وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
المركز الجامعي بلحاج بوشعيب – عين تموشنت –
كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير

مطبوعة في مقياس:

رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

"علوم إقتصادية و علوم التسيير"

من إعداد:

د. زدون جمال

أستاذ محاضر – أ –

السنة الجامعية: 2018 – 2019

الفهـــرس

مقــــدمــــة

ساهم التطور الاقتصادي بصفة عامة والصناعي بصفة خاصة بفضل التقدم التقني الى زيادة القدرة الإنتاجية للمؤسسات بكل انواعها مما أدى إلى ظهور مشاكل معقدة في مجال الإنتاج والتخزين والتسويق و الإدارة ،الشيئ الدي ادى الى ظهور الحاجة إلى استخدام أساليب رياضية فعالة تساعد في عملية اتخاد القرار بشان تحديد الاستخدام الامثل للموارد سواءا البشرية او المادية ،حيث أن عملية اتخاذ القرار ليست بالأمر الهين كونها تحتاج من الشخص القائم عليها بذل جهد أكبر و بحث عميق لصياغة المشكلة بشكل دقيق، و تحديد المعلومات المطلوبة، و تحليلها و تقييم مختلف البدائل الممكنة و من ثم تقييم النتائج المحصل عليها، و بالتالي التوصل إلى القرار الأنسب و الذي يمكّن المؤسسة من انجاز أعمالها بأعلى درجات الكفاءة، من هنا جاء علم بحوث العمليات كتطبيق علمي للطرق الرياضية و الإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية و الاقتصادية، التي تواجه متخذ القرار في أداء مهامه، و القابلة للتكميم بالدرجة الأول، أي يعرض الأساليب الرياضية المساعدة في عملية اتخاذ القرار المناسب للوصول إلى الهدف المناسب حيث ان رياضيات المؤسسة هي جزئ من علم بحوث العمليات التي تعتبر من العلوم الحديثة حيث ظهرت فكرته الأولى في 1911م في كتاب 'Taylor' "الإدارة العلمية" لكن التفسير الحقيقي لبحوث العمليات كان مع بداية الحرب العالمية الثانية، حيث قامت وزارة الدفاع البريطانية قبل هذه الحرب مباشرة بتكوين فريق من العلماء لدراسة المشاكل الاستراتيجية و التكتيكية المتعلقة بالعمليات العسكرية بهدف الاستفادة الأكثر فعالية من الموارد العسكرية (المعدات العسكرية) المحدودة في ذلك الوقت باستخدام الأساليب الكمية. و لقد ساعدت الأبحاث التي تمت خلال العمليات الحربية في هذه الحرب إلى التوصل إلى الكثير من الأساليب الرياضية الحديثة التي ساعدت في اتخاذ القرارات و حل المشكلات الإنتاجية المختلفة ، و لقد كان ذلك بمثابة نقطة بداية لظهور ما يعرف حاليا ببحوث العمليات و بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، اتجه بعض العلماء المهتمين ببحوث العمليات إلى

الجامعات و مراكز البحث العلمي و ركزوا جهودهم لتطوير أساليب بحوث العمليات التي نشأت أصلا لحل المشاكل المتعلقة بالعمليات العسكرية و ابتكار أساليب أخرى جديدة، كما اتجه البعض الآخر إلى منشآت الأعمال حيث قاموا بتطبيق الأساليب و تطويرها لحل الكثير من المشاكل التي تواجه تلك المنشآت و منها المشاكل المتعلقة بالمخزون السلعي و المشاكل المتعلقة بتخصيص الموارد و التكاليف و المشاكل المتعلقة بإحلال الآلات أو معدات الإنتاج، الجدولة ...الخ، كما تعتبر بحوث العمليات علم وفن يهتم بالبحث على أفضل الحلول الواجب وضعها لحل مشكلة معينة وتحت ظروف معينة وذلك باستخدام طرق رياضية لمعالجة العوامل المؤثرة على الحل وتحليلها من أجل إعطاء فرصة للمختصين لاتخاذ القرار المناسب، حيث تعتبر علما لاستعمالها للأساليب الرياضية وفنا لاعتماد نجاح الحل على دقة الشخص المستعمل وقدرته على استخدام الأسلوب الأمثل في الحل لاتخاذ القرار المناسب كما تعتمد على خبرة وتجربة متخذ القرار ، كما تتميز رياضيات المؤسسة بالعديد من الأساليب المستخدمة في دراسة مختلف المشاكل الإدارية، لكل منها مجاله الخاص به، نذكر من بينها: البرمجة الخطية، نماذج النقل ... إلخ، في إطار هذه الأهمية نسعى من خلال هذه المطبوعة المكونة من ثلاثة فصول تحتوي على سلسلة من المحاضرات إلى تقديم أبرز مكونات مقياس رياضيات المؤسسة، بدءً بالبرمجة الخطية و خوارزمياتها مرورا بالمسألة الثنائية ، وصولا لمسائل النقل (الحل الاولي ،الحل الامثل) ، متوخين في ذلك البساطة و التعمق في تقديم الأمثلة التطبيقية، وذلك على اعتبار أن هدفنا الأساسي في هذه المطبوعة هو تدريب الطالب على كيفية تطبيق الأساليب والاستفادة منها في مجالات مختلفة.

الفصل الأول البرمجة الخطية

نتطرق من خلال هذا الفصل إلى العناصر التالية :

I. ماهية البرمجة الخطية

I. 1. مفهوم البرمجة الخطية

I. 2. مجالات استخدام البرمجة الخطية

I. 3. فرضيات البرمجة الخطية

I . 4.مكونات النموذج الرياضي البرمجة الخطية

I . 5. الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

II. طرق حل مشكلات البرمجة الخطية

II. 1 . الطريقة البيانية

II. 1. 1. حالة التعظيم

II. 1. 2.حالة التدنية

II . 1. 3.بعض الحالات الخاصة في الرسم البياني

II . 2. الطريقة الجبرية

مقدمة:

تعود بداية تطبيق البرمجة الخطية إلى ما قدمه الاقتصادي المعروف البروفيسور ويسلي ليونيتيف W. Leyontife أثناء الركود الاقتصادي في الثلاثينيات من القرن الماضي من خلال تحليل العلاقة بين المدخلات والمخرجات باستخدام نماذج المدخلات والمخرجات input –output models وإلى ما قدمه العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير J.B.Fourier سنة 1923 في حين اهتم العالم الرياضي الروسي كاتورفش L.V.Katorovich في استخدام علم الرياضيات لحل مشاكل التخطيط سنة 1939 ثم قام الاقتصادي جورج ستيجلر G.Stigler في بداية الأربعينات بمحاوله تطبيق البرمجة الخطية الا أنه لم يتوصل إلى طريقة حل معروفة وهي مشكلة تتعلق بإيجاد مزيج غذائي امثل يتضمن كمية من الحديد والفيتامينات والمواد الأخرى بأقل تكلفة ممكنة ظهرت بوادر تطبيق البرمجة الخطية لأول مرة سنة 1951 في أعمال العالمين الرياضيين دانتزك و كوبمانس G.B.Dantzing and T .C.Coopmans.

I. ماهية البرمجة الخطية

1.I. مفهوم البرمجة الخطية

يتكون مفهوم البرمجة الخطية من كلمتين وهما :

- ✓ **البرمجة Programming**: تعني البحث عن البرنامج الذي يحقق الهدف المطلوب من بين عدد كبير من البرامج المتاحة أي يبحثون عن التقنية الرياضية المستخدمة في إيجاد الحل الأمثل.
- ✓ **الخطية Linearity**: تعني ان جميع العلاقات بين متغيرات النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة هي علاقات خطية (خط مستقيم)[1] .

و توجد عدة تعاريف للبرمجة الخطية نذكر منها ما يلي[2]:

– البرمجة الخطية هي عبارة عن طريقة أو اسلوب رياضي يستخدم للمساعدة في التخطيط و اتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة وذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف[3] .

–البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يمكن توظيفه لتوزيع الموارد والإمكانات المحدودة ضمن مجموعة من القيود و العوامل الثابتة وصولا إلى تحقيق أمثلية التوزيع.

–البرمجة الخطية هي أسلوب الرياضي يستهدف الوصول الى تحقيق الأمثلية والذي يتم بموجبه تخصيص الموارد المحدودة من أجل تحقيق الهدف المحدد المتمثل في:

- تعظيم maximize مستوى الأرباح أو العوائد.
- تقليل minimize مستوى الخسائر أو التكاليف.

2.I. مجالات استخدام البرمجة الخطية :

تتمثل استخدامات البرمجة الخطية في ما يلي[4]:

- تحديد المزيج الإنتاجي أي تحديد خطة الإنتاج بما يحقق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.
- تحديد برامج العمل بما يضمن تقليل تكلفة الإنتاج إلى أدنى مستوى ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار حجم الطلب المتوقع .

---

[1] حسين ياسين طعمة مروان محمد السنور ايمان حسين حنوش بحوث العمليات نماذج وتطبيقات الصيغة الأولى دار صفاء للنشر والتوزيع كتمان الاردن 2009 ص 37 .

[2] حسين ياسين طعمة وآخرون مرجع سبق ذكره ص 38.

[3] محمد أحمد الطراونة سليمان خالد عبادات مقدمة في بحوث العمليات الطبعة الأولى دار المسيرة للنشر والتوزيع عمان الاردن 2009 ص 76

[4] جهاد صياح بن هاني لازم محمود المكاوي فادية عبد القادر الحوري بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية الطبيعة الطبيعة الأولى دار وزيز الزمان عمان الاردن 2014 ص 27.

- تحقيق الاستغلال الأمثل لمنافذ التوزيع وتحديد كمية البضائع والسلع التي يتم تجهيزها الى مراكز الاستلام بحيث تكون تكاليف الكلية أقل مما يمكن.
- اختيار المحفظة الاستثمارية المثلى التي تحقق أكبر عائد ممكن .

للبرمجة الخطية تطبيقات عديدة كذلك نذكر منها ما يلي[1]:

- ✓ التطبيقات المالية Financial Applications مثل التخطيط المالي، تحليل الأوراق الأسهم المالية؛
- ✓ التطبيقات التسويقية Marketing Applications مثل اختيار وسائط الإعلانات و بحوث التسويق؛
- ✓ تطبيقات إدارة الإنتاج Production Management Applications مثل المزيج الإنتاجي، تخطيط الإنتاج، النقل والتخصيص، قرار الشراء أو الصنع؛
- ✓ مشاكل تخطيط المشروعات Project Planning Problems.

I.3. فرضيات البرمجة الخطية :

تتمثل فرضيات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية في ما يلي[2]:

I.3.1. الخطية: يقصد بهذا الافتراض أن تكون العلاقة بين متغيرات دالة الهدف و قيود النموذج ذات طبيعة خطية أي إن حدوث أي تغيرات في قيمة أحد المتغيرات تؤدي إلى تغيرات ثابتة و متناسبة في قيمة المتغيرات الأخرى الداخلة في النموذج.

I.3.2. التأكد: تفترض البرمجة الخطية بأن تكون معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف و قيود النموذج معروفة وثابتة أثناء فترة معالجة المشكلة المدروسة.

I.3.3. التناسبية: يقصد بهذا الافتراض بأن تكون مساهمة العوامل في دالة الهدف و الكميات المستخدمة من الموارد في القيود متناسب مع قيمة كل متغير من المتغيرات القرارية.

---

[1] جهاد صياح بن هاني وآخرون نفس المرجع السابق ص 27

[2] حسين ياسين طعمة مروان محمد السنور ايمان حسين حنوش بحوث العمليات نماذج وتطبيقات الصيغة الأولى دار صفاء للنشر والتوزيع كتمان الاردن 2009 ص 40

I.3.4.الإضافية: تعني أن كل نشاط يتم إضافته يتحد مع مجموعة قيود النموذج وهذا يعني عدم وجود تداخل بين الأنشطة المختلفة.

I.3.5.قابلية القسمة: معنى ذلك أن المتغيرات القرارية يمكن أن تأخذ قياما كسرية وليس بالضرورة أن يتم التعبير عنها بأعداد صحيحة كذلك الحل يمكن أن يكون كسرا وليس بالضرورة أن يكون عددا صحيحا[1].

I.3.6.عدم السلبية: أي أن قيم جميع المتغيرات القرارية في الحل يجب أن تكون موجبة[2].

I.4. مكونات نموذج البرمجة الخطية:

يتكون نموذج البرمجة الخطية من ثلاثة عناصر هي[3]:

I.4.1.دالة الهدف: الهدف في جميع مسائل البرمجة الخطية يكون إما تحقيق أقصى ربح أو عائد أو أقل تكلفة، كمية، وقت ....إلخ

مثال: إذا كان لديك نوعين من المنتجات، المنتج الأول سعر بيعه 15ون و تكلفة إنتاجه 10 ون والنوع الثاني سعر بيعه 10 و تكلفة إنتاجه 7 ون.

المطلوب: إيجاد دالة الهدف.

ربح المنتوج الأولى = 15–10= 5 ون.

ربح المنتوج الأولى= 10–7= 3 ون.

حيث:

X_1: عدد الوحدات المباعة من المنتوج الأول.

X_2: عدد الوحدات المباعة من المنتوج الثاني.

دالة الهدف: $\max Z = 5\,X_1 + 3\,X_2$

I.4.2. القيود: لكل هدف قيود أو محددات تقيد إمكانية تحقيقه وتكون هذه القيود في شكل متراجحات حيث:

- إذا كان المتاح أو المتوفر مشروط بأحد الكلمات التالية: لا يقل عن، الحد الأدنى، على الاقل، أكثر من، يزيد عن فإن جميع هذه الكلمات تعني أكبر من أو يساوي ويرمز لها بالرمز $\leq$.

---

[1] حسين محمود الجنابي، الأحداث في بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 2010، ص 46.
[2] حسين محمود الجنابي، نفس المرجع السابق، ص46.
[3] أبو قاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، 2012، ص 36.

- إذا كان المتاح أو المتوفر مشروط بأحد الكلمات التالية: لا يزيد عن، الحد الأقصى، على الأكثر، أقل من فإن جميع هذه الكلمات تعني أقل من أو يساوي ويرمز لها بالرمز$\leq$.

مثال:

إذا كان لديك نوعين من المنتجات يحتاج المنتج الأول إلى ساعة عمل و ساعتين للتجميع، ويحتاج المنتج الثاني إلى ساعة عمل وساعة تجميع علما بأن المتاح من ساعات العمل هو ست ساعات والمتاح من ساعات تجميع هو 10 ساعات وأن ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول هو ثلاثة وحدات نقدية (3 ون)، و ربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني هو أربعة وحدات نقدية (4 ون)، الطلب على المنتج الثاني لا يتجاوز أربعة وحدات.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعظم ربح ممكن.

الحل :

1.تعريف المتغيرات :

X_1 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول .

X_2 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني .

2.تلخيص المعطيات في جدول :

المنتجات / القيود	المنتج الأول	المنتج الثاني	المتاح
عمل	**1**	**1**	**$\geq$ 6**
تجميع	**2**	**1**	**$\geq$ 10**
طلب السوق	**_**	**4**	**_**
الربح	**3**	**4**	**_**

3.تكوين دالة الهدف والقيود :

دالة الهدف:

$$\max Z = 3X_1 + 4X_2$$

القيود :

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$2X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_2 \leq 4$$

4. قيد عدم السلبية: و هي أن متغيرات القرار يجب أن تكون دائما موجبة:

$$X_j \geq 0 \quad j = \{1, 2\}$$

I.5.صياغة نموذج البرمجة الخطية

يتطلب حل مشكلة البرمجة الخطية القيام بتحليلها في شكل عدة خطوات للتمكن من تتبع المشكلة وكيفية تكوينها في شكله برنامج خطي حيث تتمثل هذه الخطوات في ما يلي:

- تحديد طبيعة المشكلة (الهدف): تحديد نوعها إما التعظيم (Max) أو التخفيض (Min)؛
- تحديد نوع المتغيرات التي تمثل المجاهيل للظاهرة المدروسة؛
- تحديد دالة الهدف: صياغة تأثير المتغيرات على الهدف في شكل رياضي (معادلة)؛
- تحديد القيود: تحديد شروط وظروف المؤسسة في شكل متراجعات و معادلات؛
- التكوين النهائي للمشكلة أي تلخيصها في شكل نموذج رياضي يشمل دالة الهدف والقيود.

و نعبر عن نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

دالة الهدف:

$$\text{Max ou Min } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

القيود:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \quad \leq = \geq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \quad \leq = \geq b_2$$

$$.a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \quad \leq = \geq b_m$$

شرط عدم السلبية

$$X_j \geq 0$$

حيث:

$$j = 1 , 2, \ldots, n \quad et \quad i = 1 , 2, \ldots, m$$

b_i: الموارد المتاحة أو الإمكانيات المتاحة.

X_j: متغيرات القرار رقم j و يمثل نشاط معين.

C_j: الأرباح أو التكاليف الناتجة عن كل وحدة واحدة.

a_{ij}: كمية الموارد المحدودة من النوع i المخصصة لكل وحدة واحدة من النشاط رقم j.

Z: دالة الهدف.

1.5.I. نموذج البرمجة الخطية

لتكوين النموذج يجب ملاحظة توفر شرطين وهما:

1.**الإمكانيات المتاحة أو القيود**: وهي بدورها تنقسم إلى عنصرين:

- ✓ الموارد: وتمثل الأيدي العاملة، الأموال، المواد الأولية، الآلات و المعدات...إلخ
- ✓ النشاطات: و تمثل نوع و طبيعة الأعمال التي توصل إلى إنتاج المنتوج المطلوب.

2. **الهدف من المشروع**: وهو تحديد هدف المشروع وتحقيقه كأن يكون تحقيق أكبر ربح أو تقليل التكلفة الإنتاجية أو أقل فترة زمنية إلى آخره من الأهداف.

ونعبر عن نموذج البرمجة الخطية كما يلي[1]:

دالة الهدف:

$$\text{Max ou Min } Z= C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

القيود:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \quad \leq = \geq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \quad \leq = \geq b_2$$

$$. a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \quad \leq = \geq b_m$$

[1] حسين ياسين طعمة، مرجع سبق ذكره.

شرط عدم السلبية

$$X_1, X_2, \dots X_n \geq 0$$

حيث:

$$j = 1, 2, \dots, n \quad et \quad i = 1, 2, \dots, m$$

b_i: تمثل الموارد المتاحة أو الإمكانيات المتاحة.

X_j: متغيرات القرار رقم j و يمثل نشاط معين.

C_j: الأرباح أو التكاليف الناتجة عن كل وحدة واحدة.

a_{ij}: كمية الموارد المحدودة من النوع i المخصصة لكل وحدة واحدة من النشاط رقم j.

Z: دالة الهدف.

i: عدد الأسطر و هي بعدد القيود m.

j: عدد الأعمدة و هي بعدد المتغيرات أي المجاهيل n.

كما يمكن التعبير عن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية السابقة بشكل أكثر اختصارا باستخدام المجموع على النحو الآتي[1]:

$$\text{Max ou Min } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq = \geq b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$X_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

[1] حسن ياسين طعمة و آخرون، نفس المرجع السابق، ص 41.

I.5. 2. انواع صيغ البرمجة الخطية

للإشارة فإن مسائل البرمجة الخطية يمكن تمثيلها وفق ثلاث صيغ هي:

- الصيغة العامة (المختلطة): عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات (≥ = ≤) أي:

$$\{\, a_{ij}X_j \ \leq \ \mathrm{bi}$$
$$\{\, a_{ij}X_j \ \geq \ \mathrm{bi}$$
$$\{\, a_{ij}X_j \ = \ \mathrm{bi}$$

- الصيغة القانونية: هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي (≤) أو (≥).

– إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو يساوي (≥) فإننا نبحث عن التعظيم (Max) أي

$$\{\, a_{ij}X_j \ \leq \ \mathrm{bi}$$

– إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو يساوي (≤) فإننا نبحث عن التخفيض (Min) أي

$$\{\, a_{ij}X_j \ \geq \ \mathrm{bi}$$

- الصيغة القياسية (المعيارية) : هي التي تحتوي على إشارة المساواة (=) فقط أي

$$\{\, a_{ij}X_j \ = \ \mathrm{bi}$$

مثال (01): يقوم مصنع بإنتاج سلعتين حيث يمر إنتاج كل سلعة على مرحلتين هي الطهي و التعبئة، الجدول الآتي يبين متوسط الزمن بالساعة الذي يستغرقه إنتاج الوحدة الواحدة في مراحل الإنتاج و كذلك الربح الوحدوي و الساعات المتاحة لكل مرحلة:

مراحل الإنتاج / النوع	الطهي	التعبئة	الربح
السلعة الأولى	**03**	**01**	**40**
السلعة الثانية	**01**	**02**	**50**
الساعات المتاحة	**15**	**12**	**_**

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج عدد الوحدات من كلا المنتجين، بما يحقق للمصنع أكبر قدر ممكن من الأرباح.

الحل:

يتضح من بيانات المشكلة في الجدول السابق وجود متغيرين قراريين يمثلان عدد الوحدات المنتجة من كلا المنتوجين و عليه نفرض أن:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى.

X_2: عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

Z: الأرباح الكلية المتوقعة.

و لصياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

1- دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = 40\,X_1 + 50\,X_2$$

حيث:

الربح من السلعة الأولى: $40\ X_1$

الربح من السلعة الثانية: $50\ X_2$

2- قيود المشكلة:

أ- قيد الطهي يكتب كمايلي: $3\,X_1 + 1\,X_2 \leq 15$

ب- قيد التعبئة يكتب كمايلي: $1\,X_1 + 2\,X_2 \leq 12$

3- شرط عدم السلبية: $X_1 \geq 0\ ,\qquad X_2 \geq 0$

و عليه يكون نموذج البرمجة الخطية بصيغته النهائية على النحو التالي:

$$\text{Max } Z = 40\,X_1 + 50\,X_2$$

ST:

$$3\,X_1 + X_2 \leq 15$$

$$X_1 + 2\,X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (02):

غذاء حيواني مركب من ثلاثة أنواع من الطعام، إذا كانت الوحدة من كل نوع تحتوي على كربوهيدرات، دهون، بروتين، فيتامين كما يلي:

المكونات	العدد بالوحدات				تكلفة الوحدة الواحدة
النوع	كربوهيدرات	دهون	بروتين	فيتامين	
الأول	10	12	11	6	150
الثاني	7	5	10	4	130
الثالث	5	3	9	3	120

إذا علمت أن الحيوان يحتاج إلى 50 وحدة كربوهيدرات، 40 وحدة دهون، 60 وحدة بروتين و 30 وحدة فيتامين على الأقل أسبوعيا.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج الغذاء بأقل تكلفة ممكنة.

الحل:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من الطعام الأول.

X_2: عدد الوحدات المنتجة من الطعام الثاني.

X_3: عدد الوحدات المنتجة من الطعام الثالث.

Z: التكلفة الكلية المتوقعة.

و لصياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

1- دالة الهدف: $\text{Min } Z = 150\ X_1 + 130\ X_2 + 120\ X_3$

حيث:

$150\ X_1$: تكلفة الطعام من النوع الأول.

$130\ X_2$: تكلفة الطعام من النوع الثاني.

$120\ X_3$: تكلفة الطعام من النوع الثالث.

