
République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT



Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique
Option : Equations différentielles et modélisation

Présenté par :
Mlle. Rahmouna MECENE

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À RETARD DÉPENDANT DE L'ÉTAT

Soutenu le 06 juin 2018

Devant le jury composé de :

Président : Mr. AHMED HAMMOUDI (Professeur) C.U.B.B.A.T

Examinatrice : Mme. LAMIA BENDIMERED (M.A.A) C.U.B.B.A.T.

Encadrant : Mme. DJAMILA BENNAFLA (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Remerciements

Mes grands remerciements vont à mon dieu qui m'a donné la volonté, la patience et surtout la santé durant toute mes années d'études.

Je remercie vivement les membres du jury, dont le professeur Ahmed HAMMOUDI de présider le jury et Madame Lamia BENDIMERED d'avoir examiner mon modeste travail.

J'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur Mme. Djamila BENNAFLA, pour son soutien et je la remercie encore pour son suivi, ces remarques et suggestions qui à enrichi ce mémoire.

Mes remerciements aussi sincères que profonds s'adressent à tous mes enseignants de département Mathématique et Informatique qui m'ont former tout au long de mon cursus universitaire. Je tiens à remercier très chaleureusement, le chef du département, Madame Djamila BOUHALOUAN, pour sa disponibilité et ses services permanents.

Je remercie profondément, ma mère, pour son soutien quotidien et infailible. Merci à sa prière, son enthousiasme débordant, qui a été pour moi un pilier fondateur de mon action, sans elle je n'aurais jamais pu réaliser ce travail.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde sympathie à tous mes amis, avec qui j'ai passé d'agréables moments. Je remercie particulièrement, Ibtissem et Ilhem pour leurs encouragements et leur soutien pour réaliser ce mémoire.

Je tiens enfin à remercier, tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

*Avec tout l'amour
sur terre et chaque souffle
d'air dans le ciel, j'offre tout ce qui est
dans mon cœur, à ma mère bien-aimée.
Je prie Dieu de te guérir.
Je dédie ce mémoire à mes parents, à
mes chers frères Said et Mohamed, à
mes neveux Abd Kader et Abd Sa-
mad et à mes nièces : Meriem ,
Rawda et Zahra. A toute
ma famille, à tous
mes amis.*



Table des matières

Introduction	1
1 Généralités	7
1.1 Équations différentielles ordinaires	7
1.1.1 Définition générale	7
1.1.2 Existence et unicité de solution	8
1.1.3 Stabilité au sens de Lyapunov de solution	9
1.1.4 Linéarisation	10
1.2 Équations différentielles à retard	11
1.2.1 Définition générale	11
1.2.2 Stabilité des systèmes à retard par la deuxième méthode de Lyapunov	12
2 Équation différentielles à retard constant	15
2.1 Équations différentielles à retard constant	15
2.2 Existence,unicité et prolongement	15
2.3 Stabilité et oscillation	19
2.4 La résolution d'équations à retard constant	19
2.4.1 Résolution par méthode pas à pas	20
2.4.2 Méthode de Belman	23
2.4.3 Méthode d'Euler	23
2.5 Application	24
3 Équations différentielles à retard dépendant de l'état	25
3.1 Équations différentielles à retard dépendant de l'état	26
3.2 Existence et unicité	26
3.3 Linéarisation	30
3.4 Application	33
Conclusion	42
Bibliographie	42

Notations

\mathbb{R}_+ : Ensemble des nombres réels positifs ou nul

\mathbb{R}^n : Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels

$[a, b]$: Intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémité a et b

$C^{+\infty}$: Ensemble des fonctions infiniment dérivables

$C = C([- \tau, 0], \mathbb{R})$: Ensemble des fonctions continues de $[- \tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n

$|\cdot|$: La valeur absolue d'un nombre réel

$\|\cdot\|_C$: La norme sur C définie par $\forall \varphi \in C : \|\varphi\|_C = \sup_{[- \tau, 0]} \|\varphi(t)\|$

K : Ensemble des fonctions continues de $[0, a]$ à valeurs réels, avec a nombre positif

K_∞ : Ensemble des fonctions continues de classe K tendant vers l'infini

$y' = \frac{dy}{dt}$: La dérivée première qui représente la vitesse du système

$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$: La dérivée seconde de la solution y

$y_t \in C$: Fonction définie par $y_t(\theta) = y(t + \theta), \forall \theta \in [- \tau, 0]$

$\tau(t)$: Le retard temporel variable

\limsup : Limite supérieure qui présente le grand avantage d'exister dans tout les cas

Tr : La trace d'une matrice.

$\det(J^*)$: Déterminant d'une matrice.

$D^+V(t, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \frac{V(t + \varepsilon, \varphi + \varepsilon)}{\varepsilon}$: S'appelle dérivée de Dini.

Introduction

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie.

Une théorie classique dans la modélisation mathématique d'une transformation physique est de supposer que le comportement futur du système peut être résumé, dans le cadre déterministe, par son seul état présent, sans dépendre de son évolution antérieure. Cette supposition conduit à une modélisation sous forme de système d'équations différentielles ordinaires. Mais il existe de nombreux cas où cette théorie est mise en imperfection, et il est alors nécessaire de prendre en compte d'autres phénomènes, ce qui entraîne alors pour l'analyse du système un surcroît de complexité.

L'une de ces causes est le phénomène de retard ou d'hérédité qui caractérise l'influence que l'état passé d'un processus exerce sur son comportement au moment actuel. Ainsi, les systèmes imposés présentant des retards non négligeables ne peuvent plus être formulés mathématiquement sous forme de systèmes différentiels ordinaires, mais ils sont décrits par des équations héréditaires dont la dimension théorique devient infinie. Le plus simple de ces modèles correspond aux systèmes d'équations différentielles à retards (que l'on appellera par la suite équations à retards).

Les équations différentielles à retard surviennent dans la formalisation de nombreux phénomènes dynamiques où certains effets ne sont pas instantanés, mais interviennent avec retard, autrement dit lorsque l'état à un instant donné est une fonction de son passé.

On peut les rencontrer dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie,...etc. La signification du retard dans un tel ou tel modèle peut être différente : le temps de gestation en biologie, le temps de réaction en conduite automobile, la période d'incubation d'une maladie contagieuse, le temps d'accumulation, le temps nécessaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en un autre,...etc.

On trouve ainsi dans la théorie des ces équations différentielles à retards un moyen plus réaliste que dans les équations différentielles ordinaires.

A partir des années (40) la théorie des équations à retards a connu un grand développement, notamment on trouve Belman et Cooke (1963) ; Hale (1977). Récemment de nombreux phénomènes ont été proposés pour la modélisation de certaines situations compliquées.

Le phénomène de retard essentiel à un système souvent induit par le transport de l'information qui impose dans un délai (dû au temps de propagation) minimum incompressible (transmission de signaux, d'énergie), où de la propriété physique ou chimique des matériaux utilisés dans le système.

D'un point de vue Mathématique, les équations différentielles à retards sont des équations dans lesquelles la dérivée à un moment t dépend de la fonction à des moments antérieurs $t - \tau$, $\tau \in \mathbb{R}_+$.



Si $\tau(t) = \tau$, on dit que le retard est constant, les exemples à retard constant sont les plus faciles à trouver, on se réfère alors, à notre exemple classique qui est la "Dynamite" inventée par Alfred Nobel, qui impose un dispositif pour retarder le déclenchement de son explosion.

A cette notion, le retard peut être donné comme une intégrale et donc il dépend des fonctions inconnues qui sont des solutions du problème, il est appelé dans ce cas retard dépendant de l'état. Les travaux réalisés ces dernières années, défini un cadre théorique assez complet, pour l'étude des équations à retard dépendant de l'état, permettant de s'intéresser à des applications en biologie, faisons intervenir de telles équations, ce qui montre que le retard peut être utile comme il peut être absolument nécessaire.

Ce mémoire est consacré à l'étude des équations différentielles à retard et plus particulièrement des équations différentielles à retard dépendant de l'état et il est organisé comme suit :

Le premier chapitre, présente des Généralités sur les équations différentielles.

Dans le second chapitre, nous étudions les équations différentielles à retard constant (définition, existence et unicité des solutions). Pour conclure ce chapitre, on donne une interprétation en Biologie.

Le troisième chapitre, qui est consacré à l'étude des équations différentielles à retard dépendant de l'état. On lance dans un premier temps les définitions et théorèmes nécessaires pour la démonstration de l'existence et d'unicité des solutions. Nous entamons par suite la linéarisation de ces équations. On présente en fin de chapitre une application dans le domaine de dynamique des populations cellulaires.

Le mémoire se termine avec une conclusion, contenant une simple comparaison entre les équations différentielles ordinaires et à retard.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce premier chapitre on donne une introduction générale aux équations différentielles à retard, après avoir défini les différents concepts de la théorie des équations différentielles ordinaires. On a eu recours pour ce chapitre aux ouvrages suivants : [1] [3] [12].

1.1 Équations différentielles ordinaires

1.1.1 Définition générale

Soit E un espace vectoriel normé, une équation différentielle ordinaire est une équation dont l'inconnue est une fonction y exprimé sous la forme :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(t) \quad (1.1)$$

où F est une fonction continue sur un ouvert $U \times E^{n+1}$ appelé domaine. On pratique on préfère travailler avec des équations plus particulières dites explicites i.e :

$$y^{(n)} = G(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

Toute équation différentielle d'ordre k , $k \geq 1$ on peut la rendre aux équations différentielles

d'ordre 1 en faisant le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} x = y' \\ x' = y'' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} = y^{(n)} \end{pmatrix}$$

Définition 1.1

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert non vide U de \mathbb{R}^n telle que :

$$y' = f(t, y) \quad (1.3)$$

On dit que la fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur I , intervalle de \mathbb{R} , est une solution de l'équation (1.3) si elle est dérivable sur I et vérifie $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$ et $y' = f(t, y)$. \square

Définition 1.2

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des solutions de problème (1.3), on dit que \tilde{y} est un prolongement de y si : $I \in \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$ \square

Définition 1.3

On dit que une solution y est maximale si y n'admet pas de prolongement \tilde{y} , telle que $I \subset \tilde{I}$. \square

Définition 1.4

Toute solution (I, y) de (1.3) définie sur l'intervalle $I = \tilde{I}$ toute entier est dite globale. \square

Lemme 1.1

Si f est de classe C^n sur $I \times \mathbb{R}^n$ alors toute solution de (1.3) est de classe C^{n+1} .

1.1.2 Existence et unicité de solution

Définition 1.5 (Fonction lipschitzienne)

1. On dit que la fonction $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est globalement lipschitzienne par rapport à y s'il existe $L \geq 0$ telle que $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I$, on a

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|$$

2. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à y s'il existe un voisinage V de (t_0, y_0) et une constante $L \geq 0$ telle que $\forall (t, Y_1) \in V, \forall (t, Y_2) \in V$, on a

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq L(t, y_0) \| y_1 - y_2 \|$$

3. Si $0 \leq L \leq 1$ on dit que f est contractante. \square

Remarque 1.1

1. Si f est de classe C^1 alors elle est localement lipschitzienne.
2. Si f est continue et linéaire alors elles localement lipschitzienne.

