الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بعنوان :

محاضرات وتمارين في مقياس الاحصاء 2

وفق المقرر المعتمد من قبل وزارة وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

موجهة لطلبة السنة الاولى ليسانس جدع مشترك

من إعداد: د. زدون جمال

السنة الجامعية: 2020-2021

فـهـرس المـحتويـات

مقدمة عامة

مقدمة عامة:

ينحدر مصطلح الإحصاء statistics من اصل لاتيني status و يعني الدولة أو القوة السياسية، أو من اصل روماني statista و تعني الدولة أيضا و ذلك لكونه مرتبط بالشؤون العسكرية..حيث يعتبر الإحصاء من العلوم القديمة و التي ظهرت مع ظهور الإنسان على وجه الأرض، و كلمة إحصاء من الناحية اللغوية تعني "عد" أو "حسب" ، فأحصى الاشياء يعني عدها[1]، و قد ذكرت كلمة الإحصاء في القرآن الكريم عدة مرات، كقوله تعالى في كتابه العزيز "وأحطنا بما لديهم و أحصى كل شيء عددا" و قال أيضا في سورة ابراهيم "و إن تعدوا نعمة الله لا تحصوها"، و عليه فقد احتل علم الإحصاء مركزا مرموقا بين العلوم الاخرى، و من بين أنواع الإحصاء الإحصاء الرياضي أو ما يعرف بنظرية الإحتمالات، فهي من بين علوم الرياضيات و الأكثر تعقيدا و علوا حسب البعض و الحقيقة كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الأرصاد الجوية يقولون من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، و بعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة، خلال هذا اليوم، و احتمال نجاح طالب، و احتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتيريا، وهكذا، يكثر نطق الأفراد بها و ربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟حيث في منتصف القرن السابع عشر كان لعب القمار منتشرا بشكل واسع في المجتمع الفرنسي و بالذات في إمارة مونتيكارلو Monte Carlou، مما ولد لدى اللاعبين الرغبة في استشفاف معلومات مسبقة تساعدهم على معرفة مدى إمكانية فوزهم وتقدير ربحهم في لعبة معينة.
كانت هذه الحاجة هي منطلق أبحاث كل من باسكال Pascal (1623-1662)، فرمات Fermat (1601-1665)، و هيجنز Hygens (1629-1695)، فكانت بين هؤلاء الثلاثة مراسلات شكلت الميلاد الحقيقي لنظرية الإحتمالات بالمعنى الحديث للعبارة و التي تم صياغتها بصورة أوضح من طرف برنولي Bernoulli(1654-1705)،ويقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، و تستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، و التجارية، و الزراعية، و الطبية، و السلوكية، و غيرها، خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، و التنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة في ظروف عدم التأكد.

[1] محمد يوسف اشقر، عبد اللطيف يوسف الصديقي، "أساسيات الإحصاء و الإحتمالات"، دار الراتب الجامعية، الطبعة الأولى، بيروت، لبنان، 2001، ص9.

مقــدمـة عــامة

تم تقسيم هذه المطبوعة إلى اربعة محاور، حيث نخصص المحور الأول إلى ماهية المجموعات و بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات أما المحور الثاني فنخصصه الى ماهية الإحتمال و كيفية حسابه، و المحور الثالث نتناول التوزيعات

الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة و المستمرة مع محاولة إعطاء مفهوم شامل لهما، و أخيرا المحور الرابع فنتناول فيه أهم التوزيعات الإحتمالية الشهيرة لكلا المتغيرين، مع تخصيص بعض التمارين المحلولة لكل فصل، لنختم هذه المطبوعة ببعض التمارين المقترحة (غير محلولة) وبعض مواضيع الامتحانات السابقة التي أجريت بمعهد العلوم الاقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير بجامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب.

المحــور الأول

مدخل للمجموعـات

والإحتمـالات

نتطرق من خلال هدا المحور إلى العناصر التالية:

I . ماهية المجموعات

I . 1. مفهوم المجموعة و أنواعها

I . 2.تطبيق قواعد الجبر على المجموعات

I . 3. خواص العمليات الجبرية على المجموعات

II . بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات

II.1. التجربة العشوائية

II.2 الحادث

II.3 قواعد الجبر على الحوادث

III . تمارين محلولة

I. ماهية المجموعات:

يستخدم الإنسان في حياته اليومية مفهوم المجموعة دون أن يقصد بالضرورة ذلك المفهوم الرياضي المحدد الذي أصبح أحد المفاهيم الرياضية الأساسية الحديثة مثل:

- أنهار الجزائر،
- فريق كرة القدم،
- طلاب السنة الأولى جامعي،
- أعضاء هيئة التدريس بقسم العلوم الإقتصادية بجامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب.

يتضح مما سبق وجود عدة وحدات بتسميات مختلفة و لهذا اتفق علميا على كلمة مجموعة كمصطلح علمي عام يقوم مقام أمثال التسميات السابقة كأن تقوم مثلا مجموعة طلاب السنة الأولى جامعي.

I . 1. مفهوم المجموعة و أنواعها

1. مفهوم المجموعة : المجموعة هي تجمع عدد من العناصر المحددة التي تشترك بصفة ما[1]، بحيث يمكنا أن نحدد من خلال تلك الصفة انتماء عنصر ما إلى تلك المجموعة أو عدم إنتمائه. و تمثل المجموعة بحرف كبير مثل A،B ، C، أما عناصر المجموعة فتمثل بحروف صغيرة a، b، c، و يستعمل الرمز ϵ يعني ينتمي إلى و الرمز ϵ يعني لاينتمي إلى. مثال $x \epsilon E$ نقول أن x ينتمي إلى المجموعة E، أما إذا لم يكن y ينتمي اي لا ينتمي للمجموعة E فنكتب $y \epsilon E$. وتوضع عناصر أي مجموعة في خاصيتين على النحو التالي: A : $\{1,2;3;4\}$ و B : $\{a,b;c;d\}$

2. أنواع المجموعات: توجد عدة أنواع نذكر منها ما يلي[2]:

✓ **المجموعة الخالية**: هي المجموعة التي لا يوجد فيها عناصر مطلقا و يمرز لها بالرمز $\emptyset$.

---

[1] السعدي رجال، "نظرية الإحتمالات مبادئ الحساب الاحتمالي دروس وتمارين"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2005، ص02.

[2] جيلالي جلاطو ،نظرية الاحتمالات و التوزيعات الاحتمالية مع تمارين و مسائل محلولة ،دار هومة للطباعة و النشر و التوزيع ،الجزائر ،2014، ص 10 .

- **تساوي المجموعات:** نقول أن المجموعة A و المجموعة B متساويتين إذا احتوت المجموعتان على نفس العناصر مثال: $\{1,2;3\}$: A، $\{1,2;3\}$: B و عليه فإن A=B.
- **المجموعة المحدودة:** هي المجموعة المكونة من عدد محدود من العناصر. مثل: لنرمز بالرمز Aلمجموعة أيام الأسبوع أي: {الجمعة ;... ;الإثنين ;الأحد ,السبت} : A و عليه فإن A في هذه الحالة مجموعة محددة.
- **المجموعة غير المحدودة:** هي المجموعة المكونة من عدد غير محدود من العناصر.مثل: مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{0,1,2,\dots\infty\}$
- **المجموعة الجزئية:** المجموعة A هي مجموعة جزئية من B يعني أن A محتواة في B و نرمز لها بالرمزB A C حيث إذا كان كل عنصر في المجموعة A هو عنصر في المجموعة B. مثل: مجموعة طلاب معهد العلوم الاقتصادية بالمركز الجامعي بلحاج بوشعيب يشكلون مجموعة جزئية من مجموعة طلاب المركز.
- **المجموعة الكلية:** وهي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر و هي فضاء العينة أو فراغ العينة و يرمز له بالرمز Sأو Ω.

I . 2. تطبيق قواعد الجبر على المجموعات

لتكن A، B ، C ثلاث مجموعات ، و عليه نطبق قواعد الجبر التالية [3]:

1.الإتحاد: هو حاصل جمع المجموعتين A و B و هي المجموعة التي تحتوي على مجموعة العناصر الموجودة في A أو B أو كليهما و يرمز للإتحاد بالرمز U، أي أن الحدث A U B يقع إذا وقع واحد على الأقل من الأحداث A، B، و هذا ما يدعى بجمع الأحداث.

مثال: لدينا المجموعات التالية : $\{1,3;5;7\}$: A_1، $\{7,6;4;2\}$: A_2 ،

المطلوب: أوجد $A_1 \cup A_2$. $\{1;2;3;4;5;6;7\}$: : $A_1 \cup A_2$ أي $A_1 + A_2$

[3] جيلالي جلاطو ، مرجع سبق دكره ، ص 11 .

2.**التقاطع**: تقاطع مجموعتين A و B هي المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين A و B و نرمز لها بالرمز التالي (n) أي أن الحدث يقع إذا و فقط إذا وقع كل من A و B معا وهذا ما يسمى بجداء الأحداث أي $A^* B \leftarrow C= A \cap B$

و إذا كانت A_1 محتواة في A_2 فإن $C=A_1 \cap B = A$.

مثال: لدينا المجموعات التالية:

$A : \{1,4;5\}$ و $B : \{1,2;3;5\}$، المطلوب: أوجد $A \cap B$

$A \cap B : \{1,5\}$

3. **متممة المجموعة A**: و يرمز لها بالرمز $\bar{A}$ و تعرف على أنها مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الكلية و لا تنتمي إلى المجموعة A.

مثال: المجموعة الكلية (S) $S : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $A : \{1,3,5,7,9\}$.

أوجد متممة المجموعة A أي $\bar{A}$. $\bar{A} : \{2,4,6,8,10\}$ أو A^{b}

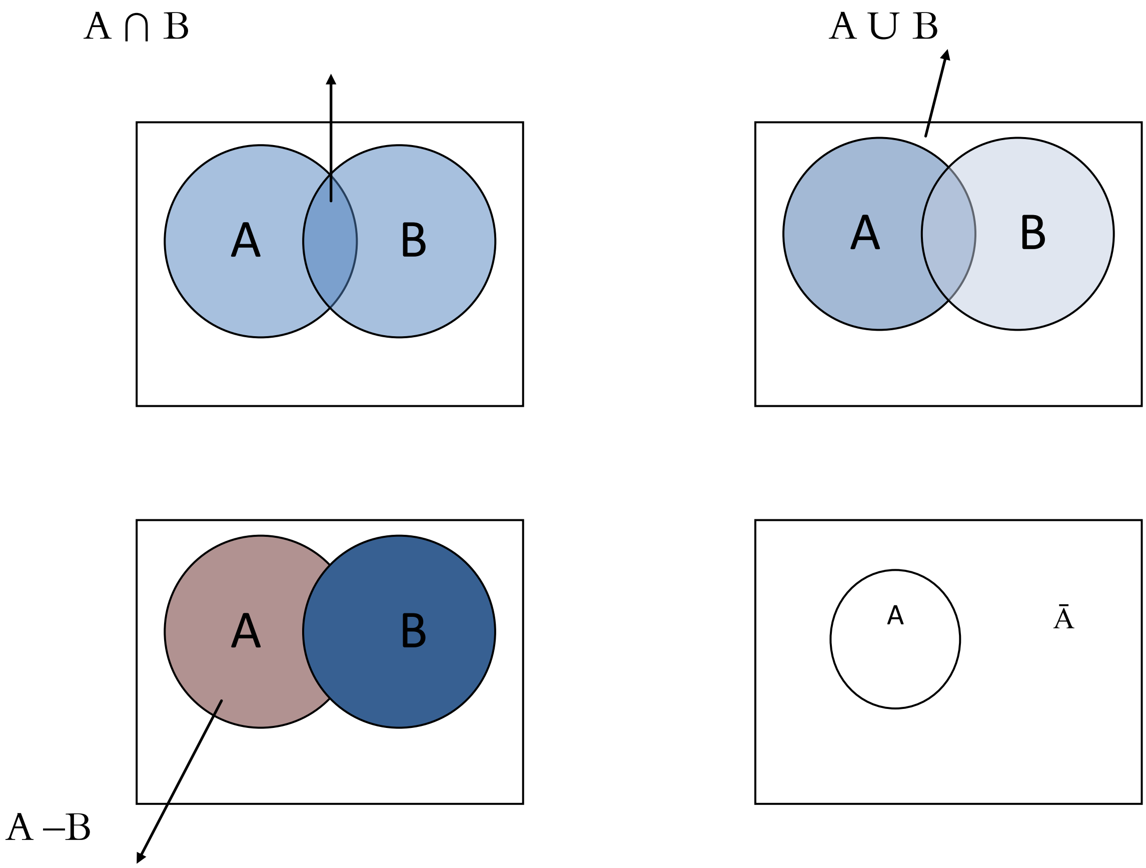
4. **الفرق بين مجموعتين**: الفرق بين A و B أي (A-B) هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B. و بالتالي فغن الفرق بين المجموعتين هو مجموعة العناصر المنتمية لأحدهما و غير المنتمية للآخر.

مثال: لدينا المجموعات التالية:

$A : \{2,4,6,8,10\}$، $B : \{2,3,4,5,6\}$ ، $A-B : \{8,10\}$

نلخص قواعد الجبر على المجموعات من خلال شكل فن، فهي عبارة عن طريقة لتسهيل إجراء العمليات الجبرية على المجموعات من خلال تمثيل المجموعات بالدوائر و تمثيل المجموعة الكلية بمربع أو مستطيل و هذا هو ما يعرف بأشكال فن Venn Diagrammes.

شكل رقم : اشكال فن



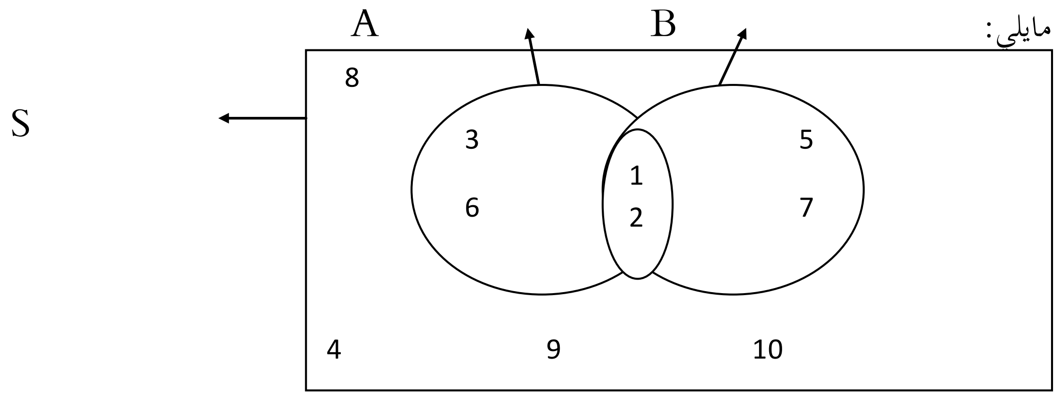
المصدر : **محمد يوسف اشقر ، عبد الطيف يوسف الصديقي، اساسيات الاحصاء و الاحتمالات ، دار الراتب الجامعية ، بيروت ،لبنان ، 2001 ، ص 104**

5.**المجموعة المنفصلة (المتنافية):** نقول عن المجموعتين Aو B متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما هو مجموعة خالية، أي هي المجموعات التي لا تشترك بأي عناصر و تكون العلاقة كمايلي: $A \cap B = \emptyset$.

مثال: لدينا مايلي: $A : \{1,2,3\}$،

$B : \{4,5\}$، و بالتالي Aو B مجموعتان متنافيتان أو منفصلتان $A \cap B = \emptyset$.

مثال: لدينا مايلي:



المطلوب: أوجد المجموعات التالية:

A، B، S، A U B، A ∩ B، Ā، B̄، Ā U B̄، Ā ∩B̄، A-B، B-A.

الحل:

S : {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

A : {1,2,3,6}

B : {1,2,5,7}

A U B: {1,2,3,6,5,7}

A ∩ B: {1,2}

Ā: {4,5,7,8,9,10}

B̄: {3,4,6,8,9,10}

Ā U B̄: {3,4,5,6,7,8,9,10}

Ā ∩B̄: {4,8,9,10}

A-B: {3,6}

B-A: {5,7}

I . 3. خواص العمليات الجبرية على المجموعات:

تتمثل خواص العمليات الجبرية في تطبيقاتها على المجموعات فيما يلي[4]:

1–خاصية التبديل:

*خاصية التبديل للإتحاد: $A \cup B = B \cup A$

*خاصية التبديل للتقاطع: $A \cap B = B \cap A$

2–خاصية التجميع: تتمثل فيما يلي:

*خاصية التجميع للإتحاد: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

*خاصية التجميع للتقاطع: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3–خاصية التوزيع:

*خاصية توزيع التقاطع على الإتحاد: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*خاصية توزيع الإتحاد على التقاطع: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. قوانين دي مورغان De Morgan's Laws: تتمثل فيما يلي[5] :

ليكن A، B مجموعتان فإن: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

هذه القوانين تعطينا العلاقة بين عمليات الإتحاد و التقاطع و أخذ المتممة، ويمكن تعميم القوانين السابقة إلى n من المجموعات بدلا من مجموعتين.

[4] محمد صبحي أبو صالح، "مبادئ الإحصاء"، دار اليازوري العلمية للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص153.

[5] محمود على متولى عجوز، الاحصاء و الاحتمالات و بحوث العمليات ، المكتب الجامعي الحديث، الاسكندرية ، مصر ، 2009 ، ص 10.

II. بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات

II.1 التجربة العشوائية: هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها و لكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستحدث، و مثال على ذلك عند إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما ظهور الصورة H أو ظهور الكتابة T أي أن النتائج الممكنة هي $\{H, T\}$، و قبل إلقاء القطعة لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر، و يمكن تفسير التجارب من حيث نتائجها إلى قسمين أساسين يعتمد كل منها على مدى تكرار نتائج هذه التجارب كمايلي[6]:

فراغ العينة: هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، و يرمز لها بالرمز S، و يرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز n (s)، ويمكن أن يكون فراغ العينة محدود أي منته أو غير محدود غير منته[7].

مثال: 01 إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة نجد أن $S: \{H, T\}$ و عدد النتائج n(s)= 2

02إلقاء قطعتين نقديتين مرة واحدة n (s)= 4 $S: \{HH, HT, TH, TT\}$

03عند رمي زهرة نرد غير متحيزة مرة واحدة فإن n (s)= 6 $S: \{1,2,3,4,5,6\}$

-**التجارب الثابتة (المحددة)**: هذا النوع من التجارب يعطي نفس النتيجة عند تكرار التجربة، و لكن تحت نفس الظروف مثلا قياس درجة غليان الماء، فإذا أجريت تجربة لقياس درجة غليان الماء عند مستوى سطح البحر وتحت ضغط جوي واحد فإن الناتج يكون 100 بغض النظر عن عدد مرات إجراء هذه التجربة.

-**التجارب غير الثابتة و التي عادة ما تسمى بالتجارب العشوائية**: هذا النوع من التجارب الذي تتغير نتيجته من تجربة لأخرى مثل غلقاء قطعة نقدية، فإن الناتج يكون إما صورة أو كتابة و مع ذلك لا نستطيع تحديد نتيجة التجربة و هذه النتائج تسمى بفراغ أو فضاء العينة و يرمز لها بالرمز S.

II.2 الحادث: إن النتيجة أو النتائج المحددة من النتائج الممكنة لتجربة ما تشكل حدثا أي مجموعة جزئية من فضاء العينة و نرمز له بالأحرف التالية ...A, B وينقسم الحدث إلى عدة أقسام:

---

[6] ابراهيم محمد البطانية، "مبادئ الغحصاء لطلبة الإدارة و الإقتصاد"، دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2011، ص176.

[7] معتوق أمحمد، "الإحصاء الرياضي و النماذج الإحصائية"، ديوان المطبوعات الجامعية بن عكنون، الجزائر، 2007، ص07.

1– حادث بسيط: هو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.

2– حادث مركب: و يشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة و يرمز لعدد النتائج المكونة للحادث بالرمز ....$n(A), n(B)$ وهكذا.

3– حادث مستحيل: هو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر.

4– حادث أكيد: هو الحادث الذي يحتوي كل عناصر فراغ العينة.

مثال: نلقي قطعة النرد مرة واحدة و نعتبر الحوادث التالية:

A: ظهور عدد يقبل القسمة على 5.

B: ظهور عدد زوجي.

C: ظهور عدد يزيد عن 9.

D: ظهور عدد يقل عن 7.

المطلوب: ما هو نوع كل حادث. $S:\{1,2,3,4,5,6\}$

A: حادث بسيط $A:\{5\}$

B: حادث مركب $B:\{2,4,6\}$

C: حادث مستحيل $C:\{\ \}=\emptyset$

D: حادث أكيد $D:\{1,2,3,4,5,6\}=S$

مثال: عند إلقاء قطعة نقدية مرتين حيث الحادث A هو ظهور الصورة مرتين والحادث B ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل نجد أن: $S:\{HH,HT,TH,TT\}$ ، $A:\{H,H\}$، $B:\{HH,HT,TH\}$

وعليه $n(A)=1$، $n(B)=3$، A حادث بسيط، B حادث مركب.

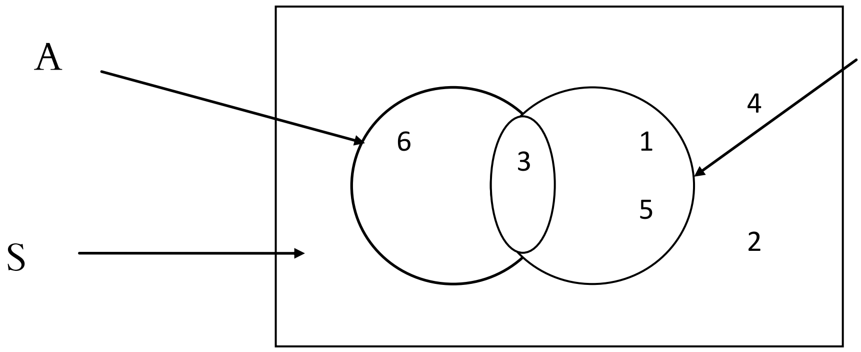
II.3 قواعد الجبر على الحوادث: تتمثل قواعد الجبر على الحوادث فيما يلي [8]:

1–الإتحاد U: يعبر اتحاد الحادثتان A, B عن وقوع احدهما على الأقل، و بمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما و يعبر عن ذلك رياضيا : (A U B)أو (A or B). **مثال:** نرمي زهرة نرد مرة واحدة و نعتبر الحوادث التالية:

A: ظهور عدد يقبل القسمة على 3.

B: ظهور عدد فردي

نمثل المجموعة الكلية S و المجموعة A و B وفق شكل فن كمايلي:

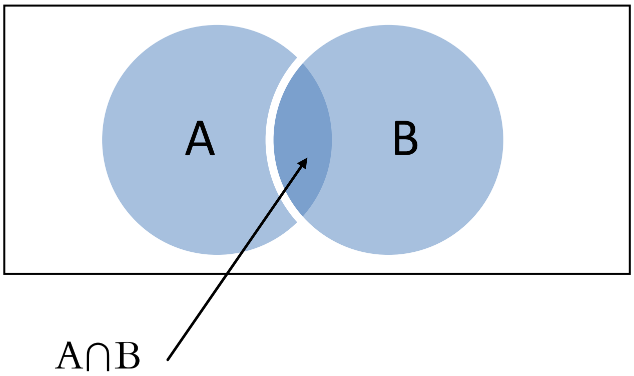


المطلوب: أوجد الحادث S، A، B، A U B

$S:\{1,2,3,4,5,6\}$، A : $\{3,6\}$، B : $\{1,3,5\}$، (A U B) : $\{1,3,5\}$

[8] محمد يوسف اشقر ، عبد الطيف يوسف الصديقي، اساسيات الاحصاء و الاحتمالات ، دار الراتب الجامعية ، بيروت ،لبنان ، 2001 ، ص 103 .

2-التقاطع $\cap$: يعبر تقاطع الحادثان A,B عن وقوع الاثنان في آن واحد و يشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين و يعبر رياضيا $(A\cap B)$ أو $(A \text{ and } B)$ و يظهر ذلك في شكل فن كما يلي:



مثال: نأخذ نفس المثال السابق، **المطلوب**: أوجد $A\cap B$

الحل: $A\cap B : \{3\}$

5-الحوادث المستقلة: نقول عن الحادثين Aو B أنهما مستقلان، إذا لم يكن لوقوع احدهما أي تأثير على حظوظ وقوع الثاني، (وفي الحالة العكسية نقوا أنهما غير مستقلين).

مثال: يحتوي صندوق على 10 كريات بيضاء و 7 زرقاء، نسحب منه كريتين الواحدة تلوى الأخرى و بدون ارجاع و نعتبر الحادثين:

A: الكرة المسحوبة الأولى بيضاء.

B: الكرة المسحوبة الثانية بيضاء.

لوقوع A تأثير على وقوع B لهذا فهما حادثان غير مستقلين.

إذا تم السحب بالإرجاع يتحقق استقلال الحوادث.

6-الحوادث المتنافية: نقول عن الحاثين Aو B أنهما متنافيان إذا استحالة وقوعهما معا

مثال: نرمي زهرة نرد بالصدفة في الهواء و نعتبر الحوادث التالية:

A: الحصول على عدد زوجي.

B: الحصول على عدد فردي.