2- قيود المشكلة:

أ- قيد الكربوهيدرات يكتب كما يلي: $10\,X_1 + 7\,X_2 + 5\,X_3 \geq 50$

ب- قيد الدهون يكتب كما يلي: $12\,X_1 + 5\,X_2 + 3X_3 \geq 40$

ت- قيد البروتين يكتب كما يلي: $11\,X_1 + 10\,X_2 + 9\,X_3 \geq 60$

ث- قيد الفيتامين يكتب كما يلي: $6\,X_1 + 4\,X_2 + 3\,X_3 \geq 30$

3- شرط عدم السلبية: $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0$

وعليه يكون نموذج البرمجة الخطية بصيغته النهائية على النحو التالي:

$$\text{Min } Z = 150\,X_1 + 130\,X_2 + 120\,X_3$$

ST:

$$10\,X_1 + 7\,X_2 + 5\,X_3 \geq 50$$

$$12\,X_1 + 5\,X_2 + 3\,X_3 \geq 40$$

$$11\,X_1 + 10\,X_2 + 9\,X_3 \geq 60$$

$$6\,X_1 + 4\,X_2 + 3\,X_3 \geq 30$$

$$X_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

II. طرق حل نموذج البرمجة الخطية

قبل التطرق إلى الحديث عن طرق حل النموذج الخطي يجب تحديد بعض المفاهيم المرتبطة بالحل و بعض المصطلحات الخاصة بالمتغير.

- الحل الممكن: هو الحل الذي يحقق كافة القيود و قيد شرط عدم السلبية.
- الحل الأفضل: هو أحسن من الحل الممكن.
- الحل الأمثل: هو الحل الذي يحقق دالة الهدف، أي أعظم قيمة في حالة *Max*، و أدنى قيمة في حالة *Min*.
- الحل الأساسي: هو الحل المقبول رياضيا و التي تقابل النقاط الطرفية في منطقة الحلول الممكنة.
- منطقة الحلول الممكنة: هي مجموعة الحلول لنموذج البرمجة الخطية التي تحقق في نفس الوقت القيود و شرط عدم السلبية.

و يمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من الحلول:

-**الحل المقبول** : هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات؛

-**الحل غير المقبول** : هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية و **لا** تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.

II.1. الطريقة البيانية:

سيتم الإكتفاء بحالة متغيرين و الإستغناء على حالة ثلاثة متغيرات لأن تمثيلها يتم في الفضاء و يصعب تحليله، تعتبر الطريقة البيانية من أسهل الطرق و يمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

1- تكوين نموذج البرمجة الخطية؛

2- تحويل القيود إلى معادلات؛

3- إيجاد قيم X_1، X_2 لكل قيد ، حيث بالنسبة للقيد الأول يتم افتراض أن أحد المتغيرين معدوم و بالتالي يمكن حساب المتغير الآخر، و نفس الشيء يتم افتراض أن المتغير الثاني معدوم ليتم حساب المتغير الأول، و بهذا تكون لدينا نقطتان يتم من خلالهما رسم مستقيم القيد الأول. و

بنفس الطريقة يتم رسم مستقيمات باقي القيود و بتقاطعها يتم الحصول على منطقة الحلول المقبولة (الممكنة)، و يجب ملاحظة اتجاه المتراجحات أو القيود.[1]

4- رسم كل قيد بخط مستقيم؛

5- تحديد منطقة الحل الممكن (تحديد زوايا منطقة الحل الممكن)؛

6- تعويض قيم إحداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z و اختيار الحل الأمثل، أي إيجاد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة زاوية و نختار أفضلها في كلتا الحالتين، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (*Max*) يتم اختيار أكبر قيمة، و في حالة كون دالة الهدف تدنية (*Min*) يتم اختيار أصغر قيمة و من ثم تحديد الحل الأمثل ؛

7- التفسير الاقتصادي للنتائج.

حيث أنه[2]:

- ❖ إذا كانت العلاقة في القيد $\leq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه كبر المتغيرات؛
- ❖ إذا كانت العلاقة في القيد $\geq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه صغر المتغيرات؛
- ❖ إذا كانت العلاقة في القيد $=$ فإن اتجاه الحل سوف يقع على الخط.

توجد عدة طرق لحل مسائل البرمجة الخطية و ذلك باتباع خطوات متتالية انطلاقا من الحل الأولي إلى غاية بلوغ الحل الأمثل و من أهم الطرق نذكر ما يلي:

II.1. 1. استخدام الطريقة البيانية لحل مشكلة التعظيم (Max):

نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال: لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5\,X_1 + 6\,X_2$$

[1] عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، **أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)**، دار القلم للنشر، الإمارات العربية المتحدة، 2003، ص 64.

[2] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B**– كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر، ص 37.

ST :

$$2X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \le 60$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

المطلوب: أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات كمايلي:

القيد الأول: $2X_1 + 3X_2 = 30$

القيد الثاني: $5X_1 + 4X_2 = 60$

2- إيجاد قيم X_1 ، X_2 لكل قيد:

القيد الأول (1): $2X_1 + 3X_2 = 30$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 3X_2 = 30 \Rightarrow X_2 = 10$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 30 \Rightarrow X_1 = 15$$

النقطة الاولى : $p_1 \ (0, 10)$

النقطة الثانية : $p_2 \ (15, 0)$

القيد الثاني (2): $5X_1 + 4X_2 = 60$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 4X_2 = 60 \Rightarrow X_2 = 15$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 5X_1 = 60 \Rightarrow X_1 = 12$$

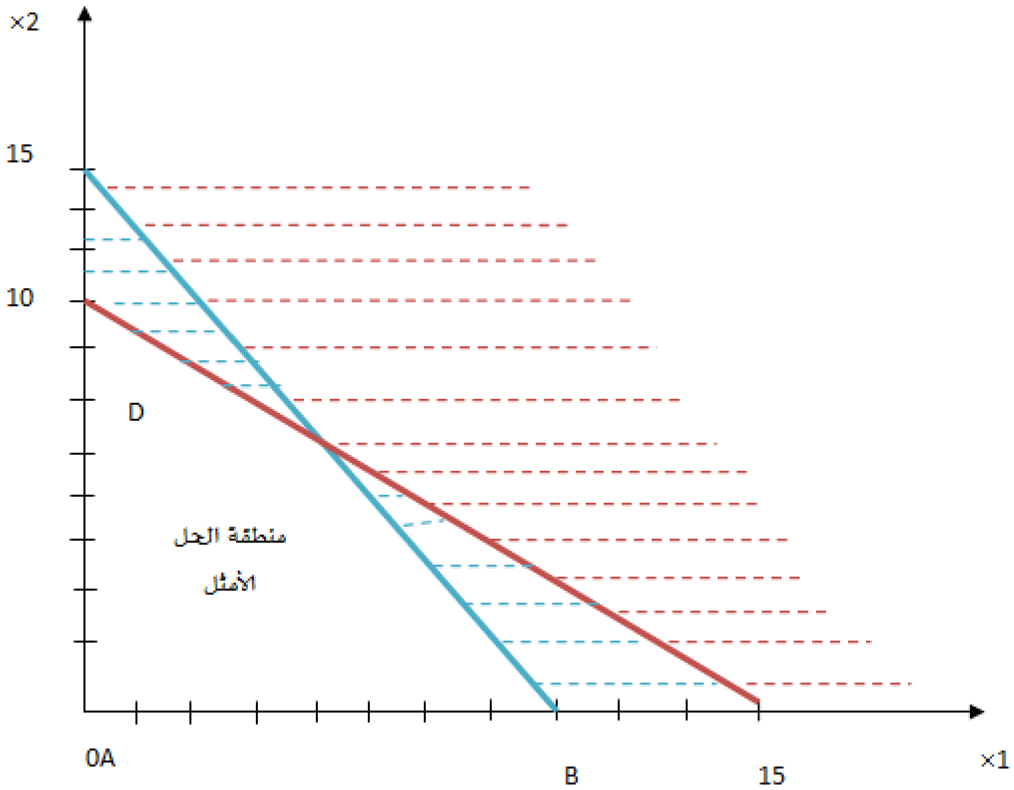
النقطة الأولى : $p_1 \ (0 , 15)$

النقطة الثانية : $p_2 \ (12 , 0)$

3- رسم كل قيد بخط مستقيم وتحديد منطقة الحل الممكن

___ القيد الاول

___ القيد الثاني



4- تحديد زوايا منطقة الحل الممكن

من الشكل البياني السابق يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط التالية : A ,B,C,D

5- تحديد احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن

A (0 , 0) ، **B** (12 , 0) ، **D** (0 , 10)

لإيجاد احداثيات النقطة C التي تمثل نقطة تقاطع القيدين نقوم بحل جملة معادلات القيدين كما يلي :

$2x_1 + 3x_2 = 30$………. (1) ………. × (5)

$5x_1 + 4x_2 = 60$ ………. (2) ………. × (2)

نضرب المعادلة رقم 1 في العدد 5 والمعادلة رقم 2 في العدد 2 فنحصل على ما يلي :

$10x_1 + 15x_2 = 150$………. (3)

$10x_1 + 8x_2 = 120$ ………. (4)

(3) - (4) $\Rightarrow$ $7x_2 = 30 \Rightarrow$ $x_2 = \frac{30}{7}$

نقوم بتعويض قيمة x_2 في المعادلة رقم (1) نحصل على ما يلي :

$2x_1 + 3(\frac{30}{7}) = 30 \Rightarrow 2x_1 = 30-\frac{90}{7} \Rightarrow 2\mathbf{x_1} = \frac{210-90}{7} \Rightarrow 2\mathbf{x_1} = \frac{120}{7}$

$\Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{210-90}{2.7} \Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{60}{7}$

وبالتالي تكون احداثيات النقطة C كما يلي : $\mathbf{C}\ (\frac{60}{7}, \frac{30}{7})$

6- تعويض قيم احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z واختيار الحل الأمثل

النقط	x_1	X_2	$Z = 5X_1 + 6X_2$	Max Z
A (0 , 0)	0	0	0	
B (12 , 0)	12	0	60	
C $(\frac{60}{7}, \frac{30}{7})$	$\frac{60}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{510}{7}$	$\frac{480}{7}$
D (0 , 10)	0	10	60	

الحل الأمثل :

$$X_1^* = \frac{30}{7} \qquad X_2^* = \frac{60}{7} \qquad Z^* = \frac{480}{7} = 68.57$$

استخدام الطريقة البيانية لحل مشكلة البرمجة الخطية في حالة التدنية (Min) : نوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال : لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي :

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$\text{ST :}$$

$$4X_1 + 6X_2 \geq 12$$

$$8X_1 + 4X_2 \geq 16$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب : اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية .

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات كمايلي:

القيد الأول: $4 X_1 + 6 X_2 = 12$

القيد الثاني: $8 X_1 + 4 X_2 = 16$

2- إيجاد قيم X_1 ، X_2 لكل قيد:

القيد الأول (1): $4 X_1 + 6 X_2 = 12$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 6 X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 2$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 4 X_1 = 12 \Rightarrow X_1 = 3$$

النقطة الاولى : $p_1 \ (0, 2)$

النقطة الثانية : $p_2 \ (3, 0)$

القيد الثاني (2): $8 X_1 + 4 X_2 = 16$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 4 X_2 = 16 \Rightarrow X_2 = 4$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 8 X_1 = 16 \Rightarrow X_1 = 2$$

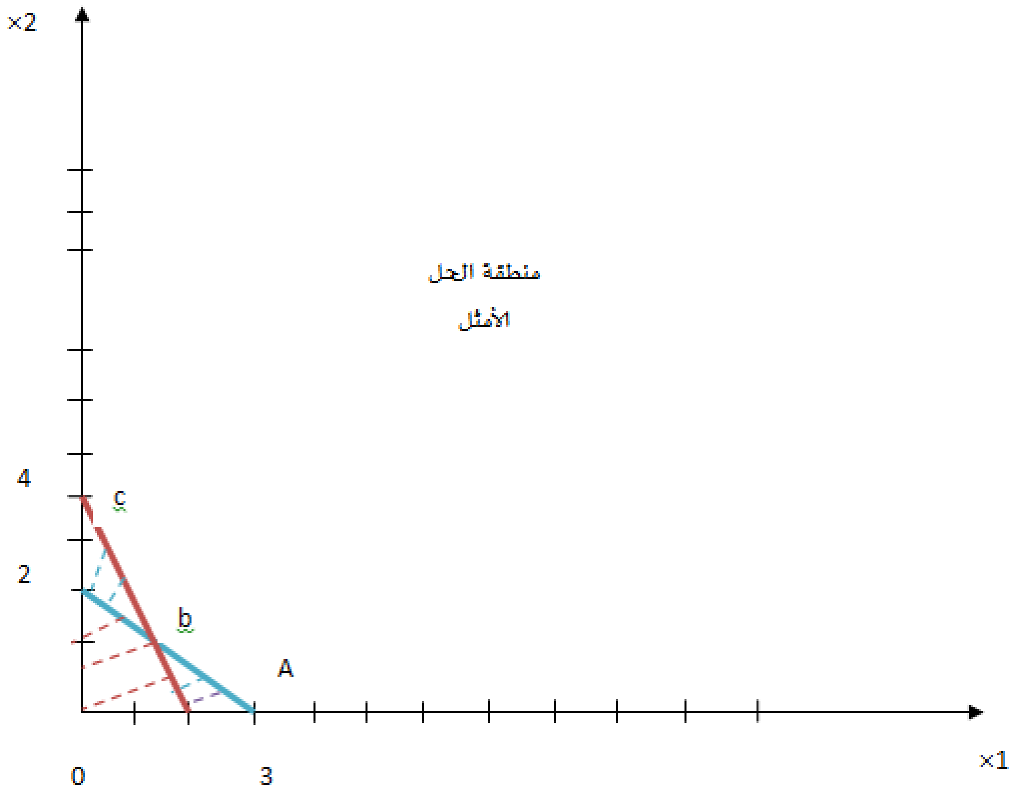
النقطة الأولى : $p_1 \ (0 , 4)$

النقطة الثانية : $p_2 \ (2 , 0)$

3- رسم كل قيد بخط مستقيم وتحديد منطقة الحل الممكن

___ القيد الاول

___ القيد الثاني



4- تحديد زوايا منطقة الحل الممكن

من الشكل البياني السابق يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط التالية : A ,B,C

5- تحديد احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن

A (3 , 0) ، **C** (0 , 4)

لإيجاد احداثيات النقطة B التي تمثل نقطة تقاطع القيدين نقوم بحل جملة معادلات القيدين كما يلي :

$4\,x_1 + 6\,x_2 = 12 \ldots\ldots\ldots\ (1) \quad \ldots\ldots\ldots \times (2)$

$8\,x_1 + 4\,x_2 = 16 \ldots\ldots\ldots\ (2)$

نضرب طرفي المعادلة رقم 1 في العدد 2 فنحصل على ما يلي :

$8\,x_1 + 12\,x_2 = 24 \ldots\ldots\ldots\ (3)$

$8\,x_1 + 4\,x_2 = 16 \ldots\ldots\ldots\ (4)$

نطرح المعادلة رقم (04) من المعادلة رقم (03) فنحصل على ما يلي :

$(3) - (4) \quad \Rightarrow \quad 8x_2 = 8 \Rightarrow \quad x_2 = 1$

نقوم بتعويض قيمة x_2 في المعادلة رقم (1) نحصل على ما يلي :

$4x_1 + 6(1) = 12 \Rightarrow 4x_1 = 12 - 6 \Rightarrow 4\mathbf{x_1} = \mathbf{6} \Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

وبالتالي تكون احداثيات النقطة B كما يلي : **B** $(\frac{3}{2}, 1)$

6- تعويض قيم احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z واختيار الحل الأمثل

النقط	x_1	X_2	$Z = 5X_1 + 6X_2$	Max Z
A (3 , 0)	3	0	9	
B (12 , 0)	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{13}{2} = -6{,}5$	6,5
C (0 , 4)	0	4	8	

الحل الأمثل :

$$X_1^* = \frac{3}{2} \qquad X_2^* = 1 \qquad Z^* = 6.5$$

II . 1 . 3 . لحالات الخاصة في الطريقة البيانية :

إن مشكلة البرمجة الخطية التي تم دراستها وحلها في الأمثلة السابقة بإستخدام الطريقة البيانية تتصف بأن لها حل أمثل وحيد ، إلا أنه تصادفنا في الحياة العملية بعض الحالات النادرة لمشكلات اخرى للبرمجة الخطية ينبغي مراعاتها عند الحل ، وفيما يلي نوضح اهم الحالات الخاصة بالاعتماد على بعض الأمثلة .

II . 1 . 3 . -1- القيود المشبعة و القيود غير المشبعة و التفسير الاقتصادي لها:

تمثل القيود **المشبعة** (*Les contraintes saturées*) القيود لمحققة بإشارة تساوي، ما يعني أن الكمية المتاحة تساوي الكمية المستخدمة، أي أن الكمية المتبقية معدومة، فالمتاح مستخدَم استخداما كاملا، أما القيود **غير المشبعة** (*Les contraintes non saturées*) فهي القيود التي لم تتحقق بإشارة التساوي (أقل تماما)، ما يعني أن هناك كمية متبقية من المتاح لم يتم استخدامها، و التي تمثل الفرق بين الكمية المتاحة و الكمية المستخدمة حيث يكون التفسير الهندسي للقيود المشبعة و القيود غير المشبعة كما يلي :

مما سبق نلاحظ أن كلا من القيدين الأول و الثاني مشبعان، و بالرجوع إلى التمثيل البياني السابق نلاحظ أن كلا القيدين يمر بالنقطة M و التي تمثل الحل الأمثل للنموذج السابق، و بالتالي يمكن القول أن القيود المشبعة هي القيود التي تمر بالحل الأمثل.

II . 1. 3 . 2.أنواع الحلول:

و هناك أربع حالات (أنواع) للحلول و هي: [1]

الحالة الأولى : الحلول غير المحدودة : يعني وجود نقاط في منطقة الحلول المقبولة ذات قيم كبيرة جدا، و يمكن بالرسم معرفة هذه الحالة من خلال تحريك خط دالة الهدف بشكل متوازي في اتجاه زيادة قيمتها و لا يفقد التماس مع منطقة الحلول المقبولة للمسألة، إلا أنه تعد مشكلات البرمجة الخطية غير المحدودة نادرة الحدوث في الحياة العملية لأن اغلب المشكلات محدودة الحلول ، بحيث تكون هذه الحالة مرافقة لمشاكل التعظيم مما يعني ان زيادة الموارد المتاحة لواحد أو أكثر من قيود المشكلة سوف يؤدي الى زيادة الأرباح بدون حدود وبدون اي تأثير على القيود .

الحالة الثانية : الحلول المنحلة (المفككة) : يعد حل مشكلة البرمجة الخطية حلا منحلا او منفكا اذا كانت قيمة احد المتغيرات الأساسية او اغلبها مساوية للصفر ، وأن عدد المتغيرات الأساسية يكون اقل من عدد القيود ، اي وجود حل وحيد لمسألة البرمجة الخطية؛

الحالة الثالثة: عدم وجود حلول مقبولة : هذا يعني أن مسألة البرمجة الخطية غير ممكنة الحل، أي منطقة الحلول المقبولة لا تتضمن أية نقاط تحقق جميع القيود، و هذا ناتج بالطبع عن حالة القيود التي ربما تكون متعارضة أي متعاكسة ولا تشكل منطقة مشتركة بسبب عدم تقاطعهما مما يؤدي الى عدم الحصول على حلول مقبولة للنموذج.[2]

الحالة الرابعة: تعدد الحلول المثلى : هذا يعني وجود أكثر من حل واحد من الحلول المثلى، اي في هذه الحالة فإن لمسألة البرمجة الخطية حلولا مُثلى بديلة أو متعددة، تحدث هذه الحالة عندما يكون احد قيود النموذج موازيا الى دالة الهدف Z أو متطابقا عليه .

[1] **عبد** الستار أحمد محمد الآلوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 64، 65.

[2] عبد الرزاق الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، ص 29.

الحالة الخامسة: وجود قيود اضافية : يعني أنه يوجد عدد من القيود في نموذج البرمجة الخطية فائضة بحيث لا يكون لها أهمية أو تأثير على منطقة الحل الممكن ،لهذا ينبغي على متخد القرار حذف القيود التي يراها غير ضرورية في النموذج أي التي ليس لها اي تأثير على منطقة الحل الممكن .

الأمثلة : نوضح جميع الحالات الخاصة في الامثلة التالية

مثال (01) : لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي :

$$\text{Max } Z = 10\,X_1 + 15\,X_2$$

$$ST:$$

$$X_1 + 2\,X_2 \geq 6$$

$$X_1 \geq 4$$

$$X_1\,,\,X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات كمايلي:

القيد الأول: $X_1 + 2\,X_2 = 6$

القيد الثاني: $X_1 = 4$

2- إيجاد قيم X_1 ، X_2 لكل قيد:

القيد الأول (1): $X_1 + 2\,X_2 = 6$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \;\Rightarrow\; 2\,X_2 = 6 \;\Rightarrow\; X_2 = 3$$

$$X_2 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = 6$$

النقطة الاولى : $p_1\ (0, 1)$

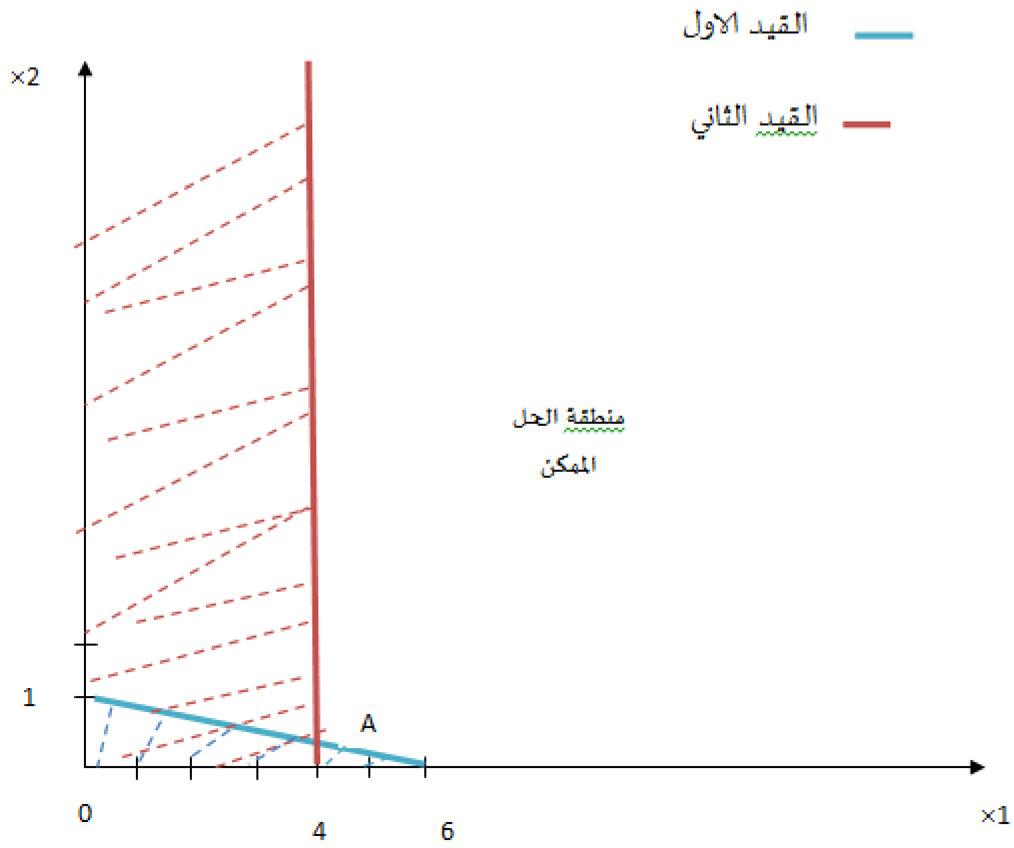
النقطة الثانية : $p_2\ (6, 0)$

القيد الثاني (2): $X_1 = 4$

النقطة: $p_1\ (4\,,\,0)$

نلاحظ أنه توجد نقطة واحدة وبالتالي يكون المستقيم موازي لمحور التراتيب

3- رسم كل قيد بخط مستقيم وتحديد منطقة الحل الممكن



يتضح من الشكل البياني السابق أن منطقة الحل الممكن تتمثل بالمنطقة المظللة وهي منطقة مفتوحة ، اذ كلما تبتعد عن نقطة الاصل نحصل على حل ذو قيمة اكبر مما سيؤدي الى الحصول على حل غير محدود .