Lemme 1.2 (Lemme de Gronwall)

Soit $u \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$. Supposons qu'il existe deux fonctions a et b dans $C([0, T], \mathbb{R}_+)$ telles que pour tout $t \in [0, T]$ si :

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau$$

alors

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau) \exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau$$

\square

Théorème 1.1 (Cauchy-Lipschitz)

Soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à y alors $\forall (t_0, y_0) \in I \times U$ il existe une unique solution $y \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau])$ avec $\tau \geq 0$ du problème (1.3) avec la condition initiale $y(t_0) = y_0 \forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$

Théorème 1.2 (Existence globale)

On suppose $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ est globalement lipschitzienne par rapport à y alors $\forall (t_0, y_0) \in I \times U$ il existe un unique $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ solution de (1.3) .

Théorème 1.3 (Unicité globale)

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (1.3) définies de I à valeur dans \mathbb{R}^n avec f est localement lipschitzienne. si y_1 et y_2 coïncident en un point de I alors $y_1 = y_2$

1.1.3 Stabilité au sens de Lyaponov de solution

L'étude de stabilité au sens de Lyaponov s'intéresse au comportement d'un système autour d'un point d'équilibre. Les trajectoires sont dites stables pour une position initiale donnée assez proche du point d'équilibre, elle reste dans un certain voisinage appelé domaine de stabilité .

Définition 1.6 (Les points d'équilibres)

On dit que y^* est un point d'équilibre pour l'équation (1.3) si et seulement si :

$$f(y^*) = 0$$

Exemple 1.1

L'équation de pendule $y'' = \sin(y)$ deux points d'équilibres qui s'écrit aussi $y' = x$ et $x' = \sin(y)$ possède deux équilibres : $(y = 0, x = 0)$ et $(y = \pi, x = 0)$.

Dans l'exemple du Pendule ci-dessus, vous savez bien que l'équilibre $y^* = 0$ et l'équilibre $y^* = \pi$ non pas de tout le même statut. Donc un premier cas intéressant à étudier est celui de la stabilité de l'origine pour un système différentiel et la notion de stabilité précise cela :

Définition 1.7 (Stabilité)

On dit que l'équilibre y^* de (1.3) est stable si pour tout $\varepsilon \geq 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ telle que pour tout solution y de (1.3) :

$$\| y^*(t_0) - y(t_0) \| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \| y^*(t) - y(t) \| < \varepsilon$$

Définition 1.8 (Stabilité asymptotique)

On dit que la solution y^* de l'équation (1.3) est asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe une constante $c > 0$, telle que si $|y^*(t_0) - y(t_0)| < c$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y^*(t) - y(t)| = 0$$

Définition 1.9

1. On dit que l'origine $y = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.
2. On dit qu'il est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

□

On s'intéresse maintenant, à étudier la stabilité d'équilibre pour le système $y' = Ay$.

Proposition 1.1

1. Si toute valeur propre de la matrice A sont à partie réelle strictement négative, alors l'origine est un équilibre asymptotiquement stable de l'équation $y' = Ay$.
2. Si l'une des valeurs propre de A a une partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas asymptotiquement stable .

□

En respect de telles définitions, autres méthodes ont été proposé pour analyser la stabilité des équations ordinaires. Parmi celles ci la méthode de Lyaponov. Cette méthode consiste à trouver une fonction V qui vérifie certaines propriétés énoncées dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.4 (*Théorème de Lyapunov*)

S'il existe un voisinage ν de 0 et une fonction $V : \nu \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue ayant des dérivées partielles continues telle que :

- a) V soit définie positive.
- b) la dérivée totale V' soit négative.

Alors : $y = 0$ est stable.

Théorème 1.5

Soit V une fonction définie positive.

- 1) Si $V'(t, y(t))$ est semi-définie négative alors $y = 0$ est stable pour $y' = f(t, y)$.
- 2) Si $V'(t, y(t))$ est définie négative alors $y = 0$ est asymptotiquement stable.

Exemple 1.2

Soit $y' = -y^3$ on peut définir $V(y) = y^2$ comme fonction de Lyapunov.

En fait V est définie positive et $\frac{d}{dt}V(t, y(t)) = 2yy' = -2y^3 = -2y^4$ est définie négative. par conséquent : 0 est asymptotiquement stable.

1.1.4 Linéarisation

Soit $y' = f(y)$ un système différentiel et y^* un équilibre non trivial.

On veut étudier le comportement de système pour y proche de y^* . Pour cela le plus simple est de faire d'abord un changement de variable $y = y^* + x$ pour déplacer le point d'étude à l'origine. Cela donne le nouveau système $x' = f(y^* + x)$.

Ensuite il est naturel de faire un développement de Taylor de f au voisinage de y^* qui donne $x' = Ax + o(y^2)$ ou A est la matrice jacobienne de f au point x^* .

Définition 1.10

Soit le système non linéaire à deux équations différentielles et soit (x_1^*, x_2^*) un point d'équilibre non trivial.

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x_1, x_2) \\ y_2' &= f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Le linéarisé autour de l'équilibre (x_1^*, x_2^*) de ce système est définie par :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{df_1}{dx_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{df_2}{dx_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

notée $Y' = JY$, où $J^* = J(x_1^*, x_2^*)$ est appelée la matrice jacobienne calculée au point (x_1^*, x_2^*)

Proposition 1.2

On suppose pour le système (1.4) que

$$\begin{cases} \det(J^*) \neq 0 \\ Tr^2 - 4\det(J^*) \geq 0 \end{cases}$$

On a les résultats suivants :

- 1. Si $\det(J^*) < 0$, alors le point d'équilibre est un point selle pour (1.4).
- 2. Si $\det(J^*) > 0$ et $Tr < 0$, alors le pont d'équilibre est localement asymptotiquement stable.
- 3. Si $\det(J^*) > 0$ et $Tr \geq 0$, alors le point d'équilibre est instable.

1.2 Équations différentielles à retard

Cette section vise à présenter certaines notions fondamentales relative à la stabilité des systèmes à retard, nous parlons notamment des deux extentions de la méthode de Lyapounov (Lyapounov-Krasovski et Lyapounov-Razumikhin). On s'est référé pour cette section aux [2], [7],[10],[11].

1.2.1 Définition générale

Une équation différentielle à retard est une équation de la forme :

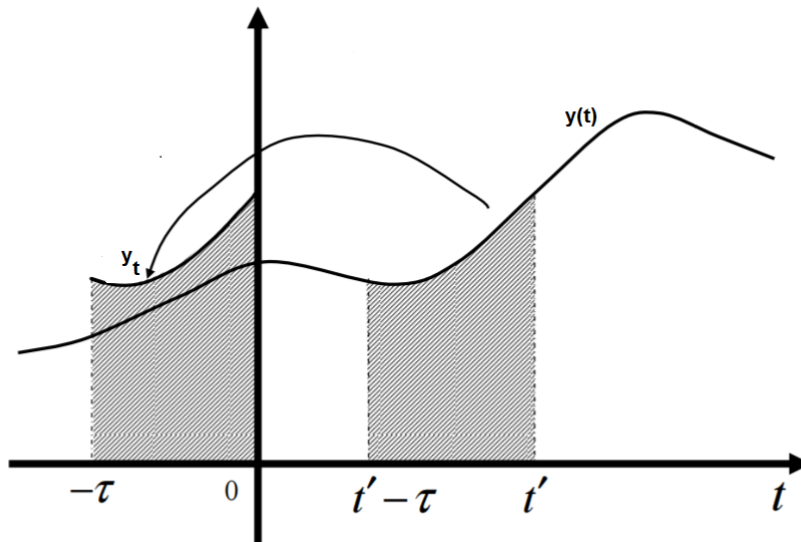
$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t), y_t) \\ y_{t_0}(\theta) &= \phi(\theta) \end{cases} \quad (1.5)$$

Où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (1.5) à l'instant t , f est une fonction continue sur \mathbb{R}^3 avec $f(t, 0) = 0$

L'équation (1.5) indique que la dérivée de l'état $y(t)$ à l'instant t dépend du temps présent t et de l'état $y_t(\theta) \in C$ définie par $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$. Et pour lesquels le domaine de définition C est un sous espace de $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

La condition initiale y_{t_0} peut ainsi être représenté par une fonction continue ϕ de la forme suivante : $y(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$ pour tout $\theta \in [-\tau, 0]$.

L'idée consiste à couper chaque tranche de la courbe pour la ramener sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ si l'on parcourt le chemin en sens inverse, on définit alors une fonction représentant l'état du système qui prend ses valeurs sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ et coïncide avec y à l'arrivée .



Mathématiquement, cette fonction est notée y_t et se définit par

$$y_t(\cdot) : [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

avec $y_t(\theta) = y(t + \theta)$ pour tout réel θ variant dans $[-\tau, 0]$. Ainsi, le système est vu comme évoluant dans l'ensemble C des fonctions de $[-\tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n .

Une solution du système (1.5) est notée $y(t, t_0, \varphi_0)$ pour faire apparaître explicitement les conditions initiales.

Nous comprenons à présent que f , définie dans l'équation (1.5), est une fonction qui admet comme variable un réel t et une autre fonction y_t . C'est donc une fonction de fonction que nous l'appelons *fonctionnelle*.

1.2.2 Stabilité des systèmes à retard par la deuxième méthode de Lyapunov

Dans le cas d'équation ordinaire, la seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction $V(t)$ définie positive telle que sa dérivée est définie négative. Une telle méthode peut être appliquée sans modification majeure aux systèmes à retards. Cependant celle-ci présente dans le cas générale un inconvénient majeur qui est d'imposer des conditions sévères pour le système pour montrer que la dérivée de la fonction de Lyapunov calculée le long des trajectoires est négative (en effet, cette dérivée n'est pas une fonction ordinaire mais une fonctionnelle : elle dépend aussi de certaines valeurs passées de l'argument t). Étant une dimension infinie, cette méthode est donc difficilement exploitable pour de nombreux cas de système à retard deux extensions de la seconde méthode de Lyapunov ont alors été développée d'un côté par *Krasovski* et l'autre par *Ruzmikhin*.

Sans perte de généralité, on suppose que $y(t) = 0$ est une solution pour l'équation différentielle fonctionnelle (1.5), qu'on va appelé solution triviale. En effet si on désire étudier la stabilité d'une solution non triviale $x(t)$, on fera le changement de variable suivant :

$$z(t) = y(t) - x(t)$$

On obtient alors le système :

$$z'(t) = f(t, z_t + x(t)) - f(t, y_t) \quad (1.6)$$

qui admet $z(t) = 0$ comme solution.

Une brève présentation de ces deux extensions constituent l'objet des deux paragraphes suivants :

L'approche de Lyapunov-Krasovskii

La méthode de Lyapunov-Krasovski est une extension directe de la seconde méthode de Lyapunov traditionnelle aux équations différentielles retardées. L'état considéré y_t n'étant plus un point mais une fonction. La fonction $V(y_t)$ candidate devient une *fonctionnelle* mesurant la déviation de y_t par rapport à l'origine. La principale difficulté reste néanmoins de trouver une fonctionnelle qui vérifie les hypothèses du théorème. En particulier les conditions de décroissance sur la dérivée de V .

Cette technique est une extension des fonctions usuelles de Lyapunov des fonctionnelles vérifiant certaines propriétés et qui décroissent le long des trajectoires du système étudié.

