République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

MEDAHI ADEL

L'OSCILLATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Soutenu le 05/06/2018

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. KHIAR HAMID	M.A.A	C.U.B.B.A.T.
Examinateurs :	Mme. BELATTAR ZOKHA	M.C.B	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Mr.BENAISSA CHERIF Amin	M.C.B	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2017 – 2018

Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie ALLAH qui m'aide et ma donné la patience et le courage durant ces langues années d'études.

Je remercie tout d'abord mon directeur de mémoire, Monsieur A.BENAISSA CHERIF *pour son soutien attentif au progrès de mon apprentissage. Il peut être sûr que ses orientation ont été une aide précieuse mon seulement pour ce mémoire mais aussi pour la suite de mes études.*

Je remercie aussi les membres du jury, Monsieur H. KHIAR *et Mme* B. ZOKHA *dont les observations me seront sans doute très dans mes études.*

Je remercie particulièrement mes très chers parents, mes adorables sœurs, mes frées, mon cher neveu MEDAHI MOUAD.

Enfin j'exprime ma profonde gratitude a tous les enseignants de math du département de mathématique et informatique de centre universitaire ain témouchent.

Table des matières

Introduction générale

Les équations différentielles est un champ large dans les mathématiques pures et appliquées sur l'existence et l'unicité des solutions. Les mathématiques appliquées soulignent l'importance de la justification rigoureuse du comportement qualitatif des solutions (oscillation, périodicité, stabilité, etc.)

La théorie de l'oscillation a un champ d'applications très vaste, par exemple dans la théorie des dynamiques des gaz en astrophysique, dans la mécanique des fluides. les solutions d'intérêt physique sont non oscillatoires bornées possédant un zéro positif.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'oscillation et le comportement asymptotique pour certaines d'équations différentielles. Le contenu de ce mémoire est basé sur les travaux de L.Erbe et al [3, 4] et S. Saker [1, 2].

Ce mémoire est réparti en quatre chapitres.

Le premier chapitre intitulé "Préliminaires", est consacré aux définitions et notations qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

Le deuxième chapitre a pour but l'étude l'oscillation et le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles semi-linéaire de la deuxième ordre de la forme suivante :

$$\left(r\left(x'\right)^{\gamma}\right)'(t)+p(t)\,x^{\gamma}(\tau(t))=0, \qquad \text{pour tout } t\geq t_0.$$

Ce problème à été présenté par L. Erbe et al.[3].

Le troisième chapitre où on va traiter le comportement asymptotique de la solution d'une équation différentielle semi linéaire du troisième ordre

$$\left[b(t)\left\{\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'}\right\}^{\gamma}\right]^{'} + q(t)x^{\gamma}(t) = 0, \qquad \text{pour } t \geq t_0,$$

Tous les théorèmes énoncés dans ce chapitre sont des critères initié par L. Erbe et al.[4].

Le quatrième chapitre a pour but l'étude l'oscillation pour une équation différentielle de retard neutre de second ordre

$$\left(r\left((x(t)+p(t)x(\tau(t)))^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t) + q\left(t\right)x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right) = 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_0 > 0.$$

Ce chapitre est basé sur les travaux de M. Bohner et al.[5].

Mots clés :

Équation différentielle ordinaire, Théorie de l'oscillation.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Définition de l'oscillation

Définition 1.1.1. *On dit qu'une fonction $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ est éventuellement positive, s'il existe $t_0 \in [a, +\infty)$ tel que*

$$x(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, +\infty).$$

Définition 1.1.2. *On dit qu'une fonction $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ est éventuellement négative, s'il existe $t_0 \in [a, +\infty)$ tel que*

$$x(t) < 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, +\infty).$$

Définition 1.1.3. *On dit qu'une fonction $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ est oscillante sur $[a, +\infty)$ si elle est ni éventuellement positive ni éventuellement négative. Elle est dite non oscillante dans le cas contraire.*

Exemple 1.1.1. *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$x^{(2)}(t) + x(t) = 0, \qquad \textit{pour } t \in [0, +\infty).$$

Elle a une solution $x(t) = \sin(t)$ oscillante.

Lemme 1.1.1. *Soit A, B, C et α des constantes, tels que $B > 0$. Nous avons alors l'inégalité suivante*

$$Ax - B(x - C)^{1+\frac{1}{\alpha}} \leq AC + \frac{\alpha^{\alpha} B^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} A^{\alpha}}, \qquad \textit{pour } x \geq 0. \tag{1.1}$$

Chapitre 2

Oscillation pour une équation différentielle semi linéaire du seconde ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation différentielles semi-linéaires d'ordre deux.

$$\left(r\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t)+p\left(t\right)x^{\gamma}\left(\tau\left(t\right)\right)=0, \qquad \text{pour tout } t\in\left[t_0,+\infty\right). \tag{2.1}$$

On supposera que le probléme (2.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}^2\left(\left[t_0,+\infty\right),\mathbb{R}\right)$. On impose les conditions suivantes :

(A_1) $\gamma>0$ est de la forme $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où γ_1, γ_2 sont impairs positifs et $t_0\geq 0$.

(A_2) Les fonctions r et p sont valeurs réelles et sont continues positives définies sur $\left[t_0,+\infty\right)$.

(A_3) La fonction $\tau:\left[t_0,+\infty\right)\to\left[t_0,+\infty\right)$ est continue, telle que

$$\tau\left(t\right)\leq t, \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty}\tau\left(t\right)=+\infty.$$

2.2 Cas où l'équation (2.1) admet une solution non oscillante

Dans cette section, nous supposons que l'équation (2.1) admet une solution éventuellement positive (le raisonnement reste valable si elle est éventuellement négative).

Lemme 2.2.1. *Supposons que l'équation (2.1) admet une solution éventuellement positive x sur $[t_0, +\infty)$, tel que*

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} dt = +\infty. \tag{2.2}$$

Alors, il existe $T \in [t_0, +\infty)$, suffisamment assez grand, telle que

$$x^{'}(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [T, +\infty).$$

Démonstration.
Si x est une solution éventuellement positive de l'équation (2.1).
Alors il existe $t_1 \in [t_0, +\infty)$, tels que

$$x(t) > 0, \qquad x(\tau(t)) > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

D'après (2.1), on a

$$\left(r\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t) = -p\,(t)\,x^{\gamma}\,(\tau\,(t)) < 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Montrons que

$$r(t)(x^{'}(t))^{\gamma} \geq 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Suppose le contraire c'est-à-dire, il existe $t_2 \geq t_1$, tel que

$$\xi = r(t_2)(x^{'}(t_2))^{\gamma} < 0.$$

Puisque la fonction $t \to r\left(x^{'}\right)^{\gamma}$ est strictement décroissante sur $[t_1, +\infty)$, alors

$$r(t)(x^{'}(t))^{\gamma} \leq \xi, \qquad \text{pour tout } t \geq t_2.$$

Ce qui implique

$$x^{'}(t) \leq \left(\frac{\xi}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour tout } t \geq t_2.$$

En intégrant la dernière inégalité entre t_2 à t, on obtient

$$x(t) \leq x(t_2) + \xi^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_2}^{t} \left(\frac{1}{(r(s)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} ds.$$

D'après (2.2), on obtient que $x\,(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.
D'ou la contradiction. □

Lemme 2.2.2. *Supposons que l'équation* (2.1) *admet une solution éventuellement positive x sur $[t_0, +\infty)$ et* (2.2) *vérifiée, tel que*

$$r^{'}(t) \geq 0, \quad \textit{pour } t \in [t_0, +\infty), \quad \textit{et} \quad \int_{t_0}^{+\infty} \tau^{\gamma}(t) p(t) dt = +\infty. \tag{2.3}$$

Alors, il existe $T \in [t_0, +\infty)$, suffisamment assez grand, telle que

$$x^{(2)}\,(t) \leq 0, \qquad x\,(t) > tx^{'}\,(t)\,, \qquad \left(\frac{x}{t}\right)^{'} < 0, \quad \textit{pour tout } t \in [T, +\infty).$$

