### 2.1.1 Preuve du théorème (Condition nécessaire)

(a) Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe et d'après le Théorème (1.1.5) $A$ est fermé et $\overline{D(A)} = E$.

(b) D'après le Théorème (1.3.3) pour $\omega = 0, M = 1$ et $Re\lambda = \lambda$ $(car \lambda > 0)$, on a :

$$\|R(\lambda, A)\|_{B(E)} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Pour prouver que les conditions $(1) - (2)$ du Théorème de Hille-Yosida sont suffisantes pour que $A$ soit un générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe, nous aurons besoins de certains lemmes suivants :

**Lemme 2.1.1** *Soit $A$ satisfait les conditions* $(1) - (2)$ *du Théorème* (2.1.1) *et* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *alors :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in E$$

**Preuve.**
Soit $x \in D(A)$ alors pour tout $\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x &\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax = x \\ &\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda, A)Ax\| \\ &\leqslant \|R(\lambda, A)\|_{B(E)}\|Ax\| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \longrightarrow_{\lambda \to +\infty} 0 \end{aligned}$$

Puisque $\overline{D(A)} = E$, alors $\lambda R(\lambda, A)x \longrightarrow x$ quand $\lambda \longrightarrow \infty$, pour chaque $x \in E$. On définit maintenant, pour $\lambda > 0$, l'approximation de Yosida de $A$ par :

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \tag{2.1}$$

En effet :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda A R(\lambda, A) \\ &= \lambda R(\lambda, A)A \qquad \textit{d'aprs le corollaire } 1.3.1 \\ &= \lambda(\lambda R(\lambda, A) - I) \\ &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \end{aligned}$$

**Lemme 2.1.2** *Soit $A$ satisfaisant aux conditions* $(1) - (2)$ *du Théorème* (2.1.1) *, si $A_\lambda$ est l'approximation de Yosida de $A$ alors :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A),$$

**Preuve**

Soit $x \in D(A)$ Puisque la résolvante et l'opérateur $A$ commutent d'après le corollaire 1.3.1 on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda+\infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda+\infty} \lambda AR(\lambda, A)x \\ &= \lim_{\lambda+\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax \\ &= Ax \end{aligned}$$

**Lemme 2.1.3** *Soit $A$ satisfaisant aux conditions $(1)-(2)$ de Théorème 2.1.1, si $A_\lambda$ est l'approximation de Yosida de $A$, alors $A_\lambda$ générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe de contraction $e^{tA_\lambda}$. De plus , pour chaque $x \in E$ , $\lambda, \mu > 0$ on a :*

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| \leqslant t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|, \quad \forall t \geq 0.$$

**Preuve.**

D'après l'équation ( 2.1) , il est claire que $A_\lambda$ est un opérateur borné, il est donc le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $e^{tA_\lambda}$ d'opérateur linéaire borné avec $\left\|e^{tA_\lambda}\right\|_{B(E)} \leqslant 1,\ \forall t \geqslant 0$.

En effet :

1. . $\forall x, y \in E$ :

$$\begin{aligned} A_\lambda(\alpha x + \beta y) &= \lambda AR(\lambda, A)(\alpha x + \beta y) \\ &= \lambda R(\lambda, A)A(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha\lambda R(\lambda, A)Ax + \beta\lambda R(\lambda, A)Ay \\ &= \alpha A_\lambda x + \beta A_\lambda y \end{aligned}$$

Donc $A_\lambda$ est un opérateur linéaire. . $\forall x \in E$ :

$$\begin{aligned} \left\|A_\lambda x\right\| &= \left\|\lambda AR(\lambda, A)x\right\| \\ &= \left\|\lambda R(\lambda, A)Ax\right\| \\ &\leqslant \lambda\left\|R(\lambda, A)\right\|_{B(E)}\left\|Ax\right\| \\ &\leqslant \left\|Ax\right\| \\ &\leqslant \left\|A\right\|.\left\|x\right\| \leqslant C\left\|x\right\| \end{aligned}$$

Donc $A_\lambda$ est un opérateur borné.