مثال (02) : **لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي** :

$$\text{Max } Z = 6\,X_1 + 8\,X_2$$

$$\text{ST :}$$

$$X_1 + 2\,X_2 \leq 10$$

$$2\,X_1 + 5\,X_2 \leq 20$$

$$X_1\,,\,X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات كمايلي:

القيد الأول: $X_1 + 2X_2 = 10$

القيد الثاني $2X_1 + 5X_2 = 20$

2- إيجاد قيم X_1 ، X_2 لكل قيد:

القيد الأول (1): $X_1 + 2X_2 = 10$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 10 \Rightarrow X_2 = 5$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10$$

النقطة الاولى : $p_1 \quad (0, 5)$

النقطة الثانية : $p_2 \quad (10, 0)$

القيد الثاني (2): $2X_1 + 5X_2 = 20$

نفرض أن:

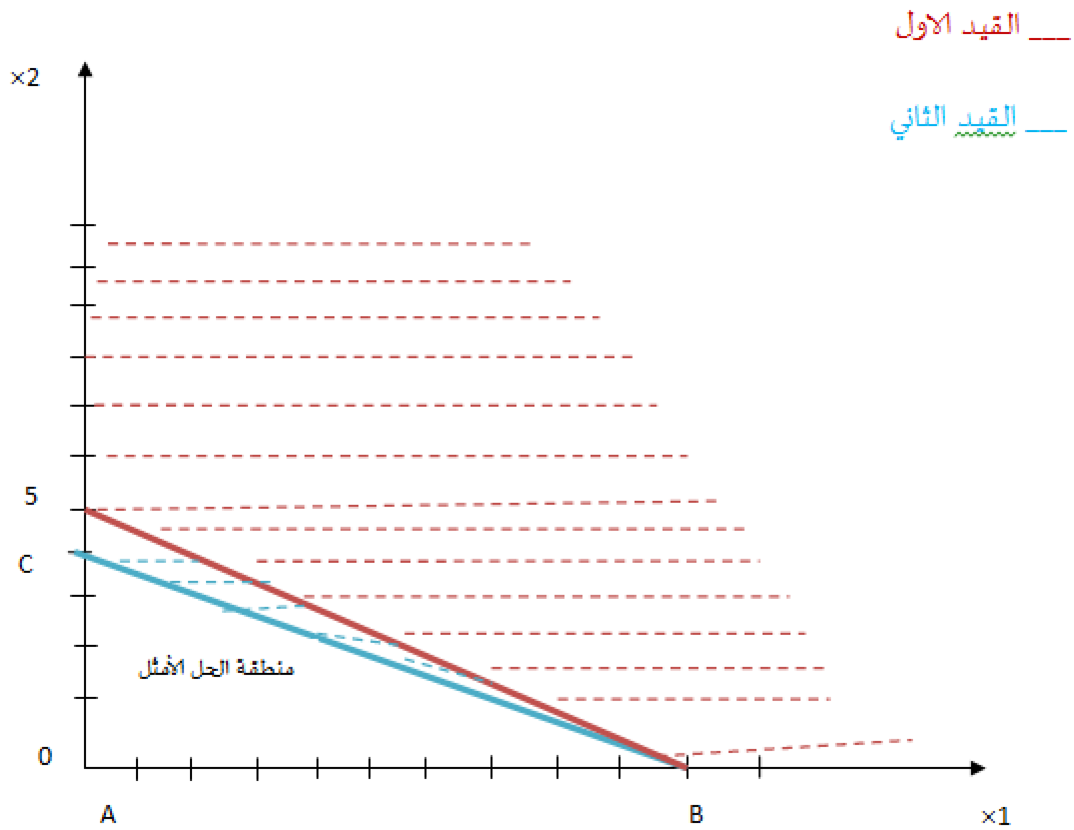
$$X_1 = 0 \Rightarrow 5X_2 = 20 \Rightarrow X_2 = 4$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 20 \Rightarrow X_1 = 10$$

النقطة الاولى : $p_1 \quad (0, 4)$

النقطة الثانية : $p_2 \quad (10, 0)$

3- رسم كل قيد بخط مستقيم وتحديد منطقة الحل الممكن



4- تحديد زوايا منطقة الحل الممكن

من الشكل البياني السابق يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط التالية : A ,B,C

5- تحديد احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن

A (0 , 0) . **B** (10 , 0). **C** (0 , 4)

6- تعويض قيم احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z واختيار الحل الأمثل

النقط	x_1	X_2	$Z = 6X_1 + 8X_2$	Max Z
A (0 , 0)	0	0	0	
B (10 , 0)	10	0	60	60
C (0 , 4)	0	4	32	

الحل الأمثل :

$X_1^* = 10$ $X_2^* = 0$ $Z^* = 60$

نلاحظ ان عدد المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل هو متغير واحد فقط ($X_1^* = 10$) وهو أقل من عدد المتغيرات القرارية X_J في النموذج (متغيرين قراريين) وبالتالي يعتبر هذا الحل الامثل حلا منحلا أو مفككا .

مثال (03) : لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي :

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 10X_2$$

$$ST:$$

$$2X_1 + 4X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات كمايلي:

القيد الأول: $2X_1 + 4X_2 = 20$

القيد الثاني: $X_1 + 2X_2 = 4$

2- إيجاد قيم X_1 ، X_2 لكل قيد:

القيد الأول (1): $2X_1 + 4X_2 = 20$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 4X_2 = 20 \Rightarrow X_2 = 5$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 20 \Rightarrow X_1 = 10$$

النقطة الاولى : $p_1 \ (0, 5)$

النقطة الثانية : $p_2 \ (10, 0)$

القيد الثاني (2): $X_1 + 2X_2 = 4$

نفرض أن:

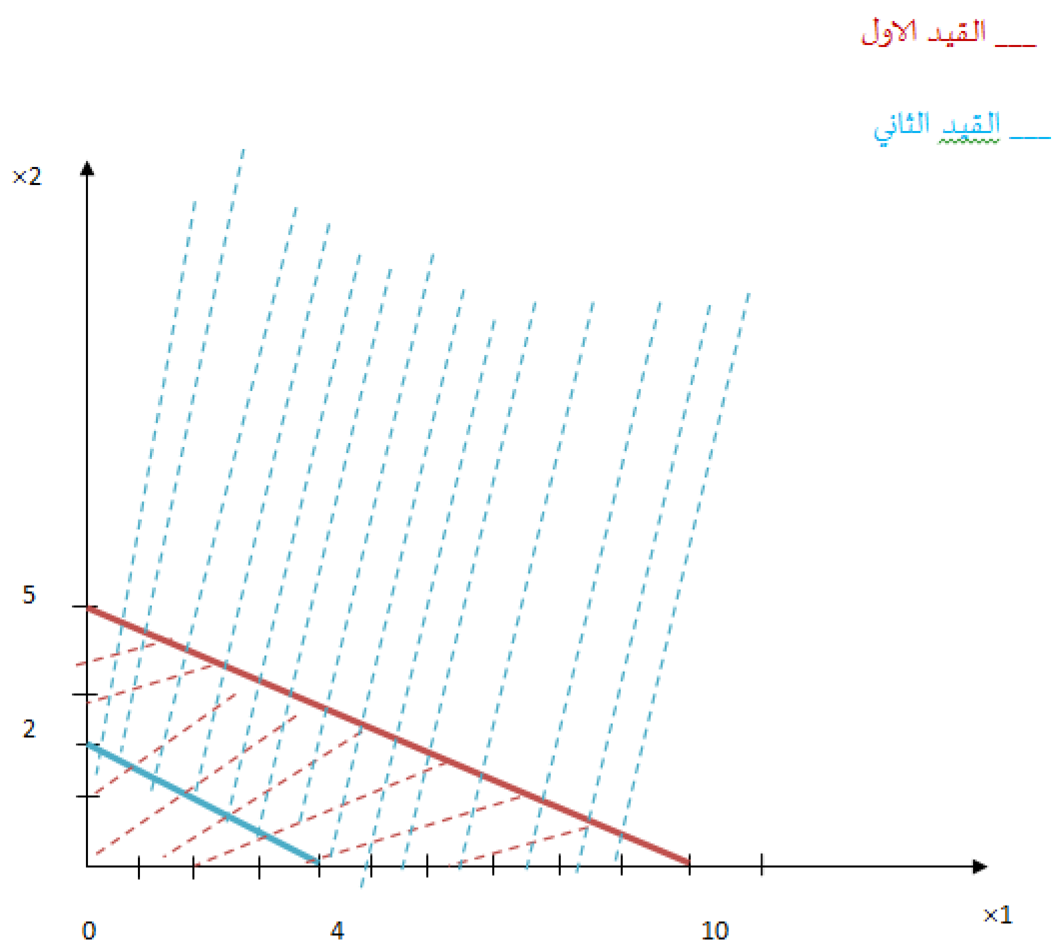
$$X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 4 \Rightarrow X_2 = 2$$

$$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 4$$

النقطة الاولى : $p_1 \quad (0, 2)$

النقطة الثانية : $p_2 \quad (4, 0)$

3- رسم كل قيد بخط مستقيم وتحديد منطقة الحل الممكن



نلاحظ من خلال الشكل اعلاه إنعدام وجود الحلول، اي عدم وجود حل لهذا النموذج ، وهي عبارة عن حالة خاصة .

مثال (04): لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$\text{ST :}$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 12$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات كمايلي:

القيد الأول: $2X_1 + 4X_2 = 12$

القيد الثاني: $X_1 + X_2 = 5$

2- إيجاد قيم X_1 ، X_2 لكل قيد:

القيد الأول (1): $2X_1 + 4X_2 = 12$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 4X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 3$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 12 \Rightarrow X_1 = 6$$

النقطة الاولى : p_1 (0, 3)

النقطة الثانية : p_2 (6, 0)

القيد الثاني (2): $X_1 + X_2 = 5$

نفرض أن:

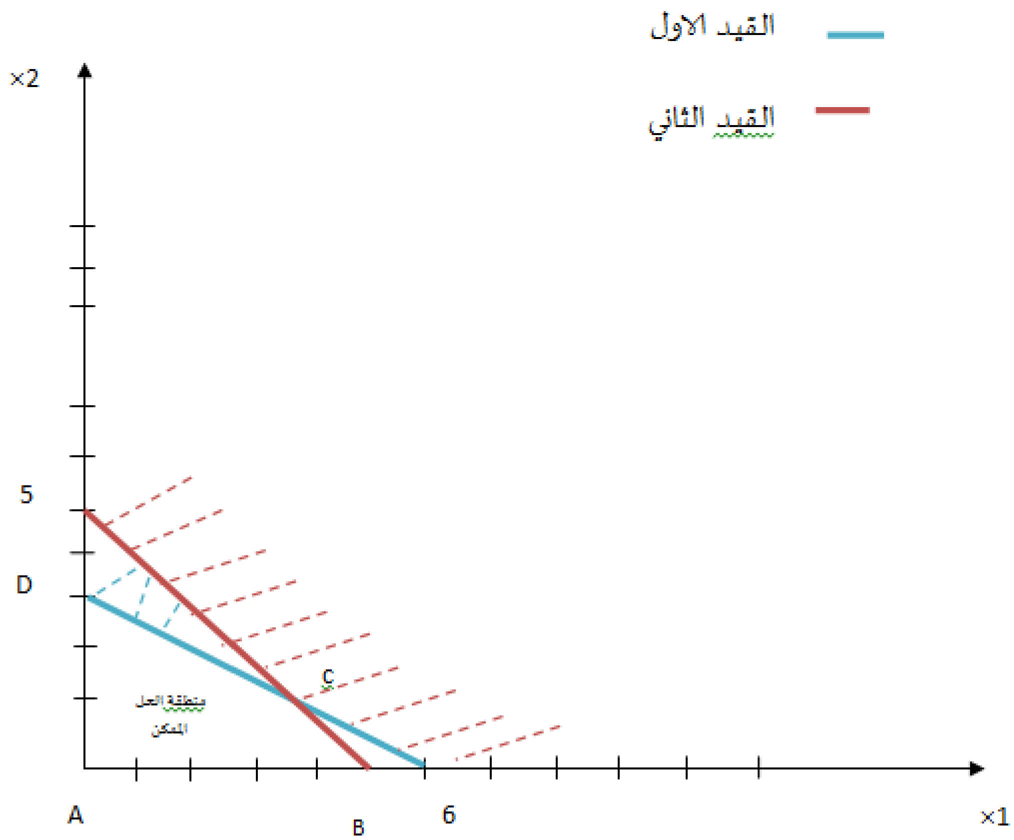
$$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$$

النقطة الأولى : p_1 (0 , 5)

النقطة الثانية : p_2 (5 , 0)

3- رسم كل قيد بخط مستقيم وتحديد منطقة الحل الممكن



4- تحديد زوايا منطقة الحل الممكن

من الشكل البياني السابق يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط التالية : A ,B,C,D

5- تحديد احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن

A (0 , 0) ، **B** (5 , 0) ، **D** (0 , 3)

لإيجاد احداثيات النقطة C التي تمثل نقطة تقاطع القيدين نقوم بحل جملة معادلات القيدين كما يلي :

$2\,x_1 + 4\,x_2 = 12$………. (1)
$x_1 + x_2 = 5$ ………. (2) ………. × (2)

نضرب طرفي المعادلة رقم 2 في العدد 2 فنحصل على ما يلي :

$2\,x_1 + 4\,x_2 = 12$………. (3)
$2\,x_1 + 2\,x_2 = 10$ ………. (4)

نطرح المعادلة رقم (4) من المعادلة رقم (3) فنحصل على ما يلي :

$(3) - (4) \Rightarrow 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$

نقوم بتعويض قيمة x_2 في المعادلة رقم (1) نحصل على ما يلي :

$2x_1 + 4(1) = 12 \Rightarrow 2x_1 = 14 - 4 \Rightarrow \mathbf{x_1 = \frac{8}{2}} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 4}$

وبالتالي تكون احداثيات النقطة C كما يلي : **C (4 , 1)**

6- تعويض قيم احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z واختيار الحل الأمثل

النقط	x_1	X_2	$Z = 2X_1 + 4X_2$	Max Z
A (0 , 0)	0	0	0	
B (5 , 0)	5	0	10	
C (4 ,1)	4	1	12	12
D (0 , 3)	0	3	12	12

الحل الأول الأمثل :

$X_1^* = 4 \qquad X_2^* = 1 \qquad Z^* = 12$

الحل الثاني الأمثل :

$X_1^* = 4 \qquad X_2^* = 1 \qquad Z^* = 12$

يتضح من النتائج أعلاه وجود أكثر من حل أمثل للمشكلة ، حيث يتمثل بالنقطتين C و D نظرا لتساوي قيمة دالة الهدف Z المحسوبة للنقطتين ويعود ذلك الى انطباق القيد الأول في النموذج على دالة الهدف Z .

مثال (05): لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min } Z = 3\,X_1 + 6\,X_2$$

ST :

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

$$4\,X_1 + 2\,X_2 \leq 12$$

$$X_2 \leq 8$$

$$X_1\,,\,X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات كمايلي:

القيد الأول: $X_1 + X_2 = 4$

القيد الثاني: $4\,X_1 + 2\,X_2 = 12$

القيد الثالث: $X_2 = 8$

2- إيجاد قيم X_1 ، X_2 لكل قيد:

القيد الأول (1): $X_1 + X_2 = 4$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \;\Rightarrow\; X_2 = 4$$

$$X_2 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = 4$$

النقطة الاولى : $p_1\ (0, 4)$

النقطة الثانية : $p_2\ (4, 0)$

القيد الثاني (2): $4X_1 + 2X_2 = 12$

نفرض أن:

$$X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 6$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 4X_1 = 12 \Rightarrow X_1 = 3$$

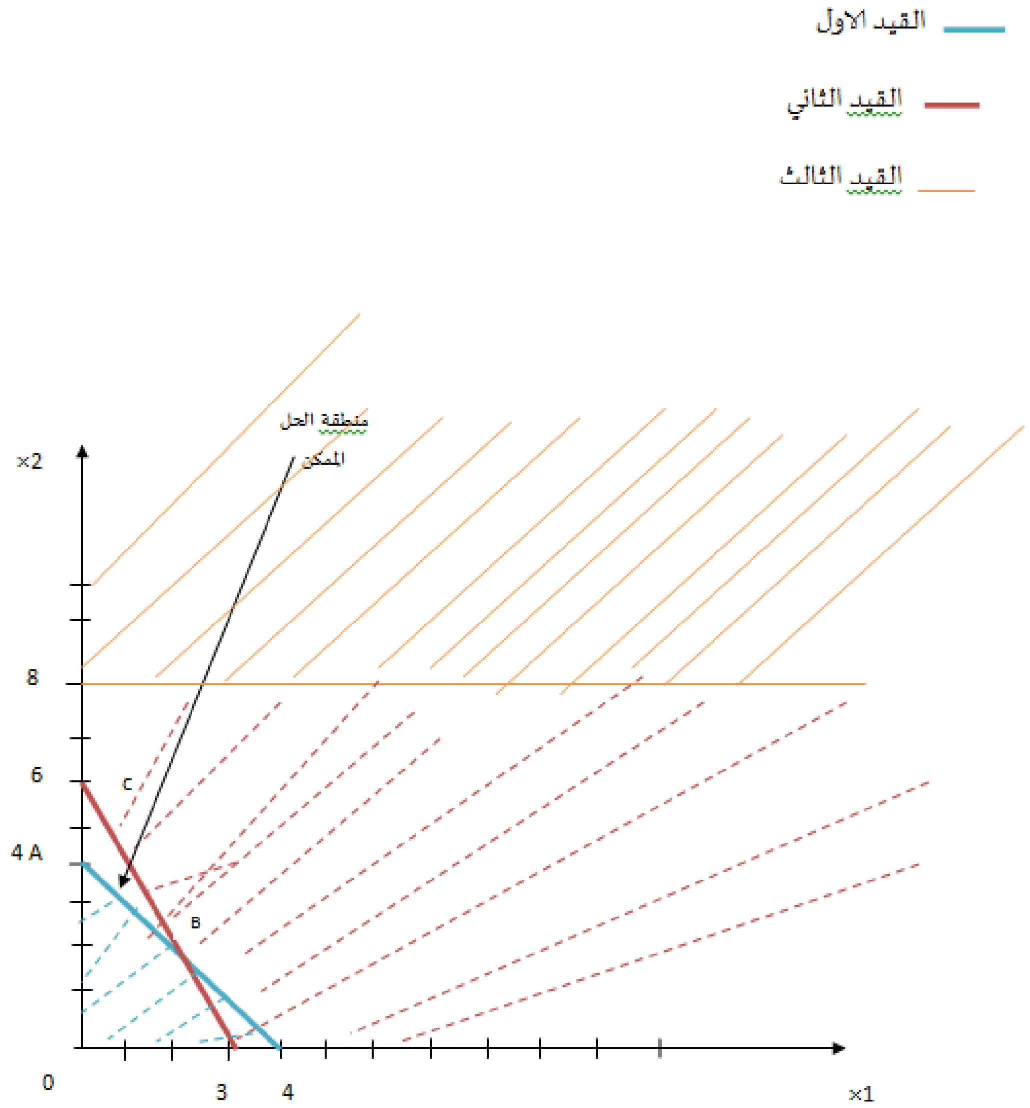
النقطة الأولى : $p_1 \ (0, 6)$

النقطة الثانية : $p_2 \ (3, 0)$

القيد الثالث (3): $X_2 = 8$

النقطة: $(0, 8) \ p_1$ توجد نقطة واحدة ، حيث يكون المستقيم موازي لمحور الفواصل .

3- رسم كل قيد بخط مستقيم وتحديد منطقة الحل الممكن



4- تحديد زوايا منطقة الحل الممكن

من الشكل البياني السابق يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط التالية : A ,B,C والناتجة من تقاطع القيد الأول والثاني فقط ،في حين نلاحظ أن القيد الثالث ($X_2 \leq 8$) يعتبر قيدا فائضا وليس له تأثير على تحديد منطقة الحل الممكن ، وعليه نواصل عملية الحل والإستغناء على القيد الثالث .

5- تحديد احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن

A (0 , 4) ، **C** (0 , 6)

لإيجاد احداثيات النقطة B التي تمثل نقطة تقاطع القيدين (الأول والثاني) نقوم بحل جملة معادلات القيدين كما يلي :

$x_1 + x_2 = 4$ ………. (1)
$4x_1 + 2x_2 = 12$ ………. (2) ………. × (2)

نضرب طرفي المعادلة رقم 1 في العدد 2 فنحصل على ما يلي :

$2x_1 + 2x_2 = 8$ ………. (3)
$4x_1 + 2x_2 = 12$ ………. (4)

نطرح المعادلة رقم (3) من المعادلة رقم (4) فنحصل على ما يلي :

$(4) - (3) \Rightarrow 2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

نقوم بتعويض قيمة x_1 في المعادلة رقم (1) نحصل على ما يلي :

$2 + x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 4 - 2 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 2}$

وبالتالي تكون احداثيات النقطة B كما يلي : **C** (2 , 2)

6- تعويض قيم احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z واختيار الحل الأمثل

النقط	x_1	X_2	$Z = 3X_1 + 6X_2$	Min Z
A (0 , 4)	0	4	24	
B (2 , 2)	2	2	18	*18*
C (0 ,6)	0	6	36	

الحل الأمثل :

$$X_1^* = 2 \qquad X_2^* = 2 \qquad Z^* = 18$$

تقييم الطريقة البيانية : للطريقة البيانية عدة مزايا وعيوب نذكر منها ما يلي :

المزايا : تتمثل مزايا الطريقة البيانية فيما يلي :

- سهولة استخدامها وبساطتها .
- توضيح بعض مفاهيم البرمجة الخطية .

العيوب : تتمثل عيوب الطريقة البيانية فيما يلي :

- تستعمل الطريقة البيانية في حالة وجود متغيرين فقط ونادرة التطبيق .
- تفترض الإستغلال التام للموارد المتاحة من خلال تحويل المتراجحات الى معادلات مباشرة .
- يكون الحل الأمثل وفق هذه الطريقة بصفة تقريبية وغير مؤكدة .

II. 2. الطريقة الجبرية:

تعد الطريقة الجبرية من الطرق الرياضية البحثة التي تستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط، ولحل نموذج البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية[1]:

1. تحويل المتراجحات إلى معادلات.
2. حلل جملة المعادلات بطريقة التعويض أو المحددات (المصفوفات) لإيجاد قيم المتغيرات ثم تعويضها في دالة الهدف لتحديد قيمتها.