C: الحصول على عدد مضاعف ل03

S= {1,2,3,4,5,6} ،A= {2,4,6} ،B= {1,3,5} ،C= {3,6}

الحادثان Aو B متنافيان لأن وقوعهما في نفس الووقت مستحيل أي $A \cap B = \emptyset$

الحادثان Aو C غير متنافيين لأن وقوعهما في نفس الوقت ممكن وذلك إذا كانت نتيجة التجربة الرقم 6 أي $A \cap C$:{6}.

مما سبق لاحظنا ان رموز نظرية المجموعات تستخدم بشكل واسع في نظرية الاحتمالات ونلخص في الجدول التالي تفسير بعض المفاهيم في نظرية المجموعات و نظرية الاحتمالات[9]:

جدول (3-1) : تفسير بعض المفاهيم في نظرية المجموعات و نظرية الاحتمالات

الرموز	لغة نظرية المجموعات	لغة نظرية الاحتمالات
S أو Ω	المجموعة الكلية	فراغ الحوادث الأولية
a	العنصر $a \in S$	الحادث الأولي
A	مجموعة جزئية ما من العناصر	الحادث A
Ω أوS	مجموعة كل العناصر a	الحادث الأكيد
Ø	المجموعة الخالية	الحادث المستحيل
A C B	Aمجموعة جزئية من المجموعة B	الحادث A محتوى في الحادث B
A U B	اجتماع المجموعتين Aو B	اجتماع الحادثين Aو B
$A \cap B$	تقاطع المجموعتين Aو B	تقاطع الحادثين Aو B
$A \cap B = \emptyset$	Aو B مجموعتين غير متقاطعتين	Aو B حادثين متنافيين
A \ B	فرق المجموعة A عن B	فرق الحادث A عن B

المصدر: عبد الحفيظ مصطفى ، نظرية الاحتمالات مبدئ و تطبيقات ، الجزء الاول ، ديوان المطبوعات الجامعية ، الطبعة الثانية، الجزائر ، 2004، ص 30 .

[9] عبد الحفيظ مصطفى ، نظرية الاحتمالات مبادئ و تطبيقات ، الجزء الاول ، ديوان المطبوعات الجامعية ، الطبعة الثانية، الجزائر ، 2004، ص 30 .

أحيانا ومن أجل التبسيط، في نظرية الإحتمالات يسقط رمز التقاطع، أي يكتب A B بدلا من A ∩ B.

ويكتب أحيانا A+B بدلا من A U B.

ملاحظة:

يسمى الحادثين E1، E2 حوادث منفصلة (متباعدة) إذا كان E1 ∩ E2 = Ø (لايوجد بينهم تقاطع).

وتسمى الحوادث E1, E2, …En حوادث شاملة و متباعدة إذا كان:

1. $U_{r=1}^{N} Er = S$
2. E1 ∩ E2 ∩ E3…∩ En = ϕ

III . تمارين محلولة :

التمرين الاول :

نرمي قطعة نقدية و زهرة نرد مرة واحدة . المطلوب:

- اكتب عناصر الفضاء العيني.

الحل:

ارمز لوجه قطعة النقود الذي تظهر عليه الصورة بالحرف H، و للوجه الآخر، وهو الكتابة، بالحرف T. من الواضح أن احدى النتائج البسيطة هي ظهور الصورة على قطعة النقود و العدد 1 على زهرة النرد وبذلك يكون (H, 1) نتيجة بسيطة أي عنصر في الفضاء العيني ولو حاولت أن تكتب جميع النتائج البسيطة التي يمكن الحصول عليها لوجدت أنها تمثل عناصر الفضاء العيني. وهي:

$$\Omega = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6),\}$$

التمرين الثاني :

ناخد نفس التمرين السابق بين الحادث البسيط و الحادث المركب

الحادث $\{(H,1)\}$ حادث بسيط.

أما الحادث $\{(H,6),(T,2),(H,1)\}$ حادث مركب.

وتصنف الفضاءات العينية حسب عدد العناصر التي تحتويها. فإذاكان عدد هذه العناصر محدودا يسمى الفضاء العيني فضاء عينيا محدودا، فمثلا: إذا رميت زهرة نرد فإن الفضاء العيني يحتوي على 6 نقاط، وبالتالي فإنه محدود.

التمرين الثالث :

في تجربة سحب بطاقتين على التوالي من صندوق يحتوي على أربع بطاقات كتبت عليها الأرقام: 1، 2، 3، 4 أكتب الفضاء العيني إذاكان:

1.السحب مع الإرجاع.

2.السحب دون إرجاع.

الحل:

1.

$S =$
$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2),$
$4,3, (4,4)$

2.

$S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2),\ (4,3), \}$

التمرين الرابع :

يلعب فريقنا الوطني لكرة القدم ثلاث مباريات مع فرق محيلة استعدادا لبطولة ما، فإذا أردنا تسجيل نتائج هذه المباريات (فوزF، تعادلT، خسارة R) فاكتب الفضاء العيني.

الحل :

التمرين الخامس :

سحبت بطاقتان على التوالي من صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات كتبت عليها الأرقام 1،2،3 اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة:

1. إذا كان السحب مع الإرجاع
2. بدون إرجاع، ثم أوجد:

- A مجموع البطاقتين 4
- B مجموع البطاقتين أكبر من 3
- C مجموع البطاقتين أكبر من 3 أو أقل من 6

D – مجموع البطاقتين أكبر أو يساوي 3 أو أقل من أو يساوي 6

في كلا الحالتين مع الإرجاع و بدون إرجاع.

الحل:

مع الإرجاع: $S=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\\(3,1),(3,2),(3,3)\end{matrix}\right\}$

فيكون:

A : $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ مركب

B : $\{(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ مركب

C : $\{(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),\}$

D : $\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

بدون إرجاع: $S=\left\{\begin{matrix}(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\\(3,1),(3,2)\end{matrix}\right\}$

فيكون:

A : $\{(1,3),(3,1)\}$

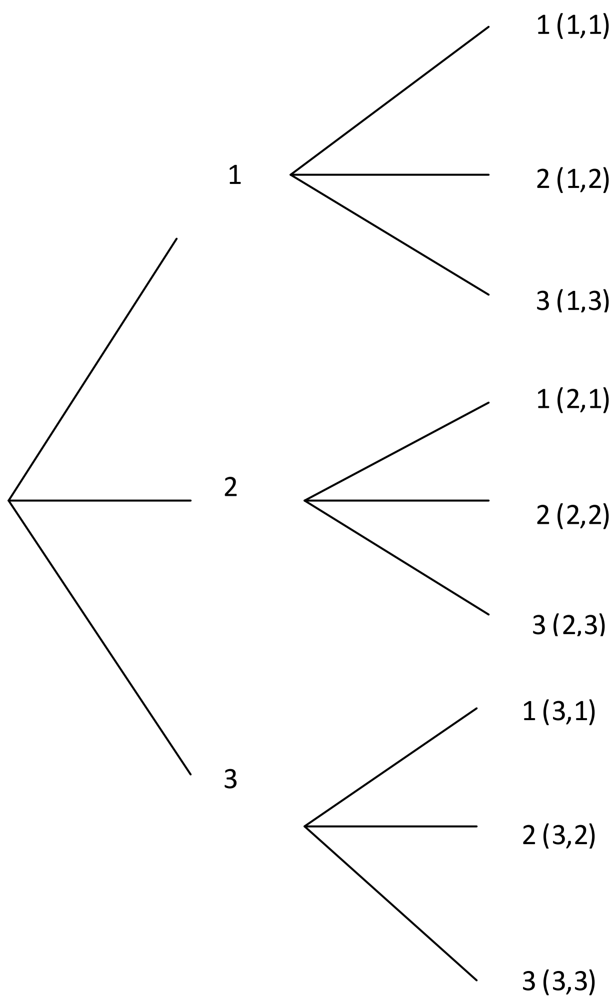
B : $\{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

C : $\{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),\}$

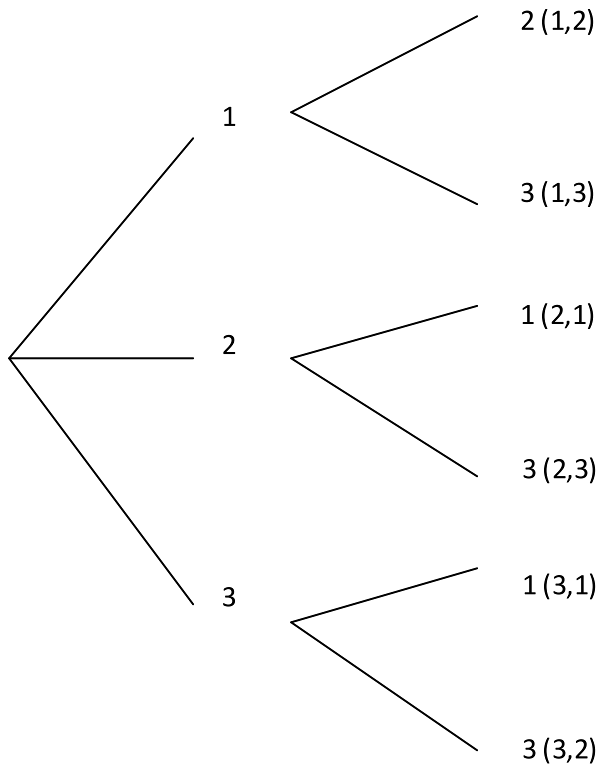
D : $\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

من الممكن استخدام الشجرة البيانية لكتابة الفضاء العيني فمثلا في المثال السابق:

إذا كان السحب مع الإرجاع فإن:



وإذا كان السحب بدون إرجاع فإن :



التمرين السادس :

بين إذا كانت $E1 = \{2,3,4,6\}$ و $E2 = \{1,5\}$ حوادث متباعدة و شاملة في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة.

الحل:

1. $E1 \cup E2 = \{1,2,3,4,5,6\} = S$
2. $E1 \cap E2 = \phi$

إذن E1، E2 حوادث متباعدة و شاملة.

التمرين السابع:

بين فيما إذا كانت E1، E2 حوادث متباعدة و شاملة عند إلقاء حجر النرد مرتين:

E1: ظهور عددين مجموعهما 6.

E2: ظهور عددين أحدهما مثل الآخر.

الحل:

$S = \{(1,1) \ldots\ldots (6.6)\}$ (مثال سابق)

E1 = $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,5)\}$

E2 = $\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(3,6),(6,3)\}$

E1 U E2 ≠ $\phi \ = \{(2,4),(4,2)\}$

S ≠ $E1\ U\ E2 \ = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(1,2),(2,1),(3,6),(6,3)\}$

إذا ليست شاملة لأن E1 U E2 ≠ S وأيضا ليست منفصلة لأن ϕ ≠ E1 ∩ E2.

المحـور الثاني

ماهية الاحتمال وقواعدحسابـه

نتطرق من خلال هدا الفصل إلى العناصر التالية:

I. ماهية الاحتمال

I. 1. مفهوم الإحتمال

I. 2.خواص الاحتمال

I. 3.قوانين الاحتمال

I. 4.التحليل التوافقي

II. نظرية الاحتمالات الكلية و نظرية BAYS لحساب الاحتمالات.

II. 1. نظرية الاحتمالات الكلية

II. 1.نظرية BAYS لحساب الاحتمالات

III. تمارين محلولة

I. ماهية الاحتمال

I. 1. **مفهوم الإحتمال** : كثيرا ما نستخدم كلمة إحتمال في حياتنا اليومية فنقول مثلا إن إمكانية هطول المطر اليوم كبيرة جدا ، هذه الإمكانية يمكن التعبير عنها بكلمة آخرى ، فنقول مثلا " أنه من المحتمل جدا أن يهطل المطر اليوم ، إلا أن هذا الكلام يعبر عن تقديرات عامة غير دقيقة لوقوع الحادث ، مما جعل الإحصائيين يرون ضرورة قياسه بقيمة عددية لإضفاء طابع الدقة عليه ، هذه القيمة العددية هي التي تحدد لنا ما نسميه بإحتمال تحقق الحادث المذكور ، ويقاس الإحتمال بقياس نهايته الصغرى هي الصفر التي تعكس الإستحالة المطلقة لتحقيق الحادث ، ونهايته العليا هي الواحد و التي تعكس الحقيقة المطلقة لتحقيق الحادث ، وبالتالي فإن القيمة العددية للإحتمال هي عبارة عن كسر يقع بين الصفر الواحد[1]، ويعتمد حساب الإحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات ، ويعتبر هذا النوع من الإحتمال هو العنصر الأساسي في الإستدلال الإحصائي ، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الإحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة ، و على تكرار الحادث محل الإهتمام ، فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث A بالرمز $P(A)$، فإن طريقة حساب هذا الإحتمال تتحدد وفقا لنوع الإحتمال يوجد نوعان للإحتمال هما :

– **الإحتمال التجريبي** : ويعبر عنه بالتكرار النسبي و يحسب بتطبيق المعادلة التالية :

حيت أن :

n هو مجموع التكرارات (العدد الكلي للمشاهدات) .

[1] السعدي رحال ، مرجع سبق دكره، ص 123.

$f(A)$: هو تكرار الحادث A،

مثال: تم إلقاء قطعة نقدية غير متحيزة 500 مرة ، وثم ملاحظة عدد مرات ظهور كل وجه ، ثم لخصت كالتالي :

الوجه(Face)	H	T	SUM
عدد مرات ظهور الوجه	260	240	500

المطلوب حساب إحتمال ظهور الصورةH ، يمكن تطبيق المعادلة السابقة و التي تعتمد على التكرار النسبي ، أي أن :

الإحتمال النظري : وهو الذي يعتمد في حسابه على أسس وقواعد الرياضيات ، و التي تستخدم في تحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة ، وعدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث ، و من ثم يحسب هذا النوع من الإحتمال ، بتطبيق المعادلة التالية:

حيث أن :

$n(S)$ هو عدد النتائج الممكنة للتجربة .

$n(A)$: هو عدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث A

مثال : عند إلقاء قطعة نقدية غير متحيزة مرة واحد ، نجد أن فراغ العينة هو : $S : [H ,T]$ أي أن عدد النتائج الممكنة هي : $n(s) = (2)^1 = 2$ ، و إذا كان الحادث Aهو ظهور الصورة H، نجد أن

[H] : A ، أي أن عدد النتائج المكونة Aهي : n (A)=1، ويكون إحتمال وقوع الحادث A

هو :
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2} = 0.5$$

العلاقة بين الإحتمال التجريبي و الإحتمال النظري : عند زيادة عدد المحاولات n يقترب الإحتمال التجريبي من الإحتمال النظري ، أي أن :

فعند زيادة عدد مرات رمي القطعة النقدية ، فإن التكرار النسبي للصورة سوف يقترب من القيمة (0.5) ، و هي قيمة الإحتمال النظري لظهور الصورة عند رمي القطعة النقدية مرة واحدة.

النتائج المتشابهة : إذا أجريت تجربة ، و كانت كل نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة لها نفس الفرصة في الظهور ، بمعنى أن كل نتيجة لها إحتمال هو (1/n(s)) ، تسمى هذه النتائج بالنتائج المتماثلة أو المتشابهة ، فعند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو S : [1,2,3,4,5,6] ، و إحتمال كل نتيجة هو (1/6) ، وعند إلقاء الزهرة مرتين نجد أن عدد نتائج فراغ العينة هو :

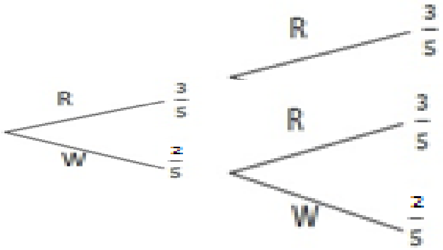
$n(s) = 6^2 = 36$ وهي :

	1	2	3	4	5	6
1	(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)
2	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(2.6)
3	(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(3.6)
4	(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)	(4.5)	(4.6)
5	(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	(5.5)	(5.6)
6	(6.1)	(6.2)	(6.3)	(6.4)	(6.5)	(6.6)

وهذه النتائج متماثلة ، و إحتمال كل نتيجة هو (1/36)

النتائج غير المتماثلة : هي النتائج التي تحدث عند تكرار محاولة ، بحيث أن إحتمالات نتائج كل محاولة غير متساوي ، ومن ثم لا تتساوى إحتمالات نتائج التجربة ، فعند سحب كرتين مع الإرجاع بطريقة عشوائية من كيس به ثلالث كرات حمراء (R) ، وكرتان تحملان اللون الأبيض (W) ، نجد أنه في كل سحب يكون إحتمال ظهور كرة حمراء هو 3/5 ، و إحتمال ظهور كرة بيضاء هو 2/5 ، ومن ثم يكون نتائج فراغ العينة ، و إحتمال كل نتيجة في حالة سحب كرتين هو :

RR 3/5 3/9 =9/25



RW 3/5 2/5 =6/25

WR 2/5 3/5 =6/25

WW 2/5 2/5 = 4/25

S:{RR,RW,WR,WW} n(S)=4

$$p(R\cap R) = \frac{3}{5} * \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$p(R\cap W) = \frac{3}{5} * \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$p(W\cap R) = \frac{2}{5} * \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

$p(W\cap W) = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

ملاحظة : في التعريف للإحتمال نفرض أن نقاط فضاء العينة لها نفس حظوظ الوقوع.

مثال 01 : نرمي زهرة نرد مرة واحدة ، فما هو إحتمال وقوع الحوادث التالية :

A: الحصول على عدد زوجي

B:الحصول على عدد فردي

C : الحصول على عدد مضاعف لـ 3

S : [1.2.3.4.5.6] A=[2.4.6] B=[1.3.5]

C=[3.6] n(S)=6

$$P(A) = \frac{n(a)}{n(s)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(b)}{n(s)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{n(c)}{n(s)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال 02 : نرمي قطعة نقدية 3 مرات بالصدفة في الهواء أحسب إحتمال وقوع الحوادث التالية :

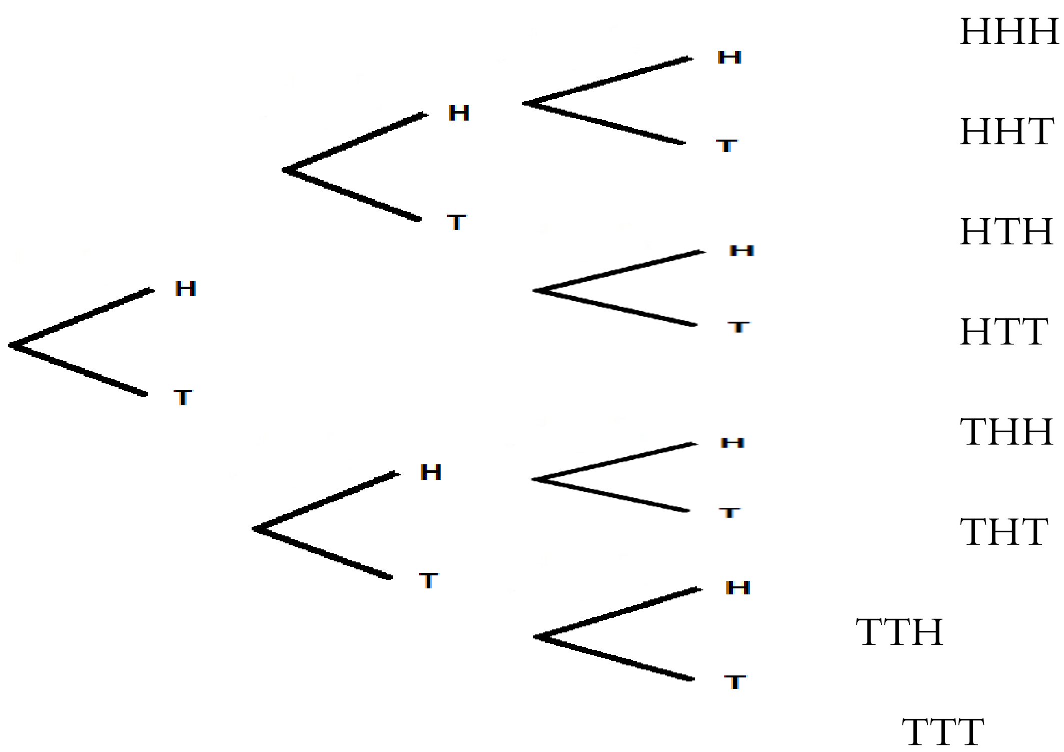
A: ظهور الصورة Hمرتين فقط متتاليتين

B: ظهور الصورة Hمرة واحدة على الأقل

C: ظهور الصورة H مرة واحدة على الأكثر

D: ظهور الكتابة T ثلاث مرات.

الحل :



S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

$N_{(S)}=8$

A: ظهور الصورة Hمرتين فقط متتاليتين :

A :[HHT . THH] $n_{(A)}=2$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

B : ظهور الصورة H مرة واحدة على الأقل

B :[HHH.HHT.HTH.HTT.THH.THT.TTH] n (B) =7

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(C)} = \frac{7}{8}$$

C : ظهور الصورة H مرة واحدة على الأكثر

C :[HTT.THT.TTH.TTT] n (C) =4

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(C)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

D : ظهور الكتابة T ثلاث مرات :

D :[TTT] n(D)=1

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

I. 2.خواص الاحتمال: تتمثل خواص الاحتمال فيما يلي[1]:

- الاحتمال هو عدد موجب تماما او معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات احداث تجربة ما يساوي الواحد.

أما الخاصية الثالثة فنستنتجها من الخاصيتين السابقتين ، حيث وفق الصبغة العامة للاحتمال المساوية ل:

P(A) $=\frac{n(A)}{n(S)}$

حيث :

[1] عبد الناصر رويسات ،الاحصاء الوصفي ومدخل للاحتمالات دروس و تمارين، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006 ، ص 154 .

$n(A)$: عدد الحالات المواتية

$n(S)$: عدد الحالات الكلية

$$\left.\begin{array}{l} n(A) \geq 0 \\ n(s) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{n(A)}{n(s)} \geq 0$$

$$\frac{n(A)}{n(s)} \leq 1 \Longrightarrow n(A) \leq n(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n(A)}{n(s)} \geq 0 \\ n(A) \leq n(s) \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$$

هذا يعني ان الاحتمال محصور بين ادنى قيمة تساوي الصفر(0) و اكبر قيمة تساوي الواحد (1).

I. 3.قوانين الاحتمال:

يواجهنا في كثير من الاحيان تطبيقات علم الاحتمالات تحتاج الى حساب احتمالات الحوادث المركبة و لتسهيل القيام بهذه المهمة نوضح القوانين الاولية في الاحتمال فيما يلي[1]:

نظرية 1: اذا رمزنا للحدث الخالي بالحرف $\emptyset$.

و كان P الاحتمال المعرف على Sفإن: $P(\emptyset)=0$

نلاحظ ان الحادث $\emptyset$ يعني عدم حدوث اي نتيجة من النتائج الممكنة في التجربة الاحصائية،لذلك فان $p(\emptyset)=0$ باستعمال فرضيات تعريف الاحتمال.

مثال: نرمي قطعة نقدية مرة واحدة في الهواء،فما هو احتمال الحصول على H مرتين ؟

/ H

S :{H,T} $n(s) = 2$

\ T

A=الحصول على H مرتين

$A : \{\emptyset\}$ $n(A)=0$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{0}{2}=0$$

نظرية 2: اذا كان A حادث في S ، $\bar{A}$ متممة ذلك الحدث فإن: $P(\bar{A})=1-p(A)$

هذا يعني انه اذا كان احتمال حدوث الحادث A هو $P(A)$فان احتمال عدم حدوث A هو $p(\bar{A})$ و هو ما يسمى باحتمال الحادث العكسي[2]

---

[1]- محمد صبحي أبو صالح، مرجع سبق دكره ،ص 159.

[2] Stéphane mussard, françois seyte, inférence statistique et probabilités , de boeck supérieur, 1re édition , paris , France, 2014 , p 02.

مثال: اذا كان احتمال حصول طالب ما على بعثة يساوي 0.90 فما هو احتمال عدم حصوله على تلك البعثة.

الحل:

A= حصول الطالب على البعثة. $P(A) = 0.9$

$\bar{A}$ عدم حصول الطالب على البعثة.

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.9 = 0.1$$

مثال2: إذا كان احتمال وصول الطالب الى محاضراته في الوقت المحدد يساوي 0.70، فما هو احتمال وصول الطالب متأخرا أي عدم وصوله في الوقت المحدد.

الحل:

A: الوصول في الوقت المحدد الى المحاضرة.

$\bar{A}$: عدم الوصول في الوقت المحدد الى المحاضرة.

$$P(A) = 0.70$$

$$P(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$= 1 - 0.70$$

$$= 0.30$$

مثال 3:

لدينا ثلاث (3) رسائل نوزعها بالصدفة على أصحابها دون مراعاة عناوينهم.

احسب احتمال ان شخص واحد على الاقل من بين الثلاثة لا تصله رسالته.