Démonstration.
Par le lemme 2.2.1, nous avons $x^{'} > 0$, sur $t \in [T, +\infty)$. Montrons que $x^{(2)} \leq 0$, sur $[T, +\infty)$. On a

$$\gamma r\,(t)\, x^{(2)}\,(t) \left(x^{'}\right)^{\gamma-1} = \left(r \left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t) - r^{'}\,(t) \left(x^{'}\,(t)\right)^{\gamma}, \qquad \text{pour tout } t \geq T.$$

Comme $\left(r\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'} < 0$ et $r^{'} \geq 0$ sur $[T, +\infty)$, on obtient

$$\gamma r\,(t)\, x^{(2)}\,(t) \left(x^{'}\right)^{\gamma-1} \leq 0, \qquad \text{pour tout } t \geq T.$$

d'où $x^{(2)}\,(t) \leq 0$ sur $[T, +\infty)$.
Ensuite, nous montrons que $\left(\frac{x}{t}\right)^{'} < 0$ sur $[T, +\infty)$. Soit

$$v(t) := x(t) - tx^{'}(t), \qquad \text{pour tout } t \geq T.$$

Alors, pour tout $t \in [T, +\infty)$, $v^{'}(t) := -tx^{''}(t) \geq 0$, c'est-à-dire v est strictement croissante sur $[T, +\infty)$. Montrons qu'il existe $t_2 \in [T, +\infty)$, telle que $v(t) > 0$ sur $[t_2, +\infty)$. On suppose le contraire c'est-à-dire, $v(t) < 0$ sur $t_2 \in [T, +\infty)$, par dérivation de la fonction $\frac{x(t)}{t}$, sur $t \in [t_2, +\infty)$, on trouve

$$\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{'} = \frac{-x(t) + tx^{'}(t)}{t^2} = -\frac{v(t)}{t^2} > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_2, +\infty)\,. \tag{2.4}$$

Donc $\frac{x}{t}$ est strictement croissante sur $[t_2, +\infty)$, on choisit $t_3 \in [t_2, +\infty)$, telle que

$$\tau(t) \geq \tau(t_3), \qquad \text{pour tout } t \geq t_3.$$

Alors
$$\frac{x(\tau(t))}{\tau(t)} \geq \frac{x(\tau(t_3))}{\tau(t_3)} := d > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_3.$$
En intégrant l'équation (2.1) entre t à t_3 , on obtient
$$\int_t^{t_3} p(s)x^\gamma(\tau(s))ds = -r(t_3)(x'(t_3))^\gamma + r(t)(x'(t))^\gamma.$$
Donc
$$\begin{aligned} r(t_3)(x'(t_3))^\gamma &\geq \int_t^{t_3} p(s)x^\gamma(\tau(s))ds, \\ &\geq d^\gamma \int_t^{t_3} p(s)\tau^\gamma(s)ds. \end{aligned}$$
Ce qui donne la contradiction par (2.3).

Par (2.4), on obtient $\left(\frac{x}{t}\right)' < 0$ sur $[t_2, +\infty)$. □

Dans la suite, nous considérons l'équation (2.1) dans le cas particulier $r(t) \equiv 1$, c'est-à-dire
$$\left(\left(x'\right)^\gamma\right)'(t) + p(t)\,x^\gamma(\tau(t)) = 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_0. \tag{2.5}$$
Pour la simplification, on note
$$\begin{aligned} P(t) &:= p(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^\gamma, \\ q_* &:= \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t s^{\gamma+1}P(s)ds, \\ p_* &:= \liminf_{t\to\infty} t^\gamma \int_t^{\infty} P(s)ds. \end{aligned}$$
Lemme 2.2.3. *Supposons que x une solution éventuellement positive de l'équation (2.5), tel que*
$$\int_{t_0}^{+\infty} P(t)\,dt < +\infty. \tag{2.6}$$
Soit
$$w(t) := \left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^\gamma, \qquad r := \liminf_{t\to\infty} t^\gamma w(t), \qquad \textit{et} \qquad R := \limsup_{t\to\infty} t^\gamma w(t).$$
Alors
$$p_* + q_* \leq 1, \qquad p_* \leq r - r^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

Démonstration.

D'après le lemme 2.2.1, il existe $t_1 \in [t_0, +\infty)$, tel que
$$x'(t) > 0, \quad x(t) > 0, \quad x(\tau(t)) > 0, \quad \text{sur } [t_1, +\infty).$$

Alors $w(t) \geq 0$ pour $t \in [t_1, +\infty)$. Par dérivation de la fonction w, on obtient

$$\begin{aligned} w^{'}(t) &= \frac{\left(\left(x^{'}(t)\right)^{\gamma}\right)^{'}}{x^{\gamma}(t)} - \frac{\left(x^{'}(t)\right)^{\gamma}\left(x^{\gamma}(t)\right)^{'}}{x^{2\gamma}(t)} \\ &= \frac{\left(\left(x^{'}(t)\right)^{\gamma}\right)^{'}}{x^{\gamma}(t)} - \gamma\left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma}\frac{x^{'}(t)}{x(t)}. \end{aligned}$$

De (2.5), nous obtenons

$$w^{'}(t) = -\frac{p(t)\, x^{\gamma}(\tau(t))}{x^{\gamma}(t)} - \gamma\left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma}\frac{x^{'}(t)}{x(t)}.$$

Puisque $\tau(t) \leq t$ et $\frac{x}{t}$ est strictement décroissante sur $[t_1, +\infty)$, alors

$$\frac{x(t)}{t} \leq \frac{x(\tau(t))}{\tau(t)}.$$

Par la dernière inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} w^{'}(t) &\leq -\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} p(t) - \gamma\left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma+1} \\ &= -P(t) - \gamma\left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Substituons $w(t)$ dans la derniére inégalité, on obtient

$$w^{'}(t) \leq -P(t) - \gamma\left[w(t)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}},$$

donc

$$w^{'}(t) + P(t) + \gamma\left[w(t)\right]^{1+\frac{1}{\gamma}} \leq 0. \tag{2.7}$$

Puisque $P(t) > 0$ et $w(t) > 0$, pour $t \geq t_1$, alors par (2.7), on a $w^{'}(t) \leq 0$, pour $t \geq t_1$, donc w est strictement décroissant sur $[t_1, +\infty)$. Par le résulte de Lemme 2.2.2, on a

$$w(t) := \left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma} \leq \frac{1}{t^{\gamma}}, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty).$$

Ce qui implique $\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$ et

$$r \leq R \leq 1.$$

Par intégration de (2.7), entre t à $+\infty$, on obtient

$$w(t) \geq \int_t^{+\infty} P(s)ds + \gamma\int_t^{+\infty}\left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ds.$$

En multipliant les deux côtés de la dernière inégalité par t^{γ}, on obtient

$$t^{\gamma} w(t) \geq t^{\gamma}\int_t^{+\infty} P(s)ds + \gamma t^{\gamma}\int_t^{+\infty}\left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ds. \tag{2.8}$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après les définitions de p_* et r, nous pouvons choisir $t_1 \in [T, \infty)$, suffisamment grand, telle que

$$t^\gamma \int_t^\infty P(s)ds \geq p_* - \varepsilon, \qquad t^\gamma w(t) \geq r - \varepsilon, \qquad \text{pour } t \geq t_1. \tag{2.9}$$

Substituons (2.9) dans (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} t^\gamma w(t) &\geq p_* - \varepsilon + \gamma t^\gamma \int_t^\infty \left[\frac{r-\varepsilon}{s^\gamma}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ds \\ &\geq p_* - \varepsilon + \gamma (r-\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}} t^\gamma \int_t^\infty \frac{1}{s^{\gamma+1}} ds \\ &\geq p_* - \varepsilon + (r-\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$r = \liminf_{t \to +\infty} t^\gamma w(t) \geq p_* - \varepsilon + (r-\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}},$$

Lorsque ε tend vers 0, nous déduisons

$$p_* \leq r - r^{1+\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.10}$$

En multipliant les deux côtés de (2.7) par $t^{\gamma+1}$ et en intégrant entre T à t, on trouver

$$\int_T^t s^{\gamma+1} w^{'}(s)ds \leq -\int_T^t s^{\gamma+1} P(s)ds - \gamma \int_T^t s^{\gamma+1} w^\lambda(s)ds.$$