. Puisque on a :

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}\right\| &= \left\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t - \lambda It}\right\| \\ &= \left\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t}e^{-\lambda It}\right\| \\ &\leqslant \left\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t}\right\|\left\|e^{-\lambda It}\right\| \\ &\leqslant e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t\|R(\lambda,A)\|} \\ &\leqslant e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t.\frac{1}{\lambda}} \\ &\leqslant e^{-\lambda t}e^{\lambda t} \\ &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Et donc $e^{tA_\lambda}$ est un $C_0$-semi-groupe de contraction .

2. Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^1 \frac{d}{ds}\big[e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\big]x\ ds$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\big[e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\big] &= tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu} - tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu}e^{tsA_\lambda}\\ &= t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\big\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}\big\| &\leqslant \int_0^1 \big\|t(A_\lambda x - A_\mu x)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\big\|ds\\ &\leqslant t\big\|A_\lambda x - A_\mu x\big\|\int_0^1 \big\|e^{tsA_\lambda}\big\|\big\|e^{t(1-s)A_\mu}\big\|ds\\ &\leqslant t\big\|A_\lambda x - A_\mu x\big\|\int_0^1 ds\\ &\leqslant t\big\|A_\lambda x - A_\mu x\big\|\end{aligned}$$

### 2.1.2 Preuve du théorème(Condition suffisante)

Soit $x \in D(A)$ et pour tout $\lambda, \mu > 0$, on a :

$$\big\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\big\| \leq t\big\|A_\lambda x - Ax\big\| + t\big\|Ax - A_\mu x\big\| \longrightarrow_{\lambda,\mu\to+\infty} 0 \quad (2.2)$$

On affirme que pour tout $x \in E$, on a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x,\ \forall t \geqslant 0 \quad (2.3)$$

En effet :
D'après (2.2) et Lemme (2.1.2), on obtient que $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy pour tout $x \in D(A)$. C'est à dire $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$ tel que $\big\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\big\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \lambda, \mu > \delta$, et $x \in D(A)$.
Comme on a $\overline{D(A)} = E$, on peut alors écrire :

$$\forall x \in E, \forall\varepsilon > 0, \exists x_n \in D(A) \quad \textit{tel que } \big\|x_n - x\big\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\big\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\big\| &= \big\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_n + e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n + e^{tA_\mu}x_n - e^{tA_\mu}x\big\|\\ &\leq \big\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_n\big\| + \big\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\big\| + \big\|e^{tA_\mu}x_n - e^{tA_\mu}x\big\|\\ &\leq \big\|e^{tA_\lambda}\big\|\big\|x_n - x\big\| + \big\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\big\| + \big\|e^{tA_\mu}\big\|\big\|x_n - x\big\|\\ &\leq 2\big\|x_n - x\big\| + \big\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\big\| \longrightarrow_{\lambda,\mu\to_{n\to\infty}\infty} 0\end{aligned}$$

C'est à dire, soit $x \in E$ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \lambda, \mu > \delta,\ \textit{tel que}\ \left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq \varepsilon.$$

Alors, $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy dans $E$ qui est complet. Donc, il existe un opérateur noté $T(t)x$, tel que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x.$$

Alors par le Théorème de Banach-Steinhaus et $\left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq 1$, on a $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in B(E)$
En effet, on a pour tout$x \in E$ :

$$\left\| T(t)x \right\| - \left\| e^{tA_\lambda}x \right\| \leq \left\| e^{tA_\lambda}x - T(t)x \right\| \longrightarrow_{\lambda \to +\infty} 0$$

Donc :

$$\left\| T(t)x \right\| \leqslant \left\| e^{tA_\lambda}x \right\|$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sup_{t \geqslant 0} \left\| T(t)x \right\| &\leq \left\| e^{tA_\lambda}x \right\|_E \\ &\leq \leq \sup_{t\geqslant 0} \left\| e^{tA_\lambda}x \right\|_E \\ &= \left\| e^{tA_\lambda}x \right\|_{B(E)} \\ &\leq 1 < +\infty \end{aligned}$$

Donc d'après le Théorème de Banach-Steinhaus $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est borné
Maintenant, on va vérifier que limite $T(t)$ est un $C_0$-semi-groupe de contraction.

(a) $T(0)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^0 x = x \Longrightarrow T(0) = I$

(b) $T(s+t)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = T(t)T(s)x.$

(c) $t \longrightarrow T(t)x$ est continu pour tout $t \geqslant 0$, car il représente une limite pour des fonctions continues $t \longmapsto e^{tA_\lambda}x$.