1	2	3
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	B	A
c	a	b

A: شخص واحد على الاقل من بين الثلاثة لا تصله رسالته

$\bar{A}$: كل شخص تصله رسالته. $\bar{A}$: {abc}

عدد الحالات الكلية هو : $n(S)=6$

عدد الحالات المواتية لوقوع $\bar{A}$ هو : $n(\bar{A})=1$

$$P(\bar{A})=\frac{n(\bar{A})}{n(\bar{s})}=\frac{1}{6}$$

$$P(A)=1-p(\bar{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

اما بقية القوانين فنلخصها فيما يلي :

1- **قانون الجمع**: نعتبر فضاء عينة S عدد عناصره ، n(S)عدد الحوادث الكلية ، و حادثين A و B بحيث عدد عناصر A هو n(A) أي عدد الحالات المواتية لوقوع A ،و عدد عناصر B هو n(B) أي عدد الحالات المواتية لوقوع B ، فان اتحاد الحادثين اي الجمع بينهما يكون وفق الصيغة التالية[1] :

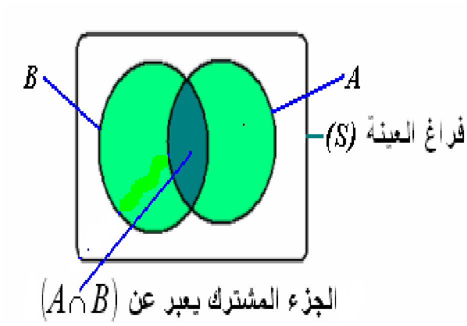
$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}$$

$$=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

[1] عبد الناصر رويسات ، مرجع سبق دكره ، ص 158 .



في حالة ثلاثة أحداث A.B.C يمكن استنتاج معادلة الاتحاد P(AUBUC) كما يلي:

$$P(A\cup B\cup C)= p(A)+p(B)+ p(C)- p(A\cap B) - p(A\cap C)- p(B\cap C)+ P(A\cap B\cap C)$$

في حالة الاحداث المتنافية فان احتمالات التقاطعات تساوي أصفار أي:

$A\cap B \neq \emptyset \Longrightarrow p(A\cap B)=0$

$A\cap C =\emptyset \Longrightarrow P(A\cap C)=0$

$B\cap C=\emptyset \Longrightarrow P(B\cap C)=0$

مما سبق يصبح قانون الجمع كما يلي:

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)$.

مثال:اذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الاولى يساي 0.20 و احتمال غيابه عن المحاضرة الثانية يساي 0.15 و احتمال غيابه عن المحاضرتين الاولى و الثانية يساي 0.05.

المطلوب:

1. ما هو احتمال غياب الطالب عن واحدة من هاتين المحاضرتين على الاقل؟

2. ما هو احتمال عدم غياب الطالب عن أي من المحاضرتين؟

الحل:

A:غياب الطالب عن المحاضرة الاولى.

B: غياب الطالب عن المحاضرة الثانية.

A∩B: غياب الطالب عن المحاضرتين معا.

1. $P(AUB)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$=0.20+0.15-0.05=0.30.$

2. $p(\overline{AUB})=1-p(AUB)=1-0.30=0.70.$

ملاحظة:عدم غياب الطالب عن اي من المحاضرتن هي متممة الحادث غياب الطالب عن احدى المحاضرتين على الاقل اي متممة AUB.

مثال: لدينا ما يلي:

$p(A)=0.50 \quad p(B)=0.8 \quad p(A\cap B)=0.40$

اوجد مايلي:

$p(\bar{A}) \quad p(\bar{B}) \quad p(AUB) \quad p(\overline{AUB})$

الحل:

1. $p(\bar{A})=1-p(A)=1-0.50=0.50$
2. $p(\overline{B})=1-p(B)=1-0.8=0.20$
3. $p(AUB)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0.50+0.80-0.4=0.90$
4. $p(\overline{AUB}) = 1 - p(AUB) = 1 - 0.9 = 0.10$

مثال:نرمي زهرة نرد بالصدفة في الهواء مرة احدة.

احسب احتمال الحصول على عدد مضاعف ل 3 أو عدد زوجي.

الطريقة الأولى:

$S:\{1,2,3,4,5,6\}$ $n(S)=6$

$A:\{2,3,4,6\}$ $n(A) = 4$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6}$$

الطريقة الثانية:

A_1 الحصول على عدد زجي $A_1=\{2,4,6\}$ $n(A_1)=3$

1 3

$$p(A_1)= \frac{n(A1)}{n(S)} = \frac{3}{6}$$

A_2:الحصل على عدد مضاعف ل 3 $A_2=\{3,6\}$ $n(A_2)=2$

$$p(A_2)= \frac{n(A2)}{n(S)} = \frac{2}{6}$$

$A1 \cap A2 :\{6\}$ $n(A1 \cap A2)=1$

$$p(A_1 \cap A_2)= \frac{n(A1 \cap A2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

$$p(A)=p(A_1 \cup A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2 – قانون الاحتمال الشرطي: conditional probability

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث،اذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد ، و كاحتمال استخدام المزرعة لنوع معين من السماد، اذا علم انه يقوم بزراعة محصول معين ، و كاحتمال ان الخريجي يعمل بالقطاع الخاص ،اذا علم انه ممن تخرجوا من قسم معين من اقسام كلية الزراعة ، و الامثلة على ذلك كثيرة.

فإذا كان الحدث B حادث معلوم، و الحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه،بمعلومية الحادث B ، فان هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

و يعرف الاحتمال p(A/B) بقانون الاحتمال الشرطي ، و يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B "، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B " كما يمكن حساب احتمال وقوع الحادث B بمعلومية الحادث A، ذلك بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

من المعادلتين السابقتين يلاحظ ان الاحتمال الشرطي هو نسبة حادث التقاطع بين الحادث المطلوب حساب احتماله الى الحادث المعلوم و نلخص ذلك من خلال المخطط التالي[1]:

[1] Brigitte tribout , statistique pour économistes et gestionnaires , pearson éducation , paris , France , 2007 , p 243.

احتمال التقاطع علامة الشرط

احتمال معلوم $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

الحادث المعلوم الحادث المطلب حساب احتماله

مثال1: نرمي قطعة نقدية ثلاثة مرات .

المطلوب: اذا علمت اننا حصلنا في الرمية الاولى على الصورة H فما احتمال ان نحصل على الصورة H في الرمية الثانية الثالثة.

الحل:

S :{HHH.HHT.HTH.HTT.THH.THT.TTH.TTT}

A :الصورة H في الرمية الاولى.

B: الوجهان في الرمية الثانية الثالثة أي الصورة H في الرمية الاولى و الثانية.

$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

A :{HHH.HHT.HTH.HTT} $n(A)=4$

$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

B :{HHH.THH} $n(B)=2$ $p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$A\cap B:\{HHH\}$ $n(A\cap B)=1$

$p(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(s)}=\frac{1}{8}$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}$$

3 – قانون الضرب: بالرجوع الى التعريف السابق للاحتمال الشرطي ، و بعد اجراء الضرب التبادلي نحصل على مايلي [1]:

$$p(A\cap B)=p(A).\,p(B/A) \qquad p(A)>0 \text{ اذا كان}$$

$$p(A\cap B)=p(B).\,p(A/B) \qquad p(B)>0 \text{ اذا كان}$$

هذه النظرية تعطي قاعدة الضرب في حالة الاحداث المشروطة.

مثال1: لدينا ما يلي:

$p(A)=0.60 \qquad p(B)=0.30 \qquad p(A/B)=0.40$

المطلوب :أوجد ما يلي :

1. $p(A\cap B)$
2. $p(B/A)$

الحل:

1. من قاعدة الضرب:

$$p(A\cap B)=p(B).p(A/B)$$
$$=0.30\,.\,0.40=0.12$$

2.

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0.12}{0.60}=0.20$$

[1] Brigitte tribout , op.cit , p 243 .

مثال 2: يحتوي صندوق على 10 كريات بيضاء و 7 كريات صفراء،نسحب منه كريتين الواحدة تلو الاخرى و بدون ارجاع.

احسب احتمال الحصول على كريتين بيضاء؟

A:الحصول على كريتين بيضاء.

A1:الكرة المسحوبة الاولى بيضاء.

A2 :الكرة المسحوبة الثانية بيضاء

$A=A1\cap A2$ $\qquad$ $p(A)=p(A1\cap A2)$

$p(A2/A1)= p(A1\cap A2)/p(A1)$

$p(A1\cap A2)= p(A2/A1)p(A1)$

$=9/16 \ *10/17$

I. 4.التحليل التوافقي

1- المبدأ الأساسي للعد : إذا كان لدينا مجموعتين A_1و A_2 عدد عناصرها n_1و n_2، فإن الطرق الممكنة لإختيار عنصر واحد من المجموعة الأولى و عنصر آخر من المجموعة الثانية هو n_1*n_2و يمكن تعميم هذه النتيجة إلى حالة K مجموعة ، فإذا كانت لدينا المجموعات $A_1, A_2, \ldots A_K$ عدد عناصرها $n_1, n_2 \ldots, n_k$

فإن الطرق الممكنة لإختيار عنصر واحد من كل مجموعة هو : n1*n2*….*nk [1].

الامثلة:

[1] محمد صبحي ابو صالح أ الطرق الاحصائية ، دار اليازوري العلمية للنشر و التوزيع ، عمان ، الاردن ، 2009 ، ص 138 .

مثال01: نريد تشكيل لجنة بيداغوجية مكونة من الرئيس و نائبه،يتقدم 08 أشخاص كمترشحين للرئاسة و 05 أشخاص كمترشحين للنيابة. كم لجنة يمكن تشكيلها؟

الحل: $n1.n2=8.5=40$

مثال 02: كم توجد من لوحة ترقيم السيارات مشكلة من 3 أحرف على اليسار (الفرنسية) و رقمين على اليمين؟

الحل: $n1.n2=(26)^3x(10)^2$

مثال 03: ليكن لدينا مجموعة مؤلفة من 12 طالب منهم 7 بنات و 5 أولاد، نختار طالبين بشرط أن يكون لدينا طالبة و طالب.ما هي عدد الامكانيات المتاحة لنا؟

الحل: $n1.n2=7x5=35$.

مثال 04: نرمي قطعة نقود و زهرة نرد.

ما هي عدد النتائج الممكنة التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة؟

الحل:

القطعة تحمل وجهين (02) هما: $\{T.H\}$

زهرة النرد تحمل 6 أوجه و هي $\{1,2,3,4,5,6\}$

و منه و حسب ما سبق فان عدد النتائج الكلية الممكنة لهذه التجربة هي $n1xn2=2x6=12$

أو عن طريق التوفيقة $C_2^1 x C_6^1 = \frac{2!}{1!1!} x \frac{6!}{1!5!} = 2x6=12$

2.التوفيقات combainisan : تعتبر مجموعة أصلية ذات n عنصر تسمى توفيقة لـk عنصر، كل مجموعة جزئية k عنصر مختارة من بين n عنصر عشوائيا و تأخذ الصيغة التالية: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.[1]

مثال 01: يحتوي صندوق على 10 كريات زرقاء و 07 بيضاء، نسحب 5 كريات من هذا الصندوق عشوائيا.

المطلوب:

1. بكم كيفية يمكننا سحب الكريات هذه؟
2. بكم كيفية يمكننا سحب 3 كريات بيضاء و 2 زرقاء؟

الحل:

- $c_{17}^5 = \frac{17!}{5!2!}$
- $c_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$

  $c_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!}=45$

  $c_7^3 x c_{10}^2 = 35x45=1575$

مثال02:لدينا 08 رجال 06 نساء يتقدمون للتوظيف لاربعة مناصب شغل.

1. ما هو عدد الامكانيات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة ؟
2. ما هو عدد الامكانيات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة علما أننا أخذنا رجلين و امرأتين؟

- $c_{14}^4 = \frac{14!}{4!10!} = 6006$
- $c_8^2 x c_6^2 = \frac{8!}{2!6:} x \frac{6!}{2!4!} = 420$

3.الترتيبات: الشرط الاساسي في هده الحالة هو ترتيب العناصر و تنقسم الى قسمين [2]:

[1] جيلالي جلاطو ، نظرية الاحتمالات و التوزيعات الاحتمالية، دار هومة للنشر و التوزيع ،الجزائر ،2014،ص 23 .

[2] ابراهيم محمد البطاينة ، مرجع سبق دكره ، ص 186.

3.1.ترتيبة بدون تكرار:هي كل ترتيب على k عنصرا مختارة من بين n عنصر بحيث لايمكن لاي عنصر الظهور اكثر من مرة واحدة ،و نحصل عليها بسحب هذه العناصر الواحدة تلوى الاخرى و بدون ارجاع عددها هو:

- $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots[(n-k+1)]$

نسحبk الواحدة تلوى الاخرى بدون ارجاع $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

مثال 01: بكم كيفية يمكننا سحب ورقتين الواحدة تلوى الاخرى و بدون ارجاع لعبة تتضمن 52 ورقة ؟

$$A_{52}^2 = \frac{52!}{(52-2)!} = \frac{52!}{50!} = 52x51$$

مثال 02:كم يوجد من علم مشكل من 3 أشرطة عمودية مختلفة اللون نختارها من بين 08 ألوان؟

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8x7x6x5!}{5!} = 8x7x6 = 336.$$

مثال 03: تعتبر المجموعة $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ كم توجد من كلمة مشكلة من 03 أحرف مختلفة تنتمي الى A دون مراعاة المعنى؟

$$A_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6X5X4X3!}{3!} = 6x5x4 = 120.$$

3.2.ترتيبة بتكرار: هي كل ترتيب على K عنصرا مختارا من nعنصرا ،بحيث يمكن لكل عنصر الظهور أكثر من مرة واحدة و نحصل عليها بسحب هذه العناصر الواحدة تلوى الأخرى و بارجاع عددها هو: $\tilde{A}_n^k = nxnx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = n^k$

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

نسحب الواحدة تلو الأخرى و بالارجاع.

مثال 01:كم يوجد من خط هاتفي مكون من 08 أرقام؟

$$\tilde{A}_n^K = \tilde{A}_{10}^8 = 10^8$$

مثال02: بكم يمكن لـ 03 أشخاص الركب في قطار من 07 عربات؟

$\tilde{A}_n^K = \tilde{A}_7^3 = 10^7$

4.التبديلات: تنقسم الى قسمين كما يلي [1]:

1.4. تبديلة بدون تكرار :هي حالة خاصة من الترتيبات بدون تكرار حيث $n=k$ عددها $p_n = n!$

مثال01: بكم كيفية يمكن لـ 10 أشخاص الجلوس على 10 كراسي موجودة على استقامة واحدة؟

$p_n = n! = 10! = 10x9x8x7x6x5x4x3x2x1 = 362880$

مثال 02: كم توجد من كلمة مكونة من حروف كلمة REAL؟

$p_n = n! = 4! = 4x3x2x1 = 24$

مثال03:بكم طريقة يمكن تشكيل عددا من أربعة أرقام من الارقام التالية :1،2،3،4؟

يتم ذلك كما يلي: $p_n = n! = 4! = 24$.

2.4. تبديلة بتكرار: تعتبر مجموعة مكونة من n عنصرا مقسمة الى k فئة بحيث لا يمكن التفرقة بين عنصرين من نفس الفئة، عدد عناصرها على الترتيب هو $n_1, n_2 \ldots\ldots\ldots\ldots n_k$.

ان عدد التبديلات الممكنة على عناصر هذه المجموعة هو : $\tilde{p}_n = \frac{n!}{n1!n2!n3!......nk!}$

مثال01:كم يوجد من كلمة مكونة من حروف كلمة STATISTICS؟

عدد الكلمات هو:

$\tilde{p}_n = \frac{n!}{n1!n2!n3!} = \frac{10!}{3!3!2!}$

[1] محمد يوسف اشقر، عبد اللطيف يوسف الصديقي، اساسيات الاحصاء و الاحتمالات ، دار الراتب الجامعية ، الطبعة الاولى ، بيروت ، لبنان ، 2001 ، ص 84 .

II . نظرية الاحتمالات الكلية و نظرية BAYS لحساب الاحتمالات.

II . 1. نظرية الاحتمالات الكلية: اذا كانت $E1$،$E2$.....................En حوادث متباعدة و شاملة في فضاء العينة S حيث $E \subset S$ فان:[1]

$$P(E)=p(E/E1)p(E1)+p(E/E2)p(E2)+....+p(E/En)p(En)$$

مثال : لدينا صندوقان $U1$و $U2$ بحيث يحتوي $U1$ على $b1$ كرة بيضاء $n1$ كرة سوداء،و يحتوي $U2$ على $b2$ كرة بيضاء و $n2$ كرة سوداء ،و نسحب كرة بالصدفة من احد الصندوقين و ذلك عبر مرحلتين:

1. اختيار احد الصندوقين$U1$ باحتمال $P1$و $U2$باحتمال $P2$حيث $P1+P2=1$
2. نسحب كرة بالصدفة من الصندوق المختار في المرحلة 1

U1

h1	b 1
سوداء	بيضاء

$P(U1)=P1$

U2

h 2	b 2
سوداء	بيضاء

$P(U2) =P2$

A: الحصول على كرة بيضاء

$$p(A)=p(A/U1)p1+p(A/U2)p2$$

$$=\frac{b1}{b1+h1}p1+\frac{b2}{b2+h2}p2$$

[1]-كامل فليفل، فتحي حمدان ،الاحصاء ،الطبعة الاولى ،دار المناهج للنشر و التوزيع ،عمان الاردن ،2007،ص 126.

II . 1.نظرية بيز bays

أذا كانت $E1,E2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots En$حوادث متباعدة و شاملة في فضاء العينة s حيث$S \subset E$ فان[1]:

$$p(Em/E)=\frac{p(E/Em)p(Em)}{p(E)}$$

حيث $m=1.2\ldots\ldots n$

مثال : نأخذ نفس معطيات المثال السابق.

المطلوب:اذا حصلنا على كرة بيضاء فما ه احتمال ان تكون عملية السحب في صندوق U1

$$p(U1/A)=\frac{p(A/U1)\,p1}{p(A)}=\frac{\frac{b1}{b1+h1}p1}{\frac{b1}{b1+h1}p1+\frac{b2}{b2+h2}p2}$$

تمرين 01: ينقسم مصنع الى 3 اقسام حيث يضمن القسم I 35 % من جملة المنتوج على المصنع و 10% من منتوجه فاسد/ اما القسم II فيضمن 40 % من جملة المنتوج الكلي و 11 % من منتوجه فاسد، اما القسم IIIفينتج 25 % من جملة المنتوج الكلي 7 % من منتوجه فاسد .

1. اشترى شخص قطعة من منتوج المصنع.احسب احتمال ان تكون فاسدة.
2. اشترى شخص قطعة من منتوج المصنع و ظهر انها فاسدة.احسب احتمال ان تكون قد انجزت في القسمII.

الأقسام	I	II	III
نسبة الإنتاج	35%	40%	25%
فاسد	10%	11%	7%

[1] كامل فليفل، فتحي حمدان، مرجع سبق دكره ، ص 126 .

A:القطعة الفاسدة.

1. $p(A)=p(A/I)p(I)+p(A/II)p(II)+p(A/III)p(III)$

   $=0.10.0.35+0.11.0.40+0.07.0.25$

   $p(A)=0.0965$

2. $p(II/A)=\frac{p(A/II)p(II)}{p(A)}=\frac{0,11.0,40}{0,0965}$

   $p(II/A)=0,45.$

تمرين 02: يذهب رجل الى عمله مستخدما احدى الوسائل التالية حافلة،سيارة اجرة، قطار مستخدما هذه الوسائل بنسبة مئوية %60.%30. %10 من الايام على التوالي،فإذا كان إحتمال ان يتاخر عن عمله إذا استخدم الحافلة 15 % من الايام و اذا استخدم سيارة الاجرة 8% و اذا استخدم القطار 20 % اذا اخترنا احد الايام التي يذهب فيها الى العمل عشوائيا ،احسب احتمال ما يلي:

1. ان يتأخر عن عمله في ذلك اليوم.
2. اذا كان متأخرا عن عمله في ذلك اليوم،ما هو احتمال ان يكون قد استخدم القطار؟

الحل:

نسمي الحوادث كما يلي:

A: استخدام الحافلة.

B: استخدام سيارة الاجرة

C:استخدام القطار

D: يتأخر الرجل عن عمله.

$p(A)=0.60$ $\quad$ $p(D/A)=0.15$

$p(B)=0.30$ $\quad$ $p(D/B)=0.08$

$p(C)=0.1$ $p(D/C)=0.2$

1. $p(D)=p(D/A)p(A)+p(D/B)p(B)+p(D/C)/p(C)$

$=0,15.0,6+0,08.0,3+0,2.0,1$

$=0,134.$

2. $p(C/D)=\frac{p(D/C)\,p(C)}{p(D)}$

$=\frac{0,2.0,1}{0,134}=0,14$

III . تمارين محلولة

التمرين 01: نعتبر ثلاثة حوادث C , B, A من فراغ عينة ، اوجد العبارة الرياضية لكل من الحوادث الآتية:

1 - يقع B فقط . 2 – حادثان فقط من بين الثلاثة يقعان .

3 – لا يقع أي حدث . 4 – حادث على الأقل من بين الثلاثة يقع .

التمرين 02: تحتوي علبة على(40)عنصرا منها (12) فاسد، نسحب(10)بالصدفة، احسب احتمال الحصول على:

1 –(03)عناصر صالحة. 2 – عنصرين صالحين على الأقل.

3 –(08)عناصر صالحة على الأكثر . 4 – عنصرين فاسدين على الأقل.

التمرين 03 : يحتوي صندوق على(20)كرية صفراء ، (16)خضراء و(14)بيضاء ، نسحب(03)كريات من هدا الصندوق ، في الحالة الأولى الواحدة تلوى الأخرى و بدون إرجاع ، و الحالة الثانية الواحدة تلوى الأخرى و بالإرجاع، احسب في كلتا الحالتين احتمال الحصول على :

1 –كرية بيضاء ثم صفراء ثم بيضاء . 2 –(03) كريات بيضاء. 3 –كرية بيضاء واحدة .

التمرين 04 : بالموازاة مع معرض تجاري توضع يوميا للبيع 30 تذكرة منها 10 تذاكر مربحة ، قرر شخص شراء 05 تذاكر خلال 05 أيام مختلفة بحيث يكون أول المشترين (أي يشتري كل يوم تذكرة من بين 30) نعتبر الحوادث :

A - يحصل الشخص على تذكرتين فقط مربحتين و تكونان خلال اليومين الأولين.

B- يحصل الشخص على 03 تذاكر مربحة فقط ، و تكون خلال 03 أيام متتابعة.

C- يحصل الشخص على تذكرتين مربحتين على الأقل.

التمرين 05: آلة للكتابة تضم 42 زرا منها 10 أرقام و 26 حرفا، نقوم بلمس 08 أزرار عشوائيا بحيث يمكننا لمس نفس الزر أكثر من مرة واحدة، احسب احتمال كتابة:

1 - متتالية من 08 حروف. 2- كلمة sciences مبعثرة.

3 - كلمة sciences 4- كلمة sciences مبعثرة بحيث i يأتي مباشرة وراء n.

التمرين 06: أرقام الخطوط الهاتفية في مدينة معينة تتشكل من 08 أرقام مختارة من بين الأرقام (0،1،2،3، 4،5،6،7،8،9) يمكن لآي رقم الظهور أكثر من مرة واحدة ، نختار رقم خط هاتفي من خطوط المدينة بالصدفة ، احسب احتمال :

A : الرقم 3 يظهر 4 مرات و تكون كلها على يسار رقم الخط.

B : الرقم 3 يظهر مرة واحدة على يسار رقم الخط.

C : الرقم 5 يظهر 3 مرات و الرقم 6 مرتان و الرقم1 يظهر 3 مرات في رقم الخط

التمرين 07 : يتميز منتوج مصنع بعيبين على الأكثر a ، b ، نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيب a هي 35% و الدي يتميز بالعيب b هي 25% و الدي يتميز بالعيبين معا 15 % .

- ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بعيب على الأقل ؟
- ما هي نسبة المنتوج الذي لا يتميز بأي بعيب؟
- ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيبa فقط ؟
- من بين المنتوج الذي يتميز بالعيبb ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيبa ؟

التمرين 08: احتمال قبول طالب في جامعة معينةa هو 0.6 و احتمال قبوله في جامعة أخرىb هو0.5 ، نفرض أن قرارا ت الجامعتين مستقلة عن بعضها البعض .

- احسب احتمال عدم حصول الطالب على أي قبول.

التمرين 09: آلة معينة تتضمن عنصرين الكترونيين حيث تبقى تشتغل ببقاء العنصرين معا يشتغلان ، ادا كان احتمال توقف العنصر الأول على الاشتغال قبل عام هو 0.4و احتمال توقف العنصر الثاني عن الاشتغال هو قبل عام هو 0.5، فما هو احتمال توقف الآلة عن الاشتغال قبل عام (نفرض أن العنصرين يشتغلان مستقلين عن بعضهما البعض) .

التمرين 10: نرمي قطعة نقدية 06 مرات متتالية بالصدفة في الهواء و نعتبر الحوادث:

A - نحصل على H 03 مرات. B - نحصل على H مرتين على الأقل. C - نحصل على T 03 مرات.

- ادرس استقلال الحوادث مثنى مثنى.

التمرين 11 : وضعت أمينة مكتب (A_1) بمكتب المحاسبة حيث تولت طبع 20% من الفواتير ، يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع 30% من الفواتير و الأخرى (A_3) 50% ، ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5 % من الفواتير ، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_3) 1% .

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء ، فاستعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20% من الفواتير ، وردت عليها العاملات الأخريات بان نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر 5% .

1. احسب احتمال ان تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات ، ان تكون بها اخطاء .
2. احسب احتمال ان تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة و قارن مع احتمال ان يكون مصدر الخطأ هو (A_2) و (A_3) .