Avec $\lambda = (\gamma+1)/\gamma$. Par l'intégration par parties, nous avons

$$t^{\gamma+1} w(t) \leq T^{\gamma+1} w(T) + (\gamma+1) \int_T^t s^\gamma w(s)ds - \int_T^t s^{\gamma+1} P(s) - \gamma \int_T^t s^{\gamma+1} w^\lambda(s)ds.$$

Par conséquent

$$t^{\gamma+1} w(t) \leq T^{\gamma+1} w(T) - \int_T^t s^{\gamma+1} P(s)ds + \int_T^t \left[(\gamma+1)s^\gamma w(s) - \gamma s^{\gamma+1} w^\lambda(s)\right] ds.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), avec $C = 0$ et A, B sont des constants, nous obtenons

$$(\gamma+1)s^\gamma w(s) - \gamma s^{\gamma+1} w^\lambda(s) \leq 1.$$

Donc,

$$t^{\gamma+1} w(t) \leq T^{\gamma+1} w(T) - \int_T^t s^{\gamma+1} P(s)ds + (t-T).$$

Par conséquent

$$t^\gamma w(t) \leq \left(1 - \frac{T}{t}\right) + \frac{T^{\gamma+1}}{t} w(T) - \frac{1}{t} \int_T^t s^{\gamma+1} P(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} R &= \limsup_{t\to\infty} t^{\gamma} w(t) \\ &\leq 1 + \limsup_{t\to\infty} \frac{-1}{t} \int_T^t s^{\gamma+1} P(s) ds \\ &\leq 1 - \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_T^t s^{\gamma+1} P(s) ds \\ &\leq 1 - q_*. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Par (2.10) et (2.11), on obtient

$$p_* \leq r - r^{1+\frac{1}{\gamma}} \leq r \leq R \leq 1 - q_*,$$

d'où

$$p_* + q_* \leq 1.$$

□

2.3 Théorèmes d'existence de l'oscillation pour l'équation (2.1)

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes qui garantissent que chaque solution x de (2.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$.

Théorème 2.3.1. *Supposons que* (2.2) *est vérifiée, si*

$$p_* + q_* > 1. \tag{2.12}$$

Alors chaque solution de l'équation (2.5) *est oscillante.*

Démonstration.
Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de (2.5). Supposons que x est une solution éventuellement positive de l'équation (2.5), la substitution $y = -x$ transforme l'équation (2.5) en une équation de la même forme.
Par le lemme 2.2.3, nous avons

$$p_* + q_* \leq 1.$$

Ce qui donne la contradiction par (2.12). □

Théorème 2.3.2. *Supposons que (2.2) est vérifiée, si*

$$p_* = \liminf_{t\to\infty} t^\gamma \int_t^\infty p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\gamma ds > \frac{\gamma^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}. \tag{2.13}$$

Alors chaque solution de l'équation (2.5) est oscillante.

Démonstration.

Supposons que (2.5) est non-oscillatoire sur $[t_0, +\infty)$, alors par les hypothèses de lemme 2.2.3, on a (2.6) est vérifiée. De l'inégalité (2.10), nous avons

$$p_* \leq r - r^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), avec $B = A = 1$ et $C = 0$, nous obtenons

$$p_* \leq \frac{\gamma^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}.$$

Ce qui donne la contradiction par (2.13). □

Exemple 2.3.1. *Considérons l'équation différentielle semi-linéaire suivante*

$$((x^{'}(t))^3)^{'} + \frac{1}{t^4}x^3(t) = 0, \qquad t \geq 1. \tag{2.14}$$

Ici,

$$\gamma = 3, \qquad r\,(t) = 1, \qquad p\,(t) = \frac{1}{t^4}, \qquad \tau\,(t) = t.$$

Alors

$$\int_1^\infty dt = \infty, \quad et \quad \int_1^\infty P\,(t)\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^4}dt = \frac{1}{3}.$$

D'autre part, nous avons

$$t^\gamma \int_t^\infty p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\gamma ds = t^3 \int_t^\infty \frac{1}{s^4}ds = \frac{t^3}{3} \to +\infty, \text{ lorsque } t \to +\infty.$$

Par conséquent

$$p_* \geq \frac{1}{3} > \frac{\gamma^\gamma}{(\gamma+1)^\gamma} = \frac{9}{256}.$$

Donc (2.13) est vérifiée. Le théorème 2.3.2 implique que la solution de l'équation (2.14) est oscillante.

Théorème 2.3.3. *Supposons que (2.2) est vérifiée, si*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^\gamma}{r(t)} \int_t^\infty p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\gamma ds > 1. \tag{2.15}$$

Alors chaque solution de (2.1) est oscillante.

Démonstration.

Supposons que x est une solution éventuellement positive de (2.1) sur $[t_0, +\infty)$.

Par les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, il existe $t_1 \geq t_0$ tels que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x'(t) > 0, \qquad x^{(2)}(t) < 0, \qquad \frac{x(t)}{t} > x'(t),$$

sur $[t_1, +\infty)$ et $\frac{x}{t}$ est strictement décroissant sur $[t_1, +\infty)$. Par intégration de (2.1) entre t à T, on trouve

$$\int_t^T p(s)x^\gamma(\tau(s))ds = r(T)(x'(T))^\gamma - r(t)(x'(t))^\gamma.$$

Comme $x'(t) > 0$ et $x'(t) < \frac{x(t)}{t}$, on obtient

$$\frac{1}{r(t)} \int_t^T p(s)x^\gamma(\tau(s))ds \leq (x'(t))^\gamma \leq \frac{(x(t))^\gamma}{t^\gamma}.$$

Comme $\frac{x}{t}$ est strictement décroissant sur $[t_1, +\infty)$, alors

$$\frac{\tau(t)}{t}x(t) \leq x(\tau(t)), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1,$$

donc

$$\frac{1}{r(t)} \int_t^T p(s)x^\gamma(s) \left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\gamma ds \leq \frac{(x(t))^\gamma}{t^\gamma}.$$

Puisque x est strictement croissante sur $[t_1, +\infty)$, on trouve

$$\frac{(x(t))^\gamma}{r(t)} \int_t^T p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\gamma ds \leq \frac{(x(t))^\gamma}{t^\gamma}.$$

Par conséquent

$$\frac{t^\gamma}{r(t)} \int_t^T p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s}\right) ds \leq 1.$$

Cet résultat donne la contradiction de (2.15), pour t assez grand. $\square$

Pour la simplification, on note

$$d_+(t) := \max\{d(t), 0\}.$$

Théorème 2.3.4. *Supposons que (2.2) et (2.3) sont vérifiées. S'il existe une fonction $\sigma \in \mathcal{C}^1([t_0, +\infty), \mathbb{R}_+)$, telle que*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \left[\sigma(s)p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\gamma - \frac{r(s)\left[\sigma'(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\sigma(s))^\gamma}\right] ds = +\infty. \tag{2.16}$$

Alors chaque solution de l'équation (2.1) est oscillante.

Démonstration.

Supposons que (2.1) admet une solution non-oscillatoire sur $[t_0, +\infty)$. Par les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, il existe $t_1 \geq t_0$ tels que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x^{'}(t) > 0, \qquad x^{(2)}(t) < 0, \qquad \frac{x(t)}{t} > x^{'}(t),$$

sur $[t_1, +\infty)$ et $\frac{x}{t}$ est strictement décroissant sur $[t_1, +\infty)$.