Théorème 1.6 (Krasovski)

S'il existe une fonctionnelle V à valeur dans \mathbb{R}_+ définie positive, telle que : $D^+V(t, \varphi) \leq 0$ le long de trajectoires de l'équation (1.5); alors la solution nulle de (1.5) est stable . □

Théorème 1.7 (Hale et Verdun-Lunel)

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y_t) \\ y_{t_0} = \varphi_0 \in C \end{cases} \quad (1.7)$$

où $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue telle que : $f(0) = 0$.

Supposons que les solutions $y_t(\varphi_0)$ du système (1.7) sont continues pour $\forall \varphi_0 \in C$. S'il existe une fonction continue $V : C \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction α_1 de classe K_∞ et une fonction α_2 définie positive telle que pour tout $\varphi \in C$:

- 1) $V(\alpha) \geq \alpha_1(\|\varphi(0)\|_C)$
- 2) $V'(\varphi) \leq -\alpha_2(\|\varphi(0)\|_C)$

Alors l'origine du système (1.7) est stable. □

Enfin présentons le théorème le plus largement utilisé dans l'étude de la stabilité des systèmes à retards .

Théorème 1.8 (kolmanovski-Myshkis)

Soient α_1 et α_2 deux fonctions de classe K , α_3 une fonction continue, positive et croissante de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ ;

Supposons qu'il existe une fonction $V(t, \varphi) : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1. $\alpha_1(\|\varphi(0)\|_C) \leq V(t, \varphi) \leq \alpha_2(\|\varphi\|_C)$
2. $D^+V(t, \varphi) \leq -\alpha_3(\|\varphi_0\|)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ le long de trajectoire de (1.7)

alors, la solution nulle du système retardé (1.7) est uniformément asymptotiquement stable.

Si de plus α_3 est de classe K , alors la solution nulle est globalement uniformément asymptotiquement stable. □

L'approche de Lyaponov-Razumikhin

Contrairement à l'approche de Krasovski qui considère l'ensemble de l'état $y_t \in C$, la méthode proposée par Razumikhin tient compte simplement de l'état instantané $y(t) \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit plus alors, de chercher une fonction de Lyaponov plus classique. De plus, cette méthode présente la particularité de vérifier la décroissance de la fonction V seulement pour les trajectoires de l'état qui ont tendance à s'éloigner du point d'équilibre, plus précisément lorsque

$$V(y(t)) \geq \max_{\theta \in [-\tau, 0]} V(y(t + \theta))$$

Théorème 1.9

Supposons que la fonction $f : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que l'image par f de $\mathbb{R} \times I$ avec I un ensemble borné de C est un ensemble borné de \mathbb{R}^n et que u, v et w sont définies de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ , continues et non décroissantes avec $u(\theta) = v(\theta) = 0$, V est strictement croissante. S'il existe une fonction continue différentiable $V(t, y(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- 1) $u(\|y\|_C) \leq V(t, y) \leq v(\|y\|_C) \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^n$
- 2) $V'(t, y) \leq -w(y) \text{ si } V(t + \theta, y(t + \theta)) < V(t, y(t)) \quad ; \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$

Alors :

La solution triviale $y = 0$ du système est uniformément stable.

Si de plus $w(\theta) > 0$ et s'il existe une fonction continue non décroissante $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $p(\theta) > 0 \quad \theta > 0$ telle que :

- 1) $u(\|y\|_C) \leq V(t, y) \leq v(\|y\|_C) \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^n$
- 2) $V'(t, y) \leq -w(y) \text{ si } V(t + \theta, y(t + \theta)) < pV(t, y(t)) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$

Alors, la solution triviale $y = 0$ du système est asymptotiquement stable. □

Équation différentielles à retard constant

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations différentielles à retard de type constant, en présentant quelques notions théoriques fondamentales relative à l'existence et l'unicité de solution, ainsi que, quelques méthodes de résolution des équations à retard constant. On s'est référé aux documents suivants : [2],[5],[6],[10],[13].

2.1 Équations différentielles à retard constant

Définition 2.1

On appelle équation différentielle à retard constant toute équation de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) \quad (2.1)$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et τ un nombre réel positif que l'on appelle le retard.

2.2 Existence,unicité et prolongement

Définition 2.2

On dit que la fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne par rapport à y si pour $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$ il existe un voisinage de (t_0, y_0) dans lequel f est lipschitzienne dans ce voisinage . □

Théorème 2.1

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) \\ y_{[t_0 - \tau, t_0]} = \varphi(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $t \in [-r, 0]$ et $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R})$.

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors le problème (2.2) admet au moins une solution ,si de plus f est localement lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables alors cette solution est unique.

Théorème 2.2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue localement lipschitzienne par rapport à la troisième variable, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, on se donne une fonction $\varphi : [t_0 - \tau, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors, le problème (2.2) admet une solution unique sur tout intervalle $[t_0 - \tau, \alpha]$ avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1

Soit C une constante donnée, k une fonction continue sur un intervalle J à valeurs dans \mathbb{R}_+ et $y_0 \in J$.

Si $\nu : J \rightarrow [0, +\infty]$ est une autre fonction continue et si

$$\nu \leq C + \left| \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right| \quad \forall t \in J \quad (2.3)$$

alors

$$\nu \leq C \exp \left(\int_{t_0}^t k(s)ds \right) \quad ; \quad \forall t \in J$$

Preuve 2.1

▷ 1^{er} cas : $t \geq t_0$

L'inégalité (2.3) peut s'écrire sous la forme :

$$k(t)\nu(t) - k(t) \left[C + \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right] \leq 0 \quad (2.4)$$

Posons $P(t) = C + \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds$ Alors,

$$P'(t) = k(t)\nu(t)$$

L'inégalité (2.3) devient :

$$P'(t) - k(t)P(t) \leq 0$$

En multipliant par le facteur intégrant $\exp \left(- \int_{t_0}^t k(s)ds \right)$, on obtient :

$$P'(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s)ds \right) - P(t)k(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s)ds \right) \leq 0$$

C'est à dire cette dernière inégalité :

$$\left[P(t) \exp - \int_{t_0}^t k(s)ds \right]' \leq 0$$

En intégrant cette dernière inégalité entre t_0 et t on remarque que : $P(t_0) = C$, on obtient :

$$P(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s)ds \right) - C \leq 0$$

ou bien :

$$P(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t k(s)ds$$

Or : $\nu(t) \leq P(t)$ alors :

$$\nu(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t k(s)ds \quad (c.q.f.d)$$

▷ 2^{me} cas : $t < t_0$

$$\left| \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right| = - \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds$$

L'inégalité (2.3) s'écrira sous la forme :

$$k(t)\nu(t) - k(t) \left[C - \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right] \leq 0$$

Posons : $Q(t) = C - \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \leq 0$

L'inégalité (2.4) devient :

$$-Q'(t) - k(t)Q(t) \leq 0$$

C'est à dire :

$$Q'(t) + k(t)\nu(t) \geq 0$$

En multipliant cette inégalité par le facteur $\exp \int_{t_0}^t k(s)ds$ on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left[Q(t) \exp \int_{t_0}^t k(s)ds \right] \geq 0$$

En intégrant cette inégalité entre t_0 et t on obtient :

$$Q(t) \leq C \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s)ds \right)$$

Or : $\nu(t) \leq Q(t)$ et alors, $\forall t \in J$

$$\nu(t) \leq C \exp \left(\left| \int_{t_0}^t k(s)ds \right| \right)$$

Maintenant procédant à la démonstration du théorème.

Preuve 2.2

Faisons un raisonnement par absurde.

Supposons qu'il existe deux solutions y et \tilde{y} définies de $[t_0 - \tau, \alpha]$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que :

$y(t) \neq \tilde{y}$ Soit $t_1 = \inf\{t \in [t_0, \alpha], \text{ telle que } : y(t) \neq \tilde{y}\}$

On a donc : $y(t) = \tilde{y}$ pour $t \in [t_0 - \tau, t_1]$.

Comme f est localement lipschitzienne, alors

$\exists \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ tel que f est localement lipschitzienne sur D ; avec

$$D = [t_1 - \varepsilon_1, t_2 + \varepsilon_2] \times (y(t_1 - \tau) - \varepsilon_2, y(t_1 - \tau) + \varepsilon_2)$$

▷ 1^{er} cas : $\varepsilon_1 \geq \tau$

Soit $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$ alors :

$$\begin{aligned} y(t) - \tilde{y}(t) &= \int_{t_0}^t [f(s, y(s), y(s - \tau)) - f(s, \tilde{y}(s), \tilde{y}(s - \tau))] ds \\ &= \int_{t_0}^t [f(\theta + \tau, y(\theta + \tau), y(\theta)) - f(\theta + \tau, \tilde{y}(\theta + \tau), \tilde{y}(\theta))] ds \end{aligned}$$

Puisque $t < t_1 + \varepsilon_1$ et $\varepsilon_1 \leq \tau$ Alors $t \leq t_1 + \tau$, or $y(\theta) = \tilde{y}$ pour $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$, alors $t \leq t_1 + \tau$
 Or $y(\theta) = \tilde{y}(\theta)$ pour tout $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$

Alors :

$$y(t) - \tilde{y}(t) = C$$

Ainsi $y(t) = \tilde{y}(t)$ pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_1 + \varepsilon_1]$.

Ce qui contredit la définition (1).

▷ 2^{me} cas : $\varepsilon_1 > \tau$

Soit $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1]$

1. Si $t < t_1 + \tau$; on a le même résultat précédant.

2. Si $t > t_1 + \tau$; on a :

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, y(s), y(s - \tau)) - f(s, \tilde{y}(s), \tilde{y}(s - \tau))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s), y(s - \tau)) - f(s, \tilde{y}(s), \tilde{y}(s - \tau))| ds \end{aligned}$$

Pour $s \in [t_0, t_1 + \varepsilon_1]$;

On a $y(s - \tau) = \tilde{y}(s - \tau)$, alors :

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq \int_{t_1 + \tau}^t |f(s, y(s), y(s - \tau)) - f(s, \tilde{y}(s), \tilde{y}(s - \tau))| ds \\ &\leq k \int_{t_1 + \tau}^t |y(s - \tau) - \tilde{y}(s - \tau)| ds \\ &\leq k \int_{t_1}^{t - \tau} |y(\theta) - \tilde{y}(\theta)| d\theta \\ &\leq k \int_{t_1}^{t - \tau} |y(\theta) - \tilde{y}(\theta)| d\theta + k \int_{t - \tau}^t |y(\theta) - \tilde{y}(\theta)| d\theta \\ &\leq k \int_{t_1}^t |y(\theta) - \tilde{y}(\theta)| d\theta \end{aligned}$$

Posons $\nu(t) = |y(t) - \tilde{y}(t)|$

On a donc :

$$\nu(t) \leq k \int_{t_1}^t \nu(\theta) d\theta$$

$\nu(t)$ vérifie l'hypothèse du lemme avec $c = 0$, alors :

$$\nu(t) \leq 0$$

Il s'en suit que, $y(t) = \tilde{y}$, pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_1 + \varepsilon_1]$, ce qui contredit la définition (1);
 Donc, la solution du problème est unique. □

Définition 2.3

On dit que \tilde{y} est un prolongement de y s'il existe $\beta > \alpha$ tel que \tilde{y} est définie sur $[t_0 - \tau, \beta]$, qui coïncide avec y sur $[t_0 - \tau, \alpha]$ et vérifie l'équation (2.2) sur $[t_0 - \tau, \beta]$. □

Définition 2.4

Un fonction définie sur $[t_0 - \tau, +\infty[$ à valeur dans \mathbb{R} différentiable sur $[t_0, +\infty[$ est solution de l'équation (2.2), si est seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1) $y_{[t_0-\tau, t_0]} = \phi$
- 2) $y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) \quad \forall t \in [0, +\infty[$

□

Autrement dit :

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t) \\ \phi(t) + \int_{t_0}^t f(s, y(s), y(s - \tau)) ds \end{cases} \tag{2.5}$$

Exemple 2.1

$$y'(t) = -y(t - \frac{\pi}{2})$$

admet $y(t) = \sin t$ comme solution qui s'annule pour $t = k\pi$, tel que $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Stabilité et oscillation

Soit l'équation à retard suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) \\ y(t_0) = \varphi(t) \end{cases} \tag{2.6}$$

Définition 2.5 (Les points d'équilibres)

On appelle un point d'équilibre d'une équation différentielle à retard une solution que l'on note y^* , vérifiant la condition suivante :

$$f(t, y^*, y^*) = 0$$

Définition 2.6 (Stabilité)

- 1. On dit qu'un équilibre y^* de (2.6) est stable si $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t \in [-\tau, 0]$, s'il existe $\delta > 0$ tel que $|\varphi(t) - y^*| \leq \delta$ alors $|y(t) - y^*| \leq \varepsilon$ pour toute y solution de (2.6).
- 2. On dit qu'un équilibre y^* de (2.6) est asymptotiquement stable s'il est stable et vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$.