التمرين 12: يضم مصنع معين ثلاثة آلات A ،B،C تنتج نوعا معينا من القطع بحيث الآلة A تضمن 25% من المنتوج الكلي و B تضمن 35% في حين C تضمن 40% ،نسبة المنتوج المعاب الوارد من الآلة A هي 10% ومن الآلة B هي 14% ومن الالة C هي 8%.

1)ما هي نسبة المنتوج المصنع المعاب ؟

2)من بين المنتوج المعاب ما هي نسبة الوارد من الآلة B؟

الحلول

التمرين 01:

1) - يقع B فقط: $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$

2 – حادثان فقط يقعان من بين الثلاثة:

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$$

3) –لا يقع أي حادث $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

4) –حادث على الأقل من بين الثلاثة يقع:

$$(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C)$$

الحادث العكسي: لا يقع أي حادث: $(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

التمرين 02:

- عدد الحالات الممكنة: $n(s) = C_n^k = C^{10}_{40} = \frac{40!}{(40-10)!10!}$

1)-الحصول على 03 عناصر مختلفة (A):

$$n(A) = C_n^k =$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{C_{28}^3 \, C_{12}^7}{C_{40}^{10}}$$

2)- الحصول على عنصرين صالحين على الأقل(B):

$$n(B) = C_n^k =$$

$$P(B) = \frac{n(B}{n(s}$$

* الطريقة الثانية :

$\bar{B}$:الحصول على عنصر صالح على الأكثر

$$n(\bar{B}) = C_n^k =$$

$$P(\bar{B}) = \frac{n(\bar{B}}{n(s}$$

$$\Longrightarrow \quad P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{c_{28}^{1}\, c_{12}^{9} + c_{28}^{0}\, c_{12}^{10}}{c_{40}^{10}}$$

3)- الحصول على 08 عناصر صالحة على الأكثر(C):

* الطريقة الأولى:

$$n(C) = C_n^k =$$

$$P(c) = \frac{n(C)}{n(s)}$$

الطريقة الثانية:

$\bar{C}$: الحصول على 09 صالحة على الأقل:

$$n(\bar{c}) = C_n^k =$$

$$P(\bar{c}) = \frac{n(\bar{C}}{n(s}$$

$$P(c) = 1 -$$

4)- الحصول على عنصرين فاسدين على الأقل (D):

$$n(D) = C_n^k =$$

$$P(D) = \frac{n(D}{n(s}$$

$(\bar{D})$:الحصول على عنصر فاسد على الأكثر

$$n(\bar{D}) = C_n^k =$$

$$P(\bar{D}) = \frac{n(\bar{D})}{n(s)} = \frac{c_{12}^1\, c_{28}^9 + c_{12}^0\, c_{28}^{10}}{c_{40}^{10}}$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D})$$

لتمرين : 03

1)- السحب بدون إرجاع: نستعمل الترتيبة بدون تكرار

عدد الحالات الكلية

$$n(s) = A_n^k =$$

$$=$$

A :كرة بيضاء ثم صفراء ثم بيضاء

$$n(A) = A_n^k = A_{14}^1\, A_{20}^1\, A_{13}^1 = 14\,.20.13$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$$

B: ثلاثة (03) كريات بيضاء

$$n(B) = A_n^k = A_{14}^1\ A_{13}^1\ A_{12}^1 = 14\ .13.12$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)}$$

C: كرة بيضاء واحدة:

$$n(C) = A_n^k = (A_{14}^1\ A_{36}^1\ A_{35}^1).3 = (14\ .36.35).3$$

$$P(C) = \frac{n(c)}{n(s)}$$

2)–السحب بالإرجاع: نستعمل الترتيبة بتكرار

عدد الحالات الكلية

$$n(s) = \tilde{A}_n^k =$$

A: كرة بيضاء ثم صفراء ثم بيضاء:

$$n(A) = \tilde{A}_n^k = \tilde{A}_{14}^1\ \tilde{A}_{20}^1 \tilde{A}_{14}^1 = 14^1.20^1\ .14^1 = 14\ .20.14$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\tilde{A}_{14}^1\ \tilde{A}_{20}^1 \tilde{A}_{14}^1}{\tilde{A}_{50}^3} = \frac{14^1.20^1\ .14^1}{50^3} = \frac{14\ .20.14}{50^3}$$

B: 3 كرات بيضاء

$$n(B) = \tilde{A}_n^k = \tilde{A}_{14}^3 = 14^3$$

$$P(B) = \frac{n(B}{n(s}$$

C: كرة بيضاء واحدة:

$$n(C) = \tilde{A}_n^k = (\widetilde{A}_{14}^1\ \tilde{A}_{20}^1\tilde{A}_{14}^1).3 = (14^1.36^1\ .35^1).3 = (14\ .36.35).3$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(s)} = \frac{(\widetilde{A}_{14}^1\ \tilde{A}_{20}^1\tilde{A}_{14}^1).3}{\tilde{A}_{50}^3} = \frac{(14^1.36^1\ .35^1).3}{50^3} = \frac{(14\ .36.35).3}{50^3}$$

التمرين 04:

عدد الحالات الكلية:

$$n(S) = \tilde{A}_n^k =$$

A: الحصول على تذكرتين مربحتين فقط و تكونان خلال اليومين الأوليين

عدد الحالات المواتية:

$$n(A) = \tilde{A}_{20}^3.\widetilde{A}_{10}^2 = 20^3.10^2$$

$$P(A) = \frac{n(A}{n(s}$$

B: الحصول على 3 تذاكر مربحة فقط و تكونان خلال 3 أيام متتابعة:

عدد الحالات المواتية:

$$n(B) = 3(\tilde{A}_{20}^2.\widetilde{A}_{10}^3) = 3(20^2.10^3)$$

$P(B) = \frac{n(B}{n(s}$

C:الحصول على تذكرتين مربحتين على الأقل:

- الطريقة الأولى:

$n(C) = \tilde{A}_{20}^{3}.$

$=$

$P(C) = \frac{n(C}{n(s}$

$=$

الطريقة الثانية :

$\bar{C}$:الحصول على تذكرة مربحة على الأكثر

$$n(\bar{C}) = 5(\widetilde{A}_{20}^{4}.\widetilde{A}_{10}^{1}) + \tilde{A}_{20}^{5}.\widetilde{A}_{10}^{0} \quad = 5(20^{4}.10^{1}) + 20^{5}.10^{0}$$

$P(\bar{C}) = \frac{n(\bar{C}}{n(s}$

$=$

$P(C) = 1 -$

التمرين 05:

عدد الحالات الكلية:

$$n(S) = \tilde{A}_n^k =$$

A-1) :متتالية من 8 حروف

$$n(A) = \tilde{A}_{26}^{8} = 26^8$$

$$P(A) = \frac{n(A}{n(s}$$

-) B : كلمة SCIENCES مبعثرة:

$$n(B) = P_n$$

$$P(B) = \frac{n(B}{n(s}$$

3)- C: كلمة SCIENCES مرتبة :

$$n(C) = 1$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(s)} = \frac{1}{\tilde{A}_{42}^{8}} = \frac{1}{42^8}$$

4)-D : كلمة SCIENCES مبعثرة بحيث I يأتي مباشرة وراء n

$$n(D) = P_n$$

$$P(B) = \frac{n(B}{n(s}$$

التمرين 06:

الارقام : $\{0.1.2,3,4,5,6,7,8,9\}$

عدد الحالات الكلية:

$$n(s) = \tilde{A}_n^k$$

A: الرقم (03) يظهر 04 مرات و تكون كلها على يسار رقم الخط:

$$n(A) = \tilde{A}_n^k =$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$$

B: الرقم (03) يظهر مرة واحدة على يسار رقم الخط:

$$n(B) = \tilde{A}_n^k =$$

$$P(A) = \frac{n(B)}{n(s)}$$

C: الرقم (05) يظهر 3 مرات و الرقم (06) مرتان و الرقم (01) 3 مرات في رقم الخط

لدينا تبديلة بتكرار 111 66 555 8حالات

الحالات المواتية:

$$n(C) = \tilde{P}_n = \frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!} = \frac{8!}{3!.2!.3!}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)}$$

التمرين 07:

$P(a)=0.35 \qquad P(b)=0.25 \qquad P(a\cap b)=0.15$

1- نسبة المنتوج الذي لا يتميز بعيب على الأقل:

$P(a\cup b) = P(a)+P(b) - P(a\cap b) = 0.35+0.25-0.15 = 0.45$

2- نسبة المنتوج الذي لا يتميز بأي عيب:

$P(a\cup b)= 1- P(a\cup b) =1-0.45 = 0.55$

3- العيب a فقط: $p(a-b) = p(a) - P(a\cap b) = 0.35 - 0.15 = 0.20$

4- من بين المنتوج الذي يتميز بالعيب b فان نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيب a :

التمرين 08:

$P(a) =0.6 \qquad P(b) = 0.5$

1- احتمال قبوله في جامعة على الأقل:

$$P(a\cup b)=P(a) + P(b) - P(a \cap b)$$

$$=P(a) + P(b) - P(a) . P(b)$$

$$= 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8$$

2 - احتمال عدم حصوله على أي قبول:

الطريقة الاولى :

$$P(\overline{a \cup b}) = 1 - P(a \cup b) = 1 - 0.8 = 0.2$$

الطريقة الثانية :

$$P(\bar{a} \cap \bar{b}) =$$

الحادثان مستقلان

$$(\overline{a \cap b}) = \bar{a} \cap \bar{b}$$

التمرين 09:

A : توقف العنصر الأول عن الاشتغال قبل عام $P(A)=0.4$

B : توقف العنصر الثاني عن الاشتغال قبل عام $P(B)= 0.5$

C : توقف الآلة عن الاشتعال قبل عام

$P(C) = P(A \cup B)$ $C = A \cup B$ $\Rightarrow$

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) . P(B)$$

$$=0.4 + 0.5 - 0.4 . 0.5$$

$$P(C) = 0.7$$

الحادثتين Aو B مستقلتين $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

التمرين 10:

عدد الحالات الكلية : $n(S) = 2^6$

A: نحصل على H 3 مرات

$$n(A) = C_n^k$$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{C_6^3}{2^6}$

B: نحصل على A مرتين على الأقل نستعمل الحادث العكسي

$\bar{B}$: نحصل على H مرة على الأكثر $\begin{cases} 0 \text{ مرة } 1 \\ 1\text{مرة } 6= c_6^1 \end{cases}$

$P\overline{(B)} = \frac{1+6}{2^6} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{7}{2^6}$

C: نحصل على T 3 مرات

استقلال A و B : التحقق من العلاقة : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

إذا تحققت A يتحقق B

$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{c_6^3}{2^6} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

ادن A وB غير مستقلين

استقلال AوC: التحقق من العلاقة : $P(A \cap C) = P(A).P(C)$

$P(A \cap$

إذن A و C غير مستقلين .

التمرين 11:

1- احتمال وجود خطأ في مراسلة ما :

A : المراسلة فيها خطأ.

$$P(A) = P(A/A_1)P(A_1) + P(A/A_2)P(A_2) + P(A/A_3)P(A_3)$$
$$= (0,2 * 0,05) + (0,3 * 0,02) + (0,5 * 0,01 = \mathit{0.021}$$

2 – حساب احتمال ان تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة و مقارنتها مع احتمال ان يكون مصدر الخطأ هو (A_2) و (A_3) .

$P\ (A_1/A) =$

:

:

$$P\ (A_2/A) = \frac{P(A/A_2)P(A_2)}{p(A)}$$
$$= \frac{0,3 * 0,02}{(0,2 * 0,05) + (0,3 * 0,02) + (0,5 * 0,01)}$$
$$= 0,285$$

$$P\ (A_3/A) = \frac{\mathrm{P(A/A_3)P(A_3)}}{\mathrm{p(A)}}$$
$$= \frac{0{,}5 * 0{,}01}{(0{,}2 * 0{,}05) + (0{,}3 * 0{,}02) + (0{,}5 * 0{,}01)}$$
$$= 0{,}476$$

يظهر من الحساب ان الاحتمال الاكبر هو ان تكون A_3 هي التي حررت الفاتورة .

التمرين 12:

	C	B	A
النسبة من المنتوج الكلي	45%	35%	25%
النسبة من المنتوج المعاب	8%	14%	10%
النسبة من المنتوج غير المعاب	92%	86%	90%

1-نسبة المنتوج المصنع المعاب

D: المنتوج المصنع المعاب

$$P(D) = P(D$$

$$= (0{,}25.0{,}1) + (0{,}35.0{,}14) + (0{,}40.0{,}08)$$

A:المنتوج المحصل عليه من الآلة a

B:المنتوج المحصل عليه من الآلة b

C:المنتوج المحصل عليه من الآلة c

D/A: المنتوج المعاب الوارد من الالة a

D/B: المنتوج المعاب الوارد من الالة b

D/C: المنتوج المعاب الوارد من الالة c

2-*من بين المنتوج غير المعاب فان نسبة الوارد من الالة* b هو :

$$P(B/\overline{D}) =$$

$$= \frac{0,86 . 0,35}{(0,9 \;.\; 0,25)+(0,86 \;.\; 0,35)+(0,92 \;.\; 0,4)}$$

المحــور الثالث

التوزيعـات الاحتمــالــية

للمتغيـرات العشوائـية

نتطرق من خلال هدا الفصل إلى العناصر التالية:

I. المتغير العشوائي المتقطع

I. 1. مفهوم المتغير العشوائي المتقطع

I. 2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

I. 3.دالة التوزيع المتجمع

II.المتغير العشوائي المستمر

II.1. مفهوم المتغير العشوائي المستمر

II.2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

II.3.دالة التوزيع المتجمع

III. القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية

III .1. التوقع الرياضي (الامل الرياضي)

III .2.التباين:

III .3.خواص التوقع و التباين

IV – تمارين محلولة

مقدمة:

عند التطرق الى كلمة متغير لا بد أن نفرق بين نوعين من المتغيرات و هما:[1]

– المتغير العادي: هو الذي تتغير قيمه ضمن الحدود المفروضة عليه و المعروفة مسبقا ،أي إذا اخذ هذا المتغير قيمة فإنه لا يأخذها مرة ثانية فهو يتغير بشكل طردي مثل عمر الانسان ،قامته...الخ.

- **المتغير العشوائي**: المتغير العشوائي X هو اقتران حقيقي يعرف على فضاء العينة [2]، كما يعرف على أنه " اقترانٍ X بمجال الفضاء العيني s و مداه $X(s)$ هو مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية أي أن

$$x : s \longrightarrow R$$

فإذا كان مداه مجموعة جزئية من الاعداد النسبية Q يدعى متغيرا عشوائيا منفصلا (متقطعا)، أما إذا كان مداه يحوي فترة من الاعداد الحقيقية (R) فيدعى متغيرا عشوائيا متصلا (مستمرا)[3].

كما يعرف المتغير العشوائي بأنه هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة و من ثم مجال هذا المتغير يشمل كل القيم الممكنة له فيكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير إحتمال معين.

و ينقسم المتغير العشوائي الى قسمين هما:

1. المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع).
2. المتغير العشوائي المتصل (المستمر).

[1]- جيلالي جلاطو، مرجع سبق دكره ،ص 71.
[2]- محمد صبحي أبو صالح ،مبادئ الاحصاء ، مرجع سبق دكره ،ص 164.
[3]- كامل فليفل ،فتحي حمدان ، مرجع سبق دكره ،ص 129.

I. المتغير العشوائي المتقطع:

I. 1. مفهوم: هو المتغير الذي يأخذ قيم مختلفة بوحدات معينة أي قابلة للعد ،و بعبارة أخرى هو عبارة عن دالة مجالها s و مداها مجموعة جزئية من الاعداد الصحيحة.[1]

I. 2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع : هو جدول أو قانون رياضي يبين جميع قيم المتغير العشوائي X مقترنة بالاحتمالات المناسبة أي هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير و التي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة[2]، و بمعنى آخر هو التكرار النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، حيث إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يأخذ القيم $\{x_i$: X $=x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n\}$ و كان $f(xi)=p(x=xi)$ هو احتمال المتغير العشوائي يأخذ القيمة xi ،فانه يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x و هو جدول مكون من عمودين الاول به القيم الممكنة للمتغير : $x : x_i = x_i\ x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ و الثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير

أي أن: $f(xi) = p(x=xi)$

X=xi	X1	X2	X3	....	Xn	المجموع
p(x=xi)=f(xi)					$F(x_n)$	1

و تسمى الدالة f(xi) بدالة الاحتمال و من خصائص هذه الدالة مايلي[3]:

1/ $0 \le f(xi) \le 1$

2/ $\sum_{i=1}^{n} f(xi) = 1$

أي:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x = xi) = 1$$

- [1] محمود علي متولي عجور،الاحصاء و الاحتمالات و بحوث العمليات ،دار الهناء للنشر و التوزيع ،مصر ، 2009،ص 35.
[2] جيلالي جلاطو، مرجع سبق ذكره ، ص 72 .
[3] محمد يوسف اشقر ، عبد اللطيف يوسف الصديقي ، مرجع سبق ذكره، ص 147 .

مثال: نرمي زهرتي نرد و نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما:

X: مجموع الرقمين المحصل عليهما.

X1 :الرقم الظاهر على زهرة النرد الأولى $1 \leq x1 \leq 6$

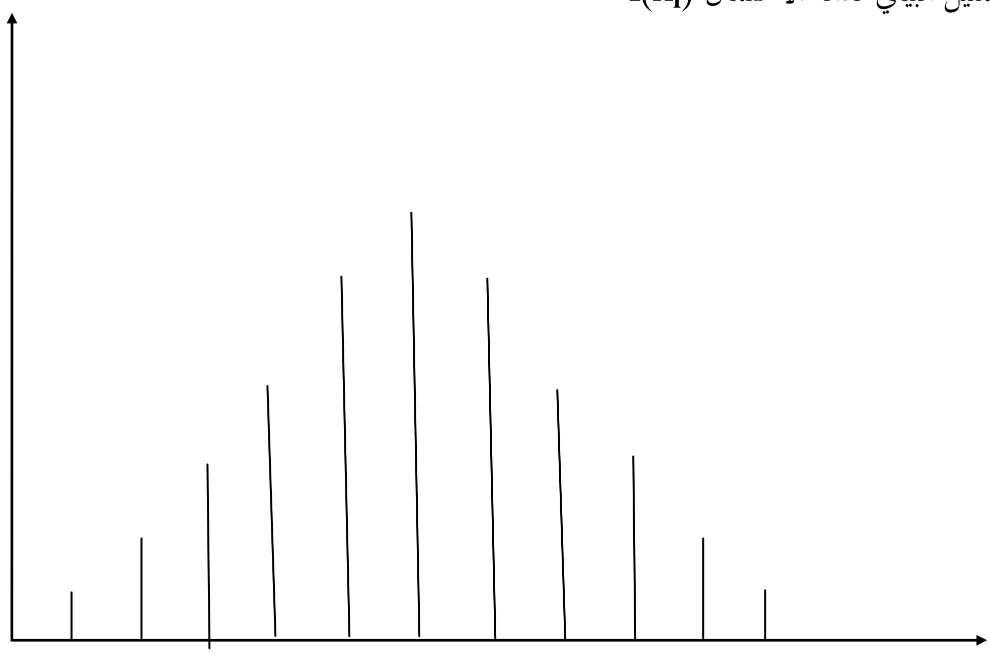
x2: الرقم الظاهر على زهرة النرد الثانية $1 \leq x1 \leq 6$

$X = x1 + x2 \Longrightarrow 2 \leq x1 + x2 \leq 12$

عدد الحالات الكلية $N(s) = 36$

X=xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x=xi)=f(xi)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/39	3/36	2/36	1/36

التمثيل البياني لدالة الاحتمال $f(x_i)$



I. 3. دالة التوزيع المتجمع: هو جدول يشمل الاحتمالات الناتجة من حساب احتمال وقوع الحدث $(x\leq xi)$ و يرمز له بالرمز $F(x)$ أي دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع و تأخذ الصورة الآتية[1]:

$$F(x) = p(x\leq x_i)= \sum_{x_i\leq X}^{n} P(x = x_i) = \sum p_i$$

و من ثم يكون تكوين جدول التوزيع الاحتمالي المتجمع كما يلي:

$F(x)=p(x\leq xi)$	$f(xi)=p(x=xi)$	Xi
$F(1)=p(x\leq 1)$	$f(x1)$	X1
$F(2)=p(x\leq 2)$	.	.
.	.	.
.	.	.
$F(n)=p(x\leq n)$	$f(xn)$	Xn

مثال: نرمي قطعة نقدية 03 مرات متتالية

x : عدد مرات الحصول على الصورة H

S={HHH.HHT.HTH.HTT.THH.THT.TTH.TTT}.

1- جدول التوزيع الاحتمالي:

المجموع	3	2	1	0	X=xi
1					$P(x=xi)=f(xi)$

[1] Christophe hurlin , openbook licence / bachelor , statistique et probabilité en économie – gestion , dunod , paris , France , 2015 , p 140.

2- جدول دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع

xi	$F(x)=p(x\leq xi)$
X1 X2 X3 X4	$F(1)=p(x\leq 1) = p(x<1) + f(x1)= 0+ \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ $F(2)=p(x\leq 2)= f(x1)+ f(x2)= \frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$ $F(3)=p(x\leq 3)= f(x1)+ f(x2)+ f(x3)= \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$ $F(4)=p(x\leq 4)= f(x1)+ f(x2)+ f(x3)+ f(x4) = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$

مثال: نفرض ان احتمال ازدياد ذكر (g) مساو لاحتمال ازدياد أنثى (f) في اسرة ما أي $p(g)=p(f)=\frac{1}{2}$، فيكون فضاء العينة لأسرة تفكر بانجاب طفلين فقط كما يلي:

$s:\{ff,fg,gf,gg\}$ ، ليكن x يمثل عدد ذكور الاسرة.

المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير العشوائي.
2. كون جدول التوزيع الاحتمالي.
3. كون جدول دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع.

الحل:

1. نوع المتغير العشوائي: متقطع.
2. تكوين جدول التوزيع الاحتمالي: يأخذ المتغير x القيم 0،1،2

حيث:

- x=0 يعني يقع الحدث (ff) أي حالة واحدة بالتالي $p(x=0)=\frac{1}{4}$
- x=1 يعني يقع الحدث (fg) او الحدث (gf) اي يوجد حالتين و بالتالي $p(x=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

- $x=2$ يعني يقع الحدث (gg) اي تقع حالة واحدة و بالتالي : $p(x=2)=\frac{1}{4}$

مما سبق يكون جدول التوزيع الاحتمالي كما يلي:

$X=xi$	0	1	2	المجموع
$P(x=xi)$				1

3- تكون دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع:

$$F(x)=p(x\leq xi)\begin{cases} F(0)=p(x\leq 0)=p(x<0)+p(x=0)=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \\ F(1)=p(x\leq 1)=p(x=0)+p(x=1)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4} \\ F(2)=p(x\leq 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4} \end{cases}$$

مثال 3:اذا كان من المعلوم ان نسبة مبيعات احد المراكز التجارية من التفاح الجزائري 0.60،بينما يكون نسبة مبيعاته من الانواع الاخرى للتفاح 0.40 ،اشترى احد العملاء عبوتين، و المطلوب:

1- كون فراغ العينة.

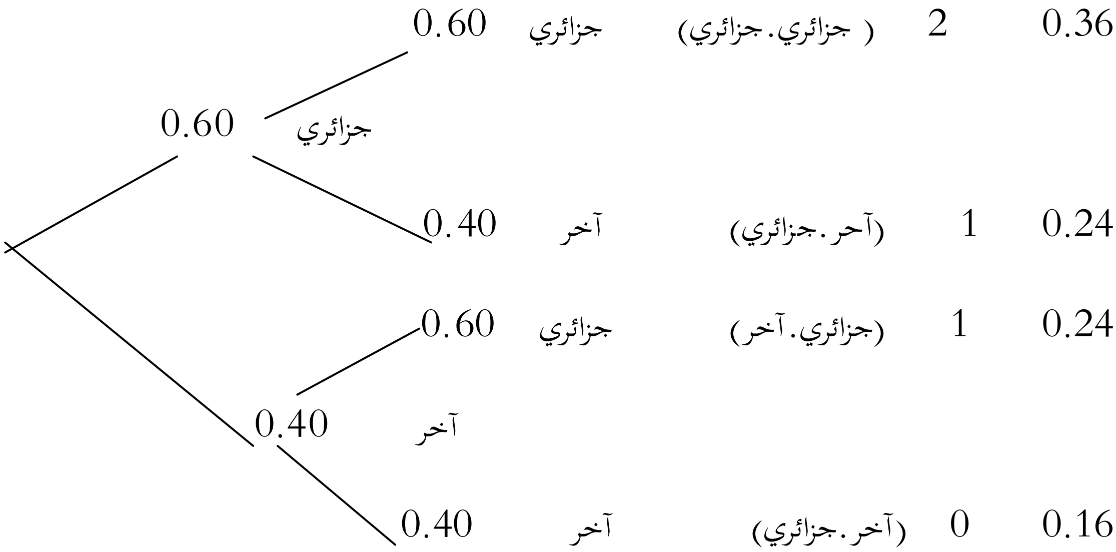
2- اذ عرف المتغير العشوائي x بانه عدد العبوات المشتراة من التفاح الجزائري ،فاجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.