Nous définissons la fonction w par :

$$w(t) := \sigma(t)r(t)\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\gamma}, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{2.17}$$

Alors, $w(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1, +\infty)$. Par dérivation de la fonction w, on obtient

$$\begin{aligned}
w^{'}(t) &= \sigma^{'}(t)r(t)\frac{x^{'}(t)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)} + \sigma(t)\left(\frac{r(t)x^{'}(t)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)}\right)^{'} \\
&= \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}w(t) + \sigma(t)\frac{(r(t)(x^{'}(t))^{\gamma})^{'}}{x^{\gamma}(t)} - \sigma(t)r(t)\frac{(x^{\gamma}(t))^{'}(x^{'}(t))^{\gamma}}{x^{2\gamma}(t))} \\
&= \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}w(t) - \sigma(t)p(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{\gamma} - \gamma\sigma(t)r(t)\frac{(x^{'}(t))^{\gamma+1}}{x^{\gamma+1}(t)} \\
&= \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}w(t) - \sigma(t)p(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{\gamma} - \frac{\gamma}{(\sigma(t)r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}(w(t))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{x}{t}$ est strictement décroissante sur $[t_1, +\infty)$, on trouve

$$w^{'}(t) \leq -\sigma(t)p(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{\sigma_{+}^{'}(t)}{\sigma(t)}w(t) - \frac{\gamma}{(\sigma(t)r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}(w(t))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$w^{'}(t) \leq -\sigma(t)p(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{r(t)\left[\sigma_{+}^{'}(t)\right]^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\sigma(t))^{\gamma}}, \tag{2.18}$$

avec

$$C = 0, \qquad B = \frac{\sigma_{+}^{'}(t)}{\sigma(t)}, \qquad A = \frac{\gamma}{(\sigma(t)r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Par intégration de (2.18) entre t_1 à t, nous avons

$$\int_{t_1}^{t}\left[\sigma(s)p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} - \frac{r(s)\left[\sigma_{+}^{'}(s)\right]^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\sigma(s))^{\gamma}}\right]ds \leq -w(t) + w(t_1) \leq w(t_1),$$

d'où la contradiction de (2.16) pour t grand. □

Exemple 2.3.2. *Considérons l'équation de retard semi-linéaire*

$$\left[t^4\left(x'(t)\right)^5\right]' + \frac{1}{t^2}x^5\left(\frac{t}{2}\right) = 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [1, +\infty). \tag{2.19}$$

Ici

$$\gamma = 5, \qquad r(t) = t^4, \qquad p(t) = \frac{1}{t^2}, \qquad \tau(t) = \frac{t}{2} \leq t.$$

Il est clair que les condition (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées.*

Pour appliquer le Théorème 2.3.4, il reste à prouver que la condition (2.16) *est vérifiée.*

Soit $\sigma(t) = t$*, de* (2.16) *nous avons*

$$\eta \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{s} ds = +\infty.$$

Avec $\eta > 0$*. Alors toute solution de* (2.19) *est oscillante sur* $[1, +\infty)$*.*

Soit $H : [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue satisfaisant les conditions suivantes

$a)$ Pour tout $t \in [t_0, +\infty)$, $H(t, t) = 0$,

$b)$ H estdérivable par rapport à s.

Théorème 2.3.5. *Supposons que* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées. S'il existe une fonction* $\phi \in \mathcal{C}^1([t_0, +\infty), \mathbb{R}_+)$ *et* $H : [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$*, telle que*

$$\frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^{\infty} [H(t, s)\phi(s)P(s) - \vartheta(t, s)]dt = +\infty,$$

où

$$\vartheta(t, s) := \frac{r(s)(\phi'(s))^{\gamma+1}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, s)\right)^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\phi(s))^{\gamma}(H(t, s))^{\gamma}}.$$

Alors chaque solution de (2.1) *oscillante sur* $[t_0, +\infty)$*.*

Corollaire 2.3.1. *Supposons que* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées. S'il existe une fonction* $\phi \in \mathcal{C}^1([t_0, +\infty), \mathbb{R}_+)$*, telle que*

$$\frac{1}{t^m} \int_{t_0}^{\infty} \left[(t-s)^m P(s) - \frac{m^{\gamma+1} r(s)((t-s)^{m-1})^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}((t-s)^{m\gamma}}\right] ds = +\infty.$$

Avec $m \geq 1$*. Alors chaque solution de* (2.1) *est oscillante sur* $[t_0, +\infty)$*.*

2.4 Comportement asymptotique pour l'équation (2.1)

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes qui garantissent que chaque solution x de (2.1) oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge.

Théorème 2.4.1. *Soit σ définie dans le théorème 2.3.4 telle que (2.16) soit vérifiée, si*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \left[\frac{1}{r(t)} \int_{t_0}^{t} p(s) ds \right]^{\frac{1}{\gamma}} dt = +\infty. \tag{2.20}$$

Alors toute solution de (2.1) est oscillante sur $[t_0, \infty)$ ou converge.

Théorème 2.4.2. *Supposons que (2.3) et (2.20) sont vérifiées. Soit σ définie dans le théorème 2.3.4 telle que (2.16) soit vérifiée.*
Alors chaque solution de (2.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Démonstration.
Par le théorème 2.4.1, chaque solution de l'équation (2.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou $\lim_{t \to +\infty} x(t) = b$.
Supposons que $b > 0$, donc

$$x(\tau(t)) > b > 0, \qquad \text{pour } t > t_1.$$

Nous définissons la fonction u par :

$$u(t) := r(t) \left(x'(t) \right)^{\gamma}, \qquad \text{pour } t > t_1.$$

D'après (2.1) , on trouve

$$u^{'}(t) = -p(t) x^{\gamma}(\tau(t)) \leq -b^{\gamma} p(t), \qquad \text{pour } t > t_1.$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_1 à t, on trouve

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u(t_1) - b^{\gamma} \int_{t1}^{t} p(s) ds \\ &< -b^{\gamma} \int_{t_1}^{t} p(s) ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$b \left[\frac{1}{r(t)} \int_{t_1}^{t} p(s) ds \right]^{\frac{1}{\gamma}} \leq -x'(t), \qquad \text{pour } t > t_1.$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_1 à t, on obtient

$$b \int_{t_1}^{t} \left[\frac{1}{r(s)} \int_{t_1}^{s} p(u) du \right]^{\frac{1}{\gamma}} ds \leq -x(t) + x(t_1) \leq x(t_1).$$

Cet résultat donne la contradiction de (2.20), pour t grand. □

Exemple 2.4.1. *Considérons l'équation semi-linéaire*

$$\left[t^{\frac{8}{3}}\left(\sqrt[3]{x'(t)}^{5}\right)\right]' + \sqrt[3]{x(t))}^{5} = 0, \qquad pour\ t \in [1, +\infty). \tag{2.21}$$

Ici

$$r(t) = t^{\frac{8}{3}}, \qquad p(t) = 1, \qquad \tau(t) = t, \qquad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Il est clair que (2.3) *et* (2.20) *sont vérifiée.*

Pour appliquer le Théorème 2.4.2, il reste à prouver que la condition (2.16) *est vérifiée,*

Soit $\sigma(t) = 1$, *de* (2.16) *nous avons*

$$\int_{t_0}^{+\infty} p(s)ds = +\infty.$$

Alors toute solution de (2.21) *est oscillante sur* $[1, +\infty)$ *ou* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0.$

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution d'une équation différentielle semi linéaire du troisième ordre

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le comportement asymptotique de toute solution de l'équation différentielle semi-linéaires d'ordre trois.
On supposera que le probléme (3.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}^3\left([t_0,+\infty),\mathbb{R}\right)$.

$$\left[b(t)\left\{\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'}\right\}^{\gamma}\right]^{'}+q(t)x^{\gamma}(t)=0, \qquad \text{pour } t\geq t_0. \tag{3.1}$$

On impose les conditions suivantes :

(C_1) $\gamma>0$ est de la forme $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où γ_1, γ_2 sont impairs positifs et $t_0\geq 0$.

(C_2) Les fonctions a , b et q sont valeurs réelles et sont continues positives définies sur $[t_0,+\infty)$.

3.2 Cas où l'équation (3.1) admet une solution non oscillante

Nous présentons le lemme suivant qui donne les propriétés de la solution éventuellement positive x de l'équation (3.1)

Lemme 3.2.1. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de (3.1) et*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{b(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} dt = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{a(t)} dt = +\infty. \tag{3.2}$$

Alors, il y a seulement deux cas possibles, pour tout $t \in [t_1, +\infty)$ avec $t_1 \in [t_0, +\infty)$ suffisamment grand :

1) $x^{'}(t) > 0$, $(a(t)x^{'}(t))^{'} > 0$, *pour* $t \in [t_1, +\infty)$,

2) $x'(t) < 0$, $(a(t)x'(t))' > 0$, *pour* $t \in [t_1, +\infty)$.