Définition 2.7 (Oscillation)

On dit qu'une solution y de (2.6) est oscillatoire par rapport à une certaine valeur y^* , s'il existe une suite (t_n) avec $(t_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ telle que $y(t_n) = y^*$. Dans le cas contraire on dit qu'elle est non oscillatoire.

2.4 La résolution d'équations à retard constant

Contrairement aux équations différentielles ordinaires, la condition initiale d'une équation ne suffit pas pour trouver une solution ; il faut y ajouter une infinité des points qui décrivent un segment particulier de largeur du retard étudié, c'est à dire le segment $[-1, 0]$ de longueur 1. C'est en cela que les systèmes à retard font partie de classe plus générale des système à dimension infinie ce qui rend complexe leur étude. Dans cette partie nous entamons la résolution de cette équation par une méthode analytique dite "pas à pas" et deux autres numériques, de Belman et d'Euler.

2.4.1 Résolution par méthode pas à pas

Considérons le système à retard suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) \\ y_{t_0} = \varphi \end{cases} \quad (2.7)$$

où φ est un élément de C .

On se ramène à la résolution d'une équation différentielle ordinaire, pour cela pour t appartenant au segment $[t_0, t_0 + \tau]$ on remplace $y(t - \tau)$ dans (2.7) par $\varphi(t - t_0 + \tau)$.

Ce qui réduit le problème à la détermination de la solution de l'équation

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \varphi(t - t_0 - \tau)) \\ y_{t_0} = \varphi(0) \end{cases}$$

La solution étant définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$ ce processus peut être réitéré pour les intervalle $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$, $[t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ et ainsi de suite jusqu'à définir complètement la solution $y(t)$ Par cette méthode l'équation $f(t, y(t), y(t - \tau))$ admet les solutions suivantes sur les différents intervalles où segments.

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \forall t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ y_1(t) & \forall t \in [t_0, t_0 + \tau] \\ y_2(t) & \forall t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau] \\ \vdots & \\ y_n(t) & \forall t \in [t_0 + (n - 1)\tau, t_0 + n\tau] \end{cases}$$

où y_1, y_2, \dots, y_n représentent les solutions locales constantes de problème, avec la solution globale est donnée comme suit :

$$y(t) = \varphi(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t)$$

De ce qui précède on déduit que, la méthode des pas nous donne l'existence de solutions et ceci nous mène à énoncer les définitions suivantes :

Définition 2.8

Par la méthode des pas, tout fonction φ continue sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ définit une solution de l'équation (2.1).

Définition 2.9

Si de plus f est localement lipschitzienne par rapport à la troisième argument " $y(t - \tau)$ ", alors la solution est unique.

Exemple 2.2

Considérons l'exemple biologique de taille $P(t)$ à l'instant t , soumise à des processus de reproduction ou de disparition avec que $P'(t)$ représente la vitesse de croissance.

Cette population sera gouvernée par l'équation différentielle à retard suivante :

$$P'(t) = K \left[1 - \frac{P(t - \tau)}{\rho} \right] P(t) \quad (2.8)$$

où le facteur $1 - \frac{P(t - \tau)}{\rho}$, joue le rôle de régulateur.

Passant à l'intégration de l'équation (2.8) qui s'écrira sous la forme intégrale suivante :

$$\int_0^t \frac{P'(s)}{P(s)} ds = \int_0^t K \left[1 - \frac{P(t - \tau)}{\rho} \right] ds \quad (2.9)$$

Remarquons que pour résoudre cette équation sur l'intervalle $[0, \tau]$, il faut connaître $P(t)$ sur $[-\tau, 0]$.

Ainsi, on considère une fonction θ , continue sur $[0, \tau]$ et on pose comme condition initiale $P(t) = \theta(t)$ sur l'intervalle $[0, \tau]$.

Posons le changement de variable $u = s - \tau$, pour $t \in [0, \tau]$ alors (2.9) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{P'(s)}{P(s)} ds &= \int_{-\tau}^{t-\tau} K \left[1 - \frac{P(u)}{\rho} \right] du \\ &= \int_{-\tau}^{t-\tau} K \left[1 - \frac{\theta(u)}{\rho} \right] du \end{aligned}$$

donc la solution sur $[0, \tau]$ est donnée par :

$$P_1(t) = P_0 \exp \left(\int_{-\tau}^{t-\tau} k \left[1 - \frac{\theta(u)}{\rho} \right] du \right) \quad \text{avec } t \in [0, \tau]$$

On refait l'opération sur $[\tau, 2\tau]$ on considérons la condition initiale $P(t) = P_1(t)1$ sur $[0, \tau]$ et ainsi de suite.

Exemple 2.3

On propose un exemple plus spécifique sur lequel on applique la méthode des pas.

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t - 1) \\ y(t) &= a \end{cases}$$

▷ La résolution sur $[0, 1]$

Soit $t \in [0, 1]$

$$\int_0^1 y'(s) ds = \int_0^1 (y(s - 1)) ds$$

Posons $u = s - 1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^t y'(s) ds &= \int_{-1}^{t-1} y(u) du \\ &= \int_{-1}^{t-1} a du \\ &= at \end{aligned}$$

donc :

$$y(t) = at + y(0) = at + a$$

posons $y_1(t) = at + a$ sur $[0, 1]$

▷ La résolution sur $[1, 2]$

On considère la condition initiale : $y_{[0,1]} = y_1$ Pour $t \in [1, 2]$ on obtient :

$$\int_1^t y'(s)ds = \int_1^t y(s-1)$$

en posant $u = s - 1$ on trouve :

$$\begin{aligned} \int_1^t y'(s)ds &= \int_0^{t-1} y(u)du \\ &= \int_0^{t-1} y_1(u)du \\ &= \int_0^{t-1} (au + u)du \\ &= \left[\frac{au^2}{2} + au \right]_0^{t-1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

il s'en suit que, $y(t) - y(1) = \frac{a}{2}(t^2 - 1)$ or $y(1) = y_1(1) = 2a$

alors,

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}$$

posons $y_2(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}$ pour n'importe quel $t \in [1, 2]$

▷ La résolution sur $[2,3]$

On considère la condition $y_{[1,2]} = y_2, \forall t \in [2, 3]$ on a :

$$\int_2^t y'(s)ds = \int_2^t y(s-1)ds$$

Gardons le même changement de variable on obtient :

$$\begin{aligned} \int_2^t y'(s)ds &= \int_1^{t-1} y(u)du \\ &= \int_1^{t-1} y_2(u)du \\ &= \int_1^{t-1} \left(\frac{a}{6}u^3 - \frac{3}{2}au \right) du \\ &= \left[\frac{a}{6}u^3 - \frac{3}{2}au \right]_1^{t-1} \\ &= \frac{a}{6}((t-1)^3 - 3(t-1)^2 - 1) + \frac{3a}{2}(t-1) - \frac{5a}{6} \\ &= \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a \end{aligned}$$

On a alors :

$$y(t) - y(2) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a$$

or $y(2) = \frac{7}{2}$ alors $y(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a$

Posons $y_3(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a \quad \forall t \in [2, 3]$

L'objective de la partie qui suit est de présenter quelques méthodes d'analyse numérique pour les équations différentielles à retards. On considère les équations à retard unique et constant.

2.4.2 Méthode de Belman

On considère l'équation munie de la condition initiale :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) \\ y_{t_0} = \varphi \in C \end{cases} \quad (2.11)$$

Soit : $y_{(i+1)}(\theta) = y(t_0 + \tau(\theta + i))$ avec $0 \leq \theta \leq 1$; et $i = -1, 0, 1, 2, \dots$; La variable θ correspond donc à un changement qui normalise le retard à $\tau = 1$.

Pour $i = -1$, on trouve la condition initiale : $y_0(\theta) = \varphi(\tau(\theta - 1))$, avec $\theta \in [0, 1]$

Selon le principe de méthode pas-à-pas, la fonction y_{i+1} (pour $i = 0, 1, \dots$) est solution de l'équation

$$y'_{(i+1)}(\theta) = \tau f(t_0 + \tau(\theta + i), y_{(i+1)}(\theta), y_{(i)}(\theta)) \quad (2.12)$$

$$y_{(i+1)}(0) = y_{(i)}(1) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.13)$$

Ce problème peut être résolu en utilisant n'importe quelle méthode pour les équations différentielles ordinaires. Il y a cependant deux inconvénients majeurs à cette approche. Premièrement les valeurs calculées de $y_{(i)}$ doivent être gardées en mémoire jusqu'à la fin du calcul de $y_{(i+1)}$, deuxièmement on a besoin d'une valeur de $y_{(i)}$ en un point que l'on n'a pas calculé.

En effet les algorithmes les plus efficaces de résolution numériques d'une équation différentielle sont à pas variable. Dans un tel cas, la valeur désirée est obtenue par interpolation.

Pour remédier à ces inconvénients, Belman (1961) a proposé la technique suivante :

Comme précédemment, $y_{(1)}$ est déterminé numériquement à partir du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_{(1)}(\theta) = \tau f(t_0 + \tau(\theta + i), y_{(1)}(\theta), \varphi(\tau(\theta - 1))) \\ y_{(1)}(0) = \varphi(0) \end{cases} \quad (2.14)$$

Puis les fonctions $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ sont déterminées simultanément en résolvant le système formé par les deux premiers équations (2.12), avec valeurs initiales $y_{(1)}(0) = \varphi(0)$; $y_{(2)}(0) = \tilde{y}_{(1)}(1)$ et $y_{(3)}(0) = \tilde{y}_{(2)}(1)$.

En procédant de cette façon, la suite complète $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots$, est obtenue. Cet algorithme est bien évidemment coûteux en temps de calcul, mais il permet de résoudre les problèmes présentant des discontinuités dans les conditions et de ce fait, il peut être employé pour initialiser une autre méthode plus simple et efficace.