- ما هو احتمال $p(x\leq1.5), p(x=1.5), p(x\leq1)$

الحل:

التجربة هنا شراء وحدتين من عبوات التفاح، و من ثم فراغ العينة يتكون من اربع نتائج حيث X
$p(x=xi)=f(x)$



التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات الشتراة من التفاح الجزائري x

من المعلوم ان العميل اشترى عبوتين ،و ان المتغير العشائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الجزائري لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

- $x=0$ اذا كانت العبوتين من النوع الآخر ، اي اذا كانت نتيجة التجربة (آخر،آخر).
- $x=1$ اذا كان احد العبوتين من النوع الجزائري ،اي اذا كانت نتيجة التجربة (آخر،جزائري) أو (جزائري،آخر)
- $x=2$ اذا كان العبوتين من النوع الجزائري،اي اذا كانت نتيجة التجربة (جزائري،جزائري) و من ثم يأخذ المتغير القيم $x:\{x=0,1,2\}$ و ترتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين اعلاه،و من ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX هو :

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الجزائري

Xi	F(xi)
0	0.16
1	0.48
2	0.36
	1

تكوين التوزيع الاحتمالي المتجمع:

جدول التوزيع الاحتمالي ،و التوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الامريكي

Xi	F(xi)	F(xi)
0	0.16	$F(0)=p(x\leq 0)=0.16$
1	0.48	$F(1)=p(x\leq 1)=0.16+0.48=0.64$
2	0.36	$F(2)=p(x\leq 2)=0.64+0.36=1.00$
	1	

حساب الاحتمالات : $p(x=1)$, $p(x\leq 1)$, $p(x=1.5)$, $p(x)\leq 1.5)$

$p(x=1)=f(1)=0.48$

$p(x\leq 1)=F(1)0.64$

$p(x=1.5)=f(1.5)=0$

$p(x\leq 1.5)=F(1.5)= f(1)=0.64.$

II.المتغير العشوائي المستمر:

II. 1. مفهوم المتغير العشوائي المستمر:

هو الذي يأخذ قيما متصلة و يأخذ عدد لا نهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله فاذا كان x متغير عشوائي مستمر و يقع في المدى (a.b) اي $a<x<b$ $X=xi$ فان للمتغير x عدد لا نهائي من القيم تقع بين الحدين الادنى و الاعلى (a.b) مثل الكمية، المساحة ، الوزن الخ، و عليه فان قانون المتغير العشوائي المستمر يأخذ شكل الدالة المستمرة في مجال تعريفها هي الشكل التالي[1]:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{دون ذلك} \\ f(x) & a\leq x\leq b \end{cases}$$

من خلال ما سبق نقول عن المتغير العشوائي x انه متغير مستمر،اذا كان هذا المتغير يأخذ أية قيمة بين الحد الادنى و الحد الاعلى لمجال تغير المحدود او غير المحدود دون انقطاع.

II. 2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر:

عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري نسبي نجد ان شكل هذا المدرج هو اقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر حيث المساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية و تساوي هذه المساحة 1و تسمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال و من خصائصها مايلي[2]:

1- $f(x)\geq 0$

2- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3- $p(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = [g(x)]_{a}^{b} = g(b)-g(a)$

لكي يمكننا حساب الاحتمالات نعرض قواعد التكامل التالية:

---

[1] معتوق امحمد ، مرجع سبق دكره ، ص 20 .

[2] Gilbert saporta, probabilités analyse des données et statistique ,3[e]édition , éditions technip , paris , France , 2011 , p 18 .

$\int x^{n}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\int (a+bx)^{n}\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$

$\int e^{x}\,dx = e^{x}$ et $\int e^{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\,e^{(a+bx)}$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(x)$ et $\int \frac{1}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\log(a+bx)$

II. 3.دالة التوزيع المتجمع

يرمز لها بالرمز F(x) ادا كانت قابلة للاشتقاق نقول ان المتغير مستمر تماما وتسمى مشتقة دالة التوزيع المجتمع كثافة الاحتمال[1] ، حيث العلاقة بين دالة التوزيع المجتمع وكثافة الاحتمال هي[2]:

$F'(x) = f(x)$

وعليه فان F(x) هي الدالة الاصلية ل f(x) اي :

$F(x) = p(x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

ومن خصائصها ما يلي[3] :

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- F دالة مستمرة على اليمين $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$
- F دالة متزايدة $x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq f(y)$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

مثال: مدة اشتغال (بالأيام) نوع من المصابيح متغير عشوائي كثافة احتماله

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & \text{si} \quad x \leq 100 \\ 0 & \text{si} \quad x < 100 \end{cases}$$

[1] محمد يوسف الاشقر ، عبد اللطيف يوسف الصديقي، مرجع سبق دكره ' ص 153.

[2] نفس المرجع السابق ، ص 154 .

[3] Christophe Hurlin , op.cit , p142 .

حيث k ثابث

1-عين قيمة الثابثk

2-احسب احتمال ان لا تفوق مدة اشتغال المصباح من النوع السابق 200 يوم

3-ادا علمت ان مصباحا من النوع السابق فاقت مدة اشتغاله 150 يوم فما هو احتمال ان لا تفوق 300 يوم

4-احسب احتمال ان لا تفوق مدة انشغال 3 مصابيح من النوع السابق 200 يوم

الحل

1-ايجاد قيمة k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{100} f(x)dx + \int_{100}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{100} 0dx + \int_{100}^{+\infty} \frac{k}{x^2}\mathrm{d}x = 1$$

$$\Longrightarrow 0 + k\left[-\frac{1}{x}\right]_{100}^{+\infty} = 1$$

$$\Longrightarrow k\left(0-\left(\frac{-1}{100}\right)\right) = 1 \Longrightarrow k=100$$

2-مدة الاشتغال لا تفوق 200 يوم :

$$p(x \leq 200) = p(x \in]-\infty, 200[)$$

$$= \int_{-\infty}^{200} f(x)dx = \int_{-\infty}^{100} f(x)dx + \int_{100}^{200} f(x)dx$$

$$= \int_{100}^{200} \frac{k}{x^2}dx = k\left[\frac{-1}{x}\right]_{100}^{200}$$

$$= 100\left(\frac{-1}{200} - \left(\frac{-1}{100}\right)\right]$$

$=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$

-3

$p(x\leq 300/x\geq 150)=?$

$p(x\leq 300/x\geq 150)=\frac{p(150\leq x\leq 300)}{p(x\geq 150)}$

$p(x\geq 150)=\int_{150}^{+\infty} f(x)dx=\int_{150}^{+\infty}\frac{k}{x^2}dx=k[\frac{-1}{x}]_{150}^{+\infty}$

$=(\frac{-100}{+\infty})-(-\frac{100}{150})=\frac{2}{3}$

$p(150\leq x\leq 300)=\int_{150}^{300} f(x)dx=\int_{150}^{300}\frac{k}{x^2}dx=\frac{-100}{300}+\frac{100}{150}$

$=\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$p(x\leq 300/x\geq 150)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

-4 A مدة اشتغال 03 مصابيح لا تفوق 200 يوم

A1: المصباح 1 لا تفوق مدة اشتغاله 200 يوم.

A2: المصباح 2 لا تفوق مدة اشتغاله 200 يوم.

A3: المصباح 3 لا تفوق مدة اشتغاله 200 يوم.

$A=A1\cap A2\cap A3$

المصابيح مختلفة اذن A1.A2.A3 حوادث مستقلة

$p(A)=p(A1\cap A2\cap A3)=p(A1).p(A2).p(A3)$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

III– القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية:

III. 1.التوقع الرياضي (الامل الرياضي):تختلف صيغته الرياضية باختلاف المتغير العشوائي و دلك كما يلي [1]:

أ– متغير متقطع:اذا كان X متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي :

X=xi	x1 x2...xn
P(x=xi)	p1 p2...pn

فان توقعه الرياضي معرفة بالعلاقة:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} xi\ p(x=xi)=\sum_{i=1}^{n} xipi$$

ب– متغير مستمر:اذا كان x متغير عشوائي مستمر كثافة احتماله f(x) فان توقعه الرياضي معرف بالعلاقة :

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

III. 2.التباين: هو التوقع الرياضي لمربع انحراف المتغير العشوائي عن وسطه الحسابي (توقعه الرياضي)، و ياخد الصيغ التالية[2] :

$$v(x)=E[x-E(x)]^2=E(x^2)-E^2(x)$$

$$=\ E(x^2)-E(x)$$

– حالة متغير متقطع

$$v(x)=\sum_{i=1}^{n} xi2p(x=xi)-E^2(x)$$

[1] Grégory denglos, statistiques et probabilités apliquées, presses universitaires de France , 2 [e]édition , France , 2016 , p 81.

[2] Grégory denglos , op.cit , p 82.

- **حالة متغير مستمر**

$v(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-E^2(x)$

III. 3.خواص التوقع و التباين: تتمثل خصائص التوقع الرياضي و التاين فيما يلي[1]:

1/ $E(ax)=aE(x)$

2/ $E(x+y)=E(x)+E(y)$

3/ $v(x)\geq 0$

4/ $v(ax)=a^2v(x)$

5/ $v(x+y)=v(x)+v(y)$ اذاكان x و yمتغيرين مستقلين

a ثابت ، x,y متغيران عشوائيان.

مثال: نعتبر متغيرين عشوائيين x,y توزيعهما الاحتمالي كما يلي:

Y=yi	-10	10
P(y=yi)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X=xi	-1	1
P(x=xi)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

المطلوب: قارن بين المتغيرين

$E(y)=(-10)(\frac{1}{2})+10(\frac{1}{2})=0$

$v(y)=E(y^2)-E^2(y)$

$=\sum_{i=1}^{n} y2\ (y=yi)$

$=100(\frac{1}{2})+100(\frac{1}{2})=100$

---

[1] Gilbert saporta , op.cit , p 23.

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} xi\, p\,(xi=xi)$$

$$=(-1)(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})=0$$

$$v(x)=E(x^2)-E^2(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} xi^2 p(x=xi)-E^2(x)$$

$$=1(\frac{1}{2})+1(\frac{1}{2})=1$$

ملاحظة: نلاحظ أن x و y لهما نفس التوقع الرياضي لكن $v(x)<v(y)$ و هو ما يفسر تشتت او انحراف قيم المتغير y حول توقعه الرياضي مقارنة بتشتت قيم X لهذا فالتباين هو مقدار التشتت.

مثال :تنتج شركة معينة 20 قطعة في اليوم من منتوج معين ،من بينها قطعتان فاسدتان ،قمنا بسحب اربعة (04) قطع من هذا المنتوج بطريقة عشوائية،اوجد القيمة المتوقعة لعدد القطع الفاسدة.

الحل:

X: عدد القطع الفاسدة.

المجموع	2	1	0	$X=xi$
1	0.04	0.33	0.63	$P(x=xi)=f(xi)$

$$n(s)=c_{20}^{4}=4845$$

$$p(x=0)=\frac{c_2^0 c_{18}^4}{c_{20}^4}=0.63$$

$$p(x=1)=\frac{c_2^1 c_{19}^3}{c_{20}^4}=0.33$$

$$p(x=2)=\frac{c_2^2 c_{18}^2}{c_{20}^4}=0.04$$

$E(x)=\sum_{i=1}^{3} p(x=xi)$

$=(0.0,63)+(1.0,33)+(2.0,04)$

$E(x)=0.41.$

حساب التباين:

$v(x)=\sum_{i=1}^{3} xi^2 p(x=xi)-E^2(x)$

$[(0^2*0.63)+(1^2*0.33)+(2^2*0.04)]-(0.41)^2$

$v(x)=0,3219$

مثال2: اذا كان الانفاق الشهري بالألف دينار جزائري على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصيغة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} 0.006x(10-x) & 0<x<10 \\ 0 & 0\geq x\geq 10 \end{cases}$$

المطلوب:أحسب التوقع الرياضي و التباين:

$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{10} x[0.006x(10-x)]\, dx$

$=0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)$

$0.006[10\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}]_0^{10}=0.006[(\frac{10000}{3}-\frac{10000}{4})-(0)]$

$=60(\frac{1}{12})=5$

2–التباين:

$$v(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-E^2(x)$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx=0.006\int_0^{10}(10x^3-x^4)dx$$

$$=0.006[10(\frac{x^4}{4})-(\frac{x^5}{5})]_0^{10}$$

$$=0.006[\frac{100\,000}{4}-\frac{100\,000}{5}]-0$$

$$=600(\frac{1}{20})=30$$

و بالتالي:

$$v(x)=30-(5)^2=30-25$$

$$v(x)=5.$$

IV – تمارين محلولة

التمرين 01: عدد حوادث العمل في مصنع ما يوميا متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي كالتالي:

X = xi	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P (X = xi)		**0.25**	**0.20**	**0.15**	**0.12**	**0.07**	

1 –عين قيمة الثابت α .

2 –اكتب دالة التوزيع المتجمع و مثلها بيانيا .

3 –احسب احتمال عدد حوادث العمل في المصنع في يوم ما لا يقل عن .2

4 - احسب احتمال عدد حوادث العمل في المصنع في يوم ما لا يزيد عن .4

5 –احسب العدد اليومي المتوسط (التوقع) لعدد حوادث العمل في المصنع.

التمرين الثاني: ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السير اليومية في مدينة ما، يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

X = xi	0	1	2	3	4	5
P (X = xi)	1/B	2/B	3/B	4/B	3/2B	1/2B

1- ما نوع المتغير العشوائي X .

2- أوجد قيمة β حتى يكون الجدول السابق جدول توزيع إحتمالي.

3 - نفرض أن $\beta=12$:

أ- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية F(x)

ب- أحسب التوقع الرياضي، التباين و الانحراف المعياريل عدد حوادث السير اليومية في هذه المدينة

ج- أحسب الاحتمالات التالية $P(X\leq1)$ - :، $P(X\geq4)$، $F(3)$

التمرين الثالث: الطلب السنوي على مادة معينة (ملايين القناطير) متغير عشوائي كثافة احتماله هي:

$$f(x)=\begin{cases} Kx & si \quad 0\leq x<2 \\ Ke^{-\frac{1}{2}x} & si \quad x\geq 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x}<0 \end{cases}$$

1- عين قيمة الثابت k .

2 –احسب احتمال أن تفوق الطلب في سنة ما على المادة 01 مليون قنطار .

3 - احسب احتمال أن تفوق الطلب في سنة واحدة على الأقل من بين 05 سنوات على المادة 01 مليون قنطار.

التمرين الرابع:

اذا كان الانفاق الشهري للأسرة بالألف ريال على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخد الصورة التالية:

المطلوب:

1. حساب قيمة الثابت C .

2. أحسب احتمال أن انفاق الأسرة يتراوح ما بين (5 و 8) ألف ريال خلال الشهر.
3. اذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر؟
4. أحسب التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعياري

التمرين الخامس: تعرض شركة تجارية يوميا 03 سيارات من ثلاثة أنواع مختلفة a, b, c للبيع خلال معرض تجاري تشير الخبرة السابقة إلى أن احتمال بيع السيارة من النوع a هو 0.5 و من النوع b هو 0.7 و من النوع c هو 0.8 ، حيث يعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات التي تبيعها الشركة يوميا .

1 – اوجد التوزيع الاحتمالي ل X .

2 – ما هي القيمة المتوقعة لعدد مبيعات الشركة اليومي من السيارات .

نفرض أن ربح الشركة يقدر ب 20000 دج من كل سيارة مباعة، نعرف المتغير العشوائي Y الذي يمثل ربح الشركة اليومي.

1 - اوجد التوزيع الاحتمالي ل Y .

2 – ما هي القيمة المتوسطة لربح الشركة اليومي .

الحلول

التمرين الاول :

1–تعيين قيمة الثابت α :

$$\sum p(x = xi)=1$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} + 0.25 + 0.20 + 0.15 + 0.12 + 0.07 + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{6} = 1$$

$$\Longrightarrow = \frac{7\boldsymbol{\alpha}}{6} + 0.79 = \mathbf{1}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{(1-0.79).6}{7} \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.1}$$

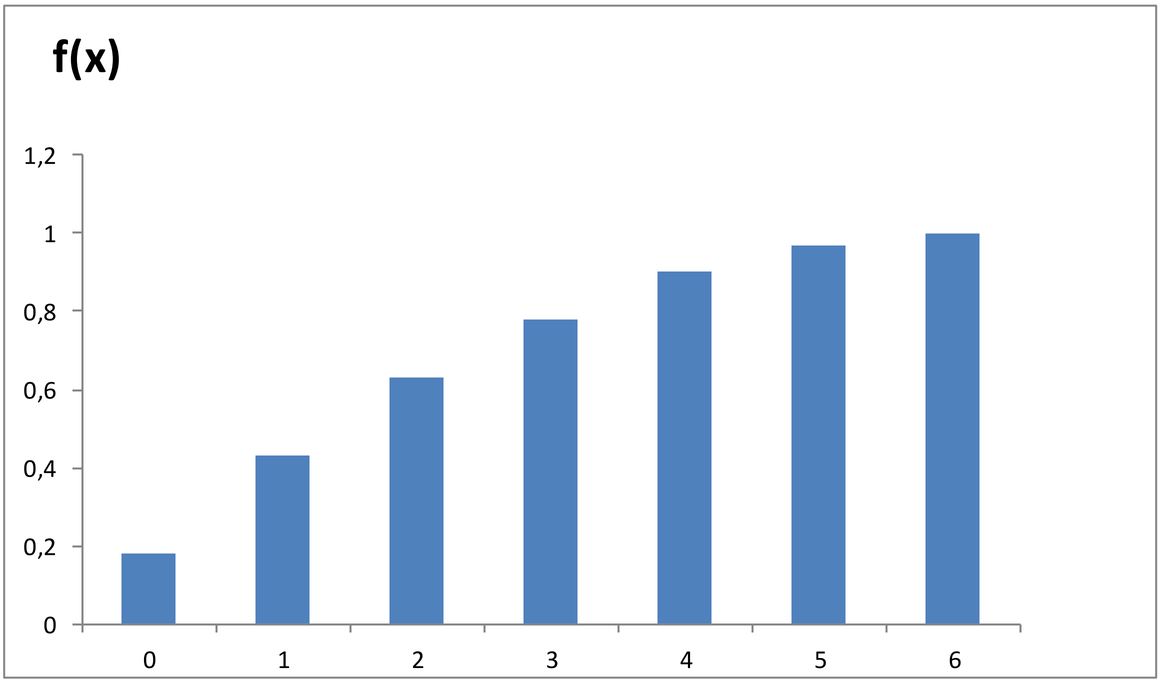
وبالتالي يصبح جدول التوزيع الاحتمالي كمايلي:

X=xi	0	1	2	3	4	5	6
P(x=xi)	0.18	0.25	0.20	0.15	0.12	0.07	0.03

2-كتابة دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع وتمثيلها بيانيا:

$$\begin{cases} F(0)=p(x\leq 0)=p(x<0)+p(x=0)=0+0.18=\mathbf{0.18} \\ F(1)=p(x\leq 1)=p(x=0)+p(x=1)=0.18+0.25=\mathbf{0.43} \\ F(2)=p(x\leq 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=0.18+0.25+0.20=\mathbf{0.63} \\ F(3)=p(x\leq 3)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3) \\ \quad =0.18+0.25+0.20+0.15=\mathbf{0.78} \\ F(4)=p(x\leq 4)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4) \\ \quad =0.18+0.25+0.20+0.15+0.12=\mathbf{0.90} \\ F(5)=p(x\leq 5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)+p(x=5) \\ \quad =0.18+0.25+0.20+0.15+0.12+0.07=\mathbf{0.97} \\ F(6)=p(x\leq 6)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)+p(x=5)+p(x=6) \\ \quad =0.18+0.25+0.20+0.15+0.12+0.07+0.03=\mathbf{1} \end{cases}$$

التمثيل البياني :لدالة التوزيع الاحتمالي المتجمع.



3-احتمال عدد حوادث العمل في المصنع في اليوم لايقل عن 2

$P(x \geq 2) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - f(1) = 1 - 0.43 = \mathbf{0.57}$

4-احتمال عدد حوادث العمل في المصنع في يوم ما لا يزيد عن 4.

$P(x \leq 4) = f(4) = \mathbf{0.90}$

5-حساب التوقع الرياضي لعدد حوادث العمل في المصنع

$E(x) = \sum_{i=1}^{7} xi\ p(x = xi)$

$= (0 * 0.18) + (1 * 0.25) + (2*0.20) + (3*0.15) + (4*0.12) + (5*0.07) + (6*0.03)$

$= E(x) = 0 + 0.25 + 0.40 + 0.45 + 0.48 + 0.35 + 0.18$

$\mathbf{E(x) = 2.11}$

عدد الحوادث المتوقعة في المصنع هو **2.11حادث**

التمرين الثاني:

1- نوع المتغير العشوائي : متغير متقطع

2- ايجاد قيمةB

$\sum p(x=xi)=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{B} + \frac{2}{B} + \frac{3}{B} + \frac{4}{B} + \frac{3}{2B} + \frac{1}{2B} = \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B=12}$$

3- نفرض ان B=12

–ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع F(x)

$$F(x) = \begin{cases} P(x\leq 0)=p(x<0)+p(x=0)=0+\frac{1}{12} = \mathbf{\frac{1}{12}} \\ P(x\leq 1)=p(x=0)+p(x=1)=\frac{1}{12}+\frac{2}{12} = \mathbf{\frac{3}{12}} \\ P(x\leq 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\mathbf{\frac{6}{12}} \\ P(x\leq 3)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)=\mathbf{\frac{10}{12}} \\ P(x\leq 4)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)=\mathbf{\frac{23}{24}} \\ p(x\leq 5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4) \\ +p(x=5)=\frac{24}{24}=\mathbf{1} \end{cases}$$

X=xi	0	1	2	3	4	5
P(x=xi)	1/12	2/12	3/12	4/12	3/24	1/24
X^2	0	1	4	9	16	25

حساب التوقع الرياضي :

$E(x)= \sum_{i=1}^{6} xi\ p(x = xi)$

$=(0*1/12)+(1*2/12)+(2*3/12)+(3*4/12)+(4*3/24)+(5*1/24)$

$=0+2/12+6/12+12/12+12/24+5/24$

E(x)=2.37

حساب التباين و الانحراف المعياري :

$v(x)= \sum_{i=1}^{6} x_i^2\ p(x = xi)$

$=(0*1/12)+(1*2/12)+(4*3/12)+(9*4/12)+(16*3/24)+(25*1/24)$

$=0+2/12+12/12+36/12+48/24+25/24$

v(x)=7.20

$S(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{7.20} = 2.68$

3- حساب الاحتمالات التالية:

1) $P(x\leq 1)=F(1)=\frac{3}{12}$

2) $p(x\geq 4)= 1 - p(x\leq 3) = 1- F(3)=1- F(3)=1-\frac{10}{12}=\frac{2}{12}$

3) $F(3)= p(x\leq 3)= \frac{10}{12}$

التمرين الثالث :

$$F_{(x)}=\begin{cases} kx & si\ 0 \le x < 2 \\ ke^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \ge 2 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

1. تعيين قيمة الثابث K

$$1/\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 kx\,dx + \int_2^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\mathrm{x}}\quad \mathrm{dx} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad 0 + [\frac{kx^2}{2}]_0^2 + \left[-2ke^{\frac{-1}{2}x}\right]_2^{+\infty} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad [2k + 2k\mathrm{e}^{-1}] = 1$$

$$\Longrightarrow \quad k[2 + 2e^{-1}] = 1 \Longrightarrow \mathrm{k} = \frac{1}{2+e^{-1}} = \mathbf{0.36}$$

2.حساب احتمال ان يفوق الطلب في سنة ما على المادة 01 مليون قنطار

$$P_{(x \ge 1)} = \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_1^2 kx\,dx + \int_2^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x}$$

$$= [\frac{kx^2}{2}]_1^2 + \left[-2ke^{\frac{-1}{2}x}\right]_1^{+\infty}$$

$$= \mathrm{k}\,[2 - \frac{1}{2}] + 2k[0 + e^{-1}]$$

$=0.54+0.26=\mathbf{0.86}$

3.حساب احتمال ان يفوق الطلب في السنة الواحدة على الاقل من بين 05 سنوات على المادة (1 قنطار)

A= يفوق الطلب في سنة واحدة على الاقل من بين 5 سنوات على المادة 1 مليون قنطار .

$\bar{A}$ =لا يفوق الطلب في 5 سنوات 1 مليون قنطار.

A1: لا يفوق الطلب في السنة(1) مليون قنطار

A2: لا يفوق الطلب في السنة(2) مليون قنطار

A3: لا يفوق الطلب في السنة(3) مليون قنطار

A4لا يفوق الطلب في السنة(4) مليون قنطار.

A5: لا يفوق الطلب في السنة(5) مليون قنطار

$$P(\bar{A}) = p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$=p(A_1).\ p(A_2).\ p(A_3).\ p(A_4).\ p(A_5)$$

$p(A<1)=1-p(x\geq1)=1-0.86=\mathbf{0.14}$

$\Longrightarrow\ P(\bar{A})=0.14*0.14*0.14*0.14*0.14=(\mathbf{0.14})^{5}$

$\Longrightarrow\ P(A)=1-P(\bar{A})=1-(0.14)^{5}=\mathbf{0.99}$

التمرين الرابع :

1. حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = 1$$

$$\int_{x=0}^{x=10} \boldsymbol{cx(10-x)dx = 1}$$

$$\boldsymbol{c\int_{x=0}^{x=10} (10\,x - x^2)dx = 1}$$

$$c\ \left[10\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 1$$

$$c\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 1$$

$$c\left[(5(100) - \frac{(1000)}{3}\right] - 0 = 1$$

$$\frac{500}{5}\ c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2. حساب أن انفاق الأسرة يتراوح بين (5،8) ألف ريال خلال الشهر هو.