Démonstration.

Soit x une solution éventuellement positive de (3.1) sur $[t_0, +\infty)$.

Alors il existe $t_1 \geq t_0$ tel que $x(t) > 0$, pour $t \geq t_1$. Par (3.1), nous avons

$$\left[b(t)\left\{\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'}\right\}^{\gamma}\right]^{'} < 0, \qquad \text{pour } t \geq t_1,$$

donc la fonction $t \to b\left\{\left(ax^{'}\right)^{'}\right\}^{\gamma}$ est décroissent sur $[t_1, +\infty)$.

Alors $x^{'}$ et $\left\{\left(ax^{'}\right)^{'}\right\}^{\gamma}$ sont des signes constant pour t assez grand.

Montrons que $(ax^{'})^{'} > 0$, pour $t \geq t_1$. Supposons le contraire, alors il existe une constante $\eta > 0$ et $t_2 \geq t_1$ tels que

$$\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'} \leq -\left(\frac{\eta}{b(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour } t \geq t_2.$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_2 à t, nous obtenons

$$a(t)x^{'}(t) \leq a(t_2)x^{'}(t_2) - \int_{t_2}^{t} \left(\frac{\eta}{b(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} ds, \qquad \text{pour } t \geq t_2.$$

D'après (3.2), on déduit que $a(t)x^{'}(t) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Donc il existe $t_3 \geq t_2$, tel que

$$x^{'}(t) \leq -\frac{1}{a(t)}, \qquad \text{pour } t \geq t_3.$$

Par intégration de cette formule entre t_3 a t, on trouve

$$x(t) \leq x(t_3) - \int_{t_3}^{t} \frac{1}{a(s)} ds, \qquad \text{pour } t \geq t_3.$$

D'après (3.2), on déduit que $x(t) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$.

D'où la contradiction. □

Lemme 3.2.2. *Soit x une solution de l'équation (3.1) et qui satisfait le cas (1) de lemme 3.2.1, alors*

$$x^{'}(t) \geq \frac{\delta(t)(b(t))^{\frac{1}{\gamma}}}{a(t)}(a(t)x^{'}(t))^{'}, \qquad \text{pour } t \geq t_1, \tag{3.3}$$

avec

$$\delta(t) := \int_{t_1}^{t} \frac{1}{b^{\frac{1}{\gamma}}(s)} ds, \qquad \text{pour } t \geq t_1.$$

Démonstration.

Si $x^{'}(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$, de l'équation (3.1) on déduit que la fonction $t \to b\left\{\left(ax^{'}\right)^{'}\right\}^{\gamma}$ est décroissent sur $[t_1, +\infty)$.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
a(t)x^{'}(t) &= a(t_1)x^{'}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left(a(s)x^{'}(s)\right)^{'} ds \\
&= a(t_1)x^{'}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{1}{b^{\frac{1}{\gamma}}(s)} \left\{ b\left(s\right) \left(\left(a(s)x^{'}(s)\right)^{'} \right)^{\gamma} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\geq \left(b\left(t\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'} \int_{t_1}^{t} \frac{1}{(b(s))^{\frac{1}{\gamma}}} ds \\
&\geq \delta(t)(b(t))^{\frac{1}{\gamma}}(a(t)x^{'}(t))^{'}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. □

3.3 Comportement asymptotique pour l'équation (3.1)

Maintenant, nous établissons quelques conditions suffisantes pour que toute solution x de (3.1) soit oscillante sur $[t_1, +\infty)$ ou convergente.

Pour la simplification, on note

$$\left[\rho^{'}(s)\right]_{+} := \max\{0, (\rho^{'}(s)\}.$$

Théorème 3.3.1. *Supposons que (3.2) est vérifiée. S'il existe une fonction $\rho \in \mathcal{C}^1\left([t_0, +\infty), \mathbb{R}_+\right)$ et si*

$$\int_{t_1}^{+\infty} \left[\rho(s)q(s) - \frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)} \right] ds = +\infty. \tag{3.4}$$

Alors toute solution de (3.2) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge.

Démonstration.

Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t) > 0$, pour $t > t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas,

Si $x^{'}(t) > 0$, pour $t \geq t_1$.

Nous définissons la fonction w par

$$w(t) := \rho(t) \frac{b(t)\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)}, \qquad \text{pour } t \geq t_1. \tag{3.5}$$

Alors $w(t) > 0$, par dérivation la fonction w, on obtient

$$w^{'}(t) = -b(t)\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma}\left(\frac{\rho(t)}{x^{\gamma}(t)}\right)^{'} + \frac{\rho(t)}{x^{\gamma}(t)}\left(b(t)\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}.$$

D'après (3.1), on obtient

$$w^{'}(t) = -\rho(t)q(t) + \frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t) - \gamma b(t)\left((a(t)x^{'}(t)\right)^{\gamma}\frac{\rho(t)x^{'}(t)}{x^{\gamma+1}(t)}.$$

Par (3.3), on trouve

$$\begin{aligned} w^{'}(t) &\leq -\rho(t)q(t) + \frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t) - \gamma\rho(t)b(t)\frac{\delta(t)(b(t))^{\frac{1}{\gamma}}\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma+1}}{x^{\gamma+1}(t)} \\ &\leq -\rho(t)q(t) + \frac{\left[\rho^{'}(t)\right]_{+}}{\rho(t)}w(t) - \frac{\gamma\delta(t)}{\left[\rho(t)\right]^{\frac{1}{\gamma}}a(t)}(w(t))^{1+\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$w^{'}(t) \leq -\rho(t)q(t) + \frac{a^{\gamma}(t)\left(\rho^{'}(t)\right)_{+}^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(t))^{\gamma}\rho^{\gamma}(t)}, \tag{3.7}$$

avec

$$B = \frac{\left[\rho^{'}(t)\right]_{+}}{\rho(t)}, \qquad A = \frac{\gamma\delta(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{\gamma}}a(t)}.$$

Par intégration de (3.7) entre t_1 à t, nous avons

$$\int_{t_1}^{t}\left[\rho(s)q(s) - \frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds \leq w(t_1) - w(t) < w(t_1),$$

d'où la contradiction de (3.4) pour t grand.

Si $x^{'}(t) < 0$, pour $t \geq t_1$, alors x est converge vers une limite finie, car la fonction x est décroissante et minorée par 0. $\square$

Théorème 3.3.2. *Supposons que (3.2) est vérifiée. Soit ρ définie dans le Théorème 3.3.1 telle que (3.4) soit vérifiée, si*

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{a(z)}\int_{z}^{+\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_{u}^{\infty}q(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}dudz = \infty. \tag{3.8}$$

Alors toute solution de (3.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge vers zéro.

Démonstration.

De la preuve du Théorème 3.3.1, chaque solution de l'équation (3.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ existe. D'autre part, supposons que $x^{'}(t) < 0$, pour $t \geq t_1$. Alors x est décroissante sur $[t_1, +\infty)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = b \geq 0$ existe.

Supposons que $b > 0$.