مثال: لدينا نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 5 X_1 + 6 X_2$$

$$\text{ST} : 2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$5X_1 + 4 X_2 \leq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

1. تحويل القيود إلى معادلات:

$$2 X_1 + 3X_2 = 30 \ldots\ldots (1)$$
$$5 X_1 + 4X_2 = 60 \ldots\ldots (2)$$

2. حل جملة معادلتين:

نضرب طرفي المعادلة رقم (1) في العدد (5) و طرفي المعادلة رقم (2) في العدد (2) فنحصل على ما يلي:

$$10 X_1 + 15X_2 = 150 \ldots\ldots (3)$$
$$10 X_1 + 8X_2 = 120 \ldots\ldots (4)$$

$$(1) - (4) \Rightarrow 7 X_2 = 30 \Rightarrow X_2 = {}^{30}/_{7}$$

نعوض قيمة 2 في المعادلة رقم (1) فنحصل على ما يلي:

$$2 X_1 + 3 ({}^{30}/_{7}) = 30$$

$$\Rightarrow 2 X_1 = 30 - {}^{90}/_{7} \Rightarrow 2 X_1 = \frac{210 - 90}{7}$$

[1] محاضرات

$$\Rightarrow X_1 = \frac{120}{14} \Rightarrow X_1 = \frac{60}{7}$$

نعوض قيمة X_1 و X_2 في دالة الهدف Z:

$$Z = 5\left(\frac{60}{7}\right) + 6\left(\frac{30}{7}\right)$$

$$Z = \frac{300+180}{7} = \frac{480}{7}$$

$$Z^* = \frac{480}{7}$$

تقيم الطريقة الجبرية:

أ– المزايا:

تتمثل مزايا هذه الطريقة فيما يلي:

- سهولة استخدامها؛
- إعطاء صورة واضحة عن حل نماذج البرمجة الخطية.

ب– العيوب:

تتمثل عيوب هذه الطريقة فيما يلي:

- تفترض الاستغلال التام للطاقات المتاحة من خلال تحويل المتراجحات إلى معادلات مباشرة؛
- استخلاص النتيجة بصفة تقريبية فقط فهي غير مؤكدة 100%؛
- إحتواء النموذج على متغيرين فقط.

كذلك يمكن وفق هذه الطريقة اعتماد أسلوب التعويض الجبري للقيم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقا إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم، و لحل نموذج البرمجة الخطية وفق هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية[1]:

[1] حسن ياسين طعمة و آخرون، نفس المرجع السابق، ص 87.

1. تصنيف متغيرات النموذج الرياضي إلى نوعين هما:

أ- المتغيرات الأساسية: هي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة و تكون قيم هذه المتغيرات أكبر من الصفر أي $S_i > 0$، $X_j > 0$.

ب- المتغيرات غير الأساسية: و هي تلك المتغيرات التي ليس لها دور مهم في المشكلة و تكون هذه المتغيرات مساوية للصفر أي $S_i = 0$، $X_j = 0$.

2. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية و ذلك باستخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف و القيود كما يلي:

نوع علامة القيود	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في القيود	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف	
		Max Z	Min Z
أقل أو يساوي (≤)	$+ S_i$	$+ 0 S_i$	$+ 0 S_i$
أكبر أو يساوي (≥)	$-S_i$	$- 0 S_i$	$- 0 S_i$
يساوي (=)	/	/	/

3. تكوين جدول يتضمن المتغيرات الأساسية و المتغيرات غير الأساسية لغرض الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة بموجب هذه الطريقة.

مثال: لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2$$

$$\text{ST}: \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \le 30 \\ 5X_1 + 4X_2 \le 60 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال الطريقة الجبرية.

الحل:

1. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الراكدة.

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$ST: \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30 \\ 5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60 \\ X_1, X_2 \geq 0 \quad S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. تحديد عدد الطرق الممكنة لاختيار متغيرين من بين أربعة متغيرات وفق الصيغة التالية:

$$C_n^K = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!} = 6$$

الحالات الكلية (S):

$$S: \{X_1X_2, X_1S_1, X_1S_2, X_2S_1, X_2S_2, S_1S_2\}$$

3. تكوين جدول المتغيرات الأساسية و المتغيرات الراكدة:

Max Z	دالة الهدف $Z = 5X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2$	المتغيرات الأساسية $X_j > 0$ ،$S_i > 0$	المتغيرات غير الأساسية $X_j = 0$ ،$S_i = 0$	عدد الحالات الكلية
	0	$S_1 = 30$ $S_2 = 60$	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	1
	60	$X_2 = 10$ $S_2 = 20$	$X_1 = 0$ $S_1 = 0$	2
	تهمل 90	$X_2 = 15$ $S_1 = -15$	$X_1 = 0$ $S_2 = 0$	3
	تهمل 75	$X_1 = 15$ $S_2 = -15$	$X_2 = 0$ $S_1 = 0$	4
	60	$X_1 = 12$ $S_1 = 6$	$X_2 = 0$ $S_2 = 0$	5
$480^*/7$	480/ 7	$X_1 = 60/7$ $X_2 = 30/7$	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$	6

الحل الأمثل: $Z^* = \frac{480}{7}$ $\quad X_2^* = \frac{30}{7}$ $\quad X_1^* = \frac{60}{7}$

خاتمة :

تناولنا من خلال هذا الفصل كل ما يتعلق بالبرمجة الخطية من مفاهيم وإفتراضات ، ثم قمنا بتفصيل مكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية المتمثل في دالة الهدف والشروط او القيود الموضوعية واخيرا شرط عدم السلبية ، ومن ثم اعطاء الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية بشكليها القانوني والقياسي ، واخيرا وضحنا طرق حل مشكلات البرمجة الخطية من حلال تناول الطريقة البيانية مع ذكر جميع الحالات الخاصة ، وكذلك الطريقة الجبرية وذلك بغية اعطاء توضيح بسيط حول حل مشكلة البرمجة الخطية .

الفصل الثاني: الطريقة المبسطة (Simplex) لحل نماذج البرمجة الخطية .

نتطرق من خلال هذا الفصل إلى ما يلي:

I. حل مشكلات البرمجة الخطية في حالة التعظيم وحالة التدنية.

1.I.حل مشكلات البرمجة الخطية في حالة التعظيم.

1.1.I. خطوات حل نموذج البرمجة الخطية

2.1.I. الطريقة الاولى

3.1.I. الطريقة الثانية

2.I. حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التدنية

I .2. 1. طريقة M الكبيرة Big M:

2.I .2. طريقة المرحلتين Two –Phase Method

2.I .3. الطريق الثالثة

II. النموذج المقابل (المرافق)، المشكلة الثانية.

II. 2.مميزات النموذج المقابل (الثنائي)II

II. 2. تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل و بالعكس

II. 3.صياغة المشكلة المقابلة الثنائية أي النموذج المقابل

III. تحليل الحساسية

1.III.التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة)

2.III. التغيرات في معاملات دالة الهدف

3.III. التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود

4.III. إضافة متغير أو متغيرات جديدة؛

5.III. إضافة قيد أو قيود جديدة.

مقدمة:

تعد الطريقة المبسطة (طريقة Simplex) أسلوب رياضي متقدم في حل مشكلات البرمجة الخطية، وهي تعالج المشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر)، أي المسائل التي تكون فيها عدد القيود (m) و عدد المتغيرات (n) اكبر من اثنين حيث $m \geq 2$ و $n \geq 2$, فإذا كان $m \leq 5$ و $n \leq 5$ فإنه من الممكن حل المسألة يدويا أما إذا ارتفعت قيمتهما يتعقد الحل يدويا و عليه نلجأ إلى استخدام الحاسوب، إن البدايات التاريخية لتطبيق هذه الطريقة تعود إلى العالم Dantzig عام 1947 عندما تبين له عجز الطريقة البيانية و الطريقة الجبرية في معالجة مشكلة عندما تحتوي على أكثر من متغيرين، كما تعتبر من أفضل انجازات القرن الماضي و ذلك مع تزايد إمكانيات وضع و تطوير برامج الإعلام الآلي لتطبيقها و إيجاد الحلول بالسرعة المذهلة و بالدقة العالية مهما كان عدد المتغيرات و القيود و من أهم هذه البرامج برنامج Lindo و برنامج QSB.

يتم إيجاد حل مشكلات البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة وفقا لثلاث مراحل أساسية كما يلي:

- **المرحلة الأولى**: إيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي)
- **المرحلة الثانية:** تحسين الحل الممكن للحصول على الحل الأفضل.
- **المرحلة الثالثة:** تحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل.

1.I.حل مشكلات البرمجة الخطية في حالة التعظيم:

لتطبيق هذه الطريقة يجب تحويل المتراجحات إلى معادلات و ذلك بإضافة متغيرات وهمية تسمى متغيرات التكامل أو المتغيرات الراكدة و هي عبارة عن طاقات و موارد متبقية أي غير مستغلة.

1.1.I. خطوات حل نموذج البرمجة الخطية:

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

1. دالة الهدف تكون من نوع تعظيم (Max)؛
2. تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية الى الصيغة القياسية بعد إضافة متغيرات التكامل (الراكدة)، أي تحويل جميع قيود النموذج الى معادلات بإضافة متغيرات التكامل؛
3. يكون معامل المتغيرات المكملة في دالة الهدف مساوي إلى الصفر لأن دالة الهدف هي معادلة مساواة و ليست متباينة، و يدخل على القيد الواحد بمعامل يساوي الواحد و في باقي القيود مساوي الى الصفر؛
4. مصفوفة معاملات المتغيرات المكملة يجب أن تكون مصفوفة أحادية موجبة؛
5. الشرط الأخير جميع متغيرات التكامل يجب أن تكون موجبة أي تأخذ نفس شرط المتغيرات في القيود.

ملاحظة: يرمز لمتغيرات التكامل بالرمزS_i أو مواصلة الترقيم وفق المتغيرات الأساسية.

بعد القيام بهذه الخطوات يمكن حل نموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم وفق عدة طرق نتناولها كما يلي:

2.1.I. الطريقة الاولى: لحل نموذج البرمجة الخطية وفق هذه الطريقة نتبع بعض الخطوات الاضافية عن الخطوات السابقة و هي:

1. تحويل دالة الهدف الى دالة صفرية؛
2. تمثيل كل المعلومات الخاصة بالنموذج الخطي في الجدول.

الحل الأساسي الممكن بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات في قيود النموذج و دالة الهدف مع وضع القيمة المطلقة لمعاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف.

النسبة R_i	المتاح أو المتوفر b_i	المتغيرات الراكدة (التكامل)	المتغيرات الأساسية (متغيرات القرار)	متغيرات قاعدة الحل
		S_1 $.S_2\ldots\ldots\ldots S_m$ X_{n+1} $X_{n+2}\ldots\ldots X_{n+m}$	X_1 $.X_2\ldots\ldots\ldots\ldots X_n$	
	b_1	1 $0\ldots\ldots\ldots0$	a_{11} $a_{12}\ldots\ldots a_{1n}$	S_1
	b_2	0 $1\ldots\ldots\ldots0$	a_{21} $a_{22}\ldots\ldots a_{2n}$	S_2
	.	. . .	. . .	.
	.	. . .	. . .	.
	b_n	0 $0\ldots\ldots\ldots1$	a_{m1} $a_{m2}\ldots\ldots a_{mn}$	S_m
	0	0 $0\ldots\ldots\ldots0$	C_1 C_2 C_n	Z

3. تحديد المتغيرات الداخل على أساس أكبر قيمة موجبة أي أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في صف دالة الهدف Z؛
4. تحديد المتغير الخارج عن طريق قسمة قيم العمود b_i (المتاح) على العمود المحوري و نملأ عمود النسبة (R_i) , ثم نأخذ أصغر قيمة لR_i بحيث المتغير المقابل لأصغر قيمة ل R_i يسمى المتغير الخارج مع عدم الاخذ بعين الاعتبار القيم السالبة.

ملاحظة: العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل يسمى بالعمود المحوري و الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري .

5. نقطة تقاطع العمود المحوري و الصف المحوري تسمى بنقطة المحور (العنصر المحوري)؛
6. يمكن الحصول على المعادلة المحورية من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري، بمعنى آخر تحويل قيمة العنصر المحوري إلى قيمة مساوية الواحد من خلال قسمة الصف المحوري على قيمة العنصر المحوري.

لغرض تحسين الحل الممكن و الحصول على الحل الأفضل كما يلي:

أ- ايجاد معاملات دالة الهدف الجديدة وفق الصيغة التالية:

معاملات دالة الهدف الجديدة = معاملات دالة الهدف القديمة – (معاملات المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية)

ب- ايجاد معاملات القيود الجديدة و ايجاد بقية صفوف الجدول وفق الصيغة التالية:

معاملات الصف الجديد = معاملات الصف القديم – (عنصر الصف القديم الواقع في عمود المتغير الداخل) * عناصر الصف المحوري.

يمكن الحصول على الحل الأمثل لمشكلة التعظيم عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف (C_j) الجديدة في جدول الحل أكبر أو تساوي الصفر أي ($C_j \geq 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات في دالة الهدف الجديدة (C_j) سالبة فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل و بالتالي إعادة إجراء الخطوات السابقة ابتداء من المرحلة الثالثة إلى غاية المرحلة الاخيرة حتى يتم الحصول على قيمة موجبة أو صفرية لمعاملات دالة الهدف الجديدة و بالتالي الوصول إلى الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية

مثال: لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 50 X_1 + 60 X_2$$

ST :

$$\begin{cases} X_1 + 2 X_2 \leq 8 \\ 2 X_1 + 2 X_2 \leq 10 \\ 9 X_1 + 4 X_2 \leq 36 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة Simplex

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية بإضافة متغيرات التكامل.

$$\text{Max } z = 50 X_1 + 60 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$$

ST:

$$\begin{cases} 1 X_1 + 2 X_2 + X_3 = 8 \\ 2 X_1 + 2 X_2 + X_4 = 10 \\ 9 X_1 + 4 X_2 + X_5 = 36 \\ X_j \geq 0 \quad (j = 1.2\ldots.5) \end{cases}$$

2- تحويل دالة الهدف إلى دالة صفرية

$$Z - 50 X_1 - 60 X_2 - 0 X_3 - 0 X_4 - 0 X_5 = 0$$

3« – تصميم جدول Simplex

جدول رقم 01 : جدول Simplex

متغيرات قاعدة الحل	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b_i	R_i
X_3	1	2	1	0	0	8	4
X_4	2	2	0	1	0	10	5
X_5	9	4	0	0	1	36	9
Z	$\lvert -50 \rvert$	$\lvert -60 \rvert$	0	0	0	0	
X_2	½	1	½	0	0	4	8
X_4	1	0	-1	1	0	2	2
X_5	7	0	-2	0	1	20	2.85
Z	$\lvert -20 \rvert$	0	30	0	0	240	

X_2	0	1	1	–½	0	3	
X_1	1	0	–1	1	0	2	
X_5	0	0	5	–7	1	6	
Z	0	0	10	20	0	280	

المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال

الحل الأمثل :

$$Z^* = 280 \qquad X_1^* = 2 \qquad\qquad X_2^* = 3$$

I.1.3. الطريقة الثانية: نوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالي :

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 70\ x_1 + 40\ x_2 + 60\ x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1000 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1- 1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 70x_1+40x_2+60x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1=1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+S_2=800 \\ x_1+3x_2+x_3+S_3=400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{Max } Z = 70x_1+40x_2+60x_3+0S_1+0S_2+0S_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1+0S_2+0S_3=1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+0S_1+S_2+0S_3=800 \\ x_1+3x_2+x_3+0S_1+0S_2+S_3=400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

1- 2- إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 6 متغيرات، و 3 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساي مقبول عن طريق عدم 3متغيرات (3=3-6)و لتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) $x_1=0$، $x_2=0$، $x_3=0$ و بعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: $S_1=1000$ ، $S_2=800$، $S_3=400$، و الذي يعتبر حل الأساس المقبول الأول، حيث أن $Z=0$ ما يعني أن المؤسسة لازالت في بداية نشاطها و لم تقم بعملية الإنتاج.

1- 3- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

- تتم في المرحلة الأولى تشكيل جدول يضم في السطرين الأول و الثاني متغيرات النموذج (متغيرات القرار، متغيرات الفجوة)، حيث تكتب في السطر الأول معاملات هذه المتغيرات (C_j) في دالة الهدف و في السطر الثاني تكتب المتغيرات؛
- تكتب في العمودين الأول و الثاني (على اليسار) متغيرات الأساس المتحصل عليها من أول حل أساس مقبول مع معاملاتها (C_j)في دالة الهدف؛
- في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية؛

- في العمود $B\ rayon$ تتم كتابة المتاح (من القيود الوظيفية)؛
- في السطر $Z_j = \sum C_j x_j$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها، مثلا: $(0\times4)+(0\times2)+(0\times1)= 0$، و ذلك للحصول على القيمة Z_j و هكذا؛
- في السطر $Z = C_j - Z_j$ يتم طرح قيم Z_j من معاملات كافة المتغيرات في دالة الهدف (أول سطر C_j)؛
- للحصول على قيمة دالة الهدف Z يتم ضرب معاملات متغيرات الأساس (العمود الأول C_j).

الجدول رقم 02: جدول السمبلكس الأول للمثال 04–01

C_j ↓ →		70	40	60	0	0	0	b_i	
		↓ x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		R_i
0	← S_1	4	2	4	1	0	0	1000	1000/4 = 250
0	S_2	2	2	1	0	1	0	800	800/2 = 400
0	S_3	1	3	1	0	0	1	400	400/1 = 400
$Z_j = \sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 0	
$Z = C_j - Z_j$		70	40	60	0	0	0		

المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال

1– 4– قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول:

أ– تحديد المتغيرة الداخلة: المتغيرة الداخلة هي تلك المتغيرة خارج الأساس المعدومة التي تتحول إلى متغيرة أساس موجبة يتم اختيارها كما يلي: ذات **أكبر معامل موجب** في $Z = C_j - Z_j$ ، و يشار إليها بسهم في الجدول، و في مثالنا هذا هي المتغيرة x_1 ذات المعامل Z=70 (أقل معامل سالب في حالة نموذج Min).

ب– تحديد المتغيرة الخارجة: المتغيرة الخارجة هي متغيرة أساس موجبة و التي تتحول إلى متغيرة خارج الأساس معدومة يتم تحديدها في الجدول كما يلي: نقوم بقسمة قيم الشعاع (1000, 800, 400) B على قيم عمود المتغيرة الداخلة (4, 2, 1) x_1 فنحصل على قيم (250, 400, 400) R_i. و بناءً على

ذلك فإن المتغيرة الخارجة هي التي تقابل **أقل حاصل قسمة موجب** (R_i)، و يشار إليها في الجدول بسهم، و في مثالنا هذا تمثل S_1 المتغيرة الخارجة.

ج– تحديد عنصر الارتكاز: يمثل عنصر الارتكاز نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة $Pivot = L_p \cap C_p$، يشار إليه بدائرة في الجدول، و في مثالنا هو 4.

1– 5–تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

الجدول رقم 03: جدول السمبلكس الثاني للمثال 04–01

$\downarrow$ C_j $\rightarrow$		70	40	60	0	0	0	b_i	
		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	S_1	S_2	S_3		R_i
70	x_1	1	½	1	1/4	0	0	250	500
0	S_2	0	1	-1	-1/2	1	0	300	300
0	$\leftarrow S_3$	0	5/2	0	-1/4	0	1	150	60
$Z_j = \sum C_j x_j$		70	35	70	70/4	0	0	Z = 17500	
$Z = C_j - Z_j$		0	5	-10	-70/4	0	0		

المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال

– يتم تشكيل جدول السمبلكس الثاني بإدخال المتغيرة الداخلة مكان المتغيرة الخارجة؛

– تتم قسمة قيم سطر الارتكاز (L_p)في الجدول الأول على عنصر الارتكاز نفسه (L_p/P)؛

– قيم عمود الارتكاز في الجدول الأول تصبح أصفاراً في الجدول الثاني($C_p=0$)، ماعدا عنصر الارتكاز الذي يبقى مساويا للواحد($P=1$)؛

– قيم باقي الأسطر يتم حسابها عن طريق ضرب عدد في قيم سطر الارتكاز الجديدة، مع إضافة القيم القديمة للسطر)في الجدول الأول) أي: القيمة الجديدة للسطر= $(a).L_p + L_{initiale}$.

مثال: قيم السطر الثاني يتم حسابها كما يلي:

$(-2)(L_p=1)+(L_i=2)=0$, $(-2)(1/2)+(2)=1$, $(-2)(1)+(1)= -1$,

$(-2)(1/4)+(0)=-1/2$

– يتم الحصول على قيم Z_j عن طريق ضرب معاملات متغيرات الأساس في معاملات المتغيرات في القيود الوظيفية.

مثال: (1×70) + (0×0) + (0×0) = 70، (2/1×70) + (1×0) + (2/1×0) = 35.

– بعدها يتم تحديد قيمة Z إن كانت مثلى، و ذلك إن كانت جميع معاملاتها سالبة أو معدومة، و في حالتنا هذه، قيمة Z ليست مثلى لأن هناك قيمة موجبة (5)، و عليه يتم إنشاء جدول سمبلكس ثالث بغية تحسين الحل مرة أخرى، و ذلك بدءً بحساب قيم R_i و تحديد المتغيرة الداخلة و الخارجة.

– تتم قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول الثاني كما يلي:

متغيرات الأساس: $x_1=250,\ \ S_2=300,\ \ S_3=150$

متغيرات خارج الأساس: $x_2=0,\ \ x_3=0,\ \ S_1=0$

و عليه و بالاعتماد على الخطوات السابقة يتم الانتقال من أول حل أساس مقبول ذو $Z=0$ إلى حل أساس مقبول آخر ذو $Z=17500$، أي يتم تحسين الحل الأول.

1– 6–تشكيل جدول السمبلكس الثالث:

تمثل x_2 المتغيرة الداخلة في هذه الحالة لأنها توافق أكبر معامل لـ Z و S_3 هي المتغيرة الخارجة لأنها توافق أدنى قيمة لـ R_i، و عليه فإن نقطة تقاطع سطر الارتكاز (المتغيرة الخارجة) و عمود الارتكاز (المتغيرة الداخلة) تمثل نقطة الارتكاز P=5/2.

الجدول رقم 04: جدول السمبلكس الثالث للمثال 04–01

$C_j \rightarrow$ ↓		70	40	60	0	0	0	b_i	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		R_i
70	x_1	1	0	1	3/10	0	–1/5	220	
0	S_2	0	0	–1	-2/5	1	-2/5	240	
40	x_2	0	1	0	–1/10	0	2/5	60	
$Z_j=\sum C_j\, x_j$		70	40	70	17	0	2	Z = 17800	
$Z=C_j-Z_j$		0	0	–10	–17	0	–2		

المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال

من جدول السمبلكس الثالث نجد أن حل الأساس المقبول المحسن هو:

$$x_1=220, \quad x_2=60, \quad S_2=240, \quad x_3=0, \quad S_1=0, \quad S_3=0 \;\Rightarrow\; Z = 17800$$

– بالنسبة لـ Z نجد أنه لا يمكننا تحسين الحل مرة أخرى لأن النموذج تعظيم، و إذا أخذنا المتغيرة x_3 فإننا سوف نُخفض Z بـ (-10) لكل وحدة من x_3، لذا نتوقف؛

– بما أن جميع معاملات متغيرات النموذج لـ Z سالبة أو معدومة فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل (لأن اختيار أي وحدة أخرى سوف يؤدي إلى تخفيض قيمة دالة الهدف)؛

– إذا كانت معاملات متغيرات النموذج من نوع تعظيم Max سالبة أو معدومة، فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل، أما في النموذج من نوع تدنية Min فإننا نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كافة المعاملات موجبة أو معدومة.