2.4.3 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la plus simple de toutes les méthodes numériques à retards.

Pour un pas constant h de la forme τ/m , où m est un entier, la solution approchée y est générée par l'équation aux différences.

$$\tilde{y}(t_{n+1}) = \tilde{y}(t_n) + hf(t_n, \tilde{y}(t_n), \tilde{y}(t_{n-m}))$$

$$\tilde{y}(t_n) = \varphi(nh) \quad \text{pour } -m \leq n \leq 0$$

où $t_n = t_0 + nh$

Remarque 2.1

Cette méthode est d'ordre 1, sous certaines hypothèses sur f .

2.5 Application

Les équations à retard jouent un rôle cruciale dans la modélisation de nombreux domaines. Dans cette section nous présentons un exemple d'application d'un phénomène biologique.

Considérons une population composée d'individus jeunes et adultes. Soient :

$P(t)$: La densité d'adultes à un temps t .

τ : La longueur de la période juvénile pour chaque individu.

α : Taux de mourir.

β : Taux de survie des juvéniles.

Alors, la dynamique de la population P peut être décrite par l'équation différentielle à retard suivante :

$$P'(t) = -\alpha P(t) + \beta P(t - \tau) \quad (2.15)$$

$\alpha P(t - \tau)$: Signifie que les nouveaux nés deviennent adultes avec un retard, alors la variation de la densité de population P comprend des valeurs courantes, ainsi que des valeurs au passé. Pour intégrer l'équation (2.15) en certains temps $t \in [0, \tau]$, on nécessite de prescrire la valeur $P(t - \tau)$. Alors on doit considérer une fonction sur un intervalle de longueur τ , pour cela on prescrit P sur l'intervalle $[-\tau, 0]$, ensuite, on pose $P(\theta) = \varphi(\theta)$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$ Où φ est une fonction donnée.

Explicitement, on a alors pour $\forall t \in [0, \tau]$

$$P(t) = \varphi(0) \exp(-\alpha t) + \tau \int_0^t \exp(-\alpha(t - \beta)) \varphi(\beta - \tau) d\beta$$

Équations différentielles à retard dépendant de l'état

On s'intéresse maintenant aux équations à retard dépendant de l'état, où l'évolution de la variable y à l'instant t dépend de la valeurs de y à l'instant $t - \tau(y(t))$ et le retard dépend également de la valeur de y . Une telle équation s'écrit sous la forme :

$$y' = f(t, y(t), y(t - \tau(y(t)))) \quad (3.1)$$

Ces équations posent des nombreux problèmes théoriques sur quel intervalle définir la condition initiale, par exemple pour une équation à retard discret τ , la condition initiale doit être définie sur un intervalle de longueur τ typiquement $[-\tau, 0]$. Pour un équation à retard dépendant à l'état en $t = 0$ il est nécessaire d'accéder à la valeurs $y(-\tau(y(0)))$.

On pourrait donc considérer une condition initiale φ défini sur l'intervalle $[-\tau(\varphi(0)), 0]$.

Si la fonction τ est supposée croissante, alors en $t = \varepsilon$ il faut accéder à la valeur $y(\varepsilon - \tau(y(\varepsilon)))$ et il se peut que : $\varepsilon - \tau(y(\varepsilon)) < -\tau(y(0)) = -\tau(\varphi_0)$.

C'est à dire :

$$\frac{\tau \circ y(\varepsilon) - (\tau \circ y)(0)}{\varepsilon} > 1$$

Ainsi, si la fonction $\tau \circ y$ est fortement croissante en $t = 0$, on peut même faire face à un problème de définition de la condition initiale. On est rapidement amène à considérer des fonctions τ bornées et des conditions suffisamment régulières.

Les premiers travaux notables sur les équations différentielles à retard dépendant de l'état ont été réalisés dans les années 1960 ; Driver étudié l'existence, l'unicité et la dépendance aux conditions initiales des solutions, un travail complète par la suite par des nombreux auteurs qui se sont intéressés à l'existence de solutions périodiques pour ces équations.

La linéarisation d'équations à retard dépendant de l'état à été étudiées par Cooke et Huang mentionnons également que des méthodes numériques pour ces équations ont été proposées par Hofer.

On a eu recours pour ce chapitre aux ouvrages suivants : [4],[8], [9],[13].

3.1 Équations différentielles à retard dépendant de l'état

Définition 3.1

On appelle équation différentielle dépendant de l'état une équation de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(y(t)))) & t \geq 0 \\ y(t) = \varphi(t) & t \in [-\delta, 0] \end{cases} \quad (3.2)$$

où : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; et $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$.

Avec :

$$\delta = \max_{y \in \mathbb{R}}(\tau(y)) \text{ et } \varphi \in C([-\delta, 0], \mathbb{R}) \quad \square$$

3.2 Existence et unicité

Proposition 3.1

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(y(t)))) \\ y(t) = \varphi(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Supposons que f et τ vérifient les hypothèses suivantes :

(H₁) : f est localement lipschitzienne par rapport à $y(t)$ et $y(t - \tau(y(t)))$.

(H₂) : τ est localement lipschitzienne.

(H₃) : f est bornée sur les bornes.

Alors :

pour tout $T > 0$, soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-\delta, T]$ à valeurs réelles muni de la norme infinie, E est un espace de Banach.

Proposition 3.2

Soit C_φ le sous ensemble de E défini par :

$$C_{\varphi, T} = \left\{ \begin{array}{l} y \in E \quad , \quad y(s) = \varphi(s) \\ \|y\|_C \leq r \quad \text{et} \quad \|y(t) - y(s)\| \leq \omega|t - s| \\ \forall t, s \in [-\delta, T] \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Pour tout $(\omega, \rho) \in \mathbb{R}^2$, $C_{\varphi, T}$ est compact.

Preuve 3.1

a) Montrons d'abord que $C_{\varphi, T}$ est relativement compact, pour cela il suffit d'après le théorème d'Ascoli (voir annexe) que $C_{\varphi, T}$ soit borné et uniformément équicontinu.

i) il est clair que $C_{\varphi, T}$ est borné par construction.

ii) pour tout $t, s \in [-\delta, r]$ et pour tout $y \in C_{\varphi, T}$ on a :

$$|y(t) - y(s)| \leq w|t - s| \quad (3.5)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et pour $|t - s| \leq \frac{\varepsilon}{w}$, (3.5) donne $|y(t) - y(s)| \leq \varepsilon$

Ce qui prouve que $C_{\varphi, T}$ est relativement compact.

b) Montrons maintenant que $C_{\varphi,T}$ est fermé.

Prenons donc une suite y_n dans $C_{\varphi,T}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y(t)$$

et montrons que $y(t) \in C_{\varphi,T}$.

D'une part, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n(s) = \varphi(s)$ pour n'importe $s \in [-\delta, 0]$; passons à la limite, on trouve :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t) &= \varphi(s) & \forall s \in [-\delta, 0] \\ \|y(s) - y(t)\|_C &\leq \frac{\varepsilon}{2} + u|s - t| + \frac{w}{2} = \varepsilon + R|s - t| + \frac{w}{2} & \forall \varepsilon \geq 0, \forall R > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi :

$$|y(s) - y(t)| \leq w|s - t|$$

$$\|y\| = \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \right\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\| \leq r$$

Alors :

$y \in C_{\varphi,T}$ et par conséquent $C_{\varphi,T}$ est fermé. On conclure donc que $C_{\varphi,T}$ est compact.

Théorème 3.1

Supposons que les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) , sont vérifiées, alors pour tout fonction φ dérivable avec $|\varphi'(t)| \leq R$ pour tout $R > 0$,

Alors, le problème (3.2) admet une solution unique.

Preuve 3.2

Pour la démonstration de cette théorème on applique le théorème de point fixe.

1) Soit K la borne de φ , M la borne de f Supposons que $R \geq M$.

Pour $w = R$ et $r = K + TM$ on définit $C_{\varphi,T}$ et d'après la proposition précédente $C_{\varphi,T}$ est compact.

2) Montrons qu'il est convexe :

a) Soit $\alpha \in [0, T]$ et $x, y \in C_{\varphi,T}$ alors :

$$\begin{aligned} \alpha x(s) + (1 - \alpha)y(s) &= \alpha\varphi(s) + (1 - \alpha)\varphi(s) & \forall s \in [0, T] \\ &= \varphi(s) \end{aligned}$$

b) pour tout $t, s \in [-\delta, 0]$ on a :

$$\begin{aligned} |\alpha x(s) + (1 - \alpha)y(s) - \alpha x(t) + (1 - \alpha)y(t)| &\leq |\alpha(x(s) - x(t)) + (1 - \alpha)(y(s) - y(t))| \\ &\leq \alpha|x(s) - x(t)| + (1 - \alpha)|y(s) - y(t)| \\ &\leq \alpha R|s - t| + (1 - \alpha)R|s - t| \\ &\leq R|s - t| \end{aligned}$$

Alors : $\alpha x + (1 - \alpha)y$ est lipschitzienne sur $[-\delta, 0]$ avec la constante de Lipschitz égale à R

c) x et y deux solutions bornées par r alors :

$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C_{\varphi,T}$ et par suite $C_{\varphi,T}$ est un convexe.

3) Posons $I = [-\phi, T]$ et considérons l'application :

$$F : C_{\varphi,T} \longrightarrow E$$

défini par :

$$(Fx)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \forall -\delta \leq t \leq 0 \\ \varphi(0) + \int_0^1 f(s, y(s), y(s - \tau(y(s)))) ds & \forall 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.7)$$

Si F est complètement continue et $F(C_{\varphi, T}) \subset C_{\varphi, T}$ alors :

F admet un point fixe qui est la solution de l'équation (3.1). Ce point est une solution de (3.1).

a) Montrons que $F(C_{\varphi, T}) \subset C_{\varphi, T}$:

on sait que $(Fx)(t) = \varphi(t)$ pour $\forall -\sigma \leq t \leq 0$ et comme φ est une fonction bornée par N et R et f lipschitzienne. Alors :

$$F(C_{\varphi, T}) \subset C_{\varphi, T}$$

▷ Si $y \in C_{\varphi, T}$, on a pour $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq |\varphi(0)| + \int_0^t |f(t, y(s), y(s - \tau(y(s))))| ds \\ &\leq |\varphi(0)| + \int_0^t M ds \\ &\leq N + TM \\ &\leq \kappa \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donc F est bornée

▷ Pour prouver que $F(x)$ est R -lipschitzienne il suffit de montrer que :

$$|(Fy(t))'|_E \leq R$$

En effet :

$$(Fy(t))' = f(t, y(t), y(t - \tau(y(t))))$$

D'après hypothèse (3) on a : $\|((Fy)(t))'\| \leq M$

Alors :

$$\|(Fy(t))'\| \leq M \leq R$$

4) Montrons maintenant que F est complètement continue.

Supposons que $y_i \in C_{\varphi, T}$ et $\|y_i - y\|_{\infty} \rightarrow 0$;

Posons : $\rho_i(s) = \tau(y_i(s))$; $\rho(s) = \tau(y(s))$ et l la constant de Lipschitz de f .