Par intégration de la formule (3.1) entre t à $+\infty$, on obtient

$$b(t)\left(\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'}\right)^{\gamma} \geq \int_t^{+\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds.$$

Ce qui implique

$$\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'} \geq \left[\frac{1}{b(t)}\int_t^{+\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

En intégrant la dernière inégalité entre t à ∞, on obtient

$$-a(t)x^{'}(t) \geq \int_t^{+\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_u^{+\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}du,$$

donc

$$-x^{'}(t) \geq \frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_u^{+\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}du.$$

En intégrant la dernière inégalité entre t_1 à ∞, on obtient

$$x(t_1) \geq \int_{t_1}^{+\infty}\frac{1}{a(z)}\int_z^{+\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_u^{+\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}dudz.$$

Puisque $x(t) \geq b$, pour $t \geq t_1$, alors

$$x(t_1) \geq b\int_{t_1}^{+\infty}\frac{1}{a(z)}\int_z^{+\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_u^{+\infty} q(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}dudz.$$

Cet résultat donne la contradiction de (3.8). $\square$

Exemple 3.3.1. *On considère l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre*

$$\left[\frac{1}{t}\sqrt[3]{\left(\left\{\frac{1}{t}x^{'}(t)\right\}\right)^{'}}\right]^{'} + \frac{1}{t^2}\sqrt[3]{x(t)} = 0, \qquad \textit{pour } t \geq 1. \tag{3.9}$$

Ici

$$b(t) = a(t) = \frac{1}{t}, \qquad q(t) = \frac{1}{t^2}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Il est clair que (3.2) *et* (3.8) *sont vérifiées.*

Pour appliquer le Théorème 3.3.1, il reste a prouver que la condition (3.4) *est vérifiée.*

On a

$$\delta(t) = \frac{1}{4}\left(t^4 - t_1^4\right) \sim \frac{t^4}{4}, \qquad \textit{pour } t \textit{ assez grand.}$$

Soit $\rho(t) = t^3$, de (3.4), nous avons

$$\int_{t_1}^{+\infty} s - \eta\frac{\sqrt[3]{s^4}}{\sqrt[3]{s^4 - t_1^4}}ds \sim \int_{t_1}^{+\infty} s - \eta ds = +\infty.$$

avec $\eta \geq 0$.

Alors toute solution de (3.9) est oscillante sur $[1, +\infty)$ ou converge.

Corollaire 3.3.1. *Supposons que (3.2), (3.8) sont vérifiées, si*

$$\int_{t_1}^{+\infty} sq(s) - \frac{a^\gamma(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^\gamma s^\gamma}ds = +\infty. \tag{3.10}$$

Alors toute solution de (3.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge vers zéro.

Corollaire 3.3.2. *Supposons que (3.2), (3.8) sont vérifiées, si*

$$\int_{t_1}^{+\infty} \left[s^{\gamma+1}q(s) - \frac{a^\gamma(s)}{(\delta(s))^\gamma}\right] ds = +\infty.$$

Alors toute solution de (3.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge vers zéro.

Théorème 3.3.3. *Supposons que (3.2), (3.8) sont vérifiées, Soit ρ définie dans le Théorème 3.3.1 telle que (3.4) soit vérifiée, si*

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{+\infty} (t-s)^n \left[\rho(s)q(s) - \frac{a^\gamma(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^\gamma\rho^\gamma(s)}\right] ds = +\infty, \qquad \textit{pour } n \geq 1. \tag{3.11}$$

Avec $n \geq 1$.

Alors toute solution de (3.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge vers zéro.

Démonstration.

Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t) > 0$, pour $t > t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas,

Si $x^{'}(t) > 0$, pour $t \geq t_1$.

De la preuve du Théorème 3.3.1, on a trouver (3.7). D'après (3.7), on a

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t}(t-s)^n \left[\rho(s)q(s) - \frac{a^\gamma(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^\gamma\rho^\gamma(s)}\right] ds &\leq \int_{t_1}^{t}(t-s)^n w^{'}(s)ds \\ &= w(t_1)(t-t_1)^n - n\int_{t_1}^{t}(t-s)^{n-1}w(s)ds \\ &\leq w(t_1)(t-t_1)^n.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{t}(t-s)^n\left[\rho(s)q(s)-\frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds\le w(t_1)\left(\frac{t-t_1}{t}\right)^n.$$

Alors

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{+\infty}(t-s)^n\left[\rho(s)q(s)-\frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds\le w(t_1),$$

d'où la contradiction de (3.11).

Si $x^{'}(t)<0$, pour tout $t\ge t_1$, la preuve est similaire le Théorème 3.3.1. □

Exemple 3.3.2. *On considère l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre*

$$\left(\frac{x^{'}}{t}\right)^{(2)}+t^{\lambda}x(t)=0,\qquad pour\ t\ge 1. \tag{3.12}$$

Avec $\lambda\ge 0$. *Ici*

$$b(t)=1,\qquad a(t)=\frac{1}{t},\qquad q(t)=t^{\lambda},\qquad \gamma=1.$$

Il est clair que (3.2) *et* (3.8) *sont vérifiées*

Pour appliquer le Théorème 3.3.3, il reste a prouver que la condition (3.11) *est vérifiée.*

Si on prend $n=1$ *et* $\rho(t)=1$, *nous avons*

$$\frac{1}{t^2}\int_{t_1}^{t}(t-s)q(s)ds\sim\frac{t^{\lambda}}{(\lambda+1)(\lambda+2)},\qquad pour\ t\ assez\ grand.$$

Alors toute solution de (3.9) *est oscillante sur* $[1,+\infty)$ *ou converge vers zéro.*

Théorème 3.3.4. *Supposons que* (3.2), (3.8) *sont vérifiées, Soit* ρ *définie dans le Théorème 3.3.1, si*

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{+\infty}\left[(t-s)^n\rho(s)q(s)-\frac{\rho(s)a^{\gamma}(s)P^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}(t-s)^{n\gamma}}\right]ds=+\infty. \tag{3.13}$$

Avec

$$P(t,s):=(t-s)^n\frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_+}{\rho(s)}-n(t-s)^{n-1},\qquad pour\ t\ge s\ge t_0.$$

Alors toute solution de (3.1) *est oscillante sur* $[t_0,+\infty)$ *ou converge vers zéro.*

Démonstration.

Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t)>0$, pour $t>t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas, Si $x^{'}(t) > 0$, pour $t \geq t_1$.

On a

$$\int_{t_1}^{t} (t-s)^n w^{'}(s) = w(t_1)(t-t_1)^n - n\int_{t_1}^{t} (t-s)^{n-1} w(s)ds. \tag{3.14}$$

De la preuve du Théorème 3.3.1, on a trouver (3.6).

Par (3.6) et (3.14), on obtient

$$\int_{t_1}^{t} (t-s)^n \rho(s)q(s)ds \leq w(t_1)(t-t_1)^n + \int_{t_1}^{t} \left[(t-s)^n \frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_+}{\rho(s)} - n(t-s)^{n-1}\right] w(s)ds$$
$$- \int_{t_1}^{t} \gamma(t-s)^n \frac{\delta(s)}{(\rho(s)a^{\gamma}(s))^{\frac{1}{\gamma}}} \left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ds.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$\int_{t_1}^{+\infty} (t-s)^n \left[\rho(s)q(s) - \frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left[\delta(s)\rho(s)\right]^{\gamma}}\right] ds \leq \frac{1}{t^n} w(t_1).$$

Avec

$$C := 0, \qquad B := (t-s)^n \frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_+}{\rho(s)} - n(t-s)^{n-1}, \qquad A := \frac{\gamma\delta(s)(t-s)^n}{\left[\rho(s)a^{\gamma}(s)\right]^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

D'où la contradiction de (3.13) .

Si $x^{'}(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$, la preuve est similaire le Théorème 3.3.1. □

Théorème 3.3.5. *Supposons que (3.2), (3.8) sont vérifiées, Soit ρ définie dans le Théorème 3.3.1, si*

$$\frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_1}^{+\infty} \left[H(t,s)\rho(s)q(s) - \frac{\rho(s)a^{\gamma}(s)Q^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}H^{\gamma}(t,s)}\right] ds = +\infty. \tag{3.15}$$

Avec

$$Q(t,s) := (t-s)^n \frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_+}{\rho(s)} H(t,s) - h(t,s)\sqrt{H(t,s)}.$$

Alors toute solution de (3.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge vers zéro.

Démonstration.

Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t) > 0$, pour $t > t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas,

Si $x^{'}(t) > 0$, pour $t \geq t_1$.

De la preuve du Théorème 3.3.1, on a trouver (3.6).