(d) On a $T(t)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x$, $\forall t \geqslant 0$ et $x \in E$, d'où :

$$\begin{aligned} \left\| T(t)x \right\| &= \left\| \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x \right\| \\ &\leqslant \lim_{\lambda \to +\infty} \left\| e^{tA_\lambda}x \right\| \\ &\leqslant \lim_{\lambda \to +\infty} \left\| e^{tA_\lambda} \right\| \|x\| \\ &\leqslant \|x\| \end{aligned}$$

Donc : $\left\| T(t) \right\|_{B(E)} \leqslant 1$

Ainsi, $T(t)$ est un $C_0$-semi-groupe de contraction dans $E$ .

Maintenant, on veut montrer que $A$ est un générateur infinitésimal de $T(t)$ .
Soit $x \in D(A)$, puis d'après (1.2) et (1.3) du Théorème 1.1.4 on a :

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \to +\infty} (e^{tA_\lambda} x - x) \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds \end{aligned}$$

Alors :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax \, ds \tag{2.4}$$

Donc il faut montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds = \int_0^t T(s)Ax \, ds$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds - \int_0^t T(s)Ax \, ds \right\| &= \left\| \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x - e^{sA_\lambda} Ax \, ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t e^{sA_\lambda} Ax - T(s)Ax \, ds \right\| \\ &\leqslant \int_0^t \left\| e^{sA_\lambda} A_\lambda x - e^{sA_\lambda} Ax \right\| \, ds \\ &\quad + \int_0^t \left\| e^{sA_\lambda} A_\lambda x - T(s)Ax \right\| \, ds \\ &\leqslant \int_0^t \left\| e^{sA_\lambda} \right\| \left\| A_\lambda x - Ax \right\| \, ds \\ &\quad + \int_0^t \left\| Ax \right\| \left\| e^{sA_\lambda} - T(s) \right\| \, ds \\ &\leqslant \left( \int_0^t ds \right) \\ &\quad \left( \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + \left\| Ax \right\| \sup_{s \in [0,t]} \left\| e^{sA_\lambda} x - T(s)x \right\| \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\left\| \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds - \int_0^t T(s)Ax \, ds \right\| \leqslant t \left( \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + \left\| Ax \right\| \sup_{s \in [0,t]} \left\| e^{sA_\lambda} x - T(s)x \right\| \right) \to 0$$

*si $\lambda$ tend vers $\infty$*
-Maintenant, soit $B$ le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ et soit $x \in D(A)$ , on affirme que : $A = B$.

En effet ,
. $x \in D(A)$, divisons (2.4) par $t > 0$ et par passage à la limite on voit que :

$$Bx = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax\ ds = Ax$$

Donc $x \in D(B)$ et par conséquent $D(A) \subset D(B)$ et $B_{|D(A)} = A$
. Si $x \in D(B)$ et $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. On a donc : $(\lambda I - A)$ est bijective c-à-d : $\exists! x' \in D(A)$ tel que $(\lambda I - A)x' = (\lambda I - B)x$
Puisque : $B_{|D(A)} = A$ il vient que

$$(\lambda I - B)x' = (\lambda I - B)x \Longrightarrow x' = x$$

Donc $x \in D(A)$ et par conséquent $D(B) \subset D(A)$
Finalement on voit que $D(A) = D(B)$ et $A = B$

Nous avons montré donc que $A$ est le générateur infinitésimal du $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ et d'après le Théorème de l'unicité de l'engendrement il résulte que $A$ est unique

**Théorème 2.1.2** *Soient $\{T(t)\}_{t \geqslant 0} \in SG(M, \omega)$ et $A$ son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :*

$$\left\| R(\lambda, A)^n \right\|_{B(E)} \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

**Preuve.**
Soit $\{T(t)\}_{t \geqslant 0} \in SG(M, \omega)$. Alors :

$$\left\| T(t) \right\|_{B(E)} \leqslant Me^{\omega t},\ \forall t \geqslant 0$$

Compte tenu du Théorème 1.3.1, si $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$, et :

$$R(\lambda, A) = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\ dt,\ \forall x \in E$$

De plus :

$$\left\| R(\lambda, A) \right\|_{B(E)} \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}$$