إن الهدف من طريقة السمبلكس هو الوصول إلى الحل الأمثل كالطرق السابقة، إلا أن هذه الطريقة تنطلق من أول حل أساس مقبول و تمر على بعض حلول الأساس المقبولة إلى أن تصل إلى الحل الأمثل.

نشير إلى أن طريقة السمبلكس تشترط بغرض تطبيقها توفر أول حل أساس مقبول، إلا أنه في بعض النماذج لا يتوفر هذا الشرط، و هنا يتم اللجوء إلى طريقة أخرى تُعرف بطريقة $Big\ M$.

I.2. حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التدنية Minimize:

إن حل مشكلات البرمجة الخطية بموجب الطريقة المبسطة Simplex في حالة التدنية دالة الهدف Z أي عندما تكون علامات القيود بصيغة أكبر أو تساوي أو تكتب علامات القيود بصيغة المساواة يتم بواسطة عدة طرق نذكر منها ما يلي :

1- طريقة M الكبيرة BIG –M Method

2- **طريقة المرحلتين**: Two –Phase Method

I.2. 1. طريقة M الكبيرة Big M:

تنطوي فكرة هذه الطريقة على إضافة متغيرات اصطناعية Artificial إلى جانب المتغيرات الراكدة إلى قيود نموذج البرمجة الخطية على أن تقترن المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف Z بمعاملات كبيرة جدا تدعى (M) و تحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التدنية Minimization و إشارة سالبة في حالة التعظيم Maximization.

و لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية بعد إضافة المتغيرات الراكدة إلى قيود النموذج و دالة الهدف، بعدها يتطلب إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود و دالة الهدف أيضا.
2. صياغة دالة هدف جديد Zبدلالة المتغيرات الأساسية الراكدة بعد التعويض عن قيم M الاصطناعية و الراكدة، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة (M) فقط.
3. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن اعتمادا على جميع معاملات المتغيرات الأساسية، الراكدة و الاصطناعية الموجودة في قيود النموذج و دالة الهدف Z.
4. تحديد المتغير الداخل على أساس أكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدفZ.
5. اعتماد بقية الخطوات السابقة و الواردة في حالة التعظيم، ما عدا بعض الاختلافات الطفيفة يمكن توضيحها بالخطوة 6.

6. يمكن الحصول على الحل الأمثل لمشكلة التدنية و ذلك عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة في جدول الحل أقل أو تساوي الصفر، قيم صفرية أو سالبة، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات في الدالة موجبة، فهذا يعني عدم التوصل الى الحل الأمثل.
7. في حالة وجود أحد المعاملات أكبر من الصفر في صف دالة الهدف Z يعاد اجراء الخطوات السابقة من المرحلة 4 الى المرحلة 6 حتى يتم الحصول على جميع المعاملات في صف دالة الهدف Z أقل أو تساوي الصفر مما يعني الحصول على الحل الأمثل.

مثال 01: لدينا النموذج التالي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2$$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 40 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب : أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية.

1. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية الى الصيغة القياسية كالآتي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2 - 0X_3 - 0X_4$$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 - X_3 = 30 \\ 4X_1 + 2X_2 - X_3 = 40 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم X_3 وX_4 ظهرت سالبة وهي $X_3 = -30$ و $X_4 = 40$ مما يتعارض ذلك مع شرط عدم السلبية و لمعالجة هذا الموضوع يتم اضافة المتغيرات الاصطناعية للقيود و دالة الهدف Z.

2. إضافة المتغيرات الاصطناعية لقيود النموذج و دالة الهدف كالآتي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2 - 0X_3 - 0X_4 + MX_5 + MX_6$$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 - X_3 + X_5 = 30 \\ 4X_1 + 2X_2 - X_4 + X_5 = 40 \\ X_1 \ldots\ldots X_6 \geq 0 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية

M : عدد كبير جدا

3. صياغة دالة الهدف Z بدلالة المتغيرات الأساسية و الراكدة فقط على النحو الآتي:

من المعادلتين 1 و 2 نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} X_5 &= 30 - X_1 - 3X_2 + X_3 \\ X_6 &= 40 - 4X_1 - 2X_2 + X_4 \end{aligned}\right\} \dots (3)$$

نعوض قيم X_5 و X_6 الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف Z نستنتج ما يلي:

$Z= 2 X_1 + X_2 +M (X_5 + X_6)$

$= 2 X_1+ X_2+M (30- X_1-3 X_2+ X_3)+(40-4 X_1-2 X_2+ X_4)$

$= 2 X_1+ X_2+M (70-5 X_1-5 X_2+ X_3+ X_4)$

$=2 X_1+ X_2+70M -5M X_1-5M X_2+M X_3+M X_4$

$=(2-5M) X_1+(1-5M) X_2+M X_3+M X_4)+70M$

$Z-(2-5M) X_1-(1-5M) X_2-M X_3-M X_4=70M$

4. تصميم جدول السمبلكس :

جدول رقم 05 : جدول السمبلكس للمثال رقم 01

العمود المحوري

العنصر المحوري

الصف المحوري

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Bi	R_i
X5	1	3	−1	0	1	0	30	10
X6	4	2	0	−1	0	1	40	20
Z	**(−2+5M)**	**(−1+5M)**	**−M**	**−M**	**0**	**0**	70M	
X1	1/3	1	− 1/3	0	1/3	0	10	30
X6	10/3	0	2/3	−1	−2/3	1	20	6
Z	**(−5/3+10/3M)**	**0**	**(−1/3+2/3M)**	**−M**	**(1/3−5/3M)**	**0**	10+20M	
X2	0	1	−2/5	1/10	2/5	−1/10	8	
X1	1	0	1/5	−3/10	−1/5	3/10	6	
Z	0	0	0	−1/2	-M	(1/2-M)	20	

المصدر : من اعداد الباحث ياستخدام معطيات المثال رقم 01

- المتغير الداخل هو الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف Z بعد التعويض عن M=10 أو أحد مضاعفاتها
- بما أن جميع معاملات صف دالة الهدف Z أقل أو تساوي الصفر عليه فقد توصلنا للحل الأمثل للنموذج و الذي يكون فيه $Z=20$ $X_2=8$ $X_1= 6$
- يتضح من النتائج النهائية المتعلقة بحل المشكلة بأن إدارة المؤسسة الإنتاجية ستتخذ قرار بإنتاج 6 وحدات من X_1 و 8 وحدات من X_2 بما يحقق للمؤسسة أقل التكاليف بمقدار 20 و ن .

I.2 .2. طريقة المرحلتين :

تعد طريقة المرحلتين أبسط من طريقة Big-M أي Mالكبيرة في إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في حالة التدنية إذ يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج بعد أن نتأكد بأن هناك حل للنموذج و ذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة (r) مساوية للصفر أي أن $r = 0$.

و يتم الحل بموجب هذه الطريقة على مرحلتين أساسيتين يتم توضيحهما على النحو الآتي:

المرحلة (1) :

1.تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية و من تم اضافة المتغيرات الاصطناعية لقيود النموذج فقط .

2.صياغة دالة الهدف جديدة بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية أي:

$$r_{min} = r_1 + r_2 + \dots\dots\dots\dots r_m$$

3.تصميم جدول يتضمن الحل الأولي اعتمادا على معاملات المتغيرات الأساسية و المكملة و الاصطناعية في قيود النموذج و دالة الهدف الجديدة r.

4.نتبع الخطوات السابقة حتى نحصل على قيمة $r = 0$ مما يعني وجود حل للنموذج و المقترنة في كونه $C_j \leq 0$ لجميع المعاملات دالة الهدف r.

المرحلة (2):

1. اعتماد الحل الأساسي النهائي في الخطوة 4 من المرحلة الأولى بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية و دالة الهدف r .

2. اعتماد دالة الهدف الاصلية Zو تحسين قيمتها للحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

3. في حالة وجود أحد المعاملات C_j أكبر من الصفر في صف دالة الهدف Z، يعاد إجراء نفس الخطوات حتى يتم الحصول على جميع المعاملات C_j أقل أو تساوي الصفر أي أن ($C_j \leq 0$) مما ينبغي الحصول على الحل الأمثل للنموذج.

مثال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة المرحلتين:

$$Z_{Min} = 2X_1 + X_2$$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 40 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة الاولى (المرحلة الاولى) :

1) تحويل النموذج من الصيغة القانونية الى الصياغة القياسية كالآتي:

$$Z_{Min} = 2X_1 + X_2 - 0X_3 - 0X_4$$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 - X_3 + X_5 = 30 \ldots\ldots (1) \\ 4X_1 + 2X_2 - X_4 + X_6 = 40 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

2) صياغة دالة هدف جديدة r اعتمادا على X_5 ، X_6 مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط اذن:

$$\left.\begin{matrix} 1 \Rightarrow X_5 = 30 - X_1 - 3X_2 + X_3 \\ 2 \Rightarrow X_6 = 40 - 4X_1 - 2X_2 + X_4 \end{matrix}\right\} \ldots . \mathbf{(3)}$$

نعوض قيمة X_5،X_6 الواردة بالعلاقة 3 في دالة الهدف الجديدة r كالآتي:

$$r = X_5 + X_6 = 30 - X_1 - 3X_2 + X_3 + 40 - 4X_1 - 2X_2 + X_4$$

$$r = 70 - 5X_1 - 5X_2 + X_3 + X_4$$

$$r + 5X_1 + 5X_2 - X_3 - X_4 = 70$$

تصميم الحل الأساسي (الحل الأولي) كما يلي:

جدول رقم 06 : جدول الحل الاولي

م.أ	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Bi	R_i
X_5	1	3	−1	0	1	0	30	30
X_6	4	2	0	−1	0	1	40	10
r	5	5	−1	−1	0	0	70	
X_5	0	5/2	−1	¼	1	– ¼	20	8
X_1	1	½	0	– ¼	0	¼	10	20
r	0	5/2	−1	¼	0	−5/4	20	
X_2	0	1	−2/5	1/10	2/5	−1/10	8	
X_1	1	0	1/5	-3/10	−1/5	3/10	6	
r	0	0	0	0	−1	−1	0	

المصدر : من اعداد الباحث باستعمال معطيات المثال رقم 01

بما أن قيمة دالة الهدف r=0 و التي اقترنت بأن جميع المعاملات في صف دالة الهدف r سالبة و مساوية للصفر, أي أن ($C_j \leq 0$) مما يدل على وجود حل للنموذج و ينبغي الاستمرار بالمرحلة الثانية (2) .

المرحلة الثانية:

1. اعتماد النتائج النهائية الواردة في جدول الحل 3 من المرحلة الاولى بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية $X_6.X_5$ و دالة الهدف r من الجدول المذكور

2. اعتماد دالة الهدف Z الأصلية للمشكلة و هي:

$$Z= 2X_1 +X_2 -0X_3 -0X_4$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b_i
X_2	0	1	-2/5	1/10	|	|	8
X_1	1	0	1/5	-3/10	|	|	6
	2	1	0	0			0

3. نقوم بكتابة القيود اعتمادا على النتائج النهائية الواردة بالجدول السابق و على النحو التالي:

$X_2-2/5\ X_3+1/10\ X_4 =8 \ldots\ldots\ldots(1)$

$X_1+1/5\ X_3-3/5\ X_4 =6 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

من 1 و 2 نحصل علىX_1 ، X_2 كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 8+\frac{2}{5}X_3-\frac{1}{10}X_4 \\ X_1 &= 6-\frac{1}{5}X_3+\frac{3}{10}X_4 \end{aligned}\right\} \ldots .(3)$$

نعوض قيم X_1 x و X_2 x الواردة في العلاقة 3 في دالة الهدف الأصلية Z نستنتج ما يلي:

$$Z= 2X_1+ X_2$$

$$=2\ (6-1/5\ X_3 + 6/10\ X_4) +(8+2/5\ X_3 -1/10\ X_4)$$

$$=12-2/5\ X_3+6/10\ X_4+8+2/5\ X_3-1/10\ X_4$$

$$=20+5/10\ X_4$$

$$=20+1/2\ X_4$$

$$\Rightarrow Z - \frac{1}{2}X_4 = 20$$

م.أ	X_1	X_2	X_3	X_4	b_i
X_2	0	1	-2/5	1/10	8
X_1	1	0	1/5	-3/10	6
Z	0	0	0	-1/2	20

يتضح من النتائج السابقة بأن إدارة المؤسسة الإنتاجية ستتخذ قرار بإنتاج 6 وحدات منX_1 و 8 وحدات من X_2 بما يجعل التكاليف النهائية أقل ما يمكن حيث تقدر ب 20 ون.

$$Z^*=20 \quad X_1^*=6 \quad X_2^*=8$$

جميع معاملات دالة الهدف (C_j) أقل أو يساوي الصفر أي $C_j \leq 0$ و عليه فقد توصلنا إلى الحل الأمثل التالي: $X_2^*=8 \qquad X_1^*=6 \qquad Z^*=20$

I.2. 3. الطريق الثالثة:

هذه الطريقة كذلك تنطوي على فكرة اضافة متغيرات اصطناعية إلى جانب المتغيرات الراكدة إلى قيود نموذج البرمجة الخطية، لكن وفق هذه الطريقة معاملات المتغيرات الاصطناعية تكون مساوية للصفر في دالة الهدف و مساوية للواحد في قيود نموذج البرمجة الخطية، و لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية بعد إضافة المتغيرات الراكدة إلى قيود النموذج بمعاملات مساوية للواحد و إلى دالة الهدف بمعاملات مساوية للصفر.
2. إضافة متغيرات اصطناعية إلى القيود و دالة الهدف أيضا و بالتالي تشكيل مصفوفة أحادية موجبة للمتغيرات الاصطناعية.

3. صياغة دالة هدف جديدة نرمز لها بالرمز r بدلالة المتغيرات الأساسية و الراكدة و الاصطناعية، بحيث دالة الهدف الجديدة نحصل عليها من خلال جمع قيود النموذج التي تم إضافة متغيرات اصطناعية لها، أي حاصل جميع القيود التي تحتوي على المتغيرات الاصطناعية .

4. جعل دالة الهدف دالة صفرية أي مساوية للصفر.

5. تصميم جدول الحل الاساسي الممكن اعتمادا على جميع معاملات المتغيرات الأساسية، الراكدة و الاصطناعية الموجودة في قيود النموذج و دالة الهدفZ و دالة الهدف r .

6. تحديد المتغير الداخل على أساس أكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف الجديدة r .

7. اعتماد بقية الخطوات السابقة و الواردة في حالة التعظيم أو في حالة التدنية وفق الطريقتين السابقتين ماعدا بعض الاختلافات يمكن توضيحها في الخطوة التالية.

8. نحصل على الحل الأمثل عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة Z مساوية للصفر و كذلك قيمة r تساوي الصفر. أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات في الدالة تختلف عن الصفر فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل و من ثم يعاد اجراء الخطوات السابقة حتى يتم الحصول على جميع المعاملات في صف دالة الهدف الجديدة r مساوية للصفر و كذلك قيمة r تساوي الصفر مما يعني الحصول على الحل الأمثل.

مثال: نأخذ نفس المثال السابق:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2$$

$$\text{ST:} \begin{cases} X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 40 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية .

الحل:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية الي الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الراكدة

$$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2 - 0X_3 - 0X_4$$

$$ST: X_1 + 3X_2 - X_3 = 30$$

$$4X_1 + 2X_2 - X_4 = 40$$

$$X_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

2. إضافة المتغيرات الاصطناعية:

$$\text{Min}Z = 2X_1 + X_2 - 0X_3 - 0X_4 + 0X_4 + 0X_5$$

$$ST: X_1 + 3X_2 - X_3 \quad + X_4 \quad = 30$$

$$4X_1 + 2X_2 \quad - X_4 \quad + X_5 = 40$$

$$X_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

3. تحويل دالة الهدف الى دالة صفرية:

$$Z - 2X_1 - X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 0X_4 - 0X_5$$

4. تكوين دالة هدف جديدة (r)

r= الجمع بين قيود النموذج التي تحتوي على المتغيرات الاصطناعية

$$r = 5X_1 + 5X_2 - X_3 - X_4 + X_4 + X_5 = 70$$

5. تصميم جدول الحل الاساسي الممكن أي جدول simplex كما يلي:

الجدول رقم 08: جدول الحل الاساسي الممكن أي جدولsimplex

م.أ	X1	x2	x3	x4	x5	x6	Bi	R_i
X5	1	3	-1	0	1	0	30	10
X6	4	2	0	-1	0	1	40	20
Z	-2	-1	0	0	0	0	0	
r	5	5	-1	-1	1	1	70	
X2	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10	30
X6	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20	6
Z	-5/3	0	-1/3	0	1/3	0	10	
r	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20	
X2	0	1	-6/15	1/10	6/5	-1/10	8	
X1	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6	
Z	0	0	0	-1/2	0	½	20	
r	0	0	0	0	0	0	0	

المصدر : من اعداد الباحث باستعمال معطيات المثال

نلاحظ أن جميع معاملات دالة الهدف الجديدة r تساوي الصفر أي قيم صفرية لدالة الهدف الجديدة كما أن قيمة r تساوي الصفر و بالتالي فقد توصلنا إلى الحل الأمثل الممثل بالنتائج التالية:

$$\text{Min } Z^{*}=20 \qquad X_1^{*}=6 \qquad X_2^{*}=8$$

ملاحظات :

- المتغيرات الراكدة او المكملة تاخد الرمز S أو الرمز X وفق ترتيب عدد المتغيرات الأساسية .
- المتغيرات الاصطناعية تأخذ الرمز R أو الرمز X وفق ترتيب عدد المتغيرات الأساسية و الراكدة.
- قراءة النتائج المتحصل عليها في العمود b_i .

- ادا كان النموذج من نوع تعظيم (MAX) فان قراءة نتائج النموذج المرافق له يكون في سطر الدلائل Z حيث تكون مقابلة لقيم المتغيرات المكملة اي الراكدة .
- ادا كان النموذج من نوع تدنية (MIN) فان قراءة نتائج النموذج المرافق له يكون في سطر الدلائل Z حيث تكون مقابلة لقيم المتغيرات الاصطناعية .

II. المشكلة المقابلة (الثنائية Dual Problem)

إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الاولية Primal Models، و من الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل (الثنائي) Dual, إذ أن لكل نموذج يوجد نموذج آخر يقابله.

II. 1. مميزات النموذج المقابل (الثنائي):

من مميزات النموذج المقابل ما يلي:

- يساعد النموذح المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان و ذلك بتقليص خطوات الحل؛
- يمكن إيجاد الحل الأمثل في النموذج المقابل عند وجود متغير أساسي في النموذج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل النموذج الأولي إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأولي قيمة سالبة؛
- يساعد النموذج المقابل إلى إجراء تحليل ما بعد الأمثلية و التوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمشكلة أو إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

II. 2. تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل و بالعكس:

لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المرافق و بالعكس يمكن ذلك باتباع الخطوات الآتية:

1. إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي من نوع التعظيم Max فإنها تقلب إلى نوع التدنية Min في النموذج المقابل و العكس صحيح؛
2. عدد المتغيرات في النموذج الأولي يكون مساويا لعدد القيود في النموذج المقابل؛
3. عدد القيود في النموذج الأولي يكون مساويا لعدد المتغيرات في النموذج المقابل؛

4. إذا كانت القيود في النموذج الأولي على شكل أكبر أو يساوي فإنها تتغير في النموذج المقابل إلى أقل أو يساوي و العكس صحيح أيضا؛

5. معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي تصبح قيم الجوانب اليمنى لقيود النموذج المقابل و قيم الجانب الأيمن في النموذج الأولي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل؛

6. معاملات العمود j في النموذج الأولي هي عبارة عن معاملات الصف في النموذج المقابل؛

7. إبدال مصفوفة معاملات المتغيرات في قيود النموذج الأولي (a i j) بحيث تصبح الصفوف أعمدة، و الأعمدة صفوف؛

8. إضافة شرط عدم السلبية على المتغيرات الجديدة أي أن $Y_j \geq 0 , \forall j$

ملاحظات:

- في حالة النموذج الأولي، إذا كان عدد المتغيرات= n و عدد القيود = m فإنه سيصبح في حالة النموذج المقابل عدد المتغيرات = m و عدد القيود = n.
- عند تحويل النموذج الأولي Primal إلى النموذج المقابل Dual يجب مراعاة ما يأتي:
  - يتطابق الحل الأمثل للنموذج الأولي مع الحل الأمثل للنموذج المقابل (Zmax=Zmin) , Optimal Solution.
  - عند ايجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل Dual فإنه بالإمكان الحصول على الحل الأمثل للنموذج الأولي Primal مباشرة من جدول الحل النهائي للنموذج المقابل Dual و يتمثل هذا الحل بمعاملات دالة الهدف النموذج المرافق التي تقع تحت المتغيرات الراكدة أو الاصطناعية.

مثال:

$$Z_{Max}=X_1+3X_2-2X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 10 \\ X_1 + 4X_2 \leq 12 \\ 3X_1 + 5X_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$X_1 , X_2, X_3 \geq 0$$

II. 3.صياغة المشكلة المقابلة الثنائية أي النموذج المقابل

نفرض لدينا النموذج التالي (Primal):

$$Z_{Max}=C_1X_1+C_2X_2$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \ \leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \ \leq b_2 \\ X_1, X_2 \ \leq 0 \end{cases} \qquad \text{Primal}$$

$$X_1 , X_2, X_3 \geq 0$$

النموذج المقابل Dual:

$$Z_{Min}=b_1Y_1 +b_2Y_2$$

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 \ \leq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 \ \leq C_2 \\ Y_1, Y_2 \ \leq 0 \end{cases}$$

و عليه الصيغة العامة للمشكلة الأولية هي:

$$Z_{max} = \sum C_j X_j$$

$$\sum aij\ X_i \leq \ b_j$$

$$X_j \geq 0$$

حيث:

j=1…………n   i=1………..m

فإن الصيغة العامة للمشكلة المقابلة (الثنائية) تكون كالآتي:

$$Z_{min} = \sum b_j Y_j$$

$$\sum aij\ Y_i \leq C_j$$

$$Y_j \geq 0$$

حيث:

j=1.2...........n   i=1.2........m

مثال(1):

لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي Primal :

Max $Z= X_1+3X_2-2X_3$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 10 \\ X_1 + 4X_2 \leq 12 \\ 3X_1 + 5X_3 \leq 18 \end{cases}$$

$X_j \geq 0$ (j = 1, 2, 3)

المطلوب: أوجد النموذج المرافق Dual .

الحل:

Min $Z=10Y_1+12Y_2+18Y_3$

$$\begin{cases} 2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \leq 1 \\ Y_1 + 4Y_2 + 0Y_3 \leq 3 \\ 2Y_1 + 0Y_2 + 5Y_3 \leq -2 \end{cases}$$

$Y_j \geq 0$ (j = 1, 2, 3)

مثال(2):

لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي Primal :

$$\text{Min } Z = 300X_1 + 200X_2$$

ST:

$$\begin{cases} 10X_1 + 20X_2 \leq 100 \\ 15X_1 + 12X_2 \leq 150 \\ 16X_1 + 18X_3 \leq 200 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد النموذج المرافق Dual.