Donc pour tout $t \in [t_0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
 \| (Fy_i)(t) - (Fy)(t) \|_E &\leq \int_0^t |f(s, y_i(s), y_i(s - \rho_i(s))) - f(s, y(s), y(s - \rho(s)))| ds \\
 &\leq \int_0^t |f(s, y_i(s), y_i(s - \rho_i(s))) - f(s, y(s), y(s - \rho_i(s)))| ds \\
 &\quad + \int_0^t |f(s, y(s), y(s - \rho_i(s))) - f(s, y(s), y(s - \rho(s)))| ds \\
 &\leq K \int_0^t K \sup \sup |y_i(s) - y(s)|, \sup |y_i(s - \rho_i(s))| \\
 &\quad + K \int_0^t K \sup (\sup |y(s) - y(s)|, \sup |y_i(s - \rho_i(s) - y(s - \rho(s))|) \\
 &\leq \int_0^t K \sup \|y_i - y\|_{+\infty}, \|y_i - y\|_{+\infty} ds \\
 &\quad + \int_0^t K \sup 0, \sup |y(s - \rho_i(s) - y(s - \rho(s))| ds \\
 &\leq \int_0^t K \|y_i - y\|_{\infty} ds + \int_0^t K \sup |y(s - \rho_i(s)) - y(s - \rho(s))| ds \\
 &\leq \int_0^t K \|y_i - y\|_{\infty} ds + \int_0^t KR \sup |s - \rho_i(s) - s + \rho(s)| ds \\
 &\leq \int_0^t K \|y_i - y\|_{\infty} ds + \int_0^t KR \sup |\rho_i(s) - \rho(s)| ds \\
 &\leq \int_0^t K \|y_i - y\|_{\infty} ds + \int_0^t KRl \sup |y_i(s) - y(s)| ds \\
 \| (Fy_i)(t) - (Fy)(t) \|_E &\leq TK \|y_i - y\|_{\infty} + KRl \|y_i - y\|_{\infty} \\
 &\leq TK(1 + Rl) \|y_i - y\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Donc F est lipschitzienne dans $C_{\varphi, T}$ est par conséquent elle est continue.

Soit F est compact, en effet :

Soit B un ensemble borné de $C_{\varphi, T}$; et $\overline{F(B)}$: un fermé inclus dans $C_{\varphi, T}$ qui est compact par conséquent, $\overline{F(B)}$. Ainsi F est complètement continue.

Le théorème de point fixe nous donne : pour tout $T \geq 0$, il existe une fonction $y \in C_{\varphi, T}$ tel que :

$$(Fy)(t) = y(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Dans ce qui suit, on montre l'unicité de la solution . Supposons qu'il existe deux solutions $x(t)$ et $y(t)$, pour $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
 |x(t) - y(t)| &\leq \left| \int_0^t f(s, x(s), x(s - \tau(s))) - f(s, y(s), y(s - \tau(s))) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t |f(s, x(s), x(s - \tau(s))) - f(s, y(s), y(s - \tau(s)))| ds \\
 &\leq \int_0^t K \|x_i - x\|_{\infty} + \int_0^t KRl \sup |x(s) - y(s)| ds \\
 &\leq TK(1 + Rl) \|x - y\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

pour $T < \frac{1}{K(1 + Rl)}$ on obtient :

$$|x(t) - y(t)| < \|x - y\|_{\infty}$$

contradiction et par conséquent on a :

$$x(s) = y(s) \quad \text{pour } s \in [0, T]$$

Exemple 3.1

Considérons le problème à retard dépendant de l'état non linéaire

$$\begin{cases} y'(t) = -2 \sin\left(y\left(t - \frac{-y+1}{2}\right)\right) & t \geq 0 \\ y(t) = \exp(-t) & t \leq 0 \end{cases}$$

On a alors : $\tau(y(t)) = \frac{-y+1}{2}$; $f(t, y(t), y(t - \tau(t))) = -2 \sin\left(y\left(t - \frac{-y+1}{2}\right)\right)$; et $\varphi(t) = \exp(-t)$.

Il est clair que f est de classe C^1 , par rapport à y , donc elle est localement lipschitzien et comme la fonction $\sin(y)$ est bornée par 1, pour tout y , alors, f est bornée par 2.

De même φ est une fonction de classe C^1 et sa dérivée est bornée par 1.

Alors : toute les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, donc cette équation admet une solution unique.

3.3 Linéarisation

Dans cette section nous entamons la linéarisation des équations différentielles à retard dépendant de l'état de la forme :

$$y'(t) = f(\varphi, \int_{-\delta_0}^0 dr(s)g(\varphi(-\tau(\varphi) + s))) \quad (3.9)$$

Définition 3.2

considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} y' & = F(y_t, y(t - \tau(y(t)))) \\ y_{t_0} & = \varphi \in C \end{cases} \quad (3.10)$$

Avec $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\forall \theta \in [-\delta, 0]$. Alors F prend la forme suivant :

$$F(\varphi) = f(\varphi, \int_{-\delta_0}^0 dr(s)g(\varphi(-\tau(\varphi)))$$

où $f : C \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continues et différentiables, $\tau : C \rightarrow [0, \delta_1]$, continue. $\delta_0 + \delta_1 \leq \delta$ et $r \in [-\delta, 0]$.

Comme les fonctions f, g, τ sont continues alors $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ est aussi continue.

On suppose que $F(0) = f(0, \int_{-\delta_0}^0 dr(s)g(0)) = 0$, alors 0 est une solution de (3.9)

Notons que pour étudier la stabilité pour la solution 0 en posons $\tau = \tau(0)$, on obtient alors l'équation différentielle de l'état linéaire au point 0 :

$$y'(t) = D_\varphi f(0, \tilde{r}g(0))y(t) + D_y f(0, \tilde{r}g(0)) \int_{-\delta_0}^0 dr(s)Dg(0)y_t(-\tau(0) + s) \quad (3.11)$$

Avec $\tilde{r} = \int_{-\delta}^0 dr(s)$

Théorème 3.2

Considérons l'opérateur linéaire $T : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, défini par

$$T(\varphi) = D_\varphi f(0, \tilde{r}g(0))y(t) + D_y f(0, \tilde{r}g(0)) \int_{-\delta_0}^0 dr(s) Dg(0)\varphi(-\tau(0) + s)$$

1. Si $\sup\{\lambda : \det(\lambda I - Te^{-\lambda}) = 0\} = -\alpha < 0$ et si pour $\forall \varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ et un voisinage V de l'origine, alors, pour tout $\varphi \in V$, la solution est stable $y_t(\varphi)$ et définie pour $\forall t \geq 0$, telle que :

$$\| y_t(\varphi) \| \leq M_\varepsilon + e^{-(\alpha-\varepsilon)t} \| \varphi \|$$

2. Si $\sup\{\lambda : \det(\lambda I - Te^{-\lambda}) = 0\} = \alpha > 0$, alors la solution 0 est instable. Si de plus la solution y^* est non triviale avec

$$F(y^*) = f(y^*, \int_{-\delta_0}^0 dr(s)g(y^*)) = 0$$

En remplaçant dans (3.11) on obtient :

$$F(y^*) = D_\varphi f(y^*, \tilde{r}g(y^*))y(t) + D_y f(y^*, \tilde{r}g(y^*)) \int_{-\delta_0}^0 dr(s) Dg(y^*)y_t(-\tau(y^*) + s)$$

Preuve 3.3

Soit $\{T(t)\}$ un semi groupe formé de solutions linéaires du système (3.11) pour $\forall \varepsilon \in]0, a]$ s'il existe $M_1(\varepsilon) \geq 1$ telle que

$$\| T(t)\varphi \| \leq M_1(\varepsilon) e^{-\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)t} \| \varphi \|$$

$\forall t \geq 0, \varphi \in C$. Soient $u \in [0, 1]$ et $\delta_0 \in [0, \delta]$ tels que :

$$\frac{\varepsilon}{4N(1+K)M_1} \quad \text{et} \quad \delta \leq \left\{ \min \frac{\varepsilon}{K}, \frac{1}{K}, \frac{f(u)}{M_1} \right\}$$

où δ, K, N , et τ sont bien définies d'après le lemme (??rer)).

Pour $\varphi \in \mathcal{B}_{\delta^*}$ avec $\delta^* < e^{-Kr\delta_0}$ on a

$$\| y_t(\varphi) \| \leq M_1 \delta_0 \tag{3.12}$$

On prouve ce résultat par contradiction :

D'après le lemme (3.2) on a $t_\varphi > r$ et $\| y_{t_\varphi}(\varphi) \| < \delta_0$ pour tout $t \in [0, r]$ (3.12) est fausse, il existe $t^* > r$ telle que $\| y_{t^*}(\varphi) \| = M_1 \delta_0$, pour $t \in [0, r]$.

D'autre part, pour $t \in [r, t^*]$, on obtient :

$$\begin{aligned} y_t(\varphi) &= y_{t-r}(y_r) \\ &= T(t-r)y_r + \int_0^{t-r-s} y(0)g(y_{s+r})(\varphi)ds \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'après le lemme (3.1) et (3.2) Voir(Annexe) et pour $t \in [0, \varepsilon]$

$$\begin{aligned} \| y'(t, \varphi) \| &= F(y_t(\varphi)) \\ &\leq F(y_t(\varphi)) \\ &\leq KM_1 \delta_0 \end{aligned}$$

Donc $y_t(\varphi)$ est différentiable pour $t \in [r, t]$ et

$$\| y'(t) \| \leq KM_1 \delta_0 \tag{3.14}$$

Considérons l'opérateur suivant :

$$Ty = T(t-r)y_t(\varphi) + \int_0^{t-r} T(t-r-s)y_0 H(y_{s+r}(\varphi))ds \quad (3.15)$$

D'après (3.1) et (3.2) il résulte :

$$\begin{aligned} \|y_{t-r}(y_r(\varphi))\| &\leq \|T(t-r)\| \|y_r(\varphi)\| + \int_0^{t-r} \|T(t-r-s)\| \|H(y_{s+r}(\varphi))\| ds \\ &\leq M_1 e^{(a-\frac{\varepsilon}{2})(t-r)} \|y_r(\varphi)\| + M_1 u N \int_0^{t-r} e^{(-a-\frac{\varepsilon}{2})(t-r-s)} (\|y_{r+s}(\varphi)\| + \|y'_{s+r}(\varphi)\|) ds \\ &\leq M_1 e^{-(a-\frac{\varepsilon}{2})(t-r)} \|y_r(\varphi)\| + M_1 u N \int_0^{t-r} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-r-s)} (1-K) \|y_s(y_r(\varphi))\| ds \\ &\leq M_1 e^{(a-\frac{\varepsilon}{2})(t-r)} \|y_r(\varphi)\| + M_1 u N \int_0^{t-r} e^{(-a-\frac{\varepsilon}{2})(t-r-s)} ds (1+K) \|y_s(y_r(\varphi))\| \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Granwall on obtient :

$$\begin{aligned} \|y_{t^*}(\varphi)\| &= \|y_{t^*}(y_r(\varphi))\| \\ &\leq M_1 e^{-[a-\frac{\varepsilon}{2}-uN(1+K)M_1][t^*-r]} \|y_r(\varphi)\| \\ &\leq M_1 e^{-(a-\varepsilon)(t^*-r)\delta_0} \\ &\leq M_1 \delta_0 \end{aligned}$$

Ce qui contredit l'équation (3.12)

On appliquant Granwall pour la deuxième fois et en posons $M = M_1$ on trouve :

$$y_t(\varphi) \leq M e^{-(a-\varepsilon)t} \|\varphi\|$$

pour tout $t \geq 0$.

pour la démonstration de la deuxième partie du théorème, on garde la même idée

Exemple 3.2

Considérons l'équation

$$y'(t) = f\left(\int_{\delta_0}^0 dr_1(s)y(t+s), \int_{-\delta_0}^0 dr_2(s)y(t-\tau(y_t)+s)\right) \quad (3.16)$$

où $y \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. $\tau : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue et $r_1, r_2 \in [-\delta, 0]$

On suppose que y^* est un équilibre pour l'équation (3.16) tel que

$$f\left(\int_{\delta_0}^0 dr_1(s)y^*, \int_{-\delta_0}^0 dr_2(s)y^*\right) = 0$$

D'après le théorème (3.2) la linéarisation de (3.16) est de la forme

$$y'(t) = Ty_t$$

Avec :

$$\begin{aligned} T\varphi &= D_1 f\left(\int_{-\delta_0}^0 dr_1(s)y^*, \int_{-\delta_0}^0 dr_2(s)y^*\right) \int_{-\delta_0}^0 dr_1(s)\varphi(s) \\ &\quad + D_2 f\left(\int_{-\delta_0}^0 dr_1(s)y^*, \int_{-\delta_0}^0 dr_2(s)y^*\right) \int_{-\delta_0}^0 dr_2(s)\varphi(-\tau(y^*)+s) \end{aligned}$$

où D_1f et D_2f représentent les dérivées de f par rapport à chacune de ses variables. Donc l'équation (3.16) devient :

$$y'(t) = Ay(t) + By(t - \tau(y_t))$$

où A et B deux matrices carrées de dimension n .