$\boldsymbol{p(}$

$$= 0.006\left[\left(5(8)^2 - \frac{8^3}{3}\right) - \left(5(5)^2 - \frac{5^3}{3}\right)\right]$$

$=0.006[(149.3333) - (83.3333)]$

$=0.006(66)=0.396$

3. اذا كان لدينا 600اسرة، فان عدد الأسر المتوقع أن يقل انفاقها هن 3 آلاف خلال الشهر هو:

number of family $=600\ p(x<3)$

$$=\mathbf{600\int_0^3 0.006x(10-x)dx}$$

$$=3.6\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6[45-9] - 0 =$$

$$129.6 \approx 130$$

حوالي 130أسرة

4 – حساب التوقع الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري

1. التوقع الرياضي

$$E(x) = xf(x)dx =$$
$$\int_0^{10} x\big(0.006x(10-x)\big) = 0.006\int_0^{10}(10x^2 - x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{1000}{3} - \frac{1000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط انفاق الاسرة الشهري 5 آلاف ريال

2. التباين

$S^2($

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$

$= 0$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

و من ثم يأخذ التباين القيمة التالية $30 - 25 = 5$

اذا الانحراف المعياري هو $\sqrt{5} = 2.236$

التمرين الخامس

P(a)=0.5 p(b)=0.7 p(c)=0.8

P(ā)=0.5 p($\bar{b}$)=0.3 p($\bar{c}$) $= 0.2$

X: عدد السيارات التي تبيعها الشركة يوميا

1.ايجاد التوزيع الاحتمالي لــ X :

X=xi	0	1	2	3
P(x=xi)=f(xi)	0.03	0.23	0.47	0.28

- ✓ $P(x=0)=p(\bar{a} \cap \bar{b} \cap \bar{c})=p(\bar{a})*p(\bar{b})*p(\bar{c})$

$=0.5*0.3*0.2=\mathbf{0.03}$

- ✓ $P(x=1)=p(a\cap \bar{b} \cap \bar{c}) + p(\bar{a} \cap b \cap \bar{c}) + p(\bar{a} \cap \bar{b} \cap c)$

$=p(a).\ p(\bar{b})p(\bar{c}) + p(\bar{a}).p(b).p(\bar{c}) + p(\bar{a}).p(\bar{b}).p(c)$

$0.5*0.3*0.2+0.5*0.7*0.2+0.5*0.3*0.8=\ .$

- ✓ $p(x=2) = p(a \cap b \cap \bar{c}) + p(a \cap \bar{b} \cap c) + p(\bar{a} \cap b \cap c)$

$= p(a).p(b).p(\bar{c}) + p(a).p(\bar{b}).p(c) + p(\bar{a}).p(b).p(c)$

$=0.5*0.7*0.2+0.5*0.3*0.8+0.5*0.7*0.8\ \mathbf{=0.47}$

- ✓ $P(x=3) = p(a\cap b \cap c) = p(a).p(b).p(c)$

$= 0.5*0.7*0.8=\mathbf{0.28}$

2.القيمة المتوقعة لعدد مبيعات الشركة

$E(x)= \sum_{i=1}^{3} xi\ p(x = xi)$

$=0*0.03+1*0.23+2*0.47+3*0.28$

$\mathbf{E(x)=2}$

3.التوزيع الاحتمالي لـــ Y:

$Y= \{0,20000,40000,60000\}$

$X = 0 \to Y = 0$ $\qquad$ $x = 2\to Y = 40000$

$X = 1 \to Y = 20000$ $\qquad$ $x = 3\to Y = 60000$

Y=yi	0	20000	40000	60000
P(y=yi)=f(yi)	0.03	0.23	0.47	0.28

- حساب القيمة المتوسطة لربح الشركة:

الطريقة الاولى :

$E(y)=\sum yi \quad p(y=yi)$

$=0*0.03+20000*0.23+40000*0.47+60000*0.28$

$\mathbf{E(y)=40000}$

الطريقة الثانية:

$\mathbf{E}(y)=E\ (20000x)$

$=20000\ E\ (x)\ =20000*2$

$\mathbf{=40000}$

المحـور الرابــع

التوزيــعات الاحـتمالـية

الشهـــيرة

نتطرق من خلال هدا الفصل إلى العناصر التالية:

I . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتقطع

I .1. توزيع ذو الحدين

I .2. التوزيع البواسوني

II . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتصل(المستمر)

II .1.التوزيع المنتظم

II .2.التوزيع الاسي السالب

II .3.التوزيع الطبيعي

III – تمارين محلولة

مقدمة :

توجد توزيعات احتمالية كثيرة تخضع الى قوانين معينة ثابتة، نسبت في الغالب الى واضعها كتوزيع ذو الحدين الذي ينسب الى العالم برنولي ، و هي التوزيعات التي يمكن من حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ ،لها معالم معينة تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، و نقسم التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الى توزيعات احتمالية شهيرة خاصة بالمتغير المتقطع و اخرى خاصة بالمتغير المستمر.

I . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتقطع

و من اهم التوزيعات التي سيتم دراستها وفق المقرر توزيع ثنائي الحدين (ذو الحدين)و التوزيع البواسوني.

I .1. توزيع ذو الحدين

I .1.1. تعريف: هو احد التوزيعات الاحتمالية المتقطعة و يسمى ايضا بتوزيع برنولي، و يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان،حيث النتيجة محل الاهتمام تسمى بحالة النجاح و الاخرى تسمى بحالة الفشل مثل نتيجة الطالب في الامتحان نجاح او رسوب (فشل)،إعطاء الدواء للمريض فإما يستجيب للدواء (نجاح) أو لا يستجيب (فشل).[1]

I .2.1.شكل التوزيع الاحتمالي ذو الحدين

اذا حققت كل تجربة الشروط التالية تسمى بتوزيع ذو الحدين و هي[2]:

- كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

*النتيجة محل الاهتمام تسمى حالة النجاح و تتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p.

*النتيجة الثانية تسمى حالة الفشل و تتم باحتمال ثابت ايضا هو q حيث $q=1-p$

[1] محمد صبيحي أبو صالح ،مرجع سبق ذكره ، ص 179.
[2] -محمد صبيحي أبو صالح ،مرجع سبق ذكره ، ص 179.

- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى، أي كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الاخرى.
- اذا كان المتغير العشوائي x يعبر عن عدد حالات النجاح في n محاولة، فان مدى المتغير العشوائي هو $x:\{x=0,1,2......n\}$ ، و عليه فان التوزيع الاحتمالي ذو الحدين يأخذ الشكل التالي[1]:

$$\mathbf{f(x) = p(x=x\,i) = } \boldsymbol{c_n^x} \mathbf{p^x\, q^{n-x}}$$

و يرمز له بالرمز $x \quad \mathbf{B(n,p)}$ ،حيث n و p هما معلمات التوزيع.

I .3.1.خواص توزيع ذو الحدين: تتمثل خواص التوزيع ذو الحدين فيما يلي[2]:

1- مجموع الاحتمالات تساوي 1.
2- التوقع الرياضي يأخذ الصيغة التالية: $E(x)=n.p$
3- التباين $V(x)$يأخذ الصيغة التالية: $V(x)=n.p.q$

مثال 01 :اذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو 0.9 ،فإذا أجريت العملية لعشرة مرضى أحسب مايلي:

1. احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى.
2. احتمال نجاح العملية لجميع المرضى.
3. احتمال نجاح العملية لثمانية مرضى على الاقل.
4. احتمال نجاح العملية لثمانية مرضى على الاكثر.
5. التوقع الرياضي لعدد المرضى الذين سيجرون العملية بنجاح.
6. تباين عدد المرضى الذين سيجرون العملية بنجاح.

الحل:

x: عدد المرضى الذين سيجرون العملية بنجاح.

[1]Christophe Hurlin, op.cit, p 189.

[2]-جيلالي جلاطو، مرجع سبق دكره ،ص161.

نوع المتغير: متقطع(منفصل).

نوع التوزيع:توزيع ذو الحدين

$n=10$ $p=0.9$ $q=1-p=1-0.9=0.1$

الرمز: $x \sim B(n,p) \Longrightarrow x \quad B(10\,;0.9)$

- شكل التوزيع:

$$f(x) = p(x=x_i) = C_n^x p^x q^{n-x} = C_{10}^x (0.9)^x (0.1)^{10-x}$$

1. $p(x=7) = C_{10}^7 (0.9)^7 (0.1)^3$
2. $p(x=10) = C_{10}^{10} (0.9)^{10} (0.1)^0$
3. $p(x\geq 8) = p(x=8)+p(x=9)+p(=10)$

$$=C_{10}^8 (0.9)^8 (0.1)^2 + C_{10}^9 (0.9)^9 (0.1)^1 + C_{10}^{10} (0.9)^{10} (0.1)^0$$

4. $p(x\leq 8) = ?$

الطريقة الاولى:

$$p(x\leq 8)=P(x=8) + p(x=7) + \ldots\ldots\ldots\ldots + p(x=0)$$

$$=C_{10}^8 (0.9)^8 (0.1)^2 + C_{10}^7 (0.9)^7 (0.1)^3 + \ldots\ldots\ldots + C_{10}^0 (0.9)^0 (0.1)^{10}$$

الطريقة الثانية :

$$p(x\leq 8)=1-p(x\geq 9)$$

$$=1-[p(x=9)+p(x=10)]$$

$$=1-[C_{10}^9 (0.9)^9 (0.1)^1 + C_{10}^{10} (0.9)^{10} (0.1)^0]$$

5. $E(x) = n * p = 10 * 0,9 = 9$
6. $v(x) = n * p * q = 10 * 0,9 * 0,1 = 0.9$

I .2. التوزيع البواسوني

I .1.2. مفهوم التوزيع البواسوني:عندما تكون n كبيرة و p صغيرة في توزيع ذو الحدين فان هذا التوزيع يؤول الى توزيع آخر يدعى بتوزيع بواسوني[1]،حيث يهتم التوزيع البواسوني بالتجارب التي نحدث خلال فترة زمنية او مكانية محددة كدراسة عدد المكالمات التي تصل قسم ما خلال ساعات الدوام، أي يدرس عدد تكرارات حادث في مدة زمنية معينة أو حجم معين[2] و ذلك بفرض ما يلي:

1- معرفة القيمة المتوسطة لعدد تكرارات الحادث في مدة زمنية أو حجم معين مثل معدل حوادث السيارات في اليوم، معدل الوفيات في الشهر.

2- عدد تكرارات الحادث يتناسب مع طول المدة أو الحجم اذا كان ضغيرين.

3- احتمال وقوع الحادث أكثر من مرة واحدة يؤول الى الصفر اذا كانت المدة الزمنية او الحجم صغير جدا يؤول الى الصفر يأخذ هذا المتغير قيمة في مجموعة الاعداد الطبيعية $x \in \{0,1,2,\ldots\ldots n\}$ و يرمز له بالرمز التالي: $x \curvearrowright p(\lambda)$

4- **شكل التوزيع الاحتمالي**: يأخذ التوزيع البواسوني الشكل التالي[3]:

$$f(x) = p(x=xi) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{xi}}{xi!}$$

حيث:

λ :القيمة المتوسطة.

e: عدد نيبري يساوي 2.718.

[1]-محمد يوسف أشقر ، مرجع سبق دكره ،ص 170.

[2] Gregory denglos, op cit, p 182.

[3] Gilbert saporta, op cit , p33 .

I .2.2.خواص التوزيع البواسوني: تتمثل فيما يلي [1]:

1- مجموع الاحتمالات تساوي 1 أي:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} p(x = xi) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{e^{-x}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{+\lambda} = 1$$

2- التوقع الرياضي يساوي القيمة المتوسطة ($\boldsymbol{\lambda}$) أي: $E(x)= \boldsymbol{\lambda}$

3- التباين يساوي القيمة المتوسطة ($\boldsymbol{\lambda}$) اي : $v(x)= \boldsymbol{\lambda}$

ملاحظة: يمكن تقريب توزيع ذو الحدين الى التوزيع البواسوني حيث $\boldsymbol{\lambda} = n.p$ اذا كانت n كبيرة جدا و p صغيرة جدا.

مثال 1: يستقبل احد موزع المكالمات الهاتفية لإحدى المؤسسات في المتوسط مكالمتين في الدقيقة.

المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير العشوائي؟
2. ما نوع التوزيع الاحتمالي؟
3. ما هو احتمال ان يستقبل 03 مكالمات.
4. ما هو احتمال ان يستقبل 03 مكالمات على الاقل
5. ما هو احتمال ان يستقبل 03 مكالمات على الاكثر.
6. ما هو احتمال ان يستقبل مكالمتين خلال 05 دقائق.
7. ما هو احتمال ان يستقبل و لا مكالمة خلال 05 دقائق.
8. أحسب توقع احد عدد المكالمات المستقبلة في الدقيقة.
9. احسب تباين عدد المكالمات في الدقيقة.

[1] Gilbert saporta ,op cit , p 34 .

الحل:

xi: عدد المكالمات الهاتفية خلال الدقيقة.

1- نوع المتغير العشوائي:متغير منفصل (متقطع).

2- نوع التوزيع:التوزيع البواسوني

$\boldsymbol{\lambda}=02 \quad x \backsim p(\boldsymbol{\lambda}) \quad x \backsim p(2)$

شكل الدالة:

$$f(x)=p(x=xi)= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$

$$f(x)=p(x=xi)= e^{-2}\frac{2^{x}}{x!}$$

3- $p(x=3)= e^{-2}\frac{2^{3}}{3!}$

4- $p(x\geq 3)=1-p(x\leq 2)$

$=1-[p(x=2)+p(x=1)+p(x=0)]$

$=1-[e^{-2}\frac{2^{2}}{2!}+e^{-2}\frac{2^{1}}{1!}+e^{-2}\frac{2^{0}}{0!}$

5- $p(x)\leq 3) =p(x=3)+p(x=2)+p(x=1)+p(x=0)$

$= e^{-2}\frac{2^{3}}{3!}+e^{-2}\frac{2^{2}}{2!}+e^{-2}\frac{2^{1}}{1\,!}+e^{-2}\frac{2^{0}}{0!}$

6- x:عدد المكالمات الهاتفية خلال 05 دقائق.

$p(x=2)= e^{-10}\frac{10^{2}}{2!}$

7- $p(x=0)= e^{-10}\frac{2^{0}}{0!}$

8- $E(x)=\boldsymbol{\lambda}=02$

9- $V(x)=\boldsymbol{\lambda}=02$

II . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتصل(المستمر)

من اهم التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتصل(المستمر) التوزيع الطبيعي، التوزيع المنتظم، التوزيع الاسي السالب التي سيتم دراستها وفق هذا المقترر كما يعتبر التوزيع الطبيعي أحد اهم التوزيعات الاحتمالية في علم الاحصاء، حيث ان اغلب القياسات الفيزيائية و الظواهر الطبيعية تخضع أو تتقارب توزيعاتها التكرارية من هذا التوزيع.

II .1.التوزيع المنتظم: نقول عن متغير عشوائي يخضع للتوزيع المنتظم على المجال اذا كانت دالة كثافته ثابتة و نوضح ذلك من خلال ما يلي[1]:

II .1.1. شكل دالة كثافة الاحتمال: هو توزيع له دالة كثافة احتمال ثابتة، و يستخدم في حالة الظواهر التي يمكن ان تحدث بشكل منتظم[2]،فإذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع منتظم uniforme مداه $a<x<b$ فان دالة كثافة احتمالية هي:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a<x<b$$

حيث :a،b مجال تعريف المتغير العشوائي المنتظم،

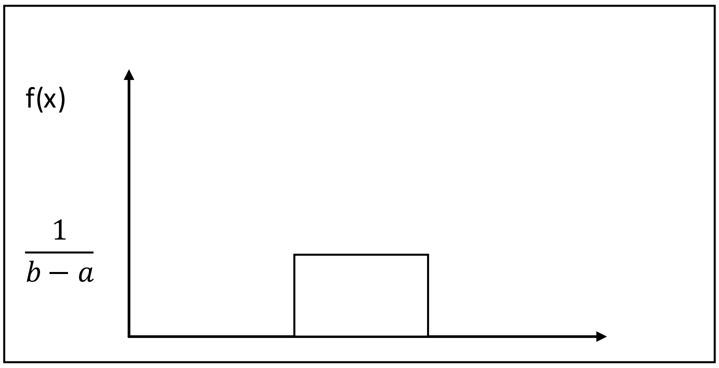
و يمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي[3]:

[1] جيلالي جلاطو ، مرجع سبق دكره ، ص 212

[2] Christophe Hurlin, op cit , p199.

[3] جيلالي جلاطو، مرجع سبق دكره ، ص 213

شكل رقم 01: دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتضم.



المصدر : جيلالي جلاطو ،مرجع سبق دكره ، ص 213.

II .1 .2.معالم هذا التوزيع:توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (a,b) ،و لذا يكتب رمز هذا التوزيع كما يلي: $x \sim U(a,b)$.

II .1 .3.خصائص التوزيع المنتظم : تتمثل الصيغة الرياضية لدالة التوزيع المتجمع F(x) ، التوقع الرياضي E(x) ، التباين V (x) لهذا المتغير فيما يلي [1]:

$$F(x)=p(x\leq xi)=\int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \qquad , \; V(x)=\frac{(b-a)^2}{2}$$

مثال:استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن من السكر، ووضعها في مخزن،و قام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة،اذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم ،فأوجد ما يلي:

1- ما هو نوع المتغير العشوائي؟

2- ما نوع التوزيع الاحتمالي؟

3- أوجد دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع؟

[1] Christophe Hurlin, op cit , p 200.

4- ما هي الكمية المباعة خلال 05 أشهر الاولى.

5- بعد مرور سبعة أشهر من بداية بيع ،ماهي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل:

x: الفترة الزمنية للبيع (بالأشهر)

1. نوع المتغير:متغير مستمر (متصل).
2. نوع التوزيع:توزيع منتظم.
3. دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع المتجمع.

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{12-0}=\frac{1}{12}$$

$$F(x)=p(x\leq xi)=\frac{x-a}{b-a}=\frac{x-0}{12-0}=\frac{x}{12}$$

4- الكمية المباعة خلال 05 أشهر الاولى:

$$Qp(x=5)=Q\frac{5}{12}=1500.\frac{5}{12}=625.$$

5- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

نفرض أن Q كمية السكر المستورد ،تكون الكمية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي:

$$Qp(x>7)=Q(1-F(7)=1500(1-\frac{7-0}{12-0})$$

$$=625\ Ton$$

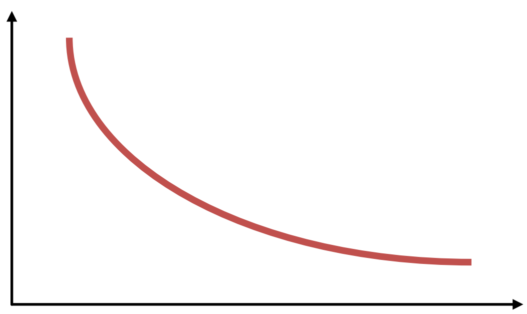
II . 2.التوزيع الاسي السالب:

II .2.1.مفهومه :اذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع اسي سالب ،مداه هو $0<X<\infty$ فان دالة كثافة احتماله هي[1]:

$$f(x)=\theta e^{-\theta x} \qquad \theta>0 \qquad 0<x<\infty$$

و يمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:

شكل رقم 02 : التمثيل البياني لدالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاسي السالب



Source : Grégory denglos , op.cit , p 194.

II .2.2. معالم هذا التوزيع معلمة واحدة هي θ

II .2.3.خصائص التوزيع الاسي السالب: تتمثل الصيغة الرياضية لدالة التوزيع المتجمع F(x)، التوقع الرياضي E(x) والتباين V(x) لهذا المتغير كما يلي[2]:

$$F(x)=p(x\leq xi)=\int_0^x f(x)dx=(1-e^{-\theta x})$$

$$F(x)=(1-e^{-\theta x})$$

$$E(x)=\frac{1}{\theta} \qquad V(x)=\frac{1}{\theta^2}$$

[1] Grégory denglos , op.cit , p 194.
[2] Op.cit , p 195.

مثال: إذا كانت الفترة الزمنية لانهاء خدمة الزبون في البنك تتبع توزيع اسي سالب بمتوسط 2 دقيقة فأوجد مايلي:

- أوجد دالة كثافة الاحتمال المتغيرة عن الفترة الزمنية لانهاء خدمة الزبون.
- ما احتمال انهاء خدمة الزبون في اقل أو يساوي دقيقة.

الحل:

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

x: يمثل الفترة الزمنية لانهاء خدمة الزبون بالدقيقة أي $0<x<\infty$

$$E(x)=\frac{1}{\theta}=2 \Longrightarrow \theta=0.5$$

$$f(x)=0.5\,e^{-0.5x} \qquad 0<x<\infty$$

1- حساب احتمال انهاء خدمة الزبون في اقل أو يساوي من دقيقة:

$$P(x\leq 1)=F(1)=(1-e^{-0.5x})=1-e^{-0.5(1)}=0.3935.$$

III .3. التوزيع الطبيعي:

III .1.3. تعريف: يعتبر التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائية المستمرة لان اغلب المتغيرات العشوائية تقترب أشكالها البيانية الى الشكل البياني الطبيعي،و هو دالة احتمال مستمرة و يأخذ شكله شكل الجرس ،متناظر و متماثل حول القيمة المركزية (التوقع،المنوال،الوسيط)[1]، لان قيمهم متساوية في حالة التوزيع الطبيعي. كما ان للاشكال المتناظرة أو المنحنيات المتناظرة تابع كثافة احتمالي يكتب بشكل عام حسب الصيغة التالية: $f(x)=ae^{-bx2}$ و هو تابع اسي حيث قيمة a و b هي التي تحدد الشكل النهائي للتوزيع الاحتمالي ،أما في حالة الشكل الطبيعي (جرسي) فان هاتين القيمتين تساوي مايلي: $b=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$

III .2.3.شكل دالة كثافة الاحتمال: يكون x متغيرا عشوائيا مستمرا في المجال $]-\infty,+\infty[$ خاضعا لقانون التوزيع الطبيعي،اذا كانت دالة كثافة احتماله تأخذ الصيغة التالية[2]:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{xi-\bar{x}}{\delta}\right)^2}$$

و يكتب بالشكل التالي $x \backsim N(\bar{x}\ ,v(x))$ اي ان المتغير يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\bar{x}$ (توقع)$E(x)$ و تباين $v(x)$.

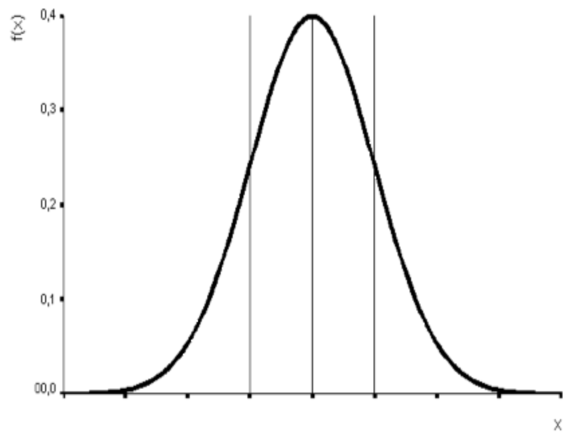
ملاحظة: $E(x) = \bar{x}$ $\qquad$ $v(x)=\boldsymbol{\delta}^2(x)$

III .3.3.التمثيل البياني: هو منحنى متماثل اي الوسط الحسابي يساوي الوسيط يساوي المنوال و يأخذ الشكل التالي:

[1] جيلالي جلاطو ، مرجع سبق دكره ، ص

[2] Christophe hurlin, op.cit , p 203.

شكل رقم 03 : منحنى التوزيع الطبيعي



ان قيمة كل من المتوسط (التوقع) و الانحراف المعياري هي التي تحدد علو او انبساط شكل المنحنى،فكلما كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة كلما كان شكل المنحنى متطاولا و العكس صحيح .ففي حالة تساوي قيمة المتغير العشوائي مع المتوسط (التوقع) فإن دالة كثافة الاحتمال تكون كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$$

يقسم منحنى التوزيع الطبيعي الى قسمين متناظرين و متساويين حيث كل منهما يساوي 0.50 اي احتماله يساوي 0.50 و هذا حسب الشكل التالي $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{+\infty}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}$ أي أنه يتمركز في النقطة $x=E(x)$ ثم ينتشر بشكل منتظم و متناظر على جانبي هذه القيمة المركزية.

III .4.3.معالم التوزيع الطبيعي: توجد معلمتان لهذا التوزيع هما $E(x)=\bar{x}$ ، $v(x)=s^2$ الانحراف المعياري $\boldsymbol{\delta}$ و يرمز له بالرمز($x \backsim N(\bar{x}, \boldsymbol{\delta^2}$ **و يعني ذلك ان المتغير العشوائي x** يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\bar{x}$ و تباين s^2أو $v(x)$ او انحراف معياري $\boldsymbol{\delta}$.[1]

III .5.3.حساب الاحتمالات: نفرض ان الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x1,\leq x\leq x2)$ و هذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية.

[1] بوعبد الله صالح، محاضرات في الاحصاء الرياضي ، ص 52 .