الحل:

$$\text{Max } Z = 100Y_1 + 150Y_2 + 200Y_3$$

ST:

$$\begin{cases} 10Y_1 + 20Y_2 + 16\,Y_3 \leq 300 \\ 20Y_1 + 12Y_2 + 18\,Y_3 \leq 200 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال(3):

لدينا النموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

ST:

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 20 \\ X_1 + 3X_2 \leq 18 \\ 2X_2 - 2X_3 \leq 10 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد النموذج المرافق Dual.

الحل:

نلاحظ أن القيد من نوع أكبر أو يساوي(≥) و الدالة من شكل التعظيم Max الى نوع أصغر أو يساوي(≤) بالشكل التالي نضرب القيد الثالث في (1-)

$$(2X_2 - 2X_3 \geq 10) * (-1) \Rightarrow -2X_2 + 2X_3 \leq -10$$

و بالتالي يصبح نموذج البرمجة الخطية Primal كما يلي:

$$Max\ Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

ST:

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 20 \\ X_1 + 3X_2 \leq 18 \\ -2X_2 + 2X_3 \leq -10 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

نقوم بتحويل البرمجة الخطية Primal إلى النموذج المرافق Dual نتحصل على ما يلي:

$$Min\ Z = 20Y_1 + 18Y_2 - 10Y_3$$

ST:

$$\begin{cases} 2Y_1 + Y_2 \geq 1 \\ 2Y_1 + 3Y_2 - 2Y_3 \geq 2 \\ Y_1 + 2Y_3 \geq -3 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال(4):

لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي Primal:

$$Max\ Z = 10X_1 + 12X_2$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 = 15 \\ 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد النموذج المرافق Dual.

الحل:

إذا كان أحد القيود على شكل مساواة و بالتالي يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين أحدهما أقل أو يساوي ($\leq$) و الآخر أكبر أو يساوي($\geq$) و بالتالي يكون أحد القيدين غير متناسب مع دالة الهدف، حيث إذا كانت دالة من نوع التعظيم Max أو التدنية Min فإنه يتطلب ضرب القيد الغير متناسب في القيمة (-1) و من تم إجراء العملية التحويل إلى النموذج المرافق.

في هذا المثال لدينا القيد الأول على شكل مساواة و بالتالي نحول هذا القيد إلى قيدين أحدهما على شكل أقل من أو يساوي ($\leq$) و الآخر أكبر من أو يساوي ($\geq$)، كما أن دالة الهدف من نوع تعظيم Max و بالتالي نضرب القيد من شكل أكبر من أو يساوي في القيمة (-1) و نلخص ذلك كما يلي:

1. **تحويل قيد المساواة الى قيدين**

$$3X_1 + 2X_2 = 15 \ \Rightarrow \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \ \leq 15 \\ 3X_1 + \ 2X_2 \ \geq 15 \end{cases}$$

2. **ضرب القيد من شكل أكبر من أو يساوي في القيمة (-1) فيصبح نموذج البرمجة الخطية كما يلي:**

$$\text{Max } Z = 10\, X_1 + 12\, X_2$$

ST :

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 15 \\ -3X_1 - 2X_2 \leq -15 \\ 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. النموذج المرافق **Dual**

$$\text{Min } Z=15Y_1-15Y_2+10Y_3$$

$$\begin{cases} 3Y_1-3Y_2+2Y_3 \geq 10 \\ 2Y_1-2Y_2+Y_3 \geq 12 \\ Y_1,Y_2,Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن عدد القيود في النموذج الأولي Primal لا يساوي عدد المتغيرات في النموذج المرافق Dual و بالتالي نقوم ب عملية تغيير المتغير بحيث: $Y_1' = Y_1 - Y_2$ $\quad$ $Y_3 = Y_2'$

و نحصل على ما يلي:

$$\text{Min } Z= 15Y_1'+10Y_2'$$

ST :

$$\begin{cases} 3\,Y_1'+2Y_2' \geq 10 \\ 2\,Y_1'+Y_2' \geq 12 \\ Y_1',Y_2' \geq 0 \end{cases}$$

III.تحليل الحساسية

بعد دراسة مشكلة البرمجة الخطية و بناء النموذج الرياضي لها ثم التوصل إلى الحل الأمثل قد تطرأ بعض التغييرات على النموذج الأولي فمثلا لو كان نموذج البرمجة الخطية يمثل نشاطات مشروع معين و بعد إيجاد الحل الأمثل له حدثت بعض التغييرات في ظروف المشروع على سبيل المثال حصلت زيادة في الموارد المتاحة (زيادة في الوقت المتاح، عدد العمال) أو إنتاج منتوج جديد أو غير ذلك مما يتطلب إعادة حل النموذج للمشكلة بعض إضافة التغيرات الجديدة.

إن إعادة حل النموذج يحتاج إلى وقت طويل و لكن يمكن استخدام طريقة لا تتطلب إعادة الحل بكامله و ذلك باستخدام ما يسمى بتحليل الحساسية أو يسمى أيضا تحليل ما بعد الأمثلية، ويمكن تعريف تحليل الحساسية بأنه عبارة عن دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على نموذج البرمجة الخطية.

في هذا الفصل سيتم توضيح استخدام تحليل الحساسية و ذلك بعد دراسة التغيرات التي تحدث على النموذج الأولي بالاعتماد على آخر جدول لآخر دورة من دورات الحل و بعض الحصول على الحل الأمثل من دون اللجوء إلى إعادة الحل بكامله مرة أخرى. أما التغيرات التي يمكن على نموذج البرمجة الخطية هي:

- التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة)؛
- التغيرات في معاملات دالة الهدف؛
- التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود؛
- إضافة متغير أو متغيرات جديدة؛
- إضافة قيد أو قيود جديدة.

III.1.التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة)

مثال:

$$\text{Max } Z = 30\,X_1 + 50\,X_2$$

النتائج:

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \le 16 \\ X_1 + 2X_2 \le 11 \\ X_1 + 3X_2 \le 15 \\ \quad X_1, X_2 \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X_1 &= 7 \\ X_2 &= 2 \\ X_1 = X_2 &= 0 \\ X_3 &= 2 \\ Z &= 310 \end{aligned}$$

و هذه النتائج مبينة في جدول الحل الأخير كالآتي:

متغيرات القرار	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b_i
X_5	0	0	1/3	-5/3	1	2
X_1	1	0	2/3	–1/3	0	7
X_2	0	1	–1/3	2/3	0	2
Z	0	0	10/3	70/3	0	310

لو افترضنا أن الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير من $\begin{pmatrix}16\\11\\15\end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix}20\\11\\15\end{pmatrix}$ أي أن المورد الأول قد ازداد من 16 إلى 20 لدراسة تأثير هذا التغير على الحل الأمثل للمشكلة نقوم بما يلي:

من الجدول الأخير الذي حصلنا منه على الحل الأمثل نأخذ مصفوفة المتغيرات المكملة و يتم ضرب هذه المصفوفة في المتجه العمودي الجديد لنحصل على:

$$\begin{pmatrix}S_3\\X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -5/3 & 1\\ 2/3 & -1/3 & 0\\ -1/3 & 2/3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\11\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20/3 & -55/3 & +15\\ 40/3 & -11/3 & +0\\ -20/3 & +22/3 & +0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/3\\29/3\\2/3\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن جميع قيم العمود الناتج موجبة و يعني ذلك أن الحل لا يزال ممكنا بالقيم الجديدة أما الحل الناتج هو:

$X_1= 29/3$ $X_2= {}^{2}/_{3}$ $S_1= S_2 = 0$ $S_3= 10/3$

أما قيمة Z فنحصل عليها بالتعويض كما يلي:

$$Z = 30\ (29/3)\ + 50\ (2/3) = 323{,}33$$

لو أخذنا نتيجة الحل للنموذج المقابل من الجدول الأخير للمثال نحصل على:

$Y_1 = X_1 = 10/3$ $\quad$ $Y_2 = X_2 = {}^{70}/_{3}$ $\quad$ $Y_3 = X_3 = 0$ $\quad$ $Z = 310$

يتبين لنا أن زيادة وحدة واحدة من المورد الأول تؤدي إلى زيادة في دالة الهدف بمقدار $10/3$ و أن ذلك يتحقق في حالتنا هذه حيث أن المورد الأول قد ازداد بمقدار 4 و حصلنا على الآتي:

$$Z = (10/3)\ 4 + 310 = 323,33$$

كذلك فإن زيادة وحدة واحدة في المورد الثاني تؤدي إلى زيادة في دالة الهدف بمقدار $70/3$ ، أما المورد الثالث فإن أية زيادة فيه لا تحقق زيادة في دالة الهدف. إن الزيادة في أي مورد من الموارد المتاحة تكون محددة، إذ قد تؤدي الزيادة الكبيرة إلى حل غير أمثل، و لغرض تحديد مقدار الزيادة الممكنة لأي مورد، في حالتنا هذه الزيادة الممكنة للمورد الأول تتبع الخطوات الآتية:

- نفرض أن مقدار الزيادة في المورد الأول هي B، فإن هذه الزيادة تتحقق إذا تحقق الآتي:

$$\begin{pmatrix} S_3 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16+B \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+B/3 \\ 7+\ 2/3\,B \\ 2-\ B/3 \end{pmatrix}$$

إن الزيادة في المورد الأول بمقدار وحدة واحدة تؤدي إلى زيادة في قيمة X_1 بمقدار $2/3$ و تقليل في قيمة X_2 بمقدار $1/3$ و عليه يجب التوقف عندما تصبح قيمة المتغير X_2 مساوية إلى الصفر و عدم السماح بأن تصبح قيمتها سالبة لأن ذلك يؤدي إلى حل غير ممكن، لذلك يتم استخراج قيمة B من القيمة المقابلة ل X_2 بعد مساواتها إلى صفر كما يلي:

$$2-\ B/3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B} = 6$$

و عليه فإن أعلى زيادة في المورد الأول هي 6 لكي يبقى الحل ممكنا. وعند تعويض قيمة B في قيم العمود الناتج تحصل على ما يلي:

$$S_3 = 2 + 6/3 = 4$$

$$X_1 = 7 + 6(\ 2/3) = 11$$

$$X_2 = 2 - 6/3 = 0$$

و بنفس الطريقة يمكن أن تحدد الزيادة في أي مورد من الموارد الأخرى.

- في حالة وجود أكثر من مورد تؤثر فيه الزيادة في مورد معين إلى نقصان في قيمته يتم استخراج قيمة B منها و من تم يتم اختيار أقل قيمة ل B لإعتمادها.

و لنفرض الآن أن المورد الثاني تم تخفيضه بمقدار 4 أي أصبح مقداره 7 بدلا من 11 و تغير الجانب الأيمن من

$\begin{pmatrix}16\\11\\15\end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix}16\\7\\15\end{pmatrix}$.

و لملاحظة تأثير ذلك على الحل نقوم بما يلي:

$$\begin{pmatrix}S_3\\X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -5/3 & 1\\ 2/3 & -1/3 & 0\\ -1/3 & 2/3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\7\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26/3\\25/3\\-\ 2/3\end{pmatrix}$$

لقد ظهرت قيمة سالبة في عمود b_i و أن الحل غير ممكن بسبب ذلك كما هو موضح في الجدول الآتي:

متغيرات القرار	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
X_5	0	0	1/3	-5/3	1	26/3
X_1	1	0	2/3	–1/3	0	25/3
X_2	0	1	-1/3	2/3	0	-2/3
Z	0	0	10/3	70/3	0	310

و من الممكن تطبيق الطريقة المبسطة للنموذج المقابل للتخلص من القيمة السالبة و إيجاد الحل الأمثل.

III.2.التغير في معاملات دالة الهدف

نفرض أن دالة الهدف للمشكلة في المثال السابق قد تغيرت من $\text{Max } Z = 30\ X_1 + 50\ X_2$ إلى $\text{Max } Z = 35\ X_1 + 55\ X_2$. لتصبح:

Max Z = 35 X_1 + 55 X_2 Min Z = 16 Y_1 + 11 Y_2 + 15

Y_3

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 16 \\ X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ X_1 + 3X_2 \leq 15 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 35 \\ Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 55 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

و لغرض إيجاد قيم Y_1، Y_2، Y_3 نضرب المصفوفة تحت المتغيرات المكملة للجدول الأخير للمشكلة الأصلية في معاملات المتغيرات في دالة الهدف الجديدة كالآتي:

$$(Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3) = (0 \quad 35 \quad 55) \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = (5 \quad 25 \quad 0)$$

و لحساب قيمة معامل X_1، X_2 يتم ذلك بأخذ الفرق بين الطرف الأيمن و الطرف الأيسر لقيود النموذج المقابل كالآتي:

معامل X_1:

$$2\,Y_1 + Y_2 + Y_3 - 35 = 2\,(5) + 25 + 0 - 35 = 0$$

معامل X_2:

$$Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 - 55 = 5 + 2\,(25) + 0 - 55 = 0$$

كذلك:

X_3= S_1= Y_1 = 5

X_4= S_2= Y_2 = 25

X_5= S_3= Y_3 = 0

أما قيمة دالة الهدف فيتم الحصول عليها كما يلي:

$$\text{Max } Z = 35\,X_1 + 55\,X_2 = 35\,(7) + 55\,(2) = 355$$

$$\text{Ou Min } Z = 16\,Y_1 + 11\,Y_2 + 15\,Y_3 = 16\,(5) + 11\,(25) + 15\,(0) = 355$$

البيانات موضحة في الجدول التالي:

متغيرات القرار	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b_i
X_5	0	0	1/3	–5/3	1	2
X_1	1	0	2/3	–1/3	0	7
X_2	0	1	–1/3	2/3	0	2
Z	0	0	5	25	0	355

نلاحظ أن التغير في دالة الهدف قد أدى إلى تغير في قيم متغيرات النموذج المقابل و قيمة دالة الهدف التي كانت

$$Y_1 = X_3 = 10/3 \qquad Y_2 = X_4 = {}^{70}\!/_{3} \qquad Y_3 = X_5 = 0 \qquad Z = 310$$

لتصبح:

$$Y_1 = 5 \qquad Y_2 = 25 \qquad Y_3 = 0 \qquad Z = 355$$

ملاحظة:

التغير في قيمة دالة الهدف ينعكس على قيم متغيرات النموذج المقابل و قيمة دالة الهدف.

III.3. التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود:

إن التغيرات في معاملات متغيرات القرار تؤثر مباشرة على عناصر مصفوفة الحل و التي تؤثر إلى التعقيد في الحسابات و يمكن أن تؤثر على الجانب الأيسر لقيود النموذج المقابل المتعلقة بها، و قد تجد من الحل الحالي للنموذج حل غير ممكن أو غير مثالي، و عليه فإن تحليل الحساسية في هذه الحالة لن يعطي بيانات مباشرة فيما يتعلق بمثالية أو إمكانية حل النموذج و لذلك يفضل إعادة حل النموذج كنموذج جديد بالطريقة المبسطة Simplexe.

III.4. إضافة متغير أو متغيرات جديدة:

نفرض أننا أضفنا متغير جديد للنموذج الأصلي، حيث معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي 4، 2، 3. أما معامله في دالة الهدف يساوي 40، و عليه يصبح شكل القيد في النموذج المقابل يظهر كما يلي:

Max $Z = 30 X_1 + 50 X_2 + 40 X_3$ Min $Z = 16 Y_1 + 11 Y_2 + 15 Y_3$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 4X_3 \le 16 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 11 \\ X_1 + 3X_2 + 3X_3 \le 15 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Y_1 + Y_2 + Y_3 \ge 30 \\ Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \ge 50 \\ 4Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \ge 40 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

لقد وجدنا سابقا أن الحل الأمثل للنموذج المقابل هو:

$$Y_1 = 10/3 \quad Y_2 = {}^{70}/_{3} \quad Y_3 = 0$$

نعوض النتائج السابقة في القيد (3).

قيد محقق مع قيم الحل الأمثل:

$$4\,(10/3) + 2\,(70/3) + 3\,(0) = 60 \ \ge 40$$

لغرض استخراج معاملات المتغير الجديد X_3 في الجدول الأخير يتم ذلك كما يلي:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و عليه تصبح النتائج كما يلي في الجدول الأخير:

متغيرات القرار	b_i	X_1	X_2	X_3	S_1 X_4	S_2 X_5	S_3 X_6
X_6	2	0	0	1	1/3	-5/3	1
X_1	7	1	0	2	2/3	-1/3	0
X_2	2	0	1	0	-1/3	2/3	0
Z	310	0	0	20	10/3	70/3	0

نلاحظ من الجدول أعلاه أن الحل لا يزال مثاليا و ذلك لأن معامل X_3 في الصف Z موجب.

لنفرض أن معامل X_3 في دالة الهدف هو 65، نجد أن شكل القيد في النموذج المقابل سيكون:

$$4\,Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \geq 65$$

و عليه نعوض قيم الحل الأمثل للنموذج المقابل في القيد الجديد نحصل على ما يلي:

$$4\,(10/3) + 2\,(70/3) + 3\,(0) \geq 65$$
$$60 \ngeq 65$$

نلاحظ أن القيد لا يتحقق مع قيم الحل الأمثل للنموذج أما النتائج في الجدول الأخير فتظهر كما يلي:

متغيرات القرار	b_i	X_1	X_2	X_3	S_1 X_4	S_2 X_5	S_3 X_6
X_6	2	0	0	1	1/3	-5/3	1
X_1	7	1	0	2	2/3	-1/3	0
X_2	2	0	1	0	-1/3	2/3	0
Z	310	0	0	-5	10/3	70/3	0

نلاحظ أن الحل لا يتحقق لأن معامل X_3 في الصف Z سالب و مقداره (-5) كما هو موضح في الجدول أعلاه.

للحصول على الحل الأمثل لابد من حل الجدول أعلاه باختيار X_3 كمتغير داخل و تكملة الحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

5.III. إضافة قيد أو قيود جديدة:

لدراسة مدى تأثير إضافة قيد جديد إلى المشكلة و في حالة تحقق هذا القيد باستخدام قيم الحل الأمثل يمكن في هذه الحالة اعتبار هذا القيد هو قيدا فائضا لا يؤثر على الحل. مثلا لنفرض أن القيد المراد إضافته للمشكلة (للنموذج) هو:

$$X_1 + 4X_2 \leq 16$$

و بتعويض قيم X_1، X_2 نحصل على ما يلي:

$$7 + 4\,(2) \leq 16 \;\Rightarrow\; 15 \leq 16$$

نجد أن القيد يتحقق، و عليه يمكن اعتبار هذا القيد هو قيدا فائضا لا تأثير له على الحل الأمثل.

إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كما يلي:

$$X_1 + 4X_2 \leq 13$$

و بتعويض قيم X_1، X_2 نحصل على ما يلي:

$$7 + 4\,(2) \leq 13 \;\Rightarrow\; 15 \nleq 13$$

القيد لا يتحقق.

لغرض دراسة تأثير هذا القيد على النموذج يتم إضافة معادلة القيد الجديد و هو: $X_1 + 4X_2 + X_6 = 13$ إلى الجدول الأخير للنموذج بعد استخراج قيم X_1 و X_2 و تعويضهما في القيد الجديد للحصول على قيم الصف X_6.

صف X_1 في الجدول هو: $1X_1 + 0X_2 + 2/3\,X_3 - 1/3\,X_4 + 0X_5 = 7$

$$\Rightarrow X_1 = 7 - 2/3\,X_3 + 1/3\,X_4$$

صف X_2 في الجدول هو: $X_2 - 1/3\,X_3 + 2/3\,X_4 = 2$

$$\Rightarrow X_2 = 2 + 1/3\,X_3 - 2/3\,X_4$$

نعوض X_1 و X_2 في القيد الجديد نحصل على ما يلي:

$$(7 - 2/3\ X_3 + 1/3\ X_4) + 4(2 + 1/3\,X_3 - 2/3\,X_4) + X_6 = 13$$

$$\Rightarrow X_6 + 2/3\,X_3 - 7/3\,X_4 = -2$$

و عليه يصبح الجدول الأخير كما يلي:

متغيرات القرار	b_i	X_1	X_2	S_1 X_3	S_2 X_4	S_3 X_5	S_4 X_6
X_5	2	0	0	1/3	-5/3	1	0
X_1	7	1	0	2/3	-1/3	0	0
X_2	2	0	0	-1/3	2/3	0	0
X_6	-2	0	1	2/3	-7/3	0	1
Z	310	0	0	10/3	70/3	0	0

من خلال الجدول نلاحظ أن عمود الثابت b_i يحتوي على قيمة سالبة مما يجعل الحل غير ممكن، و يتطلب ذلك تطبيق الطريقة المبسطة Simplex للنموذج المقابل Dual للتخلص من قيمة X_6 السالبة.

خاتمة :

بعدما تناولنا في الفصل السابق الطريقة البيانية والجبرية مع مزايا وعيوب كل منهما جاءت طريقة اخرى وهي طريقة السمبلكس Simplex التي تاخد بعين الاعتبار الجانب الرياضي حيث تعالج المشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر)عكس الطريقتين السابقتين ،كما قمنا توضيح حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التعظيم وحالة التدنية وفق عدة طرق ، كما تناولنا في هدا القصل المشكلة الثنائية او ما يسمى بالنموذج القابل من خلال توضيح مميزات النموذج المقابل (الثنائي) اضافة الى تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل و بالعكس ، واخيرا صياغة المشكلة الثنائية أي النموذج المقابل هذا كمحور ثاني ، اما المحور الثالث فتناولنا تحليل الحساسة او ما يسمى بتحيليل ما بعد الامثلية ، اي بعد اجراء عملية حل نموذج البرمجة الخطية ماهي الاجراءات المتبعة بعد حدوث تغيرات في النموذج المتمثلة في التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) ،التغيرات في معاملات دالة الهدف، التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود، إضافة متغير أو متغيرات جديدة، إضافة قيد أو قيود جديدة.

الفصل الثالث : نماذج النقل (مشكلة النقل)

نتطرق من خلال هذا الفصل إلى العناصر التالية:

1.I. مفهوم مشكلة النقل:

2.I. صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل

3.I. **أنواع مشاكل النقل**

1.3.I. مشاكل النقل المغلق:

2.3.I. مشاكل النقل المفتوح:

II. طرق إيجاد الحل الأولي لمشاكل النقل

1.II. طريقة الركن الشمالي الغربي (الزاوية الشمالية الغربية):

2.II. طريقة أقل التكاليف

1.2.II. طريقة أقل التكاليف في الجدول:

2.2.II. طريقة أقل التكاليف في الصف:

3.2.II. طريقة أقل التكاليف في العمود:

3.II. طريقة فوجل (طريقة الجزاء)

III. إيجاد الحل الأمثل:

1.III. طريقة المسار المتعرج Stepping–Stone Method

III .2. طريقة التوزيع المعدل: Modified Distribution Method

مقدمة:

تعد نماذج النقل أحد الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، وتعتبر ذات أهمية كبيرة في دراسة إدارة الأعمال الإنتاجية و الخدمية و اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل و تسويق و توزيع السلع و البضائع من المصادر الإنتاجية إلى مراكز الإستلام و ذلك بهدف إيصالها إلى المستهلك الأخير بأقل تكلفة ممكنة.

تم تطوير نماذج النقل لأول مرة سنة 1941 من قبل F.L. Hitchcock حيث قدم دراسة بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية"، كما قام كل من Charnes و Cooper بتطوير طريقة المسار الحرج سنة 1953، سوف نتناول في هذا الفصل طرق حل مشاكل النقل لايجاد الحل الاولي كما نتناول طرق الحل للوصول الى الحل الامثل .