Dans ce cas $f(x, y) = Ax + By$ et $\int_{-\delta_0}^0 dr_1(s)\varphi(s) = \int_{-\delta_0}^0 dr_2(s)\varphi(s) = 0$ En appliquant ce résultat sur l'équilibre $y^* = 0$ on trouve :

$$\begin{aligned} T\varphi &= D_1f(0, 0) \int_{-\delta_0}^0 dr_1(s)\varphi(s) + D_2f(0, 0) \int_{-\delta_0}^0 dr_2(s)\varphi(-\tau(y^*) + s) \\ &= A\varphi(0) + B(-\tau(0)) \end{aligned}$$

3.4 Application

Pour bien comprendre cette application on propose de définir les notions suivantes :

Hématopoïèse

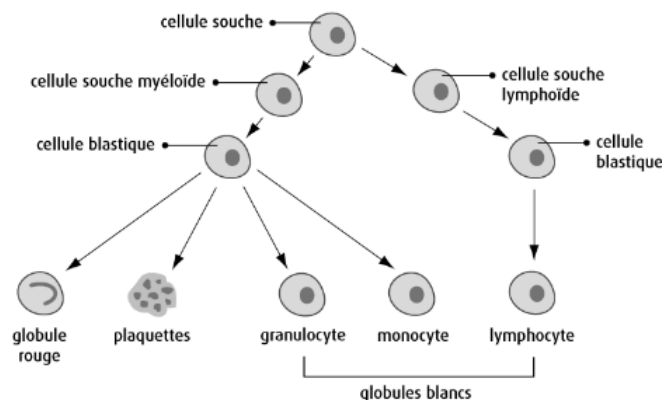
Est une phénomène très actif qui assure chez un adulte sain la production quotidienne de plusieurs centaines de milliards de cellules sanguines, elle se déroule dans la moelle osseuse.

Cellules souches hématopoïétiques

Les cellules souches hématopoïétiques notées CSH sont des cellules de base qui se transforment en différents types de cellules sanguines, qui ont des fonctions distincts. En se développant, les cellules souches deviennent des cellules blastiques qui sont des cellules sanguines immatures. Avec le temps les cellules blastique prennent la place des cellules normales.

Moelle osseuse

Substance molle et grasse contenue à l'intérieur des os. Lieu de la formation des cellules souches de l'hématopoïèse ainsi toutes les différentes cellules sanguines.



Modèle de Mackey-Glass

Le premier modèle mathématique de la dynamique des CSH est due à Mackey en 1978, qui a été utilisé pour comprendre des différentes maladies sanguines telle que les leucémies qui sont définies comme des cancers des cellules sanguines en formation qui génèrent des différentes maladies selon le type de ligné affectée. Il est donné sous la forme suivante :

$$y'(t) = \alpha y(t) + \beta \frac{y(t - \tau)}{1 + y^n(t - \tau)}$$

où $y(t)$ représente la densité des globules blancs matures en circulation dans le sang au temps t et τ est le temps de retard entre la production des cellules immatures dans la moelle osseuse et leurs maturation pour la libération dans la circulation sanguine.

α : Taux de destruction des cellules sanguines .

β : Taux de production des cellules sanguines .

n : Désigne la sensibilité de taux de production .

Les équations à retard interviennent dans des nombreux domaines d'applications des mathématiques où il y a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action, telle que la biologie et parmi les travaux réalisés dans ce domaine est l'étude de dynamique des populations cellulaires, notamment la modélisation de dynamique des cellules souches hématopoïétiques notées (CSH), qui s'appuie principalement sur des systèmes d'équations à retard dépendant de l'état.

Le modèle mathématique proposé pour l'étude de cette maladie est composé de n équations non-linéaire à retard Dépendant de l'état, correspondant chacune à un niveau de maturité de plus en plus élevé des cellules hématopoïétique. Les cellules les moins matures sont des cellules souches hématopoïétique, les cellules les plus matures sont des cellules différenciées (globules blancs). Durant les premiers stades conservent une capacité à s'auto-renouveler. Chaque équation est du type :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_i(t) &= -\delta_i + \beta_i(y_i(t))y_i(t) \\ &+ 2(1 + k_i) \int_0^{\tau_i} e^{-\gamma_i r} f_i(a) \beta_i(y_i(t - r)) y_i(t - r) dr \\ &+ 2k_{i-1} \int_0^{\tau_{i-1}} e^{-\gamma_i r} f_{i-1}(r) \beta_{i-1}(y_{i-1}(t - r)) y_{i-1}(t - r) dr \end{aligned}$$

où $x_i(t)$ représente le nombre ou la densité de cellules au stade i de différenciation au temps t .

Les caractéristiques de chaque stade de différenciation :

τ_i : est la durée du cycle cellulaires.

k_i : est la probabilité de s'auto-renouveler ou de se différencier.

γ_i et δ_i : représente les taux de mort.

$1 - k_i$: est la probabilité de s'auto-renouveler lors d'une division.

β_i : le temps moyen de séjour.

Ce modèle a mis en évidence l'importance de la régulation des taux de différenciation à chaque niveau de maturité et des durées de cycles cellulaires, de légères variation pouvant déstabilisé (au même stabilisé) la population totale ou la population des cellules matures (qui est d'un certain point de vue, la plus importante, puisque celle sur la quelle porte généralement les mesures cliniques).

Une représentation schématique du modèle est donnée par la figure suivante :

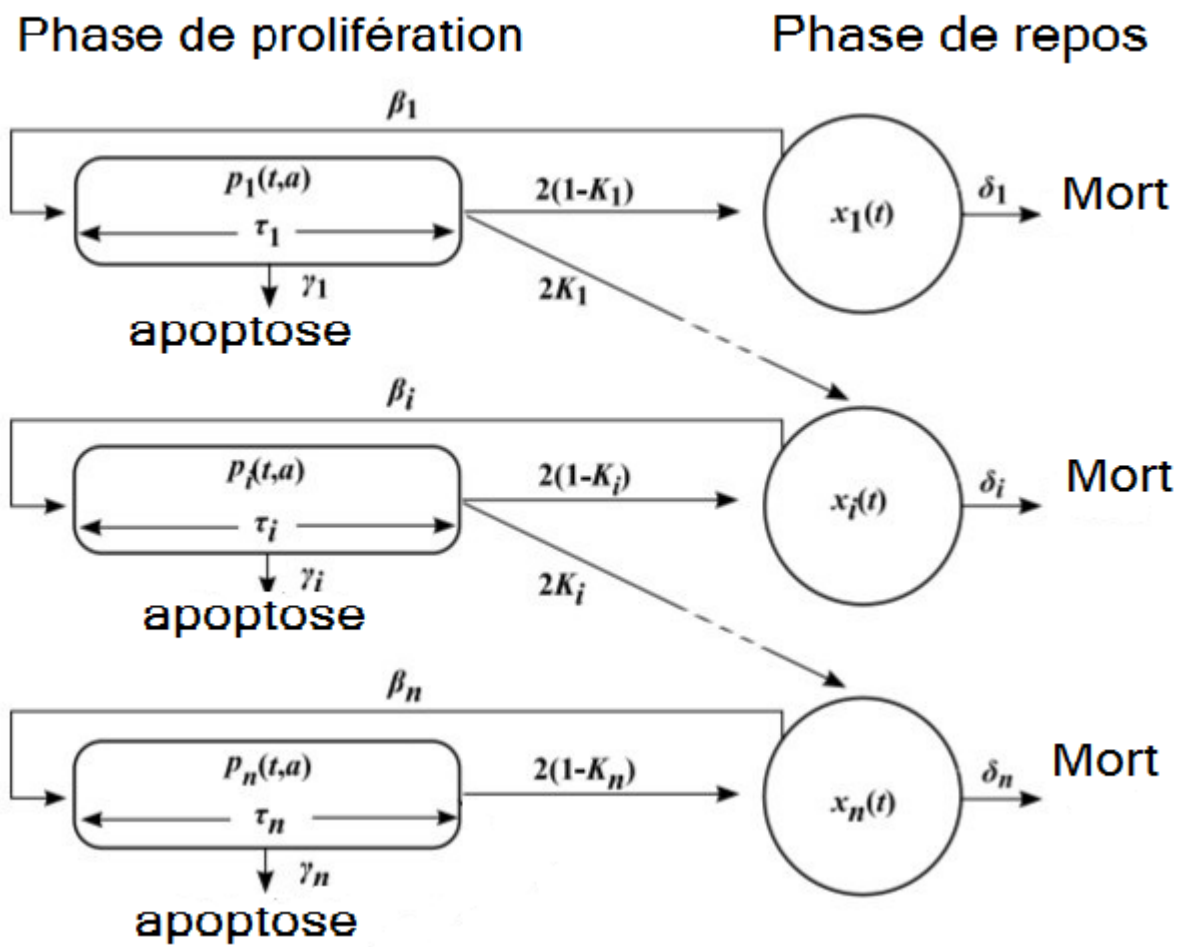


FIGURE 3.1 – Différentiation cellulaire

Conclusion

On a vu au cours de ce travail, une introduction de plusieurs notions théoriques relatives aux équations différentielles dont les équations différentielles ordinaires et équations différentielles à retard.

Ces deux catégories d'équations occupent une place de premier importance dans différents domaines d'applications. Chacune possède des propriétés différentes.

Pour les équations différentielles à retard qui ont été introduite pour formuler mathématiquement l'influence du passé qui est exercé sur le comportement présent d'un phénomène, puisque on ne pouvait plus le formuler par un système d'EDO. La dimension théorique devenait infinie, de telle équations s'écrivent :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau))$$

Pour la résolution des équations différentielle à retard on doit connaitre la solution sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$;alors que pour les équations différentielles ordinaire, il suffit de calculer la valeur de cette solution en un seul point. De plus si une équation différentielle ordinaire possède deux solutions qui se rencontre en un point alors, ces solutions sont égales sur tout le domaine ce qui est pas vrai pour les équations à retard.