Il est claire que :

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = -\int_0^\infty te^{-\lambda t} T(t)x\ dt$$

et par récurrence on peut montrer que :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x\ dt.$$

d'autre part, on a :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ et \lambda \in \rho(A)$$

Par suite, on a :

$$(-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)x \ dt, \ \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

D'où, il résulte que :

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x \ dt, \ \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)^n x\| &\leqslant \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \|t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x\| \ dt \\
&\leqslant \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-(Re\lambda - \omega)t} \|x\| \ dt \\
&\leqslant \frac{M}{(n-2)!(Re\lambda - \omega} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-(Re\lambda - \omega)t} \|x\| \ dt \\
&\leqslant \frac{M}{0!(Re\lambda - \omega)^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{-(Re\lambda - \omega)t} \|x\| \ dt \\
&\leqslant \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^{n-1}} \frac{1}{(Re\lambda - \omega)} \|x\|
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

# Chapitre 3

# Application sur $C_0$-semi-groupe

Dans ce chapitre nous considérons trois problèmes d'équations différentielle ( problème de Cauchy homogène et non homogène et équation différentielle semi linéaire ), nous nous intéresserons à l'existence et l'unicité de la solution utilisant la théorie de $C_0$-semi-groupes.
pour voir plus des détailles voir [1, 4, 6]

## 3.1 Problème de Cauchy

### 3.1.1 Problème de Cauchy homogène

On s'intéresse dans un premier temps à l'étude du problème de Cauchy homogène de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad \forall t \in J = [0, a] \\ y(0) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

où $t$ est la variable de temps, $y$ est une fonction à valeur dans l'espace de Banach $E$, avec $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire.

**Définition 3.1.1 (Solution classique)** *(a) On appelle solution classique la fonction $y(t) : \mathbb{R}_+ \to E$ telle que $y$ est continue pour tout $t \geq 0$ continûement différentielle et $y(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et* (3.1) *est satisfait.*

*(b) Notez que quand $y(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et $y$ est continue à $t = 0$ donc* (3.1) *ne peut pas avoir une solution pour $x \notin D(A)$*

**Définition 3.1.2 (Solution intégrale)** *Une fonction continue* $x : \mathbb{R}_+ \to E$ *est dite solution intégrale de* (3.1) *si* $\int_0^t x(s)\ ds \in D(A)$ *pour tout* $t \geqslant 0$ *et*

$$y(t) = x + A\int_0^t y(s)\ ds \quad pour\ toutt \geqslant 0$$

**Définition 3.1.3 (Solution mild)** *On dit que* $x : \mathbb{R}_+ \to E$ *est une solution mild du problème* (3.1) *de valeur initial* $x$ *si* $y$ *est continue et :*

$$\int_0^t y(s)\ ds \in D(A)\ et\ y(t) = x + A\int_0^t y(s)\ ds$$

**Théorème 3.1.1** *Soit* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *un* $C_0$*-semi-groupe dans* $E$ *de générateur infinitésimal* $A$*. Alors pour chaque* $x \in D(A)$*. Le problème* 3.1 *admet une solution unique* $y$ *définie par :*

$$y(t) = T(t)x, \quad \forall t \geqslant 0. \geqslant$$

**Preuve.**

L'existence de la solution découle de la proposition (1.1.2).
Pour prouver l'unicité, on considère une autre solution $v$. Fixons $t > 0$ et posons :

$$z(s) = T(t-s)v(s), \quad s \in [0,t].$$

D'après la proposition 1.1.2 on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}z(s) &= -AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= T(t-s)Av(s) - AT(t-s)v(s) \\ &= AT(t-s)v(s) - AT(t-s)v(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aussi la fonction $z$ est constante, et par intégration sur $[0,t]$ on a

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{d}{ds}z(s) = 0 \\ &z(t) - z(0) = 0 \\ &T(0)v(t) - T(t)v(0) = 0 \\ &v(t) = T(t)x\ \forall t \geqslant 0 \end{aligned}$$

### 3.1.2 Problème de Cauchy linéaire Non homogène

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad t \in J = [0,a] \\ \\ y(0) = x \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow E$ est continue. Nous supposerons dans cette section que $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ de sort que l'équation homogène correspondant, i.e avec $f \equiv 0$ a une solution unique pour chaque valeur initiale $x \in D(A)$.