لحساب هذا الاحتمال نقوم بحساب المساحة و بالتالي ايجاد التكامل التالي:

$$p(x1<x<x2)=\int_{x1}^{x2} f(x)dx = \int_{x1}^{x2} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2} (\frac{xi-\bar{x}}{\delta})^2]$$

و بالتالي ننتقل من التوزيع الطبيعي الى التوزيع الطبيعي القياسي، و هو توزيع له نفس خصائص التوزيع الطبيعي بمتوسط مساوي الى الصفر و انحراف معياري مساوي الى الواحد اي: $0= \bar{x}$ =E(x) ، $\boldsymbol{\delta}$=1 .

يستعمل التوزيع الطبيعي القياسي لحساب قيم الاحتمالات لمجالات معينة بحيث ننتقل من التوزيع الطبيعي العادي الى التوزيع الطبيعي القياسي باجراء تحويل في المتغيرات و ذلك بالانتقال من المتغير x الى المتغير z علما ان قيمة z تعطى وفق العلاقة التالية : $z=\frac{xi-\bar{x}}{\delta(x)}$

و في بعض المراجع يستعمل المتغير القياسي t بدلا من z كما أعدت جداول خاصة للتوزيع الطبيعي القياسي تستخدم لايجاد قيم الاحتمالات المقابلة لمجالات معينة،حيث بعض المجالات معروفة من خلال التجربة مثلا.

- يحتوي المجال$[\bar{x} \pm \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})]$ على 68.26% من العينة او المجتمع.
- يحتوي المجال$[\bar{x} \pm 2\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})]$ على 95.54% من العينة او المجتمع.
- يحتوي المجال$[\bar{x} \pm 3\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})]$ على 99.74% من العينة او المجتمع.

و بالتالي دالة الكثافة تصبح على الشكل التالي:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp (\frac{-1}{2} z^2)$$

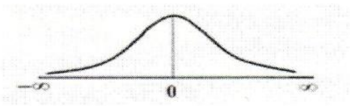
و من خصائصه مايلي:

$E(z)=0=\bar{z}$ $\quad$ $v(z)=1$

1- المتوسط الحسابي أو التوقع الرياضي =0

2- التباين و الانحراف المعياري =1

و من ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرمز $z \sim (0,1)$ و يعني ذلك ان المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) و تباين 1، و يأخذ المنحنى الشكل التالي:



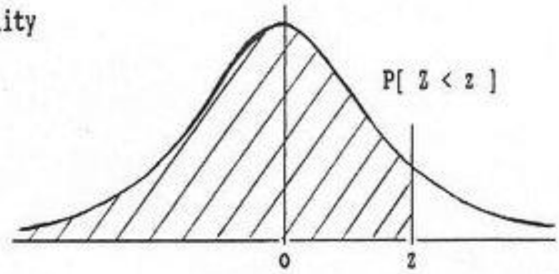
صمم الاحصائيون جداول احصائية لحساب دالة التوزيع التجمعي $F(z)= p(z \leq z_i)$ كما هي مبينة بالرسم التالي:

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z
i.e.

$$P[\, Z < z \,] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\, dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

خطوات حساب الاحتمال $p(x1\leq x\leq x2)$باستخدام الدرجة القياسية z_i

$$z_i=\frac{xi-\bar{x}}{s}$$

1- يتم تحويل القيم الطبيعية $(x1,x2)$ الى قيمة طبيعية قياسية:

$$Z_1=\frac{x1-\bar{x}}{\delta}، \quad z_2=\frac{x2-\bar{x}}{\delta}$$

2- يصبح $p\ (x1\leq x\leq x2)$ كما يلي: $p(x_1\leq x\leq x_2)=p(z_1\leq z\leq z_2)$

3- نستخدم جدول التوزيع الطبيعي القياسي و الذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال

$F(z)=p(z\leq z_i)$.

4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات:

مثال: أوجد الاحتمالات التالية:

$p(z\geq 1.96)$ $p(z\leq -2.33)$ $p(z\leq 1.57)$ $p(-2.02\leq z\leq 1.28)$.

الحل:

1- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $p(z\leq 1.57)=F(1.57)$اسفل المنحنى و يتم استخدام

الجدول كما يلي:

Z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
.										
.										
.										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										

1.40	
1.50	0.9418
.	
.	
.	
.	

و عليه $p(z\leq 1.57)=F(1.57)=0.9418$

2- المساحة أسفل المنحنى المعتبرة عن الاحتمال $f(z\leq -2.33)=F(-2.33)$

Z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
.										
.										
.										
2.70										
2.6										
2.5										
2.4										
2.3				0.0099						
.										
.										
.										
.										
.										

و من ثم يكون $p(z\leq -2.33)=0.0099$.

3- $p(z>1.96)$

و هذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع المتجمع حيث ان:

$$P(z>1.96)=1-p(z\leq 1.96)=1-F(1.96)$$

$$=1-0.9750 = 0.0250$$

حيث : $F(1.96)= 0.9750 \Longrightarrow$

4- $p(-2.01<z\leq 1.28)$

باستخدام خصائص الدالة التوزيع المتجمع يحسب الاحتمال كما يلي:

$$p(-2.01<z\leq 1.28)=p(z\leq 1.28)-p(z\leq -2.01)$$

$$=F(1.28)-F(-2.01)$$

$$= 0,8997-0,0222$$

$$=0,8775.$$

مثال1: يخضع عمر نوع البطاريات الى توازيع طبيعي وسطه الحسابي 1000ساعة و انحرافه المعياري 50 ساعة .

أحسب احتمال ان لا تفوق عمر بطارية من هذا النوع 1100 ساعة.

مثال2:اذا كان التدخل السنوي للاسر في ولاية عين تموشنت متوسطه الحسابي 80.000 دج و تباينه 900.

المطلوب ما يلي:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

3- ماهي نسبة الاسر التي يقل دخلها عن 60 الف دينار؟

4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من المداخيل؟

الحل:

x= عمر البطارية

$\bar{x}$ =1000 $\delta(x) = 50$

الرمز $x \backsim N(1000,50)$

$p(x\leq 1100)= ?$

$z=\frac{xi-\bar{x}}{\delta} = \frac{x-1000}{50} \Longrightarrow x=50z+1000$

$p(x\leq 1000)=p(50z+1000\leq 1100)$

$=p(z\leq \frac{1100-1000}{50})$

$=p(z\leq 2)=F(2) = 0.9772$

حل المثال 2:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للتدخل السنوي:

xمتغير عشوائي يعبر عن التدخل السنوي بآلالف دينارجزائري، يتبع التوزيع الطبيعي

$E(x)=\bar{x} =80$

$v(x)=s^2=900 \Rightarrow s=30.$

$x \sim N(80,30)$

2- كتابة دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{xi-\bar{x}}{\delta}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{xi-80}{30}\right)^2\right]$$

3- نسبة الاسر التي يقل دخلها عن 60 الف دينار هي :

$p(x<60)=\ ?$

$$zi=\frac{xi-\bar{x}}{\delta} \Longrightarrow zi=\frac{xi-80}{30} \Longrightarrow xi=30z+80.$$

$$p(x<60)=p(30z+80<60)$$

$$=p\left(z<\frac{60-80}{30}\right)$$

$$=p(z<-0.67)$$

$$=f(-0.67)$$

$$=0.2514$$ من جدول التوزيع الطبيعي القياسي

4- الدخل الذي أقل من 0.975 من المداخيل:

في هذه الحالة نبحث عن قيمة المتغير x الذي أقا من 0.975 نفرض هذا المتغير هو x_1 فان:

$$p(x\leq x_1)=p\left(z\leq\frac{xi-80}{30}\right)=0.975$$

و بالكشف بطريقة عكسية،حيث نبحث عن المساحة 0.975 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 و العمود 0.06 اي ان قيمة z=1.96 و بالتالي :

$$1.96=\frac{xi-80}{30}$$

$$\Longrightarrow x_1=30(1.96)+80$$

$$\Longrightarrow x_1=138.8$$

الدخل الذي اقل من 0.975 من المداخيل هو 138.8 الف دينار في السنة.

III . تمارين محلولة

التمرين 01 : متوسط الجرائد المباعة يوميا في كشك معين هو 80 جريدة .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان يكون عدد الجرائد المباعة في هدا الكشك خلال يوم ما :

أ – 100 جريدة . **ب –** 10 جرائد على الأقل . **ج –** 2 جرائد على الأكثر .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 02 : يتوافد الاشخاص على مصلحة ادارية بقيمة متوسطة قدرها 180 شخص في الساعة ، نعرف المتغير العشوائي x الدي يمثل عدد الاشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي ، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان لا يقل عدد المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة عن شخصين .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 03 : في معهد معين احتمال تخرج طالب ما بعد 05 سنوات من الدراسة هو 5،0،ليكن x المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المتخرجين بعد 05 سنوات في فوج من 40 طالب .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي ، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان : أ – عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات هو 30 .

ب – عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات لا يقل عن 5 .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 04 : لاحظ تاجر انه من بين كل 20 شخصا يدخلون محله 04 منهم يشترون ، دات يوم دخل 30 شخص الى محل التاجر ، ليكن x المتغير العشوائي الدي يمثل عدد المشترين في هدا اليوم .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان عدد المشترين:

أ – 03 مشترين . **ب** – لا يقل عن 02 مشترين . **ج** – لا يزيد عن 27 مشتري .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 05 :استورد أحد التجار 6000 طن من السكر، ووضعها في مخزن و ذلك ليقوم ببيعها بكميات متساوية على مدار سنتين، إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم فأوجد مايلي:

1–دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.

2–بعد مرور سنة من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

3–ما هي الكمية المباعة بعد 05 أشهر؟

التمرين 06 : إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة زبون في شباك البريد تتبع توزيع بمتوسط 4 دقائق أوجد مايلي:

1–دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية.

2–ما هو احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يزيد عن 03 دقائق؟

3 - احسب التوقع الرياضي و التباين .

التمرين 07 : اوجد الاحتمالات التالية :

$A/\ P(-1.7 \leq Z \leq 2.58)$

$B/\ P(1 \leq Z \leq 3.3)$

$C/\ P(-1.23 < Z < -0.68)$

ليكن x متغير عشوائي خاضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 20 و تباينه 09، أحسب مايلي:

1- $p(x \leq 21)$ ، $p(x \leq 17)$ ، $p(x \geq 19)$ ، $p(18 \leq x \leq 21)$

2-عين قيم a .b.c بحيث:

$p(b\leq x\leq c)$ ، $p(x\geq b)$ ، $P(x\leq a)$

التمرين 08 : كانت علامات 300 طالب في امتحان معين تخضع إلى توزيع طبيعي وسطه الحسابي 10 وتباينه 04.

1-ماهي نسبة الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13.

2-ماهو عدد الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13.

3-ماهي أقل علامة حصل عليها طالب من بين 25% الأوائل.

التمرين 09 : تتخذ أطوال (1000) طالب توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي (160cm) و انحرافه المعياري (10cm) ، أوجد مايلي:

1-نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن 170 cm.

2-النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 cm.

3-النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 165 cm،175 cm.

4-عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 cm.

الحلول

التمرين 01 :

x: عدد الجرائد المباعة $\lambda=100$

1) نوع المتغير : عشوائي متقطع

- نوع التوزيع = توزيع بواسوني

$$X \circlearrowleft p(\lambda) \Rightarrow x \circlearrowleft p(100)$$

- شكل دالة الاحتمال :

$$f(x) = \mathrm{p}(\mathrm{x} = \mathrm{xi}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-100}\ \frac{100^x}{x!}$$

2) حساب الاحتمالات التالية:

أ- بيع 90 جريدة

$$P(x = 90) = \mathrm{e}^{-100}\ \frac{100^{90}}{90!}$$

ب- 4 جرائد على الأقل :

$P(x \geq 4) = 1 - P(x < 4) \qquad = 1 - P(x \leq 3)$

$$= 1 - [P(x = 3) + P(x = 2) + P(x = 1) + P(x = 0)]$$

$$= \mathbf{1} - \left[\mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^3}{3!}\right] + \mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^2}{2!} + \mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^1}{1!} + \mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^0}{0!}$$

ج- 3 جرائد على الأكثر :

$P(x \leq 3) = (x = 3) + P(x = 2) + P(x = 1) + P(x = 0)$

$$= \left[\mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^3}{3!}\right] + \mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^2}{2!} + \mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^1}{1!} + \mathbf{e}^{-100}\ \frac{100^0}{0!}$$

3) حساب $S(x),\ V(x)\ ,E(x)$

$E(x) = V(x) = \lambda \qquad \lambda = 100$

$S(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{100} = 100$

التمرين 02 :

X: عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة

$180 \leftarrow 60$

$X \leftarrow$ 1د

$\Rightarrow X = \frac{180}{60} = 3 \qquad \Rightarrow \lambda = 3$

متوسط الأشخاص المتوافدين في الدقيقة :

1- نوع المتغير = عشوائي متقطع

نوع التوزيع = بواسوني $X \backsim p(\lambda) \Rightarrow x \backsim p(3)$

- دالة الإحتمال :

$$f(x) = p(x = xi) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x}}{x!} = e^{-3} \frac{3^{x}}{x!}$$

2- حساب إحتمال أن لا يقل عدد المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة عن شخصين :

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - [P(x = 1) + P(x = 0)]$$

$$= 1 - \left[e^{-3} \frac{3^{1}}{1!} + e^{-3} \frac{3^{0}}{0!}\right]$$

3) حساب المتوسط ،التباين ، الانحراف المعياري

$E(x) = V(x) = \lambda \qquad \lambda = 3$

$S(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{3}$

التمرين 03 :

P=0,4 q= 0,6 n =40 E

X: عدد المتخرجين بعد 05 سنوات

1 - نوع المتغير : عشوائي متقطع

- نوع التوزيع = توزيع ذي الحدين

$$\mathbf{X} \backsim \boldsymbol{B(n-p)} \Rightarrow \boldsymbol{x} \backsim \boldsymbol{B(40,0,4)}$$

- كتابة شكل دالة الاحتمال $f(x)$

$$f(x) = \mathrm{p}(\mathrm{x} = \mathrm{xi}) = C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}} \quad \mathrm{p}^{\mathrm{x}}(1-\mathrm{P})^{\mathrm{n}-\mathrm{x}}$$

$$= \boldsymbol{C_{40}^{x}}$$

$$(\mathbf{0.4^{x}})(\mathbf{0.6})^{\mathbf{40-x}}$$

1- حساب الاحتمالات التالية :

$$\Rightarrow P_{(x=10)} = C_{40}^{10} \quad (0.4^{10})\,(0.6^{40-10})$$

$$= \boldsymbol{C_{40}^{10}} \quad (\mathbf{0.4})^{\mathbf{10}}(\mathbf{0.6})^{\mathbf{30}}$$

$$\Rightarrow P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - [P(x=2) + P(x=1) + P(x=0)]$$

$$= \mathbf{1 - [}\boldsymbol{C_{40}^{2}}$$

$$(\mathbf{0.4})^{\mathbf{2}}(\mathbf{0.6})^{\mathbf{38}} + \boldsymbol{C_{40}^{1}} \quad (\mathbf{0.4})^{\mathbf{1}}\,(\mathbf{0.6})^{\mathbf{39}} + \boldsymbol{C_{40}^{0}} \quad (\mathbf{0.4})^{\mathbf{0}}\,(\mathbf{0.6})^{\mathbf{40}}$$

3) حساب $S(x)$, $V(x)$,$E(x)$

$E(x) = n.\ p = 40.(0,4) = 16$

$V(x) = n.p.q = 40(0,4)(0,6) = 9,6$

$S(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{9,6}$

التمرين 04 :

$P=\frac{4}{20}=0,2$ $q=0,8$ $n=30$

x = نوع المشترين في اليوم :

1) – نوع المتغير : عشوائي متقطع

- نوع التوزيع = ذي الحدين

$X \backsim B(n-p) \Rightarrow x \backsim B(30,0,2)$

- كتابة شكل دالة الاحتمال $f(x)$

$$\boldsymbol{f(x) = C_n^x \ P^x \ q^{n-x} = C_{30}^x \ (0,2)^x (0,8)^{30-x}}$$

2) حساب الاحتمالات التالية :

$\Rightarrow P_{(x=3)} = \boldsymbol{C_{30}^3 \ (0,2)^3 (0,8)^{30-3}}$

$\Rightarrow P_{(x \geq 2)} = 1 - P_{(x \leq 1)} = 1 - [P(x=1) + P(x=0)]$

$= \boldsymbol{1 - [C_{30}^1 \ (0,2)^1 + (0,8)^{29} + C_{30}^0 \ (0,2)^0 + (0,8)^{30}}$

$\Rightarrow P_{(x \leq 27)} = 1 - P_{(x \geq 28)} = 1 - [P(x=28) + P(x=29) +$
$P(x=30)$

$= 1 - [\boldsymbol{C_{30}^{28} \ (0,2)^{28} + (0,6)^{02} + C_{30}^{29}}$
$\boldsymbol{(0,2)^{29} + (0,8)^1 + C_{30}^{30} \ (0,2)^{30} + (0,8)^0}$

3) حساب $E_{(x)}$, $V_{(x)}$, $S_{(x)}$

$E_{(x)} = n.\,p = 30.(0,2) = 6$

$V_{(x)} = n.p.q = 30(0,2)(0,8) = 4,8$

$S_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{4,8}$

التمرين 05 :

$0 < X < 24 \qquad a = 0 \qquad b = 24 \qquad Q = 6000$

X : المدة الزمنية للبيع (بالاشهر)

نوع المتغير العشوائي :متغير عشوائي مستمر (متصل)

نوع التوزيع الاحتمالي : توزيع منتظم

$X \sim U_{(a-b)} \Rightarrow X \sim U_{(0\ .\ 24)}$

1- دالة كثافة الاحتمال

$$f_{(x)} = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{24-0} = \frac{1}{24}$$

2- الكمية الموجودة بالمخزن بعد مرور سنة من بداية البيع .

$$Q\, P_{(X>12)} = Q\ [1 - P_{(X \leq 12)}]$$

$$= Q\ [1 - F_{(12)}]$$

$$= 6000\ [1 - \frac{12}{24}]$$

$$= 3000T$$

3- الكمية المباعة بعد 05 أشهر

$$Q\, P_{(X \leq 5)} = Q\, f_{(5)}$$

$$= 6000\ (\frac{5}{24})$$

$$= 1250T$$

التمرين 06 :

التوقع الرياضي: $E(X) = 4$

X : الفترة الزمنية لإنهاء خدمة الزبون

نوع المتغير العشوائي : متغير مستمر (متصل)

نوع التوزيع الاحتمالي : التوزيع الاسي السالب

$$E(X) = \frac{1}{\theta} = 4 \Rightarrow \theta = \frac{1}{4} = 0.25$$

1- دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \theta\, e^{-\theta x} = 0.25\, e^{-0.25x}$$

دالة توزيع المجتمع:

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x} = 1 - e^{-0.25x}$$

2- حساب احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يزيد عن 03 دقائق :

$$P(x \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-0.25(3)}$$

3- حساب $E(x)$ ، $V(x)$

$$E(x) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$V(x) = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{(0.25)^2} = 16$$

التمرين 07 :

- حساب الاحتمالات التالية :

A/ $P(-1.7 \leq Z \leq 2.58) = P(Z \leq 2.58) - P(Z < -1.7)$

$= 0.9951 - 0.0446$

$= 0.9505$

B/ $P(1 \leq Z \leq 3.3) = P(Z \leq 3.3) - P(Z < 1)$

$= 0.9995 - 0.8413$

$= 0.1582$

C/ $P(-1.23 < Z < -0.68) = P(Z < -068) - P(Z \leq -1.23)$

$= 0.2483 - 0.1093$

$= 0.1390$

لدينا ما يلي : $\overline{x} = 20$ $\quad S(x) = 3$ $\quad V(x) = 9 \Rightarrow$

1- حساب ما يلي :

- $P(x \leq 21) = P\left(z \leq \frac{21-20}{3}\right) = P(z \leq 0.33) = 0.6293$
- $P(x \leq 17) = P\left(z \leq \frac{17-20}{3}\right) = P(z \leq 1)$

$= 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.8413$

$= 0.1587$

- $P(x \geq 19) = P\left(z \geq \frac{19-20}{3}\right) = P(z \geq -0.33)$

$= P(z \leq 0.33) = 0.6293$

- $P(18 \leq x \leq 21) = P\left(\frac{18-20}{3} \leq z \leq \frac{21-20}{3}\right)$

$$= P(-0.66 \le z \le 0.33)$$
$$= P(z \le 0.33) - P(z \le -0.66)$$
$$= P(z \le 0.33 - [1 - P(z \le 0.66)]$$
$$= 0.6293 - 1 + 0.7454 = 0.3747$$

2- تعيين قيم a ,b,c حيث :

- $P(x \le a) = 0.85 \Rightarrow P\left(z \le \frac{a-20}{3}\right) = 0.85$

$$\frac{a-20}{3} = 1.04$$

$$\Rightarrow a = (1.04)3 + 20 = 23.12$$

- $P(x \ge b) = 0.7 \Rightarrow P\left(z \ge \frac{b-20}{3}\right) = 0.7$

$$\frac{b-20}{3} = -0.53 \Rightarrow b = 18.41$$

- $P(b \le x \le c) = 0.65 \Rightarrow P(x \le c) - P(x \le b) = 0.65$

$$\Rightarrow P(x \le c) = 0.95$$
$$\Rightarrow P\left(z \le \frac{c-20}{3}\right) = 0.95$$
$$\Rightarrow \frac{c-20}{3} = 1.56 \Rightarrow c = 1.56 * 3 + 20$$
$$\Rightarrow c = 24.68$$

التمرين 08 :

N = 300 E $\quad \overline{X} = 10 \quad V(x) = 04 \quad S(x) = 0.2$

X : علامات الطلبة

نوع المتغير العشوائي : متغير مستمر (متصل)

نوع التوزيع الاحتمالي : توزيع طبيعي $\quad X \sim N(10, 2)$

1- نسبة الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13

$$P(13 \leq x \leq 10) = P\left(\frac{13-10}{2} \leq z \leq \frac{10-10}{2}\right)$$

$$= P(\frac{3}{2} \leq z \leq 0)$$

$$= P(z \leq 1.5) - P(z \leq 0)$$

$$= 0.9332 - 0.5 = 0.4332 \approx 043$$

1- عدد الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13

$$N = n * 0.43 = 300 * 0.43 = 129$$

2- ما هي اقل علامة حصل عليها طالب من بين 25 % الاوائل.

a : اقل علامة

$$P(x \geq a) = 0.25$$

$$P\left(z \geq \frac{a-10}{2}\right) = 0.25$$

$$P\left(z \leq \frac{a-10}{2}\right) = 0.75$$

$$\Rightarrow \frac{a-10}{2} = 0.68 \Rightarrow a = 0.68 * 20 + 10 = 11.36$$

التمرين 09 :

n =100 x= 160cm S(x)=10cm s

$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\delta(x)}$

1–نسبة الطلبة الذين تقل او تساوي أطوالهم عن170 cm.

لكن$P(x \leq 170) = p\left(Z \leq \frac{170-\mu}{\delta(x)}\right)$

$= P\left(Z \leq \frac{170-160}{10}\right)$

$= p(z \leq 1)$

$= \mathbf{0.8413}$

إذا: نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن170 cm تساوي0.8413

2- نسبة الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن180 cm هي:

$p(x > 180)$

$= p\left(z > \frac{180-160}{10}\right)$

$= P(z > 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228}$

إذا: فالنسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن180 cm تساوي:

$0.0228 * 100\% = \mathbf{2.28\%}$

3- نسبة الطلبة الذين تتراوح أعمارهم بين175 cm و165 cm هي:

$P(165 < x < 175) = p\left(\frac{165-160}{10} < z < \frac{175-160}{10}\right)$

$= p(0.5 < z < 1.5)$

$= p(0.5 < z < 1.5) - p(0 < z < 0.5)$

$$= 0.4332 - 0.1915$$

$$= \mathbf{0.2417}$$

إذن النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أعمارهم بين175 cm، 105 cm تساوي 24.17%.

4- لإيجاد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن175 cm، نجد نسبتهم و نضربها في عدد الطلبة الكلي، أي أن عدد الطلبة المطلوب = نسبتهم x عدد الطلبة الكلي.

$$p(x > 175) = p\left(z > \frac{175-160}{10}\right)$$

$$= p(z > 1.5)$$

$$= 0.5 - p(0 < z < 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332$$

$$= \mathbf{0.0668}$$

إذن فعدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن175 cm يساوي:

$$0.668 * 1000$$

$$= 66.8$$

$$\approx \mathbf{67}$$

المحـور الخامس

تمـاريـن مقتــــرحـة

و مواضيع امتحانات سابقة

I . تمارين مقترحة للمحــور الثاني

تمرين 1:

يعمل 10 مهندسين $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ في مكتب للدراسات. تريد شركة معينة اجراء دراسات لستة (06) مشاريع مختلفة (دراسة واحدة لكل مشروع، نرقم هذه المشاريع من 1 إلى 6)، فاتصلت بالمكتب الذي زودها بقائمة المهندسين العشرة، تختار الشركة بالصدفة مهندسين لتكليفهم بالمهمة بحيث يمكن لكل مهندس اجراء الدراسة لأكثر من مشروع واحد.

أحسب احتمالات الحوادث:

A: الشخص x_4 يقوم بدراسة واحدة فقط و تكون للمشروع 1.

B: الشخص x_5 يقوم بدراسة واحدة فقط.

C: الشخص x_5 لا يقوم بأي دراسة.

D: الشخص x_5 يقوم بدراستين على الأقل.