On a rencontré aussi les équations différentielle à retard dépendant de l'état où l'évolution de la variable de y à l'instant t dépendant de la valeur de y à l'instant $t - \tau$ et le retard dépendait également de la valeur y , telle que :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(y(t))))$$

Pour ce type d'équations on ait contraint de définir un intervalle pour la condition initiale. Cette théorie d'équations différentielle à retard nous fait réaliser que le retard est utile et même nécessaire pour la modélisation des phénomènes.

Annexe

Définition 3.3 (Attractivité)

On dit que l'origine $y = 0$ est un point d'équilibre attractif s'il existe un voisinage ν de 0 tel que :

$$\forall y_0 \in \nu(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

□

Définition 3.4 (Bornitude)

Les solutions du système (1.3) sont dites uniformément bornées si : $\exists a > 0$ et une fonction croissante $C :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $\forall \alpha \in]0, a[$

$$\| y_0 \| < \alpha \Rightarrow \| y(t) \| < C(\alpha)$$

□

Définition 3.5

Soit V une fonction de classe C^1 telle que :

$$V : [t_0, +\infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}$$

On suppose que $V(t, 0) = 0$.

- 1) V est définie positive s'il existe $\omega(y) \in C^1$ telle que : $V(t, 0) = 0$, $0 < \omega(y) \leq V(t, y)$ pour tout $y \neq 0$ et pour tout $t \geq 0$.
- 2) V est définie négative s'il existe $\omega(y) \in C^1$ telle que $\omega(0) = 0, V(t, y) \leq \omega(y) < 0$
- 3) V est semi-définie positive si $V(t, 0) = 0$, $0 \leq \omega(y) \leq V(t, y)$
- 4) V est semi-définie négative si $\omega(0) = 0, V(t, y) \leq \omega(y) \leq 0$

□

Définition 3.6 (Fonction de classe K)

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe k si :

1. φ est strictement croissante.
2. $\varphi(0) = 0$.

□

Définition 3.7

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe K_∞ si :

1. φ est strictement croissante .
2. $\varphi(0) = 0$.
3. $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = +\infty$

Théorème 3.3 (Ascoli)

Soit E un espace métrique compact, soit H un sous espace de $C(E)$ qui est l'ensemble des fonctions continues de E dans E . On suppose que H est uniformément équicontinue i.e : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$d(f(y_1), y_2) < \delta \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$$

alors E relativement compact dans $C(E)$. □

Définition 3.8

On dit qu'un ensemble A est convexe si on a :

$$ty + (1 - t)y \in A \quad \forall y \in A \quad \forall t \in [0,1]$$

□

Définition 3.9

Soient E et F deux espaces topologiques, une fonction $h : E \rightarrow F$ est dite compact si l'image de tout borné de E est relativement compact dans F . □

Définition 3.10

Soient E et F deux espaces topologiques, une fonction $h : E \rightarrow F$ est dite complètement continue s'il est continue et compact. □

Théorème 3.4

soient E un espace de Banach, U un convexe fermé borné de E et $T : U \rightarrow U$ un opérateur complètement continue, alors T est un point fixe dans U . □

Théorème 3.5

Soient E un espace métrique complet muni de la distance d et A un opérateur vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout élément y de E on a Ay est un élément de E .
2. Il existe un réel α , avec $\alpha \in [0,1]$ tel que pour tout élément $y, z \in E$ on a :

$$d(Ay - Az) \leq \alpha d(y, z)$$

alors il existe un point fixe unique y de l'opérateur A dans E ;

avec $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n)$ où $y_n = Ay_n$ et $n = \overline{1, m}$

□

Lemme 3.1

S'ils existent deux constantes $\delta > 0$ et $K > 0$ alors :

$$\| f(\varphi, \int_{dr(s)}^0 g(\varphi(-\tau(\varphi)) + s) ds) \| \leq K \| \varphi \|$$

Lemme 3.2

Soient δ et δ_0 deux constantes, avec $0 \leq \delta_0 \leq \delta$ et $0 \leq \delta^* \leq e^{-Mr} \delta_0$, telle que la solution $y(t, \varphi)$ existe, pour $t \in [-r, t_\varphi]$ avec $t_\varphi > r$

alors

$$\| y_t(\varphi) \| \leq e^{-Mt} \| \varphi \| < \delta_0$$

Preuve 3.4

Pour n fixé, supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$.

Soit f de classe C^n , et comme $y : I \rightarrow U$ est solution de (1.3) elle vérifie $y' = f(t, y(t))$, donc y' est de classe C^k ce qui signifie que y de classe C^{n+1} .

Preuve 3.5

Le principe de cette démonstration est la majoration du second membre.

Posons :

$$v(t) = \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau$$

Alors par hypothèse on obtient :

$$v'(t) = a(t)u(t) \leq a(t)(b(t) + v(t))$$

En multipliant les deux membres par : $\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$ on obtient :

$$\frac{d}{dt} \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)v(t) \leq \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) a(t)b(t)dt$$

avec $v(0) = 0$ passant à l'intégration des deux membres sur l'intervalle $[0, \tau]$, on trouve :

$$\exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right)v(\tau) \leq \int_0^\tau \exp(a(s)ds) a(t)b(t)dt$$

donc :

$$v(\tau) \leq \int_0^\tau \exp\left(\int_0^\tau a(s)ds\right) \exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right) a(t)b(t)dt$$

En faisant un changement de variable $t = \tau$ on obtient :

$$v(t) \leq \int_0^t \exp \int_\tau^t (a(s)ds) a(\tau)b(\tau)d\tau \text{ pour } \forall t \in [0, T]$$

Preuve 3.6 (Théorème de Cauchy)

La démonstration de ce théorème se fait en quatre étapes, la première consiste à choisir ce qu'on appelle parfois un cylindre de sécurité.

On considère l'intervalle $[t_0, t_+]$ avec $t_+ = t_0 + \tau$.

$C(t_+, R) = [t_0, t_+] \times \overline{\mathcal{B}}(y_0, R) \in I \times U$ avec $t_+ > t_0 > 0$ et $\overline{\mathcal{B}}(y_0, R)$ est la boule fermée de centre y_0 et de rayon R . Comme f est continue elle est bornée sur le compact $C(t_+, R)$ disant par une constante M . D'autre part, on a également une constante de Lipschitz L pour la quelle :

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \quad \forall t \in [t_0, t_+], \forall x, y \in \overline{\mathcal{B}}(y_0, R)$$

Comme on a déjà noté une solution du problème (1.3) peut se mettre sous la forme :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$$

On cherche donc la solution comme limite de la suite $y_{n \in \mathbb{N}}$ défini par :

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s))$$

La deuxième étape consiste à vérifier que pour t_+ assez proche de t_0 , la suite $y_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie dans $[t_0, t_+]$ et à valeur dans $\overline{\mathcal{B}}(y_0, R)$. En effet, la fonction y_0 est bien dans $\overline{\mathcal{B}}(y_0, R)$, et si y_n est continue sur $[t_0, t_+]$ est à valeur dans $\overline{\mathcal{B}}(y_0, R)$ alors y_{n+1} est bien définie, et de plus :

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}(t) - y_0\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y_n(s))\| ds \\ &\leq M \int_{t_0}^t ds \\ &\leq M(t_+ - t_0) \end{aligned}$$

Donc si on choisit le t_+ de telle sorte que :

$$M(t_+ - t_0) \leq R$$

alors : y_{n+1} est aussi à valeur dans $\overline{\mathcal{B}}(y_0, R)$.

La troisième étape consiste à montrer que pour $t_+ \rightarrow t_0$ la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente dans l'espace de Banach $C([t_0, t_+], \mathcal{X})$.

Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y_{n+1}(s)) - f(s, y_n(s))\| ds \\ &\leq L(t - t_0) \sup_{[t_0, t_+]} \|y_{n+1} - y_n\| \end{aligned}$$

donc par récurrence on obtient :

$$\sup_{[t_0, t_+]} \|y_{n+1} - y_n\| \leq \frac{1}{2^n} \sup_{[t_0, t_+]} \|y_1 - y_0\|$$

donc si t_+ vérifie :

$$(t_+ - t_0) \leq \frac{1}{2}$$

alors la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

La dernière étape consiste à vérifier que la limite y de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de notre problème. Cela se déduit par passage à la limite dans l'égalité

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$$

ce qui donne :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

qui signifie que y est une solution de classe C^1 par régularité des solutions. Ceci achève la preuve de l'existence d'une solution.

Pour l'unicité de cette solution on applique le lemme de Gronwall.

Supposons qu'il existe deux solutions du même problème de Cauchy y_1 et y_2 sur l'intervalle $[t_0, t_+]$ et à valeur dans $\overline{\mathcal{B}}(y_0, R)$.

alors :

$$y_1(t) - y_2(t) = y_1(t_0) - y_2(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds$$

passant à la norme on trouve :

$$\| y_1(t) - y_2(t) \| \leq \| y_1(t_0) - y_2(t_0) \| + \int_{t_0}^t \| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \| ds$$

$$\text{posons : } \begin{cases} w(t) &= \| y_1(t) - y_2(t) \| \\ b(t) &= \| y_1(t_0) - y_2(t_0) \| \\ a(t) &= L \end{cases}$$

on obtient alors :

$$w(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t a(s)w(s) ds$$

Par le lemme de Granwall on obtient ;

$$w(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) ds$$

puisque $w(t) \geq 0$,et $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors $w(t) = 0$ et donc : $y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in [t_0, t_+]$ \square .

Bibliographie

- [1] Ismail Achouri and Redouane Benkhaled. *Equations différentielles ordinaires et applications*. PhD thesis, 2014.
- [2] Yassine Ariba. *Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps : théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2009.
- [3] Michel Artola. *Sur les perturbations des équations d'évolution : application à des problèmes de retard*. Gauthier-Villars, 1969.
- [4] Kenneth L Cooke and Wenzhang Huang. On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 1417–1426, 1996.
- [5] Fabien Crauste. *Equations à Retard et Modèles de Dynamiques de Populations Cellulaires*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 2014.
- [6] Michel Dambrine. *Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards*. PhD thesis, Lille 1, 1994.
- [7] Imane Dilaneh. *Etude de la commande et de l'observation à distance de systèmes*. PhD thesis, Cergy-Pontoise, 2009.
- [8] Ferenc Hartung and Janos Turi. On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations. *journal of differential equations*, 135(2) :192–237, 1997.
- [9] Meriem HELLAL. Modèle adulte-juvénile avec retard. 2001.
- [10] Yang Kuang. *Delay differential equations : with applications in population dynamics*, volume 191. Academic Press, 1993.
- [11] Silviu-Iulian Niculescu. *Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires à états retardés*. PhD thesis, INP GRENOBLE, 1996.
- [12] Peter Volkmann. Cinq cours sur les équations différentielles dans les espaces de banach. In *Topological methods in differential equations and inclusions*, pages 501–520. Springer, 1995.
- [13] Mohamed Yahiaoui. *Les Equations différentielles à retard dépendant de l'état*. PhD thesis, 2014.