**Définition 3.1.4** *Une fonction $y : [0,a[\longrightarrow E$ est une solution classique de* (3.2) *sur* $[0,a[$ *si et seulement si :*

*(a) $y$ est continue dans* $[0,a[$ *;*

*(b) $y$ est continument différentiable sur* $[0,a[$ *;*

*(c) $y(t) \in D(A)$, pour $t \geqslant 0$ et* (3.2) *est satisfait sur* $[0,a[$ *;*

**Définition 3.1.5** *Une fonction $y : J \to E$ est dite solution absolument continue où solution forte du problème (3.2), si $y$ est absolument continue sur $J$, $y' \in \mathcal{L}^1(J,E)$, $y(t) \in D(A)$ pp tout $t \in ]0,a]$ et elle satisfait $y'(t) = Ay(t) + f(t)$ pp tout $t \in ]0,a]$ et $y(0) = x$.*

**Remarque**
Toute solution classique est une solution forte (l'inverse n'est pas toujours vrais).

**Théorème 3.1.2 (Principe de Duhamel)** *Toute solution forte du problème* (3.2) *est donnée par la formule :*

$$y(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.3}$$

*en particulier toute solution classique est donnée par la formule (3.3). La formule (3.3) est dite formule de variation des constantes.*

**Preuve.**
Si $y$ est une solution forte de (3.2), $t \in [0,a]$, on défini $g : [0,t] \to E$ par :

$$g(s) = T(t-s)y(s), \quad s \in [0,t]$$

alors $g$ est p.p différentiable sur $[0,t]$ et sa dérivée appartient à $L^1([0,t],E)$ et

$$\begin{aligned} g'(s) &= -AT(t-s)y(s) + T(t-s)y'(s) \\ &= -AT(t-s)y(s) + T(t-s)Ay(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \quad pptout\ s \in [0,t] \end{aligned}$$

or $f \in L^1([0,a],E)$ donc l'application $s \mapsto T(t-s)f(s)$ est intégrable sur $[0,t]$.
En intégrant sur $[0,t]$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g'(s) = \int_0^t T(t-s)f(s) \\
&[T(t-s)y(s)]_0^t = \int_0^t T(t-s)f(s) \\
&T(0)y(t) - T(t)y(0) = \int_0^t T(t-s)f(s) \\
&y(t) - T(t)x = \int_0^t T(t-s)f(s) \\
&y(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)
\end{aligned}$$

**Corollaire 3.1.1** *Si $f \in L^1([0;a];E)$ alors pour chaque $y \in E$ le problème de valeur initial* (3.2)*, admet au plus une solution. Et Cette solution est donnée par* 3.3

**Remarque**
Pour chaque $f \in L^1([0;a];E)$ le coté droit de (3.3) est une fonction continue sur $[0;a]$. Il est naturel de considérer comme une solution généralisée de (3.2), même si elle n'est pas différentiable et ne satisfait pas à l'équation strict dans le sens de la définition (3.1.4)

**Définition 3.1.6** *Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, soit $x \in E$ et $f \in L^1([0,a];E)$, la fonction $y \in C([0,a];E)$ donne par :*

$$y(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \quad 0 \leqslant t \leqslant a$$

*Est la solution mild du problème* (3.2) *sur* $[0;a]$

**Remarque**

(a) La définition de la solution mild du problème de valeur initiale concide quand $f \equiv 0$ à la définition de $T(t)x$ comme la solution mild de l'équation homogène correspondant.
(b) Il est claire que pas tout solution mild de (3.2) est une solution classique, même dans le cas $f \equiv 0$
(c) Pour $f \in L^1([0;a];E)$, le problème 3.2 admet par la définition (3.1.6) une solution mild unique.