Par (3.6) et (3.14), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t} H(t,s)\rho(s)q(s)ds \;\leq\; & -\int_{t_1}^{t} H(t,s)w^{'}(s)ds \\ & +\int_{t_1}^{t} H(t,s)\left[\frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}}{\rho(s)}w(s)-\frac{\gamma\delta(s)}{(\rho(s))^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}\left[w\left(s\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]ds.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{t_1}^{t} H(t,s)w^{'}(s)ds=-H(t,t_1)w(t_1)-\int_{t_1}^{t}\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}w(s)ds,$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t} H(t,s)\rho(s)q(s)ds \;=\; & H(t,t_1)w(t_1)+\int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)\frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}}{\rho(s)}-h(t,s)\sqrt{H(t,s)}\right]w(s)ds \\ & -\int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{\gamma\delta(s)}{(\rho(s))^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}\left[w\left(s\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds.\end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t} H(t,s)\rho(s)q(s)ds \;\leq\; & H(t,t_1)w(t_1)+\int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)\frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}}{\rho(s)}-h(t,s)\sqrt{H(t,s)}\right]w(s)ds \\ & -\int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{\gamma\delta(s)}{(\rho(s))^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}w^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)ds.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)\rho(s)q(s)-\frac{\rho(s)a^{\gamma}(s)Q^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left[\delta(s)H(t,s)\right]^{\gamma}}\right]ds\leq w(t_1).$$

Avec

$$B:=H(t,s)\frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}}{\rho(s)}-h(t,s)\sqrt{H(t,s)},\qquad A:=\gamma\frac{H(t,s)\delta(s)}{\left[\rho(s)\right]^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}.$$

d'où la contradiction de (3.15) pour t grand.

Si $x^{'}(t)<0$, pour tout $t\geq t_1$, la preuve est similaire le Théorème 3.3.1. □

Chapitre 4

Oscillation pour une équation différentielle de retard de second ordre

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation différentielle de retard de second ordre

$$\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t)+q\left(t\right)x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)=0,\qquad \text{pour tout } t\geq t_0>0. \tag{4.1}$$

Avec $z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$. On impose les conditions suivantes :

(H_1) $\alpha>0$ est de la forme $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où γ_1, γ_2 impairs positifs.

(H_2) $r\in\mathcal{C}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^+)$, tel que

$$\pi(t_0):=\int_{t_0}^{+\infty}r^{\frac{-1}{\alpha}}(s)ds<+\infty.$$

(H_3) La fonction de retard $\sigma\in\mathcal{C}^1([t_0,+\infty),\mathbb{R})$ et

$$\sigma(t)\leq t,\qquad \sigma^{'}(t)>0,\qquad \lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=+\infty.$$

(H_4) La fonction de retard $\tau\in\mathcal{C}^1([t_0,+\infty),\mathbb{R})$ et

$$\tau(t)\leq t,\qquad \lim_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty.$$

(H_5) $q,p\in\mathcal{C}([t_0,+\infty),[0,+\infty))$, tel que

$$0\leq p(t)<1,\qquad p(t)<\frac{\pi(t)}{\pi(\tau(t))}.$$

4.2 Théorèmes d'existence de l'oscillation pour l'équation (4.1)

Pour la simplification, on note

$$Q(t) := q(t)\left(1 - p(\sigma(t))\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}\right)^{\alpha}.$$

Théorème 4.2.1. *Supposons que*

$$\int_{t_1}^{+\infty}\left(\frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t} Q(s)\pi^{\alpha}(\sigma(s))ds\right)^{\frac{1}{\alpha}} dt = +\infty. \tag{4.2}$$

et

$$\int_{t_1}^{+\infty} Q(t)dt = +\infty. \tag{4.3}$$

Alors chaque solution de l'équation (4.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$.

Démonstration.

Supposons le contraire, que x est une solution éventuellement positive de (4.1) sur $[t_0, +\infty)$.

Alors il existe $t_1 \geq t_0$, tel que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x(\sigma(t)) > 0, \qquad x(t) \geq z(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Par (4.1), en déduire que la fonction $r(z^{'})^{\alpha}$ est décroissante sur $[t_1, +\infty)$.

Par conséquent, $z^{'}$ est une solution éventuellement négatif ou éventuellement positif de l'équation (4.1) sur $[t_1, +\infty)$.

Supposons que $z^{'}(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$. Puisque

$$\begin{aligned} z(t) &\geq -\int_{t}^{\infty} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z^{'}(s)ds \\ &\geq -\pi(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z^{'}(t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

D'autre part, on a

$$\left(\frac{z}{\pi}\right)^{'}(t) = \frac{z^{'}(t)}{\pi(t)} + \frac{z(t)\, r^{\frac{-1}{\alpha}}(t)}{\pi^{2}(t)} \geq 0.$$

Par la définition de z, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t) - p(t)x(\tau(t)) \\ &\geq z(t) - p(t)z(\tau(t)) \\ &\geq z(t)\left(1 - p(t)\frac{\pi(\tau(t))}{\pi(t)}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

De (4.5), on obtient

$$\begin{aligned}\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t) &\leq -q\left(t\right)\left(1-p((\sigma(t))\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}\right)^{\alpha} z^{\alpha}(\sigma(t)) \\ &= -Q(t)z^{\alpha}(\sigma(t)). \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Puisque la fonction $r\left(z^{'}\right)^{\alpha}$ est décroissante sur $[t_1, \infty)$, alors

$$-r\left(t\right)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) \geq -r\left(t_1\right)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) := \gamma > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Par (4.4), on obtient

$$z(t) \geq \gamma^{\frac{1}{\alpha}}\pi(t), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.7}$$

De (4.6) et (4.7), on obtient

$$\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t) \leq -\gamma Q(t)\pi^{\alpha}(\sigma(t)), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.8}$$

Par intégration de (4.8) entre t_1 à t, on obtient

$$\begin{aligned}r\left(t\right)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) &\leq r\left(t\right)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) - \gamma\int_{t_1}^{t} Q(s)\pi^{\alpha}(\sigma(s))ds \\ &\leq -\gamma\int_{t_1}^{t} Q(s)\pi^{\alpha}(\sigma(s))ds.\end{aligned}$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_1 à t, on obtient

$$z(t) \leq z(t_1) - \gamma^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s} Q(u)\pi^{\alpha}(\sigma(u))du\right)^{\frac{1}{\alpha}} ds.$$

Cet résultat donne la contradiction de (4.2), pour t grand.

Maintenant, on suppose que $z^{'}(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$. Alors

$$x(t) \geq (1-p(t))z(t), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

De (4.1), on obtient

$$\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t) \leq -q(t)\left(1-p\left(\sigma(t)\right)\right)^{\alpha} z^{\alpha}(\sigma(t)). \tag{4.9}$$

Par (H_4), on a

$$\frac{\pi(\tau(\sigma\left(t\right)))}{\pi(\sigma\left(t\right))} \geq \frac{1}{p(\sigma\left(t\right))} \geq 1.$$

Alors

$$1-p(\sigma(t)) \geq 1-p(\sigma(t))\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{(\pi(\sigma(t))}, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.10}$$

Par intégration de (4.9) entre t_1 à t et et en utilisant (4.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} r(t)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) &\leq r(t_1)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) - \int_{t_1}^{t} q(s)(1-p(\sigma(s)))^{\alpha} z^{\alpha}(\sigma(s))ds \\ &\leq r(t_1)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) - z^{\alpha}(\sigma(t_1)) \int_{t_1}^{t} q(s)(1-p(\sigma(s)))^{\alpha} ds \\ &\leq r(t_1)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) - z^{\alpha}(\sigma(t_1)) \int_{t_1}^{t} Q(s)ds. \end{aligned}$$

Par (4.3), on a $\lim_{t\to+\infty} r(t)\left(z'\right)^{\alpha}(t) = -\infty$, d'ou la contradiction, pour t grand. □

Théorème 4.2.2. *Supposons que* (4.3) *est vérifiée, si*

$$\limsup_{t\to+\infty} \pi^{\alpha}(t) \int_{t_1}^{t} Q(s)ds > 1. \tag{4.11}$$

Alors chaque solution de l'équation (4.1) *est oscillante sur* $[t_0, +\infty)$.

Démonstration.

Supposons le contraire, que x est une solution éventuellement positive de (4.1) sur $[t_0, +\infty)$.

Alors il existe $t_1 \geq t_0$, tel que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x(\sigma(t)) > 0, \qquad x(t) \geq z(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

De (4.1), nous avons que la fonction $r(z^{'})^{\alpha}$ est décroissante sur $[t_1, +\infty)$.