I. ما هية مشكلة النقل.

1.I. مفهوم مشكلة النقل:

هي عبارة عن نقل مواد متشابهة من الأصول (المراكز الإنتاجية أو التسويقية) إلى النهايات (مراكز الطلب أو الإسنهلاك) بهدف تعظيم الأرباح أو بتدنية التكاليف أي نقل هذه المواد بأقل تكلفة ممكنة أو بأقل زمن ممكن.

2.I. صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل:

نوضح من خلال الجدول التالي مكونات جدول النقل[1]:

مراكز الطلب / مراكز العرض	D_1	D_2	…	D_j	…	D_n	العرض a_i
S_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	…	C_{1j} x_{1j}	…	C_{1n} x_{1n}	a_1
S_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	…	C_{2j} x_{2j}	…	C_{2n} x_{2n}	a_2
. .	…	…	…	…	…	…	. .
S_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	…	C_{ij} X_{ij}	…	C_{in} X_{in}	a_n

[1] حسين ياسين طعمة، مرجع سبق ذكره، ص 151.

S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{ij} X_{mj}	…	C_{in} X_{mn}	a_m
الطلب (b_j)	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ $\sum_{j=1}^{n} b_j$

حيث:

S_i: يمثل مركز توزيع السلع و البضائع رقم i.

D_j: يمثل مركز إستلام السلع و البضائع رقم j.

C_{ij}: يمثل تكاليف نقل و تسويق السلع و البضائع من مركز التوزيع i إلى مركز الإستلام j.

X_{ij}: كمية السلع و البضائع المنقولة من مركز التوزيع i إلى مركز الإستلام j.

a_i: كمية البضائع و السلع المعروضة من مراكز التوزيع i.

b_i: كمية البضائع و السلع المطلوبة من مراكز الاستلام j.

$i= 1, 2, 3, \ldots m$

$j= 1, 2, 3, \ldots n$

من خلال الجدول السابق يمكن صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل كما يلي:

I.2.1. الطريقة الأولى[1]:

1- دالة الهدف:

$$Min\ Z= C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} + \ldots + C_{mn} X_{mn}$$

2- قيود النموذج:

أ- قيود مراكز التوزيع:

$$\begin{array}{l} X_{11} + X_{12} + X_{13} + \ldots + X_{1n} = a_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots + X_{2n} = a_2 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \quad . \\ X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + \ldots + X_{mn} = a_m \end{array}$$

ب- قيود مراكز الاستلام:

$$\begin{array}{l} X_{11} + X_{21} + X_{31} + \ldots + X_{m1} = b_1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + \ldots + X_{m2} = b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \quad . \\ X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \ldots + X_{mn} = b_n \end{array}$$

3- شرط عدم السلبية:

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{mn} \geq 0$$

يمكن كتابة النموذج الرياضي لمشكلة النقل بصيغة أخرى كما يلي:

[1] مراد كمال عوض، ص 120

1- دالة الهدف:

$$Min\ Z= C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} +\ldots+ C_{ij} X_{ij}+ \ldots+ C_{nm} X_{nm}$$

2- القيود:

$$C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} +\ldots+ C_{1m} X_{1m}=b_1$$

$$C_{21} X_{11} + C_{22} X_{22} + C_{23} X_{23} +\ldots+ C_{2m} X_{2m} =b_2$$

$$C_{31} X_{31} + C_{32} X_{32} + C_{33} X_{33} +\ldots+ C_{3m} X_{3m} =b_3$$

$$. \quad . \quad . \quad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$C_{n1} X_{n1} + C_{n2} X_{n2} + C_{n3} X_{n3} +\ldots+ C_{nm} X_{nm}=b_1$$

$$C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} +\ldots+ C_{n1} X_{n1} =a_1$$

$$C_{12} X_{12} + C_{22} X_{22} + C_{32} X_{32} +\ldots+ C_{n2} X_{n2} =a_2$$

$$C_{13} X_{13} + C_{23} X_{23} + C_{33} X_{33} +\ldots+ C_{n3} X_{n3} =a_3$$

$$. \quad . \quad . \quad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$C_{1m} X_{1m} + C_{2m} X_{2m} + C_{3m} X_{3m} +\ldots+ C_{nm} X_{nm} =a_m$$

3- شرط عدم السلبية:

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{nm} \geq 0$$

I. 2.2. الطريقة الثانية:

وهي الطريقة المختصرة و نوضحها في ما يلي:

1- دالة الهدف:

$$Min\ Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

2- قيود النموذج:

أ- قيود مراكز التوزيع:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

ب- قيود مراكز الاستلام:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

3- شرط عدم السلبية:

$$X_{ij} \geq 0$$

I.3. أنواع مشاكل النقل:

يوجد نوعان من مشاكل النقل حسب توازن أو عدم توازن جدول النقل، حيث لا يمكن حل حالة عدم توازن جدول النقل إلا بعد التعديل التي نوضحها لاحقا، تتمثل الأنواع فيما يلي:

I.3.1. مشاكل النقل المغلق: Closed Transportation Problems

في هذه الحالة تكون مجموعة الكميات المعروضة (مراكز التوزيع) مساوية لمجموعة الكميات المطلوبة (مراكز الاستلام) وبالتالي يكون جدول النقل في حالة توازن ونوضح ذلك رياضيا كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2.3.I. مشاكل النقل المفتوح: Opened Transportation Problems

في هذه الحالة تكون مجموعة الكميات المعروضة (مراكز التوزيع) غير متساوية لمجموعة الكميات المطلوبة (مراكز الاستلام) سواء تكون الكميات المعروضة أكبر أو أصغر عن الكميات المطلوبة، وبالتالي يكون جدول النقل في حالة عدم التوازن، ونوضح ذلك رياضيا كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

الحالة الأولى: الكميات المعروضة أكبر من الكميات المطلوبة تكون العلاقة الرياضية كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

لحل جدول النقل وفق هذه الحالة نقوم بتحويله إلى حالة التوازن وذلك كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + S_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

حيث: S_0 : يمثل مركز توزيع وهمي أي مركز عرض وهمي بتكاليف مساوية للصفر.

II. طرق إيجاد الحل الأولي لمشاكل النقل

توجد عدة طرق لإيجاد الحل الأولي لمشاكل النقل نوضحها فيما يلي:

1.II. طريقة الركن الشمالي الغربي (الزاوية الشمالية الغربية):

تتميز هذه الطريقة بعدم اعتمادها على المنطق العلمي، كما أنها سهلة التطبيق و بسيطة كما تبدأ عملية إيجاد الحل الأساسي الأولي من الزاوية الشمالية الغربية التي سميت وفقها هذه الطريقة ونلخص مراحل إيجاد الحل الأولي فيما يلي:

- التحقق من توازن جدول النقل؛

- نأخذ الخلية العليا اليسرى أي الزاوية الشمالية الغربية لجدول النقل ثم نخصص أكبر عدد من الوحدات لتلك الخلية و يكون هذا العدد المخصص الأقل في صف الكمية المعروضة المتوفرة أو الأقل في عمود متطلبات الطلب؛
- ننقص كمية العرض في الصف وكمية الطلب في العمود بنفس كمية الوحدات المخصصة للخلية؛
- بعد العمليات السابقة إذا أصبح العرض في الصف مساويا للقيمة صفر نتحرك إلى الأسفل في العمود إلى الخلية التالية، أما إذا أصبح الطلب في العمود مساويا للقيمة صفر فنتحرك إلى اليمين في الصف إلى الخلية التالية، أما إذا أصبح كل من الكميات المعروضة في الصف و الكميات المطلوبة في العمود مساويين للصفر فإنه نتحرك إلى الأسفل خلية واحدة ثم إلى اليمين خلية أخرى؛
- نخصص للخلية الموالية المحددة في المرحلة الثالثة أكبر عدد ممكن من الوحدات ثم نعود حتى نصل إلى حل أولي مقبول.

II.2. طريقة أقل التكاليف

II.2.1. طريقة أقل التكاليف في الجدول:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية بحيث يتم توزيع الكميات المعروضة حسب أقل تكلفة نقل في الجدول أي يتم تحديد أصغر تكلفة نقل و نخصص كمية لهذه الخلية المقابلة لأقل تكلفة وفق الكميات المعروضة في الصف و الكميات المطلوبة في العمود بحيث الصف و العمود هما اللذان يحددان موقع الخلية. بعد ذلك نحدد أصغر تكلفة نقل أخرى ونخصص كمية لهذه الخلية و هكذا نستمر إلى أن يتم توزيع كافة الوحدات المعروضة. كل المراحل السابقة تكون بعد التحقق من توازن جدول النقل.

II.2.2. طريقة أقل التكاليف في الصف:

يتم توزيع الكميات المعروضة وفق هذه الطريقة حسب أقل تكلفة نقل في الصف أو السطر أي يتم تحديد أصغر تكلفة نقل في الصف الأول و نخصص كمية لهذه الخلية وفق الكميات المعروضة في الصف و الكميات المطلوبة في العمود، ثم ننقص كمية العرض في الصف و كمية الطلب في العمود بنفس كمية الوحدات المخصصة للخلية حتى يصبح العرض مساوي للصفر في الصف. نتبع نفس الخطوات السابقة في باقي الصفوف إلى أن يتم توزيع كافة الوحدات المعروضة.

.II .3.2. طريقة أقل التكاليف في العمود:

تم توزيع الكميات المعروضة وفق هذه الطريقة حسب أقل تكلفة نقل في العمود، أي يتم تحديد أصغر تكلفة نقل في العمود الأول ونخصص كمية لهذه الخلية وفق الكميات المعروضة في الصف و الكميات المطلوبة في العمود، ثم ننقص كمية العرض في الصف و كمية الطلب في العمود بنفس كمية الوحدات المخصصة للخلية حتى يصبح الطلب مساويا للصفر ثم نتبع نفس الخطوات السابقة في باقي الأعمدة حتى يتم تلبية كافة الوحدات المطلوبة.

ملاحظة:

- عندما تتساوى أصغر تكلفتين في الجدول فإن الاختيار بينهما يكون عشوائيا؛
- التحقق من توازن جدول النقل قبل بداية عملية الحل.حيث تكون الحالات كما يلي :

✓ **نموذج النقل المتوازن:**

يفترض نموذج النقل وجود عدد من المصادر الإنتاجية مقدارها "n" مصدر و عدد من المراكز التسويقية مقدارها "m".

يشترط النموذج بشكله الأولي ضرورة المساواة بين حجم السلع من المصادر و حجم الطلب على السلع من قبل المراكز.

يشترط :الطلب $\sum$ = عرض $\sum$

كميات المراكز التسويقية =كميات المخازن

✓ **نموذج النقل غير المتوازن:**

لقد ذكرنا سابقا أن قيم العرض $\sum$ يجب أن تكون مساوية قيم الطلب $\sum$ و نتكلم عن تساوي الوحدات، لكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية و بالتالي النموذج يكون غير متوازي، و لكي نوازي نموذج النقل نضيف إلى الأقل قيمة الفرق و تكون التكلفة الموازية أصفار "00"، سواء العرض أو الطلب نزيد قيمة الفرق و لا ننقص الفرق.

.II.3. طريقة فوجل (طريقة الجزاء)

تعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق السابقة حيث تتميز عن غيرها بأنها تحقق عادة أفضل حل أولي، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطرق السابقة حيث تعتمد بشكل مباشر على الفروق بين تكاليف النقل لكل صف و لكل عمود و البدء بالفرق الأكبر، ونلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي:

- التحقق من توازن جدول النقل؛
- حساب الفرق بين أقل تكلفتي نقل في كل صف و في كل عمود؛

- كتابة الفرق المحسوب لكل صف بجانب الصف، ولكل عمود تحت العمود؛
- نحدد الصف أو العمود الذي له أعلى تكلفة أي أكبر فرق محسوب؛
- اختيار الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة في الصف أو العمود المحدد أي المقابل لأكبر فرق محسوب؛
- تخصيص أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية المختارة؛
- ننقص العرض في الصف و الطلب في العمود بنفس عدد الوحدات المخصصة للخلية؛
- إذا أصبح العرض في الصف يساوي الصفر نلغي الصف أما إذا أصبح الطلب في العمود يساوي الصفر نلغي العمود، أما إذا أصبح كل من العرض في الصف و الطلب في العمود مساويين للصفر نلغي الصف و العمود معا؛
- نكرر الخطوات السابقة أعلاه حتى يتم توزيع جميع الوحدات المعروضة على الوحدات المطلوبة.

ملاحظة:

عند تساوي أكثر من فرق و تكون هذه الفروق هي الأكبر، يتم الاختيار عشوائي بينهما أو يمكن حساب فروق جديدة وذلك بشطب أقل تكلفة نقل في الصف أو العمود ذو الأكبر فرق ومن ثم حساب فروق جديدة بين أقل تكلفتي نقل متبقية و أخذ أكبر فرق جديد.

مثال (1):

تنتج شركة ثلاثة أنواع من السلع الكهربائية كما تقوم بتجهيز ثلاثة مراكز تسويقية، نلخص تكاليف نقل الوحدة الواحدة و الكميات المعروضة و الكميات المطلوبة في الجدول التالي:

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	I	II	III	العرض
1	10	15	30	600
2	12	18	32	300
3	15	14	40	100
الطلب	500	200	300	1000

المطلوب: أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة:

- الزاوية الشمالية الغربية.
- أقل تكلفة في الجدول.
- أقل تكلفة في الصف.
- أقل تكلفة في العمود.
- طريقة فوجل.

الحل:

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية (طريقة الركن الشمالي الغربي)

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	I	II	III	العرض
1	10 | 500	15 | 100	30 | –	600
2	12 | –	18 | 100	32 | 200	300
3	15 | –	14 | –	40 | 100	100
الطلب	500	200	300	1000 / 1000

حساب التكلفة الكلية:

$$CT = (10*500) + (15*100) + (18*100) + (32*100) + (40*100)$$

$$CT = 5000+1500+1800+6400+4000$$

$$CT = 18700$$

تقدر التكلفة الأولية الكلية وفق طريقة الزاوية الشمالية الغربية ب18700 وحدة نقدية.

2. طريقة أقل التكاليف:

1.2. طريقة أقل تكلفة في الجدول:

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	I	II	III	العرض
1	10 | 500	15 | 100	30 | –	600
2	12 | –	18 | –	32 | 300	300
3	15 | –	14 | 100	40 | –	100
الطلب	500	200	300	1000 / 1000

حساب التكلفة الكلية:

CT= (10*500) + (15*100) + (14*100) + (32*300)

CT= 5000+1500+1400+9600

CT= 17500

تقدر التكلفة الأولية الكلية وفق هذه الطريقة ب17500 وحدة نقدية.

2.2. طريقة أقل تكلفة في العمود:

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	I	II	III	العرض
1	$\boxed{10}$ 500	$\boxed{15}$ 100	$\boxed{30}$ –	600
2	$\boxed{12}$ –	$\boxed{18}$ –	$\boxed{32}$ 300	300
3	$\boxed{15}$ –	$\boxed{14}$ 100	$\boxed{40}$ –	100
الطلب	500	200	300	1000 / 1000

حساب التكلفة الكلية الأولية:

CT= (10*500) + (15*100) + (14*100) + (32*300)

CT= 5000+1500+1400+9600

CT= 17500

تقدر التكلفة الأولية الكلية وفق هذه الطريقة ب17500 وحدة نقدية.

1.2. طريقة أقل تكلفة في الصف (السطر):

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	I	II	III	العرض
1	10 / 500	15 / 100	30 / -	600
2	12 / -	18 / 100	32 / 200	300
3	15 / -	14 / -	40 / 100	100
الطلب	500	200	300	1000 / 1000

حساب التكلفة الكلية الأولية:

CT= (10*500) + (15*100) + (18*100) + (32*200) + (40*100)

CT= 5000+1500+1800+6400+4000

CT= 18700

تقدر التكلفة الأولية الكلية وفق هذه الطريقة ب18700 وحدة نقدية.

3.طريقة فوجل (الجزاء):

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	I	II	III	العرض	الفروق
1	10 / 200	15 / 100	30 / 300	600	5 5 5 15 –
2	12 / 300	18 / –	32 / –	300	6 – – – –
3	15 / –	14 / 100	40 / –	100	1 1 1 14 14
الطلب	500	200	300	1000 / 1000	
الفروق	2 5 5 – –	1 1 1 1 14	2 10 – – –		

حساب التكلفة الكلية الأولية:

CT= (10*200) + (15*100) + (30*300) + (12*300) + (14*100)

CT= 2000+1500+9000+3600+1400

CT= 17500

تقدر التكلفة الأولية الكلية وفق هذه الطريقة ب17500 وحدة نقدية.

مثال(2):

لدينا جدول النقل التالي:

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	1	2	3	العرض
A	20	120	160	5000
B	60	40	170	6000
C	90	150	30	9000
الطلب	7000	8000	2000	20000 / 17000

المطلوب:

أوجد الحل الأولي باستخدام الطرق التالية:

- الركن الشمالي الغربي.
- أقل تكلفة في الجدول.
- أقل تكلفة في الصف.
- أقل تكلفة في العمود.
- طريقة فوجل.

الحل:

نلاحظ من خلال الجدول أن مجموع العرض لا يساوي مجموع الطلب حيث الكميات المعروضة أكبر من الكميات المطلوبة بفارق قدره 3000 وحدة و عليه يتم إضافة عمود وهمي يغطي هذا الفرق و بتكاليف مساوية للصفر.

1. **طريقة الركن الشمالي الغربي:**

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	1	2	3	4	العرض
A	$\boxed{20}$ 5000	$\boxed{120}$ –	$\boxed{160}$ –	$\boxed{0}$ –	5000
B	$\boxed{60}$ 2000	$\boxed{40}$ 4000	$\boxed{170}$ –	$\boxed{0}$ –	6000
C	$\boxed{90}$ –	$\boxed{150}$ 4000	$\boxed{30}$ 2000	$\boxed{0}$ 3000	9000
الطلب	7000	8000	2000	3000	20000 / 20000

حساب التكلفة الكلية الأولية:

$$CT= (20*5000) + (60*2000) + (40*4000) + (150*4000) + (30*2000) + (0*3000)$$

$$CT= 100000 + 120000 + 160000 + 600000 + 60000 + 0$$

$$CT= 1040000$$

تقدر التكلفة الأولية الكلية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي أي الزاوية الشمالية الغربية ب1040000 وحدة نقدية.

2. طريقة أقل تكلفة في الجدول:

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	1	2	3	4	العرض
A	$\boxed{20}$ 5000	$\boxed{120}$ –	$\boxed{160}$ –	$\boxed{0}$ –	5000
B	$\boxed{60}$ –	$\boxed{40}$ 6000	$\boxed{170}$ –	$\boxed{0}$ –	6000
C	$\boxed{90}$ 2000	$\boxed{150}$ 2000	$\boxed{30}$ 2000	$\boxed{0}$ 3000	9000
الطلب	7000	8000	2000	3000	20000 / 20000

حساب التكلفة الكلية الأولية:

CT= (20*5000) + (40*6000) + (90*2000) + (150*2000) + (30*2000) + (0*3000)

CT= 100000 + 240000 + 180000 + 300000 + 60000 + 0

CT= 880000

تقدر التكلفة الأولية الكلية باستخدام طريقة أقل تكلفة في الجدول ب880000 وحدة نقدية.

3.طريقة أقل تكلفة في الصف:

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	1	2	3	4	العرض
A	20 / 2000	120 / –	160 / –	0 / 3000	5000
B	60 / –	40 / 6000	170 / –	0 / –	6000
C	90 / 5000	150 / 2000	30 / 2000	0 / –	9000
الطلب	7000	8000	2000	3000	20000 / 20000

حساب التكلفة الكلية الأولية:

CT= (20*2000) +(0*3000) + (40*6000) + (90*5000) + (150*2000) + (30*2000)

CT= 40000 + 0 + 240000 + 450000 + 300000 + 60000

CT= 1090000

تقدر التكلفة الأولية الكلية باستخدام طريقة أقل تكلفة في الجدول 1090000وحدة نقدية.

4.طريقة أقل تكلفة في العمود :

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	1	2	3	4	العرض
A	20 5000	120 –	160 –	0 –	5000
B	60 2000	40 4000	170 –	0 –	6000
C	90 –	150 4000	30 2000	0 3000	9000
الطلب	7000	8000	2000	3000	20000 / 20000

حساب التكلفة الكلية الأولية:

$$CT= (20*5000) + (60*2000) + (40*4000) + (150*4000) + (30*2000) + (0*3000)$$

$$CT= 100000 + 120000 + 160000 + 600000 + 60000 + 0$$

$$CT= 1040000$$

تقدر التكلفة الأولية الكلية باستخدام طريقة أقل تكلفة في الجدول 1040000 وحدة نقدية.

5.طريقة فوجل (الجزاء):

المراكز التسويقية / المراكز الإنتاجية	1	2	3	4	العرض	الفروق
A	20 5000	120 –	160 –	0 –	5000	20 20 100 – – –
B	60 –	40 6000	170 –	0 –	6000	40 40 20 20 – –
C	90 2000	150 2000	30 2000	0 3000	9000	30 90 60 60 60 90
الطلب	7000	8000	2000	3000	20000 20000	
الفروق	40 40 40 30 90 90	80 80 80 110 150	130 – – – –	0 0 – – – –		

حساب التكلفة الكلية الأولية:

CT= (20*5000) + (40*6000) + (90*2000) + (150*2000) + (30*2000) + (0*3000)

CT= 100000+240000+180000+300000+60000 +0

CT= 880000

تقدر التكلفة الأولية الكلية وفق هذه الطريقة 880000 وحدة نقدية.

II. إيجاد الحل الأمثل:

بعد الحصول على الحل الأساسي الأولي، يتم استخدام أساليب أخرى لاختبار مثالية الحل من أجل الحصول على حل أفضل يعطي تكاليف نقل كلية أقل وذلك بإستخدام الطرق التالية[1]:

1.II. طريقة المسار المتعرج Stepping-Stone Method

وتسمى بطريقة التنقل عبر المربعات الخالية حيث تتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأولي لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا نقلت وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة، فإذا وجدنا أن ملئ خلية معينة غير مشغولة سيؤدي إلى تقليل التكاليف ،يتم تعديل الحل الراهن، وتستمر عملية تقييم كل جدول إلى أن نتوصل إلى أن إشغال أي خلية غير مشغولة لا يؤدي إلى تقليل في تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها .

كما يجب ملاحظة أن أية مشكلة النقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أية إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط التالي:

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1

$= m + n - 1$

ولتطبيق هذه الطريقة يتم إتباع الخطوات التالية:

1-يتم رسم مسار مغلق Closed Path لكل خلية غير مشغولة، ويتكون المسار من مجموعة من قطع المستقيمات المتعاقبة الأفقية والعمودية يبدأ من الخلية غير المشغولة المراد اختيارها إلى خلية مليئة أخرى حتى يتم الوصول إلى الخلية غير المشغولة نفسها، حيث يمكن تجاوز خلايا غير مشغولة أو ممتلئة بحيث نصل إلى خلية ممتلئة؛

2-يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها تعقبها علامة سالبة (-) للخلية التي تليها في المسار، ثم علامة موجبة للخلية التي تليها وهكذا لجميع الخلايا التي يتشكل منها المسار؛

3-نحسب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) وذلك بجمع التكلفة للخلايا الواقعة على المسار، فإذا كانت هذه القيمة سالبة معنى ذلك أن إشغال هذه الخلية سيساهم في تخفيض التكاليف؛

4-تكرار الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة، فإذا كانت التكلفة غير المباشرة موجبة أو صفر فإن الحل الذي بين أيدينا هو الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر تكون التكلفة غير المباشرة لها سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتخفيض التكاليف وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للتكلفة غير المباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل؛

5-يتم إشغال الخلية غير المشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار؛

6-تكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا غير المشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الحصول على الحل الأمثل؛

7-في حالة عدم تحقق شرط عدد الخلايا المشغولة =1-n+m في هذه الحالة نضيف إلى أحد الخلايا غير المشغولة والتي تحتوي على أقل تكلفة قيمة صفر بحيث لا يؤثر على الحل وتساعدنا في اختبار الخلايا غير المشغولة.