(d) Nous commençons par montrer que la continuité de $f$ en générale n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'une solution de problème (3.2)

**Exemple.** Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, soit $x \in E$ tel que $T(t)x \notin D(A)$ pour tout $t \geqslant 0$. Soit $f(s) = T(s)x$ alors $f(s)$ est continue pour $s \geqslant 0$.
Considérons le problème de valeur initiale

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + T(t)x \\ \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Le problème (3.4) n'est pas de solution , même si $y(0) = 0 \in D(A)$.
En effet la solution mild du problème (3.4) est

$$y(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)x \; ds = tT(t)x$$

Mais $tT(t)x$ n'est pas différentiable pour $t > 0$ donc ne peut pas être une solution du problème (3.4)

**Théorème 3.1.3** *Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, soit $f \in L^1([0,a];E)$ continue sur $[0,a]$ et soit*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) \; ds, \;\; 0 \leqslant t \leqslant a \tag{3.5}$$

*Le problème (3.2) admet une solution $y$ sur $[0,a]$ pour tout $x \in D(A)$, si l'une des condition suivantes est satisfait*

*(a) $v(t)$ est continûment différentiable sur $]0,a[$*

*(b) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < a$ et $Av(t)$ est continue sur $]0,a[$*
*Alors :*
*• $\forall x \in D(A)$, le problème (3.2) admet une unique solution forte.*
*Et*
*• S'il existe $x \in D(A)$ tel que le problème (3.2) admet une solution forte alors $v$ satisfait i) et ii).*

**Preuve**
Si le problème (3.2) admet une solution $y$ pour certain $x \in D(A)$, alors cette solution donne par (3.3), par conséquent :

$$v(t) = y(t) - T(t)x$$

est différentiable pour $t > 0$,( différence de deux fonction différentiable) et :

$$v'(t) = y'(t) - T(t)Ax$$

est continue sur $]0, a[$
Donc (1) est vérifiée de plus si $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ pour $t \geqslant 0$ alors :

$$v(t) = y(t) - T(t)x \quad pour t > 0$$

Et

$$Av(t) = Ay(t) + AT(t)x = y'(t) - f(t) - T(t)Ax$$

est continue sur $]0, a[$ donc (2) est vérifiée
D'autre part, pour $h > 0$ on a :

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s)\, ds \quad (3.6)$$

De la continuité de $f$, il est claire que le second terme de la côté droite de (3.6) admet la limite $f(t)$ quand $h \to 0$
Si $v(t)$ est continûment différentiable sur $]0, a[$, il résulte de (3.6) que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < a$ et $Av(t) = v'(t) - f(t)$.
Puisque $v(0) = 0$, il en résulte que $x(t) = T(t)y + v(t)$ est une solution du problème (3.2), pour $x \in D(A)$.
Si $v(t) \in D(A)$, il résulte de (3.6) que $v(t)$ est dérivable en $t$ et la dérivée droite $D^+v(t)$ de $v(t)$ vérifie

$$D^+v(t) = Av(t) + f(t)$$

Puisque $D^+v(t)$ est continue, $v(t)$ est continûment différentiable et $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Et puisque $v(0) \equiv 0$, $y(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de problème (3.2) pour $x \in D(A)$.

• Les deux corollaires suivants sont des conséquences du théorème précédent

**Corollaire 3.1.2** *Si $A : D(A) \to E$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $f$ est de classe $C^1$ sur $[0, a]$ alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (3.2) admet une unique solution classique.*

**Preuve.**
On a :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds = \int_0^t T(s) f(t-s)\, ds \qquad (3.7)$$

Donc $v$ est différentiable pour $t > 0$ et sa dérivée est

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)\,ds \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds \end{aligned}$$

est continue sur $]0, a[$. le résulte découle donc du théorème (3.1.3) (1)

**Corollaire 3.1.3** *Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Soit $f \in L^1([0,a];E)$ une fonction continue sur $]0,a[$.*

*Si $f(s) \in D(A)$ pour $0 < t < a$ et $Af(s) \in L^1([0,a];E)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (3.2) admet une solution classique sur $[0,a]$.*

***Preuve.***

*D'après la condition $(i)$ il en résulte que pour $s > 0$, $T(t-s)f(s) \in D(A)$ et que*

$$AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$$

*est intégrable. Par conséquent $v(t)$ définie par (3.5) vérifiant $v(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et*

$$\begin{aligned} Av(t) &= A\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \\ &= \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \end{aligned}$$

*est continue d'après le théorème (3.1.3) (2)*

***Définition 3.1.7*** *Une fonction $y$ qui est dérivable presque partout sur $[0,a]$ tel que $y' \in L^1([0,a];E)$ est appelée une solution forte du problème (3.2) si $y(0) = x$ et $y'(t) = Ax(t) + f(t)$ presque partout sur $[0,a]$.*