Par conséquent, $z^{'}$ est une solution éventuellement négatif ou éventuellement positif de l'équation (4.1) sur $[t_1, +\infty)$.

Supposons que $z^{'}(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$. Par intégration de (4.6) entre t_1 à t, on obtient

$$\begin{aligned} r(t)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) &\leq r(t_1)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) - \int_{t_1}^{t} Q(s) z^{\alpha}(\sigma(s))ds \\ &\leq -z^{\alpha}(\sigma(t)) \int_{t_1}^{t} Q(s)ds. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Puisque $\sigma(t) \leq t$ et z est une fonction décroissante sur $[t_1, +\infty)$, alors

$$-r(t)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) \geq z^{\alpha}(t) \int_{t_1}^{t} Q(s)ds.$$

De (4.4) et la dernière inégalité, on trouve

$$\pi^{\alpha}(t) \int_{t_1}^{t} Q(s)ds \leq 1.$$

Cet résultat donne la contradiction de (4.11), pour t grand.

Si $z^{'}(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$. La preuve est similaire le Théorème 4.2.1. □

Exemple 4.2.1. *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante*

$$\left(t^2\left[x(t)+\frac{1}{4}x\left(\frac{t}{2}\right)\right]'\right)'+4x(t)=0, \qquad \textit{pour tout } t\geq 1. \tag{4.13}$$

Ici,

$$\alpha=1, \qquad ,r\left(t\right)=t^2, \qquad p\left(t\right)=\frac{1}{4}, \qquad q\left(t\right)=2, \qquad \tau\left(t\right)=\frac{t}{2}, \qquad \sigma\left(t\right)=t.$$

Alors

$$\pi(t)=\frac{1}{t} \qquad \textit{et} \qquad Q(t)=2.$$

Il est clair que (4.3) est vérifiée.

D'autre part, nous avons

$$\lim_{t\to\infty}\pi^{\alpha}(t)\int_{t_1}^{t}Q(s)ds=\lim_{t\to\infty}\frac{2\left(t-t_1\right)}{t}=2.$$

Donc, (4.11) est vérifiée.

Le Théorème 4.2.2, implique que la solution de l'équation (4.13) est oscillante sur $[1,+\infty)$.

Théorème 4.2.3. *Supposons que (4.3) est vérifiée. S'il existe une fonction* $\delta\in\mathcal{C}^1([t_0,+\infty),\mathbb{R}_+)$, *tel que*

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{\pi^{\alpha}(t)}{\delta(t)}\int_{t_0}^{\infty}\left(\delta(s)Q(s)-\frac{r(s)\left[\delta'(s)\right]^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\delta(s))^{\alpha}}\right)ds\right\}>1. \tag{4.14}$$

Avec $\sigma\left(t\right)=t$, *pour tout* $t\geq t_0$.

Alors chaque solution de l'équation (4.1) est oscillante sur $[t_0,+\infty)$.

Démonstration.

Supposons le contraire, que x est une solution éventuellement positive de (4.1) sur $[t_0,+\infty)$.

Alors il existe $t_1\geq t_0$, tel que

$$x(\tau(t))>0, \qquad x(\delta(t))>0, \qquad x(t)\geq z(t)>0, \qquad \text{pour tout } t\geq t_1.$$

On a alors deux cas, si $z'\left(t\right)<0$, pour tout $t\geq t_1$.

Nous définissons la fonction w par

$$w\left(t\right):=\delta\left(t\right)\left\{\frac{r\left(t\right)\left(z'\left(t\right)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}\left(t\right)}+\frac{1}{\pi^{\alpha}\left(t\right)}\right\}, \qquad \text{pour tout } t\geq t_1. \tag{4.15}$$

Alors $w(t) \geq 0$, pour tout $t \geq t_1$ et

$$\begin{aligned} w^{'}(t) &= \frac{\delta^{'}(t)}{\delta(t)} w(t) + \delta(t) \frac{\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t)}{z^{\alpha}(t)} - \alpha\delta(t) r(t) \left(\frac{z^{'}(t)}{z(t)}\right)^{\alpha+1} + \frac{\alpha\delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)\pi^{\alpha+1}(t)} \\ &\leq \frac{\delta^{'}(t)}{\delta(t)} w(t) + \delta(t) \frac{\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t)}{z^{\alpha}(t)} - \frac{\alpha}{(\delta(t) r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(w(t) - \frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\alpha\delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)\pi^{\alpha+1}(t)}. \end{aligned}$$

Par (4.9), on obtient

$$\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t) \leq -Q(t) z^{\alpha}(t), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.16}$$

Donc

$$w^{'}(t) \leq -\delta(t) Q(t) + \frac{\delta^{'}(t)}{\delta(t)} w(t) - \frac{\alpha}{(\delta r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(w(t) - \frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\alpha\delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)\pi^{\alpha+1}(t)}.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$\begin{aligned} w^{'}(t) &\leq -\delta(t) Q(t) + \frac{\delta^{'}(t)}{\pi^{\alpha}(t)} + \frac{r(t)(\delta^{'}(t))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}\delta^{\alpha}(t)} + \frac{\alpha\delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)\pi^{\alpha+1}(t)} \\ &= -\delta(t) Q(t) + \left(\frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)}\right)^{'} + \frac{r(t)(\delta^{'}(t))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}\delta^{\alpha}(t)}. \end{aligned}$$

Avec

$$A := \frac{\delta^{'}(t)}{\delta(t)}, \qquad B := \frac{\alpha}{(\delta(t) r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad C := \frac{\delta}{\pi^{\alpha}(t)}.$$

En intégrant la dernière l'inégalité entre t_1 à t, nous obtenons

$$\int_{t_1}^{t} \left(\delta(s)Q(s) - \frac{r(s)\left(\delta^{'}(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\delta(s))^{\alpha}}\right) ds \leq \left(\frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)} - w(t)\right) - \left(\frac{\delta(t_1)}{\pi^{\alpha}(t_1)} - w(t_1)\right).$$

Substituons (4.15) dans la dernière inégalité, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{+\infty} \left[\delta(s)Q(s) - \frac{r(s)\left(\delta^{'}(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\delta(s))^{\alpha}}\right] ds \;&\leq\; \delta(t_1)\frac{r(t_1)(z^{'}(t_1))^{\alpha}}{(z(t_1))^{\alpha}} - \delta(t)\frac{r(t)(z^{'}(t))^{\alpha}}{(z(t))^{\alpha}} \\ &\leq\; -\delta(t)\frac{r(t)(z^{'}(t))^{\alpha}}{(z(t))^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

De (4.4), on a

$$-\delta(t) r(t) \left(\frac{z^{'}(t)}{z(t)}\right)^{\alpha} \leq \frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)}. \tag{4.18}$$

Par (4.17) et (4.18), on trouve

$$\frac{\pi^{\alpha}(t)}{\delta(t)} \int_{t_2}^{+\infty} \left[\delta(s)Q(s) - \frac{r(s)\left(\delta^{'}(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\delta(s))^{\alpha}}\right] ds \leq 1.$$

Cet résultat donne la contradiction de (4.14).

Si $z^{'}(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$. La preuve est similaire le Théorème 4.2.1. $\square$

Bibliographie

[1] S. Saker, Oscillation theory of delay differntial ans difference equatios, second and third orders, VDM verlag 2010.

[2] S. Saker, Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales, Second and Third Orders, LAP LAMBERT Academic Publishing 2010.

[3] L. Erbe, T. S. Hassan, A. Peterson, S. H. Saker, Oscillation Criteria for Half-Linear Delay Dynamic Equations on Time Scales, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 9(1)(2009)51 – 68.

[4] L. Erbe, A. Peterson, S. H. Saker, Asymptotic behavior of solutions of a third-order nonlinear dynamic equation on time scales, Journal of Computational and Applied Mathematics 181(2005)92 – 102.

[5] M. Bohner, S. R. Grace, I. Jadlovská, Oscillation criteria for second-order neutral delay differential equations, Elec. J. Qualitative. Theory. Diff. Equ. 2017, 1 – 12.