تمرين 2:

توجد في مدينة كبيرة (08) مساحات تجارية (نرقمها من 1 إلى 8). تختار هيئة مراقبة الأسعار كل يوم مساحة واحدة (من بين الثمانية هاته) بالصدفة لإجراء عملية المراقبة. نفرض أن أيام عمل الهيئة هي 05 أيام اسبوعيا (السبت، الأحد، الاثنين، الثلاثاء و الأربعاء) و أن الهيئة يمكن لها أن تراقب نفس المساحة أكثر من مرة واحدة في الأسبوع الواحد.

في أسبوع معين احسب احتمال:

1. أن تراقب المساحة 4 مرة واحدة فقط و تكون يوم الاثنين.
2. أن تراقب المساحة 4 مرتان على الأقل.

3. أن لا تراقب المساحتان 3، 7.
4. كل من المساحات 1، 2، 3، 5، 7 تراقب مرة واحدة فقط.

تمرين 3:

يوزع مخرج مقابلة في كرة القدم في احدى المحطات التلفزيونية الإعلانات التجارية (الومضات الإشهارية) على الأوقات المخصصة للإشهار بطريقة عشوائية حيث يمكن لكل إعلان تجاري أن يظهر أكثر من مرة واحدة، لديه 08 إعلانات (1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8) يوزعها على 08 فترات إشهارية نعتبر الحوادث التالية:

A: الإعلانات 1، 3، 5، 7 تأتي في الأربع فترات الأولى و الإعلانات 2، 4، 6، 8 تأتي في الأربع فترات الموالية.

B: الإعلان 3 يأتي مباشرة بعد الإعلان 1 و الإعلان 5 يأتي مباشرة بعد الإعلان 3.

C: الإعلانات الثمانية (08) نوزعها على الفترات الثمانية (08) بحيث لا يمكن لأي إعلان الظهور أكثر من مرة واحدة.

D: يظهر الإعلان (1) 3 مرات و الإعلان (5) مرتين و الإعلان (8) 3 مرات.

- احسب احتمالات الحوادث: A، B، $A\cap B$، C، D.

تمرين 4:

نعتبر أنفسنا أمام باب مغلق و بحوزتنا 10 مفاتيح، منها واحد فقط يصلح لفتح الباب، نجرب المفاتيح الواحدة تلو الآخر.

- احسب احتمال فتح الباب عند التجربة الرابعة.

تمرين 5:

نعتبر 10 رسائل موجهة إلى أصحابها، إذا لم نراع العناوين عند توزيعها فما هو احتمال:

1. أن تصل كل رسالة إلى صاحبها.
2. ان تصل رسالة واحدة على الاقل الى اصحابها.
3. ان لاتصل اي رسالة الى اصحابها.

تمرين 6:

تقدمت إحدى شركات البناء إلى مناقصتين A و B، فإذا كان احتمال أن تحصل على المناقصة A هو $0{,}6$ و احتمال أن تحصل على المناقصة B هو $0{,}3$ و احتمال أن تحصل على المناقصتين معا هو $0{,}1$.

1. احسب احتمال أن تحصل الشركة على المناقصتين A أو B.
2. احسب احتمال أن تحصل الشركة على المناقصة A فقط.
3. احسب احتمال أن تحصل الشركة على المناقصة Bفقط.
4. علما أن الشركة حصلت على المناقصة A فما احتمال حصولها على المناقصة B.
5. علما أن الشركة حصلت على المناقصة B فما احتمال حصولها على المناقصة A.

تمرين 7:

ثلاث ولايات A، B، C من الجنوب الجزائري تشارك في الإنتاج السنوي للتمور بكميات قدرها 400 طن، 450 طن، 150 طن على التوالي من انتاج كلي قدره 1000 طن، تشير الإحصائيات الزراعية للسنوات الماضية أن نسبة الإنتاج الرديء في هذه الولايات هو على التوالي 10%، 8%، 5% . نختار عشوائيا صندوقا من التمور.

المطلوب:

1. ما هو احتمال أن يكون هذا الصندوق من إنتاج الولاية A؟ الولاية B؟ الولاية C؟
2. إذا علمت أن هذا الصندوق من إنتاج الولاية B، فما هو احتمال أن يكون من النوع الرديء؟
3. ما هو احتمال أن يكون هذا الصندوق:

أ- من النوع الرديء.

ب- من النوع الجيد.

4. إذا علمت أن هذا الصندوق من النوع الرديء فما هو احتمال أن يكون من إنتاج:

أ- الولاية A؟ ب- الولاية B؟ ج- الولاية C؟

تمرين 8:

تتنافس 3 دول A، B، C على تنظيم كأس العالم 2026، حظوظ تعيينها هي على التوالي: 50%، 30%، 20%. ترشحت احدى الشركات الاعلامية للتنافس على شراء حقوق البث التلفزيوني لهذا الموندیال. حظوظ الحصول على الصفقة مرتبط بالدولة التي ستحصل على شرف تنظيم هذه الكأس. أفاد أحد خبراء التسويق في الشركة أن احتمال الحصول على الصفقة هو : 0.7 في حالة تعيين الدولة A، 0.5 في حالة تعيين الدولة B و 0.3 في حالة تعيين الدولة C.

1- احسب احتمال حصول الشركة على الصفقة.

2- إذا علمت أن الشركة حصلت فعلا على الصفقة، ما احتمال أن يكون شرف تنظيم الموندیال فازت به:

أ – الدولة A ب- الدولة B ج- الدولة C

تمرين 9:

وظفت أمينة مكتب (A1) بمكتب للمحاسبة و تولت طبع 20% من الفواتير، يشغل المكتب عاملتين أخريين: (A2) تطبع 30 % من الفواتير و الأخرى (A3) 50%، ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A2) 2% و لدى الثالثة (A3) 1%.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء، استبعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20% من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر 5%.

1. احسب احتمال أن تكون الموظفة الجديدة هي التي حررت الفاتورة و قارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو A2 أو A3.
2. احسب مجموع الاحتمالات الثلاث.

3. احسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

II . تمارين مقترحة للمحور الثالث

التمرين 01:

عدد المكافئات المهنية التي تصرف للعمال في شركة معينة متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي هو:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	6 k	5 k	4 k	3 k	2 k	K

1 - عين قيمة الثابت k .

2 –اكتب دالة التوزيع المتجمع و مثلها بيانيا .

3 –احسب احتمال أن عدد المكافئات لا يزيد عن 03.

4 - احسب احتمال أن عدد المكافئات لا يقل عن 03.

5 - احسب احتمال أن عدد المكافئات يفوق 02 و لا يتجاوز 04.

6 –احسب التوقع الرياضي و التباين لعدد المكافئات.

التمرين 02:

يصوب رامي على هدف 03 طلقات، احتمال إصابة الهدف هو 0,40، نعرف المتغير العشوائيx الذي يمثل عدد إصابات الهدف.

المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير العشوائي؟
2. كون جدول التوزيع الاحتمالي، ومثل دالة الاحتمال بيانيا.
3. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع.
4. احسب احتمال ما يلي:

- ✓ يصيب الهدف مرتين على الأقل.
- ✓ يصيب الهدف مرتين على الأكثر.

- ✓ إصابة الهدف لا تقل عن مرة واحدة.
- ✓ إصابة الهدف لا تزيد عن مرة واحدة.

5. احسب التوقع الرياضي و التباين.

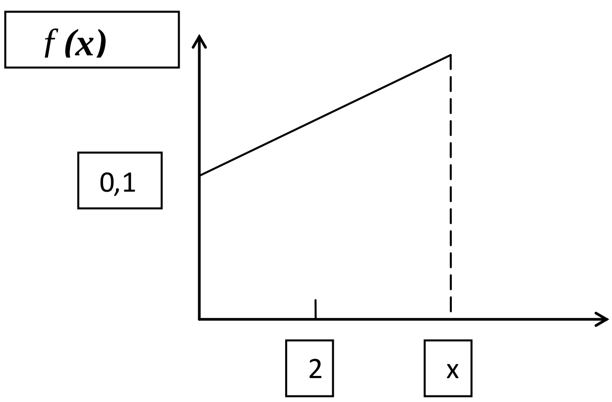
التمرين 03: مدة صلاحية نوع من البطاريات متغير عشوائي كثافة احتماله تعطى كما يلي:

$$f_{(X)} = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{K} & si\ 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{K}e^{-x} & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

1. عين قيمة الثابت K.
2. احسب احتمال أن تفوق مدة صلاحية 04 بطاريات من هذا النوع سنتين.
3. احسب احتمال أن تفوق مدة صلاحية بطاريتين اثنين على الأقل من بين 08 بطاريات سنتين.

التمرين 04:ليكن X متغير عشوائي بحيث دالة كثافته الاحتمالية $f_{(X)}$ ممثلة وفقا للشكل المقابل:

1. ما هو نوع هذا المتغير العشوائي؟ أوجد الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية $f_{(X)}$ ؟
2. لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية: $f_{(X)} = \frac{-1}{2}X + 1$ المعرفة على المجال $[0,\ 2]$



أ. أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $f_{(X)}$ ؟

ب. احسب: $P(x \le 1)$ ، $P(0.5 < X < 2)$

ت. احسب: الأمل الرياضي و الانحراف المعياري.

ث. احسب: $E(2X+1)$، $V(2X+1)$.

التمرين 05:

الطلب السنوي (بملايين القناطير) على مادة معينة متغير عشوائي كثافة احتماله:

$$f(x) = \begin{cases} Kx & si\ 0 \le x < 2 \\ K\ e^{\frac{-x}{2}} & si\ x \ge 2 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

1. عين قيمة الثابث K .
2. احسب احتمال أن يفوق الطلب السنوي على المادة 1 مليون قنطار.
3. احسب احتمال أن يفوق الطلب في سنة واحدة على الأقل من بين 05 سنوات مليون قنطار.
4. احسب احتمال أن يفوق الطلب في سنتين فقط و متتاليتين من بين 05 سنوات 1 مليون قنطار.

التمرين 06: لدى مستثمر مبلغ قدر 10000 دولار يريد استثماره ففكر في طريقتين:

الطريقة الأولى: الاستثمار في أسهم مجمع صناعي تحقق له مردودية قدرها 14% إذا لم يحصل ركود اقتصادي، وقد تنخفض هذه المردودية إلى 04% في حالة حدوث ركود اقتصادي.

الطريقة الثانية: شراء سندات بضمان مردودية قدرها 8% تشير التقديرات إلى أن احتمال وقوع ركود اقتصادي هو 4%.

- اعتمادا على المردودية المتوقعة، ما هي أحسن طريقة يختارها هذا المستثمر.
- احسب التباين و الانحراف المعياري.

التمرين 07: يرمي لاعب قطعة نقدية 03 مرات في الهواء.

1. أوجد فراغ العينة.
2. إذا علمت أن X يمثل عدد مرات الحصول على H، كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

نفرض أن Y متغير عشوائي يمثل الربح الناتج عن الحصول على الصورة H، حيث يربح اللاعب 10000 دج إذا تم الحصول على H ثلاث مرات، و يربح 8000 دج إذا تم الحصول على H مرتين فقط، و يربح 5000 دج إذا تم الحصول على H مرة واحدة، و في حالة عدم الحصول على H يخسر 9000 دج.

المطلوب:

1. كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y.
2. احسب القيمة المتوقعة للربح.
3. احسب التباين و الانحراف المعياري.

VI. تمارين مقترحة للمحور الرابع

التمرين 01 :

إذا علمنا أن نسبة الشفاء من مرض معين بإستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 60%، وتناول هذا الدواء 05 مصابين بهذا المرض، حيث المتغير العشوائي x يعرف بأنه عدد الذين استجابوا لهذا الدواء (حالة الشفاء بهذا الدواء).

المطلوب:

1 – ما هو نوع المتغير مع تحديد شكل التوزيع؟

2 – أكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

3 – احسب الاحتمالات التالية:

- استجابة 3 مرضى؟
- استجابة مريض واحد على الأقل؟
- استجابة مريضين على الأكثر؟

4 – أحسب التوقع الرياضي و التباين و الإنحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة؟

التمرين 02 :

بينت إحصائيات مديرية الصحة لولاية سطيف أن نسبة المصابين بمرض مزمن تقدر ب 10%.

أخذنا عينة عشوائية من 20 فردا من سكان الولاية. ليكن x يمثل عدد الأفراد المصابين بمرض مزمن في العينة.

1 – ما هو القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي x.

2 – احسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري.

3 – ما هو احتمال أن يكون عدد المصابين:

– 08 أفراد؛

– يتراوح ما بين 15 و 3 أفراد.

– أقل أو يساوي 10 أفراد؛

التمرين 03 :

يشتغل بمصنع 200 عامل، متوسط عدد الحوادث به شهريا هو 04 حوادث، ليكن التغير العشوائيx الذي يمثل عدد الحواث بهذا المصنع .

1– ما هو نوع المتغير، و ما هو التوزيع الاحتمالي؟

2– احسب احتمال أن:

– عدد الحوادث خلال شهر يفوق 03 حوادث

– عدد الحوادث خلال شهر هو 10 أو 11 حادث.

3 – احسب التوقع الرياضي، التباين، الانحراف المعياري.

التمرين 04 :

احتمال أن يقلع شخص عن التدخين هو $0,001$، بدأ 2000 شخص من اتحاد الشباب حملة للإقلاع عن التدخين.

1- أوجد الاحتمالات التالية:

- أن يقلع ثلاثة أشخاص عن التدخين.
- أن يقلع ثلاثة أشخاص على الأقل عن التدخين.
- أن يقلع ثلاثة أشخاص على الأكثر عن التدخين.
- أن يقلع 100 شخص عن التدخين.

2- أحسب التوقع الرياضي و التباين.

التمرين 05 :

قام فلاح بتخزين 300000 قنطار من البطاطا، على أن يبيعها على مدار شهر كامل (30 يوم) بكميات متساوية، فإذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم فأوجد ما يلي:

1- نوع المتغير العشوائي.
2- نوع التوزيع الاحتمالي و شكل دالة كثافة الاحتمال.
3- ما هي الكمية المباعة بعد 18 يوم.
4 - بعد مرور 23 يوم من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن.
5 - أحسب التوقع الرياضي و التباين.

التمرين 06 :

إذا كانت الفترة الزمنية المتوسطة لإنهاء خدمة زبون بمصلحة إتصالات الجزائر بعين تموشنت هو دقيقتين (02) فأوجد ما يلي:

1 - ما هو نوع المتغير العشوائي؟
2 - ما هو نوع التوزيع الاحتمالي، و اكتب شكل دالة كثافة الاحتمال؟
3 - ما هو احتمال إنهاء خدمة الزبون في 10 دقائق؟
4 - ما هو احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يقل عن دقيقتين؟

5 - ما هو احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يزيد عن 03 دقائق؟

6 - أحسب التوقع الرياضي و التباين.

التمرين 07 :

إذا كانت نفقات إحدى الشركات في السنة تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 100 مليون دينار و انحرافه المعياري 5 ملايين دينار، احسب احتمال أن:

1 - نفقات الشركة ستزيد عن 95 مليون دينار خلال سنة ما.

2 - نفقات الشركة ستقل عن 104 مليون دينار خلال سنة ما.

3 - نفقات الشركة ستتراوح ما بين 93,5 و 105,5 مليون دينار خلال سنة ما.

التمرين08: :

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد المناطق يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ون وتباينه 900 ون.

المطلوب:

1 - ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ون.

2 - ما هي نسبة الأسر التي يكون دخلها أكبر أو يساوي 60 ون.

3 - ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 90 ون.

4 - ما هي نسبة الأسر التي يزيد دخلها عن 90 ون.

ما هي نسبة الأسر التي يتراوح دخلها بين 60 ون و 90 ون.

التمرين 09 :

الطلب اليومي على مادة معينة متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي تباينه 100. احتمال أن يفوق الطلب في يوم ما القيمة 156 هو 0,74.

1 - أوجد متوسط الطلب اليومي.

2 - أحسب القيمة التي إذا قل عنها الطلب انخفضت النسبة إلى 20 %.

3 - ما هو احتمال أن يفوق الطلب 200 وحدة في يوم ما.

4 - ما هو احتمال أن يتراوح الطلب بين 140 و 175 وحدة.

III . مواضيع امتحانات سابقة

الموضوع الاول :

التمرين الأول : توجد في مدينة تلمسان ثمانية(08)مراكز تجارية (نرقمها من 01 إلى 08) تختار هيئة مراقبة الأسعار بمديرية التجارة كل يوم مركز واحد من بين الثمانية هاته بالصدفة لإجراء عملية المراقبة ، إن أيام عمل الهيئة هي خمسة (05) أيام أسبوعيا (الأحد، الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس) ، يمكن لهده الهيئة أن تراقب نفس المركز أكثر من مرة واحدة في الأسبوع الواحد ، في أسبوع معين احسب احتمال ما يلي :

A / كل من المراكز(01)،(02)، (03) (05) (07) تراقبها مرة واحدة .

B / لا تراقب المراكز(04)،(06)، (08).

C / تراقب المركز الأول(01) مرة واحدة و تكون يوم الأحد .

D / تراقب المركز الثاني (02) 3 مرات و المركز الخامس (05) مرتين .

التمرين الثاني : تعرض شركة تجارية يوميا 03 سيارات من ثلاثة أنواع مختلفة a, b, c للبيع خلال معرض تجاري تشير الخبرة السابقة إلى أن احتمال بيع السيارة من النوع a هو 0.5 و من النوع b هو 0.7 و من النوع c هو 0.8 ، حيث يعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات التي تبيعها الشركة يوميا .

1 – اوجد التوزيع الاحتمالي ل X .

2 – ما هي القيمة المتوقعة لعدد مبيعات الشركة اليومي من السيارات .

نفرض أن ربح الشركة يقدر ب 20000 دج من كل سيارة مباعة، نعرف المتغير العشوائي Yالذي يمثل ربح الشركة اليومي.

1 - اوجد التوزيع الاحتمالي ل Y .

2 – ما هي القيمة المتوسطة لربح الشركة اليومي ، بطرقتين .

التمرين الثالث: يبيع صاحب محل تجاري 10 أجهزة كهرومنزلية في المتوسط في الأسبوع ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأجهزة المباعة أسبوعيا من طرف صاحب المحل .

1 / ما هو نوع المتغير ، و ما هو التوزيع الاحتمالي الذي يخضع له .

2/ اكتب شكل دالة الاحتمال ، ثم احسب قيمة التوقع الرياضي و التباين .

3 / احسب احتمال أن لايقل عدد الأجهزة المباعة أسبوعيا عن 03 أجهزة .

4 / احسب احتمال أن عدد الأجهزة المباعة أسبوعيا هو 12 جهازا .

التمرين الرابع : اذا كانت النفقات السنوية لإحدى الشركات تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 100 مليون دج و انحراف معياري قدره 5 مليون دج ، احسب ما يلي :

1 – احتمال أن تزيد نفقات الشركة عن 107 مليون دج.

2 - احتمال أن تزيد أو تساوي نفقات الشركة عن 93 مليون دج.

3 - احتمال أن تقل أو تساوي نفقات الشركة عن 102 مليون دج.

4 - احتمال أن تتراوح نفقات الشركة بين 101 و 108 مليون دج.

الموضوع الثاني :

التمرين 01:

آلة معينة تتضمن عنصرين الكترونيين حيث تبقى تشتغل ببقاء العنصرين معا يشتغلان ، اذا كان احتمال توقف العنصر الأول على الاشتغال قبل عام هو 0.4 و احتمال توقف العنصر الثاني عن الاشتغال هو قبل عام هو 0.5، فما هو احتمال توقف الآلة عن الاشتغال قبل عام (نفرض أن العنصرين يشتغلان مستقلين عن بعضهما البعض) .

التمرين 02:

يضم مصنع معين ثلاثة ورشات A ،B،C تنتج نوعا معينا من القطع بحيث الورشة A تضمن 25% من المنتوج الكلي و B تضمن 35% في حين C تضمن 40% ،نسبة المنتوج المعاب الوارد من الورشة A هي 10% ومن الورشة B هي 14% ومن الورشة C هي 8%.

1)ما هي نسبة المنتوج المصنع المعاب ؟

2)من بين المنتوج غير المعاب ما هي نسبة الوارد من الورشة B؟

التمرين 03:

عدد حوادث المرور في طريق ما يوميا متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي كالتالي:

X = xi	0	1	2	3	4	5	6
P (X = xi)		0.25	0.20	0.15	0.12	0.07	0.03

1 – عين قيمة الثابت α .

2 – اكتب دالة التوزيع المتجمع و مثلها بيانيا .

3 – احسب احتمال عدد حوادث المرور في طريق ما في يوم ما لا يقل عن 2.

4 - احسب احتمال عدد حوادث المرور في طريق ما في يوم ما لا يزيد عن 4.

5 – احسب العدد اليومي المتوسط (التوقع) لعدد حوادث المرور في طريق ما.

التمرين 04 :

يتوافد الاشخاص على مصلحة ادارية بقيمة متوسطة قدرها 180 شخص في الساعة ، نعرف المتغير العشوائي x الدي يمثل عدد الاشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي ، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال f(x) لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان لا يقل عدد المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة عن شخصين .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

الموضوع الثالث

التمرين الاول :

يرمي لاعب قطعة نقدية 03 مرات في الهواء.

1 – اوجد فراغ العينة .

2–ما هو احتمال:

A – عدم الحصول على H.

B – الحصول على H مرة واحدة .

C – الحصول على H مرتين متتاليتين .

D – الحصول على H مرتين فقط .

E – الحصول على H ثلاث مرات.

F – الحصول على T ثلاث مرات.

ادا علمت ان X يمثل عدد مرات الحصول على H حيث :

- يربح 60 دج ادا تم الحصول على H ثلاث مرات.
- يربح 30 دج ادا تم الحصول على H مرتين فقط.
- يربح 10 دج ادا تم الحصول على H مرة واحدة .
- في حالة عدم الحصول على H يخسر 100 دج .

1 –كون جدول التوزيع الاحتمالي .

2 – احسب القيمة المتوقعة للربح .

التمرين الثاني :

أعلنت بلدية عن مناقصة لإنجاز مشروع معين ، إن إحتمال مشاركة مقاول A في هده المناقصة هو 0.4 ، و المقاول B احتمال قدره 0.5 للفوز بالمناقصة في حالة مشاركة المقاول A ويصبح هدا الإحتمال 0.9 في حالة عدم مشاركة A.

1) ما هو إحتمال فوز المقاول B بالمناقصة؟

2) إدا علمت أن المقاول B قد فاز بالمناقصة فما هو احتمال مشاركة A فيها ؟

التمرين الثالث:

متوسط الجرائد المباعة يوميا في كشك معين هو 100 جريدة .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال f(x) لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان يكون عدد الجرائد المباعة في هدا الكشك خلال يوم ما :

أ – 90 جريدة . ب – 04 جرائد على الأقل . ج – 03 جرائد على الأكثر .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

1 - ابراهيم محمد البطانية، "مبادئ الغحصاء لطلبة الإدارة و الإقتصاد"، دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2011.

2 - السعدي رجال، "نظرية الإحتمالات مبادئ الحساب الاحتمالي دروس وتمارين"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2005.

3 - بوعبد الله صالح، محاضرات في الاحصاء الرياضي .

4 - جيلالي جلاطو ، نظرية الاحتمالات و التوزيعات الاحتمالية، دار هومة للنشر و التوزيع ،الجزائر ،2014.

5 - عبد الحفيظ مصطفى ، نظرية الاحتمالات مبادئ و تطبيقات ، الجزء الاول ، ديوان المطبوعات الجامعية ، الطبعة الثانية، الجزائر ، 2004.

6 - عبد الناصر رويسات ،الاحصاء الوصفي ومدخل للاحتمالات دروس و تمارين، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006 .

7 -كامل فليفل، فتحي حمدان ،الاحصاء ،الطبعة الاولى ،دار المناهج للنشر و التوزيع ،عمان الاردن ،2007.

8 - محمد صبحي أبو صالح، "مبادئ الإحصاء"، داراليازوري العلمية للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 2007.

9 - محمد صبحي ابو صالح أ الطرق الاحصائية ، دار اليازوري العلمية للنشر و التوزيع ، عمان ، الاردن ، 2009.

10 - محمد يوسف اشقر، عبد اللطيف يوسف الصديقي، اساسيات الاحصاء و الاحتمالات ، دار الراتب الجامعية ، الطبعة الاولى ، بيروت ، لبنان ، 2001 .

11 - محمود علي متولي عجور،الاحصاء و الاحتمالات و بحوث العمليات ،دار الهناء للنشر و التوزيع ،مصر ، 2009.

12 - معتوق أمحمد، "الإحصاء الرياضي و النماذج الإحصائية"، ديوان المطبوعات الجامعية بن عكنون، الجزائر، 2007.

المراجع باللغة الفرنسية

5 - Stéphane mussard, françois seyte, inférence statistique et probabilités , de boeck supérieur, 1re édition , paris , France, 2014.

1 - Brigitte tribout , statistique pour économistes et gestionnaires , pearson éducation , paris , France , 2007.

2 - Christophe hurlin , openbook licence / bachelor , statistique et probabilité en économie – gestion , dunod , paris , France , 2015.
3 - Gilbert saporta, probabilités analyse des données et statistique ,3[e]édition , éditions technip , paris , France , 2011.
.
4 - Grégory denglos, statistiques et probabilités apliquées, presses universitaires de France , 2[e]édition , France , 2016.