## 3.2 Équations différentielles semi-linéaire

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), & t \geqslant 0 \\ y(0) = x \end{cases} \tag{3.8}$$

*Où $A$ est le générateur infinitésimal un $C_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur un espace de Banach $E$, et $f : D = \mathbb{R}^+ \times E \to E$ est continue.*

***Définition 3.2.1*** *On dit que $x$ est une solution classique de l'équation* (3.8) *si et seulement si :*

*(a)* $y \in C(\mathbb{R}^+, E)$, $y(t) \in D(A)$, $t \geqslant 0$

*(b)* *$y$ satisfait l'équation* (3.8)

***Définition 3.2.2*** *Une fonction $y : J \to E$ est dite mild solution où $C_0$-solution du problème (3.8), si $(t, y(t)) \in D$, $\forall t \in J$ et satisfait l'équation intégrale :*

$$y(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds$$

***Définition 3.2.3*** *une fonction $f : D \to E$ est dite :*

**i)** *Localement lipscitzienne par rapport à sa 2ème variable s'il existe $r > 0$ et $L > 0$ $(L = L_x)$ tel que $J \times B(x, r) \subset D$ et*

$$\|f(t, y) - f(t, v)\| \leq L\|y - v\|, \quad \forall y, v \in B(x, r) \text{ et } t \in J.$$

**ii)** *Localement lipscitzienne par rapport à ses deux variables s'il existe $\alpha > 0$, $r > 0$ et $L > 0$ $(L = L_x)$ tel que $[0, \alpha] \times B(x, r) \subset D$ et*

$$\|f(t, y) - f(s, v)\| \leq L(\|y - v\| + \|t - s\|), \quad \forall y, v \in B(y, r) \text{ et } t, s \in [0, \alpha].$$

**iii)** *Globalement lipscitzienne par rapport à sa 2ème variable s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\|f(t, y) - f(t, v)\| \leq L\|y - v\|, \quad \forall (t, y), (t, v) \in D.$$

**iv)** *Globalement lipscitzienne par rapport à ses deux variables s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\|f(t, y) - f(s, v)\| \leq L(\|y - v\| + \|t - s\|), \quad \forall (t, y), (t, v) \in D.$$

***Théorème 3.2.1*** *Supposons que $f : \mathbb{R}^+ \times E \to E$ est Lipschitz par rapport à la seconde variable alors pour tout $x \in E$, l'équation* (3.8) *a une solution "mild" unique sur $\mathbb{R}^+$.*

***Preuve***

*Soit la solution mild* $y(t) = T(t)x + \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s, y(s))\, ds = g(y)(t)$, $t \geqslant 0$

*Nous devons montrer que $y$ est une solution "mild" de l'équation* (3.8) *si et seulement si $gy = y$.*

*On a* $g : C([0,a];E) \longrightarrow C([0,a];E)$ .
*Soient* $y_1,\ y_2 \in C([0,a];E)$ *:*

$$(gy_1)(t) - (gy_2)(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s,y_1(s) - f(s,y_2(s))\ ds$$

*Soit* $S_a = \sup_{t\in[0,a]} \|T(t)\| \leqslant Me^{\omega a} < \infty$

$$\big\|(gy_1)(t) - (gy_2)(t)\big\| \leqslant S_a K t \big\|y_1 - y_2\big\|$$

$K$ *étant la constante de Lipschitz pour* $f$.
*On a* $g^2 = g \circ g$, *alors*

$$\begin{aligned} \big\|g^2y_1(t) - g^2y_2(t)\big\| &\leqslant S_aK\int_0^t \big\|(gy_1)(t) - (gy_2)(t)\big\|\ ds \\ &\leqslant S_aK\int_0^t (S_aKs)\big\|y_1 - y_2\big\|\ ds \quad \forall t\in[0,a] \\ &= \frac{(S_aK)^2}{2!}t^2\big\|y_1 - y_2\big\| \quad \forall t\in[0,a] \end{aligned}$$

*Donc :*

$$\big\|g^ny_1(t) - g^ny_2(t)\big\| \leqslant \frac{(S_aK)^n}{n!}t^n\big\|y_1 - y_2\big\| \quad \forall t\in[0,a]$$