مثال: أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج

مراكز تسويقية السلع	1	2	3	العرض
1	7 18	3 4	10 -	22
2	4 -	6 18	0 6	24
3	5 -	8 -	9 16	14
الطلب	18	22	20	60

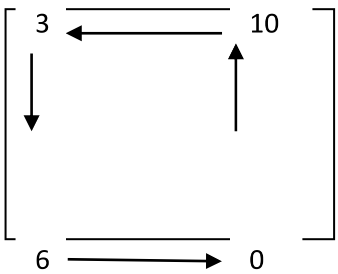
1/عدد الخلايا = 3+3-1=5= عدد الخلايا المشغولة.

2/يتم رسم مسار مغلق للخلايا غير المشغولة.

3/يتم حساب التكلفة غير المباشرة للمسارات المغلقة للخلايا غير المشغولة كالآتي:

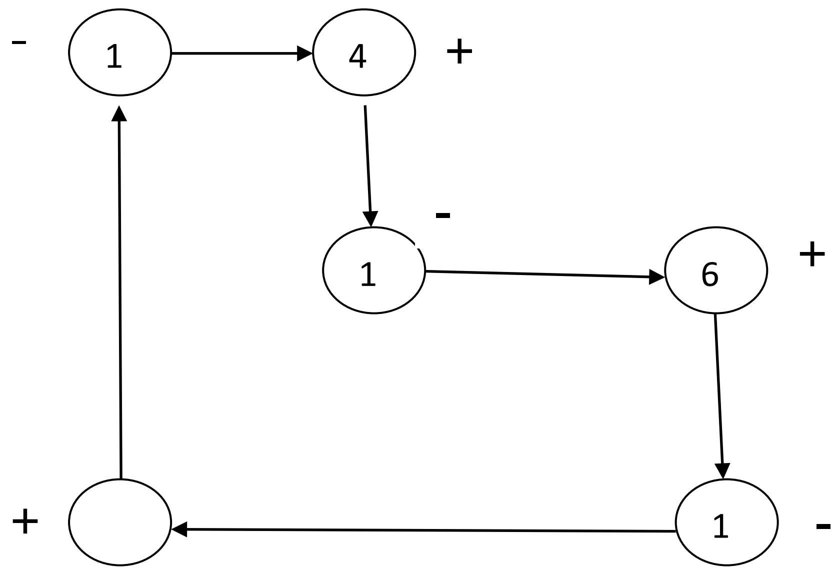
المسار 1:

$$X\ (1,3) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (2,3)$$



التكلفة غير المباشرة	المسار المغلق	الخلايا غير المشغولة
+10-3+6-0=+13	$X\ (1,3) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (2,3)$	X(1,3)
+4-6+3-7=-6	$X\ (2,1) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (1,1)$	X(2,1)
+5-9+0-6+3-7=-14	$X\ (3,1) \rightarrow X\ (3,3) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (1,1)$	X(3,1)
+8-9+0-6=-7	$X\ (3,2) \rightarrow X\ (3,3) \rightarrow X\ (2,3) \rightarrow X\ (2,2)$	X(3,2)

4/من التكاليف غير المباشرة التي يتم حسابها نجد أن الخلية X (3,1) لها أكبر قيمة سالبة لذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف ويتم إشغالها بنقل كميات إليها حيث تتحدد الكمية التي ستنتقل إليها من خلايا المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة، ويمكن تمثل مسار الخلية X (3,1) كما يلي:



5/إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X (3,1) تتحدد من المسار المغلق أعلاه، إن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة (14) وحدة، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة، وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالآتي:

$X(3,1) = 14$

$X(3,3) = 14 - 14 = 0$

$X(2,3) = 6 + 14 = 20$

$X(2,2) = 18 - 14 = 4$

$X(1,2) = 4 + 14 = 18$

$X(1,1) = 18 - 14 = 4$

ويصبح الجدول كما يلي:

مراكز تسويقية السلع	1	2	3	العرض
1	[7] 04	[3] 18	[10] -	22
2	[4] -	[6] 04	[0] 20	24
3	[5] 14	[8] -	[9] -	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكاليف الكلية تحسب كما يلي:

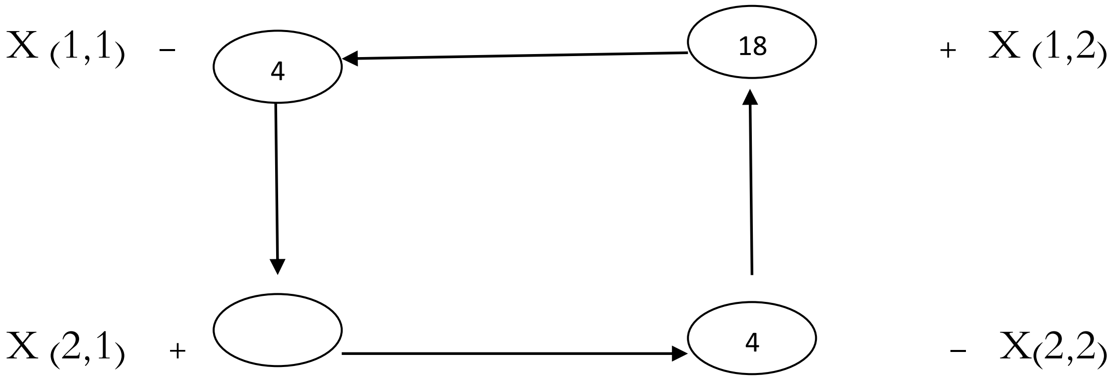
$$C= (7.04) + (3.18) + (6.4) + (20.0) + (514) = 176$$

كانت التكلفة الكلية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي 372 في حين بلغت التكلفة الكلية بعد أن تم تعديل الجدول 176 أي أن هناك تخفيض في التكاليف بمقدار 196.

تكرر العمليات السابقة بنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دراسة أثر إشغال الخلايا غير المشغولة على التكلفة الكلية كما يلي:

الخلية غير المشغولة	المسار المغلق	التكلفة غير المباشرة
X(1,3)	$X\ (1,3) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (2,3)$	+10-3+6-0=+13
X(2,1)	$X\ (2,1) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (1,1)$	+4-6+3-7=-6
X(3,2)	$X\ (3,2) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (1,1) \rightarrow X\ (3,1)$	+8-3+7-15=+7
X(3,3)	$X\ (3,3) \rightarrow X\ (2,3) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (1,1) \rightarrow X\ (3,1)$	+9-0+6-3+7-5=+14

الخلية التي تم تعديلها هي: X (2,1) على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة، ويمكن تمثيل مسار الخلية x(2 ;1) كما يلي:



$X(2,1) : 4$

$X(2,2) : 4 - 4 = 0$

$X(1,2) : 18 + 4 = 22$

$X(1,1) : 4 - 4 = 0$

ويصبح الجدول كما يلي:

مراكز تسويقية السلع	1	2	3	العرض
1	[7] -	[3] 22	[10] -	22
2	[4] 4	[6] 0	[0] 20	24
3	[5] 14	[8] -	[9] -	14
الطلب	18	22	20	60

$$C = (22.3) + (4.4) + (20.0) + (14.5) = 152$$

الخلية غير المشغولة	المسار المغلق	التكلفة غير المباشرة
X (1,1)	$X\ (1,1) \rightarrow X\ (2,1) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (1,2)$	+7-4+6-3=+6
x (1,3)	$X\ (1,3) \rightarrow X\ (1,2) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (2,3)$	+10-3+6-0=+13
X (3,2)	$X\ (3,2) \rightarrow X\ (2,2) \rightarrow X\ (2,1) \rightarrow X\ (3,1)$	+8-6+4-5=+1
X (3,3)	$X\ (3,3) \rightarrow X\ (2,3) \rightarrow X\ (2,1) \rightarrow X\ (3,1)$	+9-0+4-5=+8

إن التكلفة غير المباشرة للخلايا غير المشغولة هي أرقام موجبة لذلك فإن أشغال أي من هذه الخلايا سوف لن يخفض من التكاليف وبذلك يكون الحل للجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن التكاليف هي 152 وحدة نقدية.

من ملاحظة الجدول الأخير الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة أقل التكاليف وطريقة فوجل مما يدل على أن هاتين الطريقتين تعطي في أغلب الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل.

II. 2. طريقة التوزيع المعدل: Modified Distribution Method

تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع من طريقة المسار المتعرج، إذ لا تتطلب رسم جميع المسارات المتعرجة مما يقلل من الجهد والوقت، كذلك تعتبر هذه الطريقة أكفأ ولها تطبيقات واسعة في حالة استخدام الحاسبة الإلكترونية.

يمكن إتباع الخطوات التالية لإستخدام هذه الطريقة:

1/التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة تساوي m+n-1 ؛

2/يتم تكوين معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي على أساس المعادلة الآتية:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

حيث:

U_j: المتغير الخاص بالصف i و الذي تقع فيه الخلية المعنية.

V_j: المتغير الخاص j والذي تقع فيه الخلية المعنية.

C_{ij}: كلفة الخلية التي تقع في الصف أو العمود j.

3/إيجاد الحل للمعادلات للخلايا المشغولة وحسب الصيغة التي تم ذكرها في الخطوة رقم 2؛

4/ حساب التكلفة غير المباشرة للخلايا غير المشغولة وفقا للمعادلة الآتية: التكلفة غير المباشرة

$$(i,j) = (C_{ij} - U_i - V_j)$$

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر غير مشغولة تكون التكلفة غير المباشرة لها سالبة، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل و تخفيض التكاليف، و تعطى الأولوية للخلية التي لها أكثر قيمة سالبة وستكمل الحل كما هو متبع في طريقة المسار المنعرج

مثال: الجدول التالي يمثل الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

المعامل \ أسواق	1	2	3	العرض
1	[8] 150	[6] -	[5] -	150
2	[6] 50	[6] 100	[6] -	150
3	[10] -	[8] 100	[4] 50	150
4	[8] -	[6] -	[4] 150	150
الطلب	200	200	200	600

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

الحل:

1/ حساب التكاليف الكلية لجدول الحل الأولي كما يلي:

$$CT = (8.150) + (6.50) + (6.100) + (8.100) + (4.50) + (4.150) = 3700$$

نلاحظ من خلال الجدول أنَّ عدد الخلايا المشغولة هي ستة خلايا وعليه يتم تكوين ستة معادلات كما يلي:

$C_{11} = U_1 + V_1 = 8$

$C_{21} = U_2 + V_2 = 6$

$C_{22} = U_2 + V_2 = 6$

$C_{32} = U_3 + V_2 = 8$

$C_{33} = U_3 + V_3 = 4$

$C_{43} = U_4 + V_3 = 4$

نفرض أن $U_1 = 0$، نحصل على النتائج التالية:

$U_1 = 0$ $U_2 = -2$ $U_3 = 0$ $U_4 = 0$

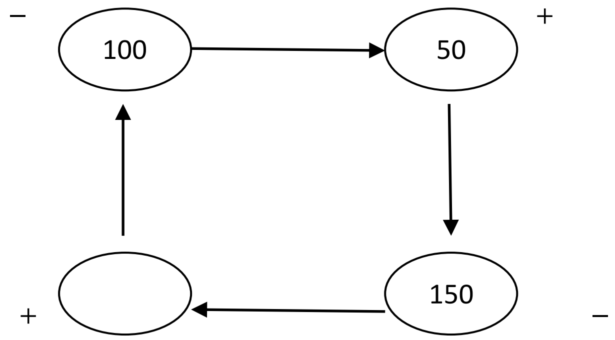
$V_1 = 8$ $V_2 = 8$ $V_3 = 4$

ونقوم بتقييم الخلايا غير المشغولة من خلال حساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية غير مشغولة حسب العلاقة التالية:

التكلفة غير المباشرة = $(C_{ij} - U_i - V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة = $(C_{ij} - U_i - V_j)$
X (1,2)	$6 - 0 - 8 = -2$
X (1,3)	$5 - 0 - 4 = 1$
X (2,3)	$6 - (-2) + 4 = 12$
X (3,1)	$10 - 0 - 8 = 2$
X (4,1)	$8 - 0 - 8 = 0$
X (4,2)	$6 - 0 - 8 = -2$

من التكاليف غير المباشرة التي تم حسابها نجد أن $X(1,2)$ والخلية $X(4,2)$ لها قيم سالبة تقدر ب (2-) وعليه يتم اختيار أحد الخلايا عشوائيا، مثلا نختار خلية $X(4,2)$ ونقوم بتشغيلها وذلك بنقل كميات إليها حيث تتحدد هذه الكمية من خلال المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة ونمثل مسار الخلية $X(4,2)$ كما يلي:



نلاحظ أن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة تقدر ب100 وحدة، وعليه ينم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السابقة فنحصل على النتائج التالية:

$X(4,2) = 100$

$X(3,2) = 100 - 100 = 0$

$X(3,3) = 50 + 100 = 150$

$X(4,1) = 150 - 100 = 50$

من خلال النتائج السابقة يصبح الجدول كما يلي:

المعامل \ الأسواق	1	2	3	العرض
1	[8] 150	[6] -	[5] -	150
2	[6] 50	[6] 100	[6] -	150
3	[10] -	[8] -	[4] 150	150
4	[8] -	[6] 100	[4] 50	150
الطلب	200	200	200	600

حساب التكاليف الكلية للجدول كما يلي:

$$CT = (8.150) + (6.50) + (6.100) + (4.150) + (6.100) + (4.50) = 3500$$

نلاحظ أنه تم تخفيض التكاليف الكلية بعد أن تم تعديل جدول بقيم 200 وحدة نقدية حيث أصبح 3500 وحدة نقدية.

– نواصل عملية الحل أي اختيار أمثلية الجدول السابق وفق نفس القواعد السابقة.

– نلاحظ من خلال الجدول السابق أن عدد الخلايا المشغولة هي ستة خلايا وعليه يتم تكوين ستة معادلات كما يلي:

$C_{11} = U_1 + V_1 = 8$

$C_{21} = U_2 + V_1 = 6$

$C_{22} = U_2 + V_2 = 6$

$C_{33} = U_3 + V_3 = 4$

$C_{42} = U_4 + V_2 = 6$

$C_{43} = U_4 + V_3 = 4$

نفرض أن $U1 = 0$ ، فنحصل على النتائج التالية:

$U_1 = 0$ $V_1 = 8$

$U_2 = -2$ $V_2 = 8$

$U_3 = -2$ $V_3 = 6$

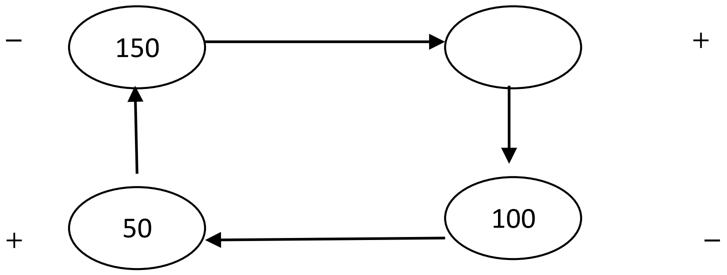
$U_4 = -2$

يتم تقييم الخلايا غير المشغولة من خلال حساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية غير مشغولة حسب العلاقة التالية:

التكلفة غير المباشرة = $(C_{ij} - U_i - V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة $(C_{ij} - U_i - V_j)$
X (1,2)	$6 - 0 - 8 = -2$
X (1,3)	$5 - 0 - 6 = -1$
X (2,3)	$6 - (-2) - 6 = 2$
X (3,1)	$10 - (-2) - 8 = 4$
X (3,2)	$8 - (-2) - 8 = 2$
X (4,1)	$8 - (-2) - 8 = 2$

نلاحظ من التكاليف غير المباشرة أن الخلية X (1,2) لها أكبر قيمة سالبة وعليه يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف حيث يتم إشغالها بنقل كميات إليها من خلال المسار المغلق على أساس أقل عدد من الوحدات للخلية التي تحمل الإشارة السالبة ونوضح مسار الخلية X (1,2) كما يلي:



إن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار للخلايا ذات الإشارة السالبة هو 100 وحدة، وعليه يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة وبالتالي تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كما يلي:

$X(1,1) = 150 - 100 = 50$

$X(1,2) = 100$

$X(2,1) = 50 + 100 = 150$

$X(2,2) = 100 - 100 = 0$

من خلال النتائج السابقة يصبح الجدول كما يلي:

الأسواق / المعامل	1	2	3	العرض
1	٨ 50	٦ 100	٥ -	150
2	٦ 150	٦ -	٦ -	150
3	١٠ -	٨ -	٤ 150	150
4	٨ -	٦ 100	٤ 50	150
الطلب	200	200	200	600

حساب التكاليف الكلية كما يلي:

$CT = (8.50) + (6.100) + (6.150) + (4.150) + (4.50) = 3300$

أصبحت التكاليف تقدر ب 3300 وحدة نقدية بعدما كانت 3500 وحدة نقدية وبالتالي انخفضت التكاليف بقيمة مقدارها 200 وحدة نقدية.

- إعادة اختبار أمثلية الجدول السابق نتبع نفس الخطوات السابقة.

- عدد الخلايا المشغولة في ستة خلايا وعليه تكون ستة معادلات كما يلي:

$C_{11} = U_1 + V_1 = 8$

$C_{12} = U_2 + V_2 = 6$

$C_{21} = U_2 + V_1 = 6$

$C_{33} = U_3 + V_3 = 4$

$C_{42} = U_4 + V_2 = 6$

$C_{34} = U_4 + V_3 = 4$

نفرض أن $U_1 = 0$ وعليه نحصل النتائج التالية:

$U_1 = 0$ $V_1 = 8$

$U_2 = -2$ $V_2 = 6$

$U_3 = 0$ $V_3 = 4$

$U_4 = 0$

نقوم بتقييم الخلايا غير المشغولة من خلال حساب التكاليف غير المباشرة لكل خلية غير مشغولة وفق العلاقة التالية:

التكلفة غير المباشرة = $(C_{ij} - U_i - V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة = ($C_{ij} - U_i - V_j$)
X (1,3)	5 – 0 – 4 = 1
X (2,2)	6 – (-2) – 6 = 2
X (2,3)	6 – (-2) – 4 = 4
X (3,1)	10 – 0 – 8 = 2
X (3,2)	8 – 0 – 6 = 2
X (4,1)	8 – 0 – 8 = 0

نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة للخلايا غير المشغولة هي أرقام موجبة وعليه فإن إشغال أي من هذه الخلايا لن يخفض من التكاليف وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل حيث أن التكلفة المثالية أي أدنا تكلفة ممكنة هي 3300 وحدة نقدية.

خاتمة :

تناولنا من خلال هذا الفصل نماذج النقل او ما يعرف بمشكلة النقل ، حيث قدمنا في المبحث الأول نماذج النقل لإيجاد الحل الأولي المتمثلة في طريقة الركن الشمالي الغربي ، اقل تكلفة في الجدول اضافة الى أقل تكلفة في الصف والعمود ، وأخيرا طريقة الجزاء اي طريقة فوجل والتي تعتبر احسن وافضل طريقة حيث تعتمد على اساس علمي كما أنها تعطي اقل تكلفة ، كما تم ذكر بعض الحالات الخاصة في حالة عدم توازن جدول النقل ، أما المبحث الثاني فتناولنا طرق الوصول الى الحل الأمثل لنماذج النقل .

قائمة المصادر والمراجع باللغة العربية

1.حسين ياسين طعمة مروان محمد السنور ايمان حسين حنوش بحوث العمليات نماذج وتطبيقات الصيغة الأولى دار صفاء للنشر والتوزيع كتمان الاردن 2009.

2.محمد أحمد الطراونة سليمان خالد عبادات مقدمة في بحوث العمليات الطبعة الأولى دار المسيرة للنشر والتوزيع عمان الاردن 2009

3.جهاد صياح بن هاني لازم محمود المكاوي فادية عبد القادر الحوري بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية الطبيعة الطبيعة الأولى دار وزيز الزمان عمان الاردن 2014 .

4.حسين ياسين طعمة مروان محمد السنور ايمان حسين حنوش بحوث العمليات نماذج وتطبيقات الصيغة الأولى دار صفاء للنشر والتوزيع كتمان الاردن 2009 .

5. حسين محمود الجنابي، الأحداث في بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 2010.

6.أبو قاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، 2012.

7.عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، **أساليب بحوث العمليات** (**الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**)، دار القلم للنشر، الإمارات العربية المتحدة، 2003.

8.صوار يوسف، طاوش قندوسي، **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B–** كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر.

9.عبد الرزاق الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات،** دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، ص 29.

10. فؤاد الشيخ سالم، و فالح محمد حسن "**بحوث العمليات : نظرية و تطبيق**" عمان : دار مجدلاوي للنشر و التوزيع 1983 .

11.محمد الطروانة، سليمان عبيدات ،" **مقدمة في بحوث العمليات أساليب و تطبيقات**" ، الطبعة الأولى دائرة المكتبات و الوثائق الوطنية ، 1989.

12. محمد سالم الصفدي ،" **بحوث العمليات تطبيق و خوارزميات**" ،الطبعة الأولى ، دار وائل للنشر و التوزيع ، عمان الأردن ، 1999.

13. محمود محمد و عبد الجليل آدم المنصوري "**الأساليب الكمية لاتخاذ القرارات الإدارية**" بنغازي مطابع الثورة للطباعة و النشر 1989.

14. مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر "**بحوث العمليات و فعالية اتخاذ القرارات** "، مكتبة عين شمس ، القاهرة، 1997.

15. ريتشارد برونسون "**بحوث العمليات**" سلسلة ملخصات شوم، الطبعة الثالثة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، 2011.

16. هاشم حمدي رضا "**إدارة الإنتاج و العمليات**"، الطبعة الأولى، دار الراية للنشر و التوزيع، عمان 2011.

قائمة المصادر والمراجع باللغة الاجنبية

1- Budnick Frank S., McLeavey D., Mojena R. ‘Principles of Operations Research for Management (Irwin series in quantitative analysis for business’ Richard D. Irwin, 1991.

2- Chandan J. and others, "Essentials of Linear Programming", Vikas Publishing house pvtlid, new delhi, 1994.

3- Lapin L, "Quantitative Methods for Business Decisions", Harcourt Brace jovanovich, INC, New York.

4- Mc Millan C, ‘Mathematical Programming’, John Wiley and Sons, Inc, 1974.

5- R. Panneerselvam ‘Operations Research’, Prentice-Hall of India Private Limited 2004.

6- Hamdy A. Taha "Operations research: an introduction " Macmillan Publishing Co, Inc, Now York, 4th edi. 1987.

7- Yves Nobert, Roch Ouellet, Régis Parent "La recherche opérationnelle" Gaëtan Morin édition, 3 édi 2001.

8– Lapin L, Quantitative Methods for Business Decisions, Harcourt Brace jovanovich, INC, new york