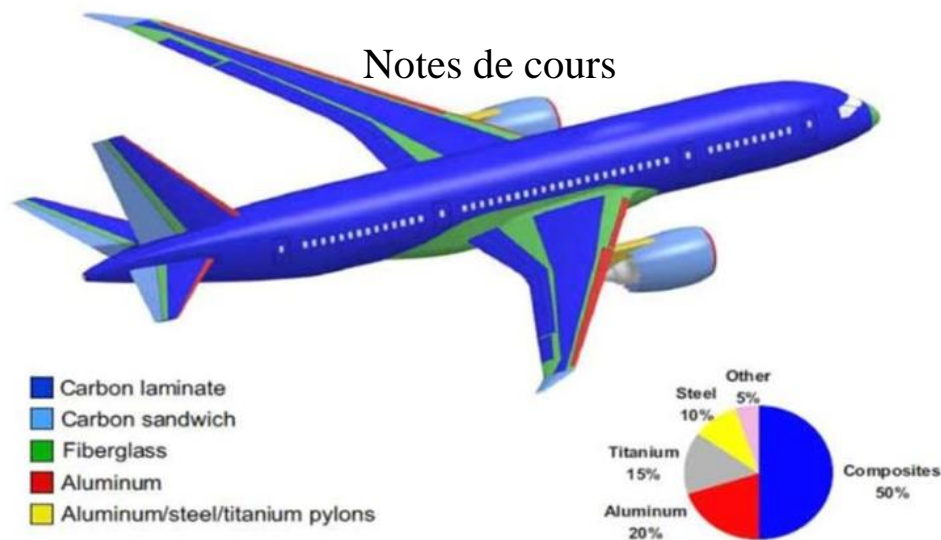


Génie Mécanique.

Option : construction mécanique

Matériaux Composites



BELHENINI Soufyane
Maître de Conférences « A » en Génie Mécanique
Responsable de l'équipe de formation "Construction Mécanique"
Université Belhadj-Bouchaib d'AinTémouchent
Laboratoire des Structures Intelligentes
<http://www.univ-temouchent.edu.dz/>
<http://labossl.univ-temouchent.edu.dz/>
Email : soufyaneing@yahoo.fr
Pro Email: soufyane.belhenini@univ-temouchent.edu.dz
Mob : (00213) 0665177790

2022/2023

Préface

Le présent support de cours, intitulé « Matériaux Composites », est destiné aux étudiants suivant une formation en Sciences et Technologie. Les étudiants de la filière Génie Mécanique et plus précisément ceux de la spécialité Construction Mécanique peuvent trouver dans ce manuscrit des informations de base intéressantes concernant les techniques d'élaboration des matériaux composites ainsi que les approches usuelles employées dans le calcul des structures en matériaux composites. Ces notes de cours présentent également un grand intérêt pour les étudiants spécialisés en Génie des Procédés des Matériaux et en Génie Maritime. Les étudiants souhaitant approfondir leurs connaissances en comportement des matériaux composites trouveront dans le présent document quelques références bibliographiques intéressantes.

Ce support pédagogique, préparé en respectant le canevas de la formation master en construction mécanique, est structuré en cinq chapitres que l'on peut les classer en trois catégories :

- Une partie présentant des généralités sur les matériaux composites (chapitre I) ;
- Une partie portant sur les techniques d'élaboration des structures en matériaux composites (chapitre II) ;
- Une troisième partie consacrée au comportement mécanique des matériaux composites allant des composites simples aux composites avancés comme les stratifiés.

Ce manuscrit reste évidemment perfectible, je remercie toute personne me rapportant des commentaires, suggestions ou corrections.

Introduction Générale

L'utilisation des matériaux composite ne cesse de s'élargir en intégrant de plus en plus de domaines. Les composites sont actuellement très utilisés dans le monde de l'automobile (aile et toiture de voiture...) en aéronautique (éléments de fuselage des avions...), en aérospatial (barrière thermique des navettes spatiales...), en construction navale (coques de bateaux...), en microélectronique (microcomposants électroniques et circuits imprimés...), en nanotechnologies (microsystème électromécanique...), en militaire (blindage...) en médecine (prothèses...) et même dans le sport et les loisirs (cadre de vélo).

Constitué d'un assemblage d'au moins deux matériaux (matrice et renfort), un matériau composite est présenté comme étant une solution prometteuse pouvant remplacer les matériaux classiques (métaux et alliages, polymères et céramiques). En effet, les matériaux composites offrent la possibilité de combiner les avantages des matériaux élémentaires qui les constituent (matrice et renfort) dans le but d'accroître un certain nombre de propriétés. A titre d'exemple, un composite constitué d'une matrice en polymère renforcée par des fibres en carbone peut avoir les bonnes propriétés mécaniques des fibres en carbone et la légèreté du polymère. Ces matériaux offrent aux ingénieurs la possibilité de développer des matériaux avec des propriétés à la carte (sur mesure) en travaillant sur le pourcentage du renfort dans la matrice. Pour les composites fibreux, l'obtention des propriétés recherchées peut se faire, en plus du pourcentage des fibres dans la matrice, en travaillant sur l'orientation des fibres dans la matrice. Cette recherche en matériaux plus résistants et plus légers avec des propriétés à la carte intéresse notamment l'industrie aérienne qui fabrique actuellement des avions composés d'environ 50% de composites (Airbus A350).

L'élaboration des matériaux composites a connu plusieurs développements durant les 40 dernières années. Des techniques avancées ont été développées dans le but de faciliter la réalisation de pièces de formes plus ou moins complexes en composites. Le moulage demeure la technique la plus employée notamment pour les pièces et les structures de grandes dimensions. D'autres techniques comme l'enroulement filamentaire et le drapage des pré-imprégnés y sont développées.

Les approches utilisées dans le calcul des structures en composites diffèrent de celles employées pour calculer les matériaux conventionnels. L'hétérogénéité causée par la présence de plusieurs phases distinctes rend l'utilisation directe des formules de la mécanique des milieux continus impossible. Des approches basées sur l'homogénéisation ont été développées dans le but de proposer une formulation relativement simple visant à décrire le comportement

d'un composite. Le comportement en rupture des matériaux composite a fait l'objet de plusieurs publications scientifiques. Des modèles ont été développés dans le but de prédire la rupture de ces matériaux. Cet axe de recherche demeure d'actualité et le développement de moyens de calcul (logiciels et ordinateurs superpuissants) a permis aux chercheurs de mener des investigations avancées visant à prédire d'une manière fiable l'endommagement des composites.

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites et leurs applications

I.1. Introduction

Un matériau est la forme marchande d'une matière première choisie en raison de propriétés d'usage spécifiques et mise en œuvre par des techniques appropriées pour l'obtention d'un objet de géométrie donnée à fonction préméditée (Dupeux, 2008).

Il existe plusieurs classifications des matériaux dépendant de plusieurs critères. Selon la nature des liaisons atomiques, les matériaux solides sont répartis en trois grands groupes :

- Les métaux et les alliages métalliques (liaisons métalliques);
- Les céramiques (liaisons ioniques);
- Les polymères (liaisons covalentes et liaisons secondaires).

Cette classification repose sur la structure atomique et la composition chimique de ces solides. Notons qu'il existe des matériaux dits « intermédiaires » comme les composites, les semi-conducteurs et les biomatériaux (William & Callister, 2001).

I.2. Matériaux composites

Selon sa classe, chaque type de matériau possède des propriétés et des caractéristiques qui lui sont propres :

- Les métaux sont en général tenaces et ductiles mais leurs masses volumiques sont souvent élevées.
- Les polymères relativement légers, bénéficient de propriétés mécaniques élastiques moyennes.
- Les céramiques ont des propriétés élastiques élevées mais présentent une grande fragilité.

En combinant divers types de matériaux, on obtient des **composites** (Baïlon, 2000). Ces composites combinent un matériau de **renfort**, dispersé sous forme de particules, fibres courtes ou fibres longues, au sein d'une **matrice** qui les enrobe. Le choix des renforts et de la matrice, de leurs dispositions, de leurs fractions respectives, permet à l'élaborateur du matériau de le concevoir pratiquement « sur mesure », optimisé pour la pièce où il sera utilisé, et même parfois optimisé localement en fonction de la distribution locale des contraintes dans la pièce (Dupeux, 2008).

Le terme « composite » a donc une connotation moderne mais l'usage de fibres très résistantes pour raidir et consolider une matrice en matériau bon marché est plus ancien que la

roue ! Depuis 5000 ans, on a utilisé la paille et le crin de cheval pour renforcer des briques de terre. Les composites sont donc très anciens mais l'industrie des matériaux composites est récente. Elle s'est développée rapidement durant les 40 dernières années avec la mise au point des composites fibreux comme les polymères renforcés par des fibres de verre et les polymères renforcés par des fibres de carbone (Ashby Michael F. et al., 2008).

I.2.1. Exemples d'utilisation des matériaux composites

Le marché des matériaux composites se compte en millions de tonnes mais il reste loin de celui des aciers qui lui est plusieurs centaines de fois supérieur.

Les matériaux composites de hautes performances sont principalement utilisés en ;

- automobile (toit, habitacle, coques de voitures de course...);
- énergies renouvelables (pales d'éoliennes, supports de panneaux solaires...);
- constructions civiles (toiture, cloisons, canalisation...);
- constructions nautiques (coques de bateaux...);
- aéronautique (airbus A350 avec plus de 50% des matériaux sont en composites, NH90 Eurocopter avec plus de 85% des matériaux sont en composites...);
- électricité et électronique (circuits imprimés à base de fibres, coques de téléphones de haute qualité...);
- sport et loisir (raquette de tennis, cadre de vélo, canne à pêche...);
- matériel médical (prothèses dentaires, chaises roulantes...).

I.3. Classification des matériaux composites

Les matériaux composites, selon le type du renfort utilisé, peuvent être classés en trois grands groupes :

- matériaux composites renforcés par des particules ;
- matériaux composites renforcés par des fibres ;
- matériaux composites structuraux.

Chacun de ces grands groupes comporte des sous-groupes. La figure 1 illustre les différents types de composites.

Notons qu'il existe d'autre type de matériaux qui sont classés composite par une partie des scientifiques comme les matériaux FGM (Matériaux à Gradient de Propriétés), le bois et certaines structures tissées.

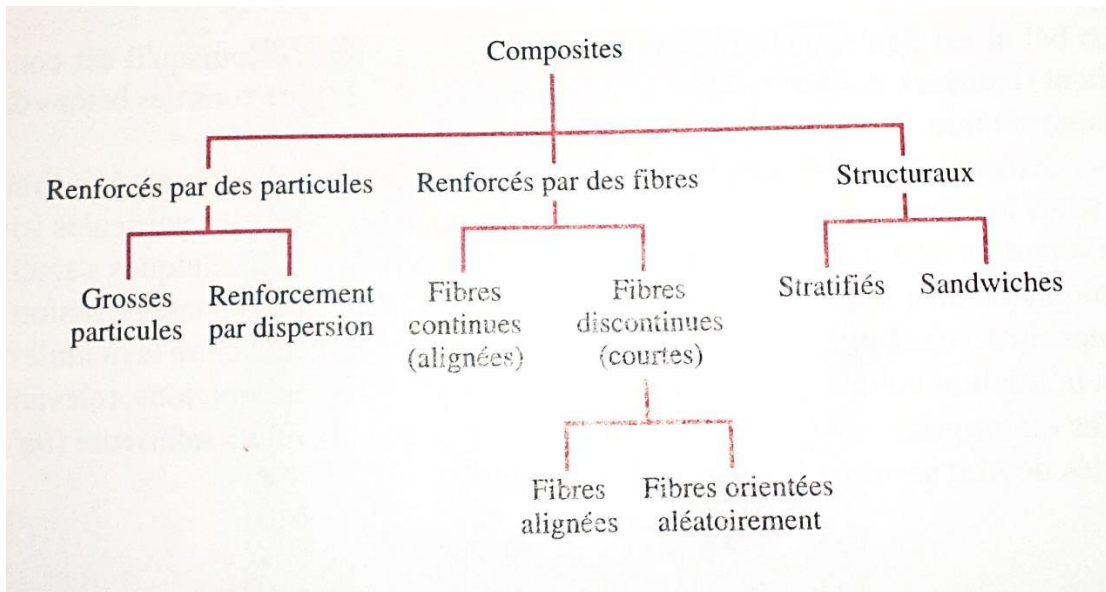


Figure 1: Classification des matériaux composites (William & Callister, 2001).

I.3.1. Composites renforcés par des particules

Dans cette catégorie, les composites sont renforcés ;

- par des grosses particules (béton, polymères chargés...) : la géométrie des particules peut varier mais leurs dimensions demeurent similaires dans toutes les directions ;
- par dispersion : dans ces composites, de fines particules d'une matière inerte et de proportions très faibles sont dispersés généralement dans des matrices métalliques (figure 2).

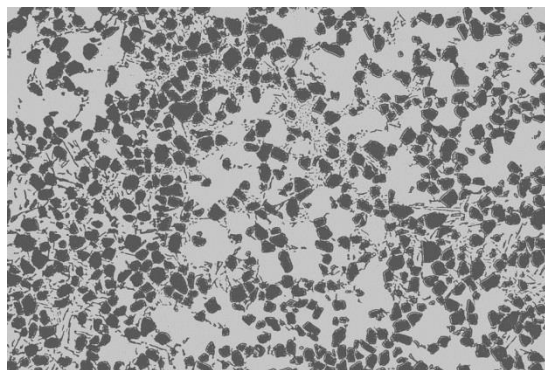


Figure 2 : Composite à matrice métallique renforcé par dispersion (Hairy, 2018).

I.3.2. Composites renforcés par des fibres

Ces composites sont développés pour obtenir des matériaux rigides et légers. Les composites de cette classe sont classés en deux sous-groupes :

- des composites renforcés par des fibres continues (fibres alignées longues) ;
- des composites renforcés par des fibres discontinues (courtes). Ces fibres courtes peuvent se présenter sous une forme alignées ou orientées aléatoirement.

La figure 3 montre les différentes configurations des composites renforcés par des fibres.

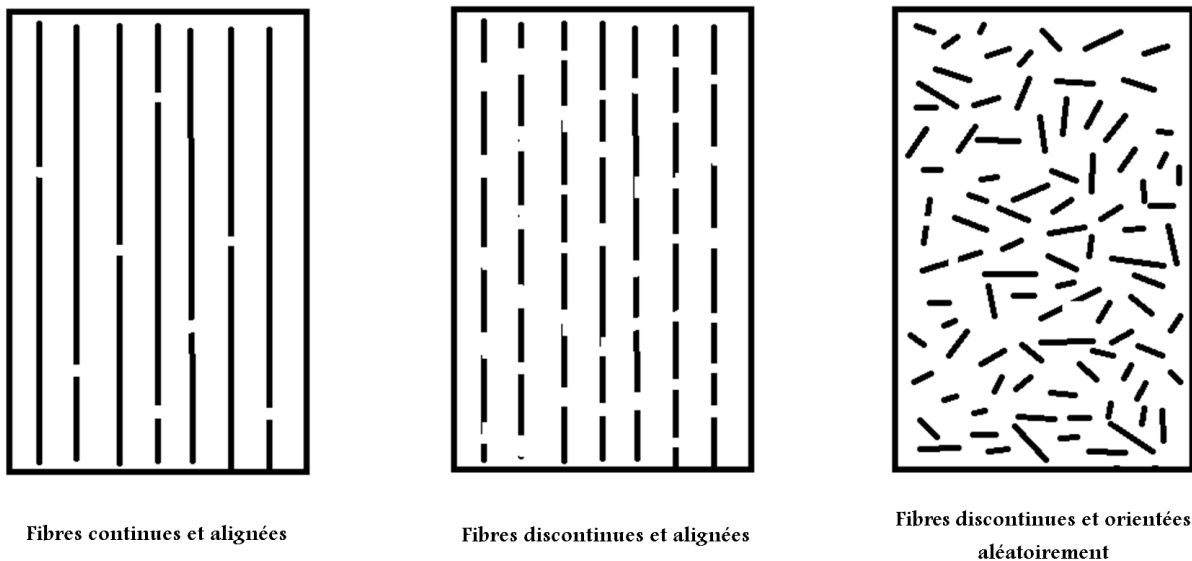


Figure 3 : Les différents types des composites renforcés par des fibres.

I.3.3. Composites structuraux

Un composite structural est constitué d'un matériau homogène et d'un composite. Les composites structuraux sont classés en deux groupes :

– Les stratifiés

Un stratifié est un composite constitué d'un empilement de feuilles (panneaux) dont les propriétés varient selon la direction. Les différentes couches d'un stratifié sont superposées et collées de façon telle que la direction de leurs plus grande résistance varie d'une couche à l'autre comme le montre la figure 4. (Gornet, 2008).

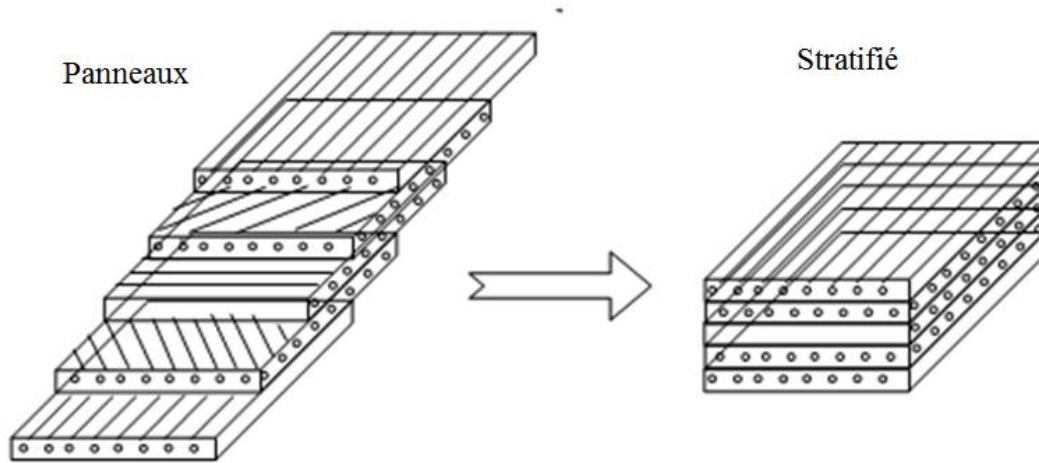


Figure 4 : Principe d'empilement de panneaux pour constituer un stratifié.

– **Les panneaux sandwich**

Ces composites sont constitués de deux couches d'un matériau très résistant entre lesquelles on a intercalé un cœur fait d'une matière moins dense, moins résistante et moins rigide (figure 5).

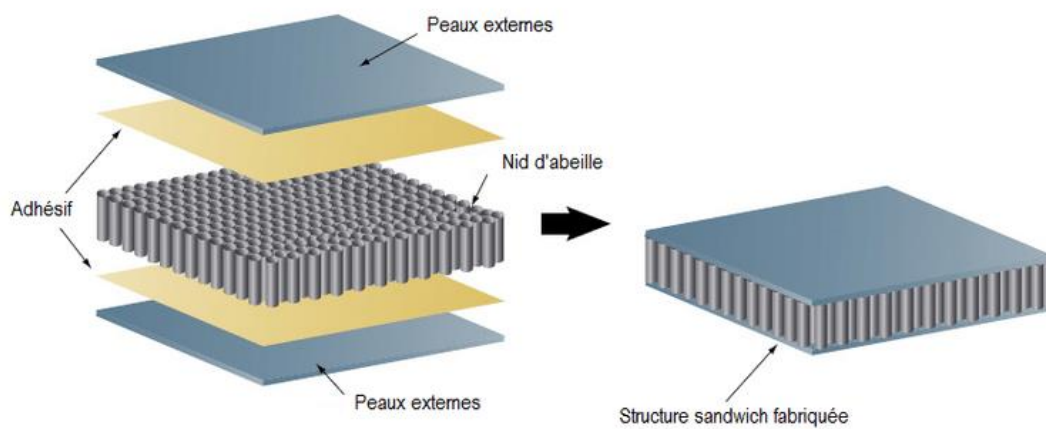


Figure 5 : Représentation schématique d'un panneau sandwich¹.

¹ Image internet, libre accès.

CHAPITRE II : Elaboration des matériaux composites

II.1. Introduction

Les matériaux composites combinent un matériau de *renfort*, dispersé sous forme de particules, fibres courtes ou fibres longues, au sein d'une *matrice* qui les enrobe. Pour rappel, les principaux constituants d'un matériau composite sont donc :

- la matrice ;
- le renfort.

II.2 Les renforts

Les renforts consistent à :

- supporter les efforts appliqués;
- conférer au composite sa rigidité élastique et sa résistance à la rupture, éventuellement à haute température.

Ils doivent également être compatibles avec la matrice du composite sur le plan chimique, c'est-à-dire assurer une adhérence inter-faciale renfort-matrice suffisante et stable dans le temps.

Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition, notamment pour les fibres (aléatoire 3D, nappes 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissages 3D) ou par leur nature (Dupeux, 2008).

Les fibres les plus employées dans les matériaux composites de hautes performances sont les fibres de verre, les fibres de carbone, les fibres aramides, les fibres de carbure de Silicium et les fibres de bore.

II.2.1 Obtention des renforts fibreux

– Les fibres de verre.

Ces fibres, dont le diamètre varie de 5 à 15 μm , sont obtenues généralement par étirage. Les fibres ainsi obtenues sont revêtues d'une résine de protection (Ensimage) comme le montre la figure. 6. Ces fibres présentent un bon rapport qualité/prix. Elles offrent une bonne résistance thermique, électrique et à l'humidité. Le principal inconvénient des fibres de verre est la faible résistance aux chocs.

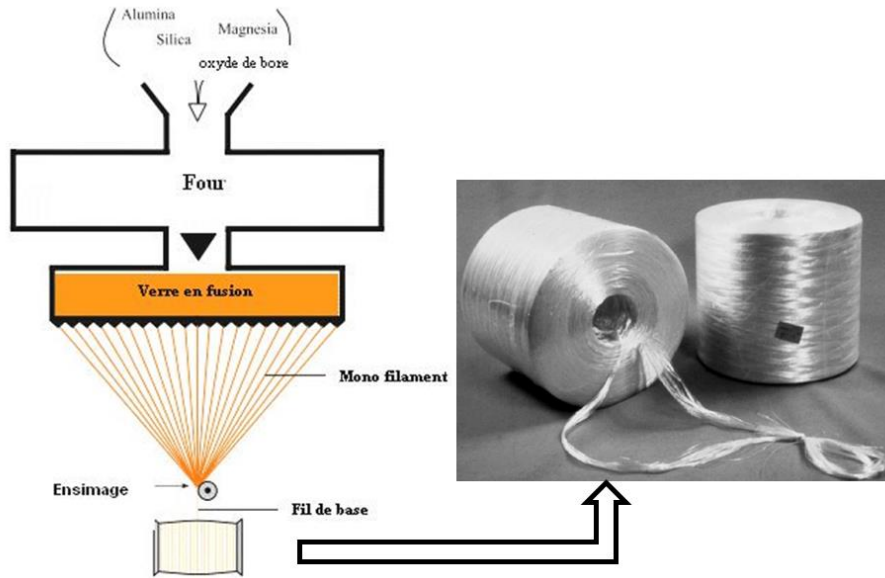


Figure 6 : Procédé d'obtention des fibres de verre par étirage².

Le tableau. 1 Regroupe les principales caractéristiques des fibres de verre.

Tableau 1 : Caractéristiques et applications de divers types de fibres de verre pour matériaux composites (Dupeux, 2008).

Fibres	Verre E	Verres R et S	Verre D	Verre C
Caractéristiques principales	Qualité courante	Hautes performances mécaniques et thermiques	Rigidité diélectrique	Bonne tenue chimique
Masse volumique (Mg/m ³)	2,6	2,53	2,14	2,5
Résistance à la traction R_m (MPa)	2 400	3 600	2 500	2 800
Module de Young E (GPa)	73	86	55	70
Allongement à la rupture A (%)	4,5	5,2	4,8	4
Température maximale d'utilisation (°C)	500	650	450	450
Coefficient de dilatation thermique ($10^{-6}/K$)	5	4	3,5	8,5
Applications	Composites de grande diffusion	Armement, aéronautique, spatial	Radomes, capots perméables aux ondes électromagnétiques	Réacteurs chimiques, renforcement du béton, panneaux de façades

² Montage d'images Internet, libre accès.

– Les fibres de carbone

Les fibres de carbone sont obtenues par pyrolyse en atmosphère contrôlée à partir d'un polymère de base appelé précurseur et constitué généralement de fibres acryliques. Les différentes phases d'élaboration des fibres de carbone sont présentées par la figure 7.

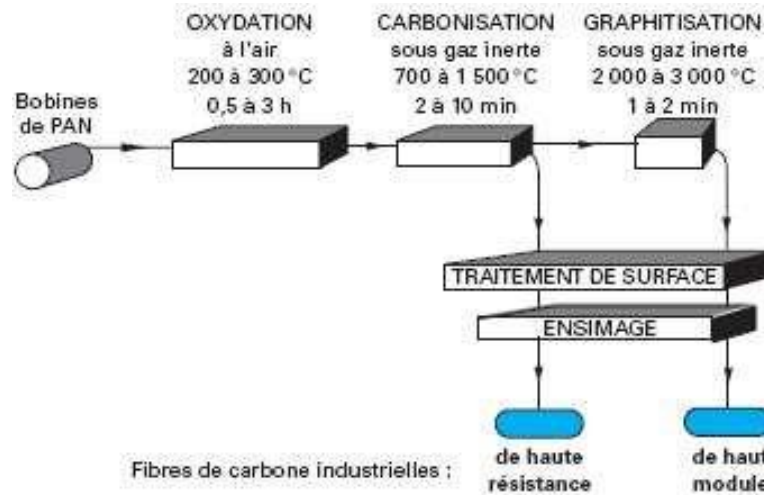


Figure 7 : Principe d'élaboration des fibres en carbone (Avignon et al., 2010).

Les fibres de carbone présentent une grande résistance à la traction et un coefficient de dilatation longitudinal extrêmement faible. Ces fibres sont également connues pour leur faible résistance aux chocs et leur coût élevé. Les principales caractéristiques des fibres de carbonées sont regroupées dans le tableau. 2.

Tableau 2 : Caractéristiques et applications de divers types de fibres de carbone pour matériaux composites (Dupeux, 2008).

Fibres	Carbone à haute résistance HR	Carbone à bas module BM	Carbone à haut module HM	Carbone à très haut module THM
Masse volumique (Mg/m ³)	1,85	1,70	1,90	1,95
Résistance à la traction R_m (MPa)	3 500 à 4 900	1 800	2 800 à 4 400	2 300
Module de Young E (GPa)	200 à 250	180	400 à 600	750 à 820
Allongement à la rupture A (%)	1,3 à 2,1	2	0,7 à 1,2	0,3

– **Les fibres aramides**

Les fibres aramides, dont le nom commercial est « Kevlar », sont des fibres polyaramides ou polyamides aromatiques de synthèse dont la structure est constituée de noyaux benzéniques reliés par des groupes CO et HN.

L'élaboration des fibres aramides est effectuée par synthèse à basse température (-10°C), puis par filage en solution. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité (Berthelot, 2010).

Les fibres Kevlar offrent une bonne résistance à la traction et à la fatigue. Elles disposent également d'excellentes propriétés diélectriques et une bonne résistance aux attaques chimiques causées par les hydrocarbures et l'eau de mer. La résistance des fibres Kevlar à la compression demeure faible. Les propriétés mécaniques des fibres aramides sont résumées dans le tableau. 3.

Tableau 3 : Caractéristiques et applications des fibres aramides (Dupeux, 2008).

Fibres	Polyamides aromatiques : aramides (Kevlar®)	
	Kevlar 29®	Kevlar 49®
Caractéristiques principales	Résistance en traction, au choc et à la fatigue	Résistance en traction, au choc et à la fatigue, haut module
Masse volumique (Mg/m ³)	1,44	1,45
Résistance à la traction R_m (MPa)	3 000	3 600
Module de Young E (GPa)	60	134
Allongement à la rupture A (%)	7	3,5
Température maximale d'utilisation (°C)	200	200
Applications	Câbles, pneumatiques	Composites à hautes performances, voiles.

– Les fibres de Carbure de Silicium (SiC) et les fibres de Bore (B)

Les filaments de Carbure de Silicium et de bore sont fabriqués par déposition de bore en phase vapeur (CVD en anglais) sur un substrat de tungstène ou en carbone pour le SiC et un substrat en tungstène pour le bore (Figure 8). Cette technique de déposition d'un matériau sur un substrat permet d'obtenir un dépôt dense composé de petits grains (Bathias Claude et al., 2005).

Les caractéristiques mécaniques élastiques en traction et en compression des fibres SiC et B sont importantes à des températures inférieures à 500 °C mais la résistance à la rupture décroît progressivement avec l'augmentation de la température. Le prix de revient de ces fibres est relativement élevé rendant leur utilisation limitée. Les caractéristiques mécaniques des fibres de Bore et de Carbure de Silicium sont regroupées dans le tableau 4.

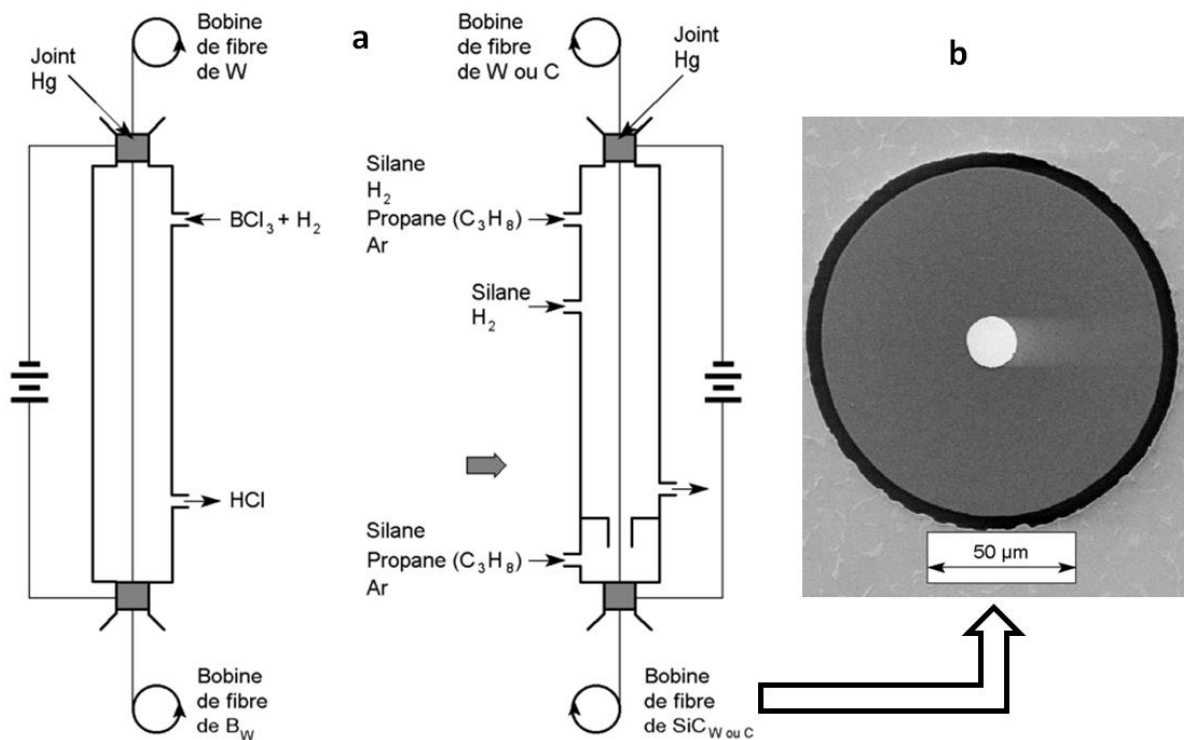


Figure 8 : a) Fabrication des fibres de bore (à gauche) et des fibres de SiC (à droite), b) Section d'une fibre de SiC fabriquée par déposition en phase vapeur (Bathias Claude et al., 2005).

Tableau 4 : Caractéristiques mécaniques des fibres de bore, bore-carbure et carbure de silicium (Berthelot, 2010).

Caractéristiques		Bore	Bore + B ₄ C	SiC
Masse volumique	ρ (kg/m ³)	2 600	2 600	3 000
Diamètre	(μ m)	100–150	100–150	100–150
Module d'Young	E_f (GPa)	430	430	410
Module spécifique	E_f/ρ (MNm/kg)	165	165	140
Contrainte à la rupture	σ_{fu} (MPa)	3 800	4 000	3 900

II.3. Les matrices

La matrice d'un composite a pour rôles :

- d'enrober les renforts, les protégeant ainsi du milieu extérieur;
- d'assurer une répartition spatiale homogène des renforts;
- de transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir;
- de conférer la forme à la pièce: ce sont elles qui conditionnent l'aptitude à la mise en forme du composite (Dupeux, 2008).

Les matrices sont classées selon le matériau d'élaboration. Ainsi, on trouve :

– Les matrices organiques

Les matrices organiques sont faites de matières plastiques thermoplastiques et thermodurcissables. Ces matrices présentent une faible masse volumique et résistent bien aux attaques chimiques. Elles sont facile à mettre en œuvre, leur coût de revient est faible mais présentent une faible tenue en température.

Les matrices organiques les plus utilisées sont :

- les résines de polyester ;
- les résines époxy ;
- les résines phénoliques ;
- les résines polyimides ;
- les résines mélamines.

Les valeurs usuelles des caractéristiques mécaniques des matrices organiques sont indiquées dans le tableau 5.

Tableau 5 : Principales caractéristiques mécaniques des matrices organiques (Gornet, 2008).

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (Kg/m ³)	$\epsilon_t^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
epoxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

– Les matrices métalliques

Par rapport à une matrice organique, une matrice métallique présente en effet les avantages particuliers suivants (Baïlon, 2000):

- des propriétés mécaniques supérieures ;
- une gamme de température d'utilisation plus vaste ;
- une bonne conductivité thermique et électrique (permettant l'évacuation de la chaleur) ;
- une facilité d'usinage et d'assemblage.

Notons que le coût de revient des matrices métalliques demeure supérieur à celui des matrices organiques.

Différentes techniques sont employées pour réaliser les matrices métalliques comme le laminage, l'imprégnation en phase liquide et le dépôt physique en phase vapeur.

– Les matrices céramiques

Composées principalement d'oxydes, de nitrures et de carbures (C, Al₂O₃, SiO₂, Cr₂O₃, MgO, SiC, Si₃N₄...), les matrices céramiques offrent une bonne résistance à la compression et une faible masse volumique par rapport aux matrices métalliques. Cependant, elles sont peu résistantes aux chocs et nécessitent des techniques d'élaboration onéreuses.

Le tableau 6 regroupe les caractéristiques de quelques matériaux céramiques utilisés comme matrice dans les composites.

Tableau 6 : Principales caractéristiques des céramiques utilisées comme matrice dans les matériaux composites (Dupeux, 2008).

Type de céramique	Masse vol. (Mg/m ³)	Temp. de fusion ou de ramoll. (°C)	Conduc. therm. (W/m · K)	Coeff. de dilatation linéaire (10 ⁻⁶ /K)	Module de Young (GPa)	Résist. à la compr. (MPa)
Carbone diamant	3,52	3 720 à 3 910	600 à 2 200	0,8 à 1,2	990 à 1 050	30 000 à 65 000
Alumine Al ₂ O ₃	3,9	2 050 à 2 060	24 à 35	8 à 8,9	330 à 400	1 750 à 3 000
Zircone ZrO ₂	5,6	2 680 à 2 710	2 à 12	7 à 9	180 à 240	1 650 à 3 600
Carbure de silicium SiC	3,2	2 700 à 2 830	90 à 200	4,3 à 4,6	390 à 440	2 000 à 3 500
Nitride de silicium Si ₃ N ₄	3,2	1 890 à 1 900	15 à 43	2,6 à 3,3	280 à 310	11 000 à 15 000
Nitride de bore BN	2,1	2 900 à 3 100	20 à 52	1 à 10	20 à 100	225 à 540
Carbure de titane TiC	4,9	3 170 à 3 250	18 à 25	6,6 à 7,4	420 à 450	3 570 à 5 850
Carbure de tungstène WC	15,6	2 820 à 2 920	28 à 88	4,5 à 7,1	600 à 670	6 600 à 10 000
Carbure de bore B ₄ C	2,5	2 410 à 2 450	27 à 36	3,5 à 5,6	440 à 472	1 400 à 3 400
Quartz SiO ₂	2,2	-	1,4 à 1,5	0,48 à 0,52	54	1 200
Sialons Si ₃ Al ₂ O ₃ N ₅	3,25	2 480 à 2 540	18 à 23	3,3 à 3,7	265 à 300	3 800 à 4 500

II.4. Techniques d'élaboration des matériaux composites

Il existe plusieurs méthodes permettant d'élaborer des pièces en composite. Ces méthodes dépendent de la nature de la combinaison recherchée « Matrice/Fibre ». Cette partie du cours sera consacrée à la présentation de quelques techniques de mise en œuvre des matériaux composite constitués de matrice organique renforcée par des fibres.

II.4.1. Moulage sans pression

Le moulage sans pression, très employé pour les composites à fibres de verre, est simple à mettre en œuvre permettant ainsi d'obtenir des pièces de formes et de dimensions différentes. IL regroupe plusieurs techniques dont les principales sont :

– Moulage au contact

Ce type de moulage est effectué selon les opérations suivantes(Berthelot, 2010) :

1. Le moule est enduit avec de la résine catalysée et accélérée, au pinceau ou au rouleau.
2. Le renfort est disposé dans le moule.
3. Le renfort est ensuite imprégné avec la matrice, puis un ébullage est effectué avec un rouleau cannelé.

- Après gélification de la première couche, les couches suivantes sont appliquées en utilisant les mêmes techniques.
- Le démoulage est ensuite effectué.
- La polymérisation est ensuite effectuée soit au milieu ambiant en en étuve.
- Finition de la pièce (ébarbage, ponçage, peinture...).

Le principe de moulage au contact est illustré par la figure 9.

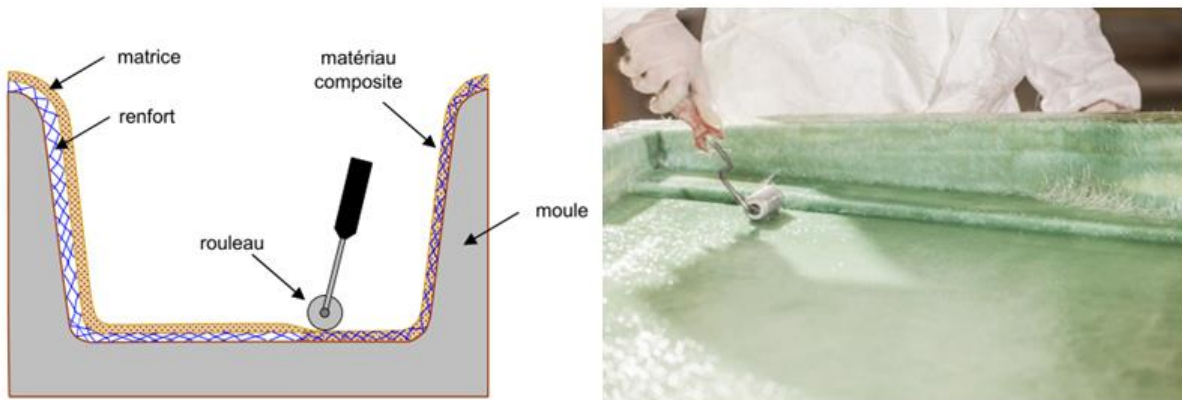


Figure 9 : Moulage au contact (Berthelot, 2010)³.

– Moulage par projection simultanée

Ce type de moulage est adapté aux composites dont la matrice est en résine renforcée par des fibres discontinues. Comme son nom l'indique, l'application de la résine et des fibres se fait simultanément comme le montre la figure 10.

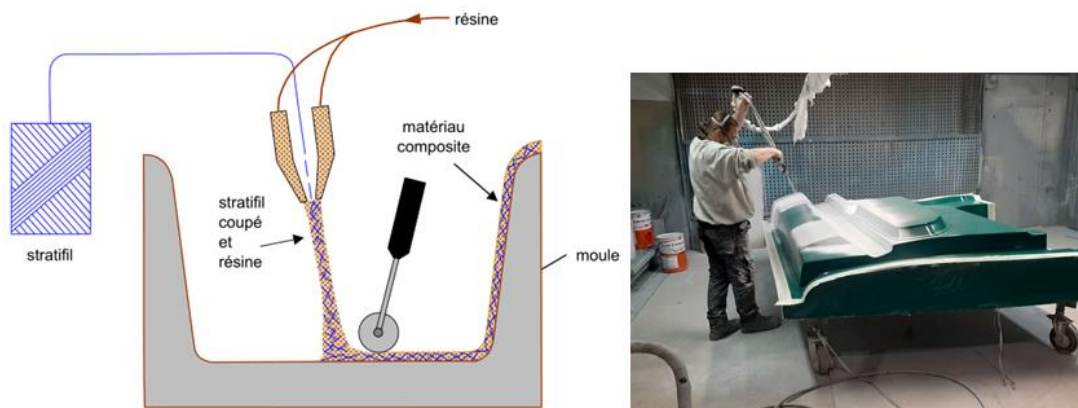


Figure 10 : Principe du moulage par projection simultanée (Berthelot, 2010)⁴.

³ Image internet/Libre accès.

II.4.2. Moulage sous vide

Le moulage sous vide consiste à utiliser simultanément le vide et la pression atmosphérique. On dispose le renfort sur un moule rigide, puis on coule la matrice. Le contre-moule, recouvert d'une membrane assurant l'étanchéité, est ensuite emboîté. Une pompe à vide crée une dépression à travers le moule et le contre-moule qui étale la résine. Le principe de ce type de moulage est présenté par la figure 11 (Berthelot, 2010).

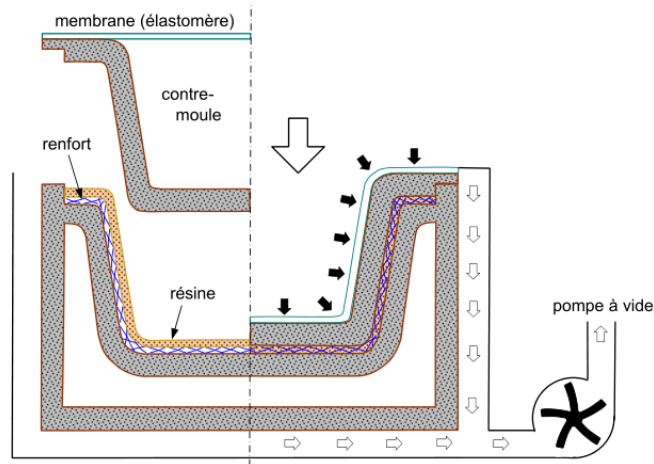


Figure 11 : Moulage sous vide (Berthelot, 2010).

II.4.3. Moulage par compression

– Moulage par injection de résine

Convient à la réalisation de pièces profondes et de formes compliquées, ce type de moulage consiste à imprégner un renfort placé à l'intérieur d'un ensemble moule et contre-moule très rigide et fermé. Le principe de ce type de moulage est illustré par la figure 12.

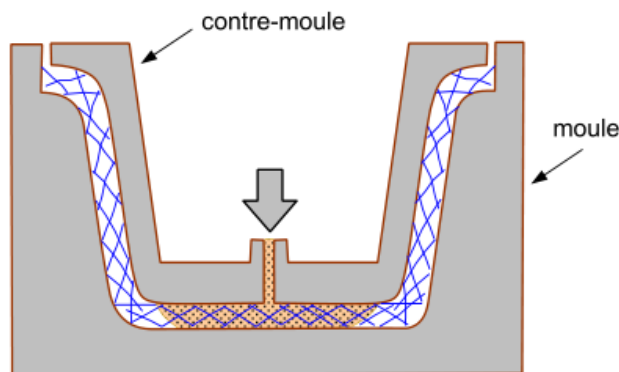


Figure 12 : Moulage par injection de résine (Berthelot, 2010).

⁴ Image internet/Libre accès

– **Moulage par compression**

Ce type de moulage peut s’effectuer à chaud ou à froid. Le renfort et la matrice sont déposés dans le moule. Le contre-moule referme le moule avec une pression. Le moule et le contre-moule sont chauffés dans le moulage à chaud. La figure 13 illustre les deux techniques de moulage par compression.

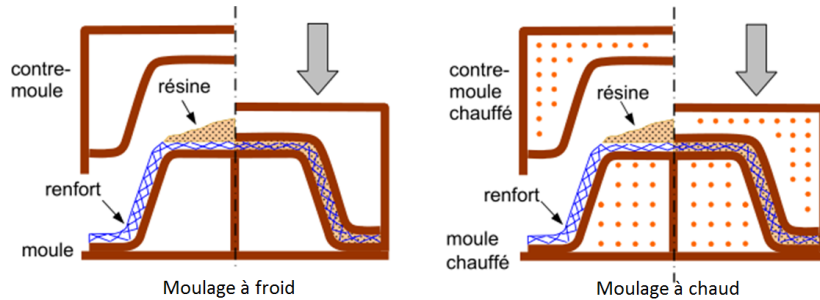


Figure 13 : Moulage par compression (Berthelot, 2010).

– **Moulage par injection**

La méthode de moulage par injection est la méthode la plus répandue des méthodes de mise en œuvre des thermoplastiques armés. Elle est adaptée à la production des pièces en très grande série.

Des granulés comportant la résine et le renfort (fibres courtes, billes, etc.) sont extrudés par une vis d’Archimède. La matrice est fluidifiée par chauffage et injectée sous pression élevée dans un moule chauffé (Berthelot, 2010). Le principe de cette technique est présenté par la figure 14.

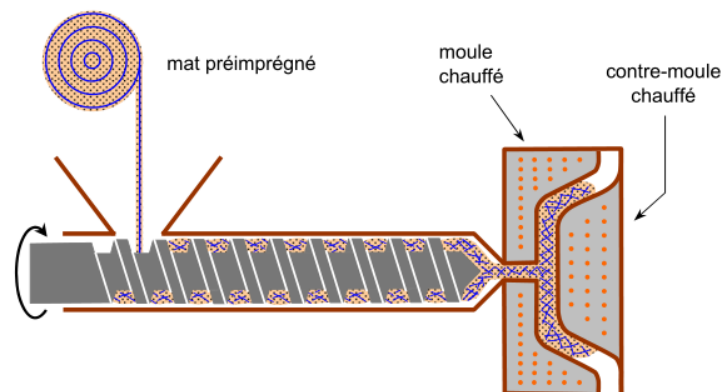


Figure 14 : Moulage par injection (Berthelot, 2010).

II.4.4. Moulage en continu

Cette technique de moulage permet la fabrication de plaques planes, de panneaux ondulés pour toitures et de plaques nervurées. Ce procédé de moulage comporte plusieurs phases (Berthelot, 2010):

1. Une phase d'imprégnation des renforts : fibres ou tissus. La résine catalysée et le renfort sont véhiculés sur un film de démoulage.
2. Une phase de mise en forme.
3. Une phase de polymérisation effectuée dans une étuve en forme de tunnel.
4. Une phase de découpage.

La figure 15 montre le principe d'élaboration des plaques planes et des plaques ondulées en composite par la technique du moulage continu.

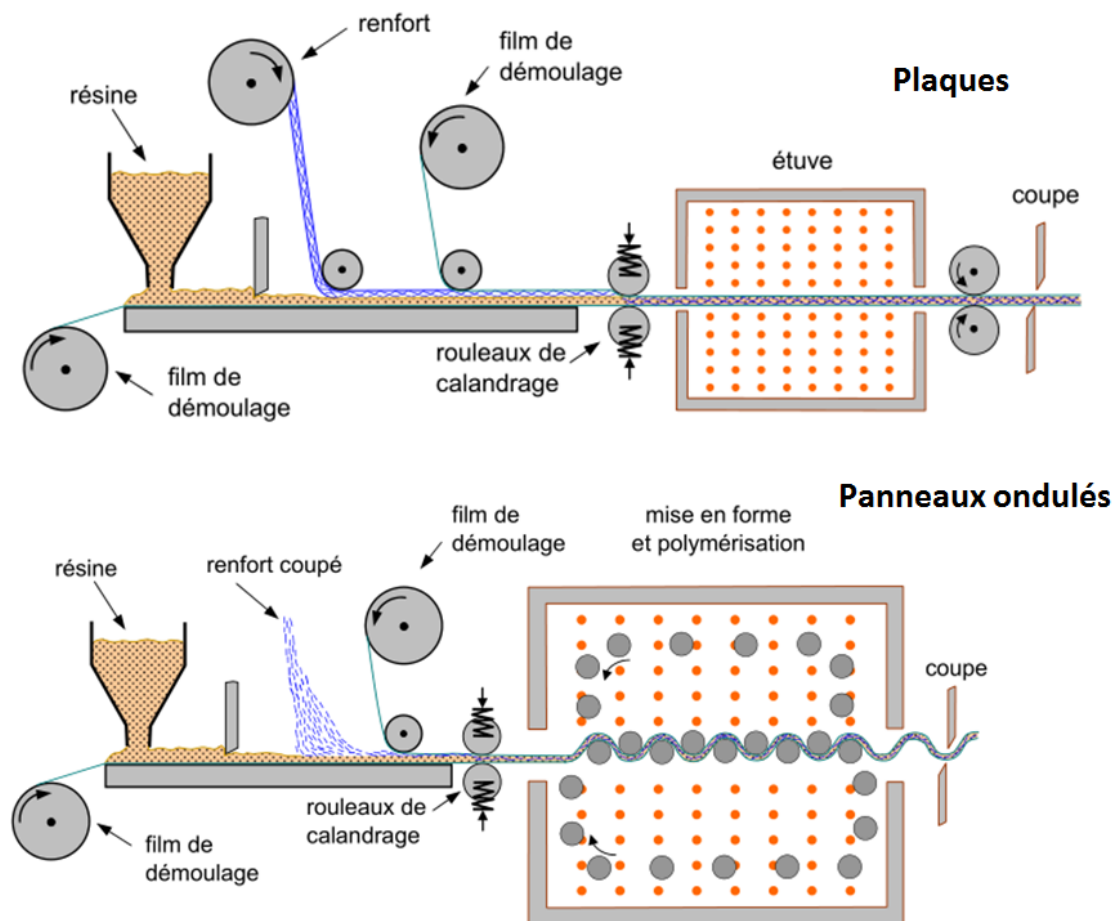


Figure 15 : Moulage en continu (Berthelot, 2010).

II.4.5. Moulage par pultrusion

C'est une technique permettant de fabriquer des profilés de section constante avec de fortes propriétés mécaniques dans la direction longitudinale. Le moulage par pultrusion est adapté pour les composites à base de résines thermodurcissables et thermoplastiques renforcées par des fibres. La production peut se faire en très grande série.

Dans cette technique, les renforts passent dans un bain de résine catalysée où ils sont imprégnés. Ils traversent ensuite une filière chauffée dans laquelle ont lieu simultanément la mise en forme du profilé et la polymérisation de la résine (figure 16) (Berthelot, 2010).

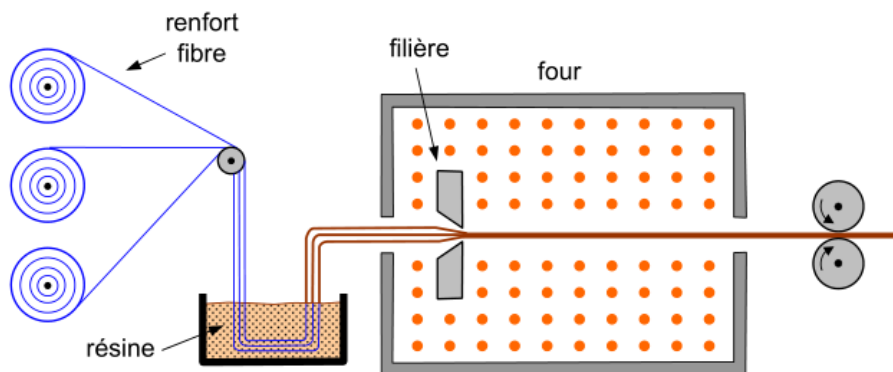


Figure 16 : Moulage par pultrusion (Berthelot, 2010).

II.4.6. Moulage par centrifugation

Exclusivement réservé aux pièces de révolution, cette technique permet d'obtenir des tubes, des tuyaux et des cuves. Le moule est mis en rotation et on introduit simultanément le renfort et la résine. L'imprégnation du renfort par la résine se fait par centrifugation (figure 17)(Berthelot, 2010).

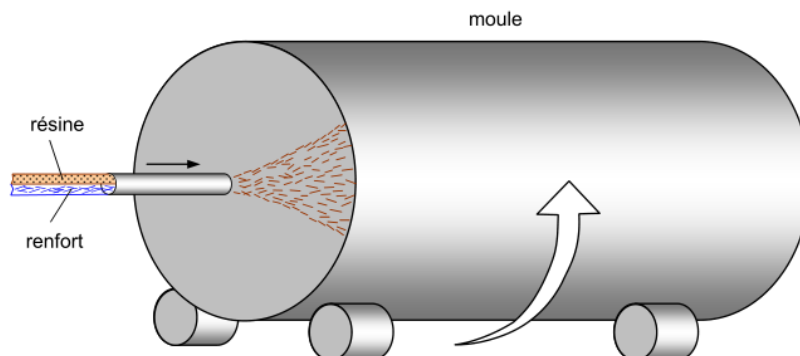


Figure 17 : Moulage par centrifugation (Berthelot, 2010).

II.4.7. Moulage par enroulement filamentaire

Dans cette technique, le renfort, généralement sous forme des fibres continues, imprégné de résine catalysée est enroulé sur un mandrin de révolution en rotation. Suivant les mouvements relatifs du mandrin et du système d’approvisionnement en renfort, divers types d’enroulement sont obtenus (Berthelot, 2010) :

– Enroulement circonférentiel

Le bobinage est effectué 90° par rapport à l’axe du mandrin. Pour améliorer la résistance dans toutes les directions, il est nécessaire d’intercaler des couches unidirectionnelles dans le sens axial du mandrin (figure 18).

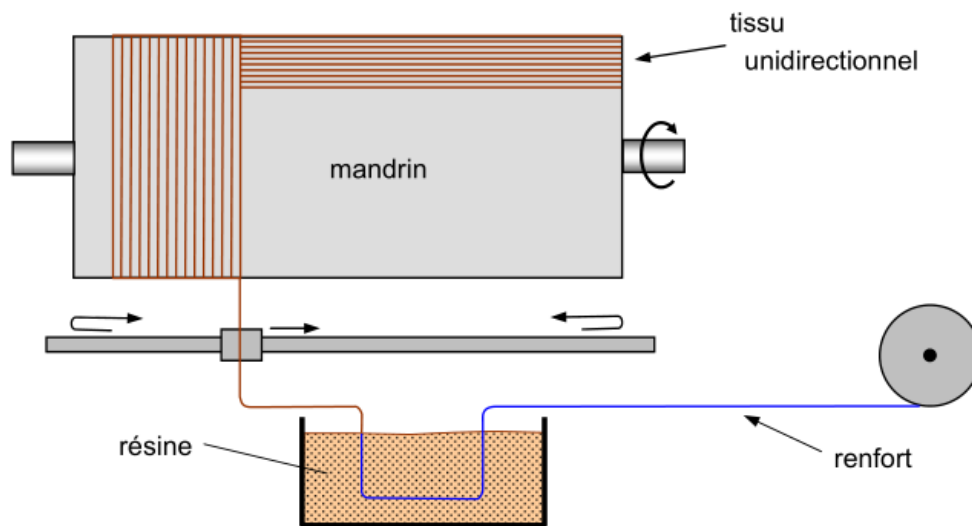


Figure 18 : Moulage par enroulement circonférentiel (Berthelot, 2010).

– Enroulement hélicoïdal

La direction d’enroulement du fil est inclinée par rapport à l’axe du mandrin d’un angle dont la valeur est déterminée par le mouvement relatif du guide-fil par rapport à l’axe de rotation du mandrin. On peut utiliser un ou plusieurs guide-fils. La valeur de l’angle est obtenue en fonction du rapport souhaité entre les propriétés longitudinales et les propriétés transversales (figure 19).

Cette technique d’enroulement permet d’obtenir des pièces de grandes dimensions comme par exemple les enveloppes des fusils, les torpilles, les tubes, les bouteilles de gaz...

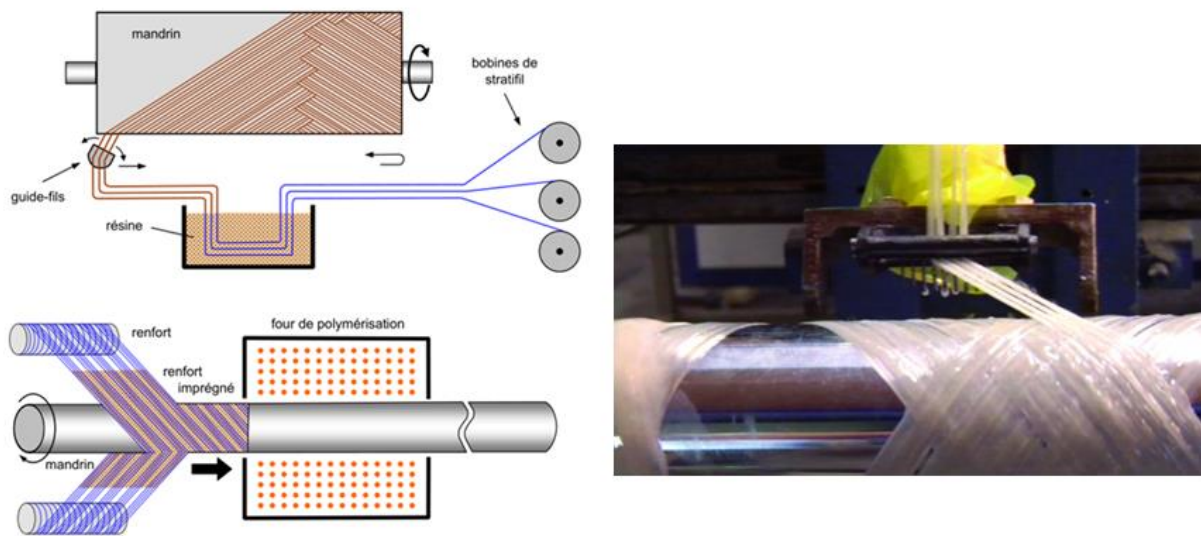


Figure 19 : Moulage par enroulement hélicoïdal (Berthelot, 2010)⁵.

– Enroulement polaire

Cette technique permet d'obtenir des pièces à extrémités sphériques. Le mandrin dispose de trois degrés de liberté en rotation permettant de commander simultanément trois rotations ou non (figure 20).

L'enroulement polaire est employé pour fabriquer des réservoirs haute pression, des équipement spatiaux, etc.(Berthelot, 2010).