*Alors :*

$$\big\|g^ny_1(t) - g^ny_2(t)\big\| \leqslant \frac{(S_aK)^n}{n!}a^n\big\|y_1 - y_2\big\| \quad \forall t\in[0,a]$$

*Puisque* $\dfrac{(S_aK)^n}{n!}a^n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *donc* $\exists p \in \mathbb{N}$ *tel que* $\dfrac{(S_aK)^p}{p!}p^n < 1$.
*Il en résulte que* $g^p = g\circ g\circ .......\circ g$ *est une contraction puis* $\exists! y \in C_a$ *tel que* $g^p y = y$

***Théorème 3.2.2*** *Si* $A : D(A) \subseteq E \to E$ *le générateur infinitésimal d'un* $C_0$*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de contraction et* $f : D \to E$ *continue et localement lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable, Alors :*
*Il existe* $a > 0$ *tel que le problème ( 3.8) admet une unique* $C_0$*-solution définie sur* $[0,a]$.

***Preuve.*** $D$ *étant ouvert, il existe alors* $a > 0$ *et* $r > 0$ *tel que :* $[0,a] \times B(x,r) \subset D$, $f$ *est continue et localement lipschitzienne par* *rapport à sa 2 ème variable, en diminuant a et/ou r si nécessaire, il existe* $M > 0$ *tel que :* $\|f(t,y)\| \leq M$, $\forall (t,y) \in [0,a] \times B(x,r)$ *et*

$$\|f(t,y) - f(t,v)\| \leq L\|y - v\|, \quad \forall (t,y),(t,v) \in [0,a] \times B(x,r)$$

*Soit* $\rho : E \to E$ *définie par :*

$$\rho(y) = \begin{cases} u, & si \;\; u \in B(x,r)\,; \\ \frac{r}{\|u-x\|}(u-x)+x, & si \;\; u \in E \backslash B(x,r). \end{cases}$$

$\rho$ *envoie alors* $E$ *dans* $B(x,r)$ *et elle est lipschitzienne de constante 2. On définit :* $g : [0,a] \times E \to E$ *par* $g(t,u) = f(t,\rho(u))$, $(t,u) \in J \times E$. $f$ *est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable sur* $[0,a] \times B(x,r)$*, donc* $g$ *satisfait les même propriétés.*
*D'après le Lemme 3.2.1, le problème de Cauchy :*

$$u' = Au + g(t,u); \quad u(0) = u_0$$

*à une unique* $C_0$*-solution* $u : [0,b] \to E$*. Comme* $u(0) = u_0$ *et* $u$ *est continue en* $t = 0$*, diminuant* $b$ *si nécessaire pour avoir* $u(t) \in B(u_0,r)$ *pour* $t \in [0,b]$*. Dans ce cas on a :* $\rho(y) = y$ *et donc* $g(t,y) = f(t,y)$ *et le problème (3.8) admet alors une unique* $C_0$*-solution.*

# Bibliographie


[1] *Y.H.Chang, G.C.Jau, and C.V.Pao, "Blowup and global existence of solutions for a catalytic converter in interphase heat-transfer" Nonlinear Analysis. Real World Applications, vol. 9, no 3, pp 822-829, 2008.*

[2] *Yu.Hsien.Chang and Cheng.hong Hong, "Some Applications of $C_0$-Semigroups", Journal of Applied Mathmaics Vol 2012*

[3] *Kazuaki Taira , "Analytic Semigroups and Semilinear Initial Boundary Value Problems " London Mathemmatical Society Lecteur Note Series, 223*

[4] *S. LUBKIN, $C_0$-Semigroups and Applications University of Rochester New York, U.S.A pp 184-192*

[5] *D.T.Leigthon and Chang, " theory for fast-ignithing catalytic converters " AICHE journal vol 41 no, 8 pp 1898-1914,1995*

[6] *LEMLE Ludovic Dan , " Semi-Groupes integres d'operateurs,l'unicite des pre-generateur et application" Universite blaise pascal de clermont-ferrand*

[7] *A.Pazy, Semigroups of linear operator and application to Partial Differential Equations The Hebrew University of Jerusalem Institute of Mahematics and comptuer Science Givat Ram 91904 pp 100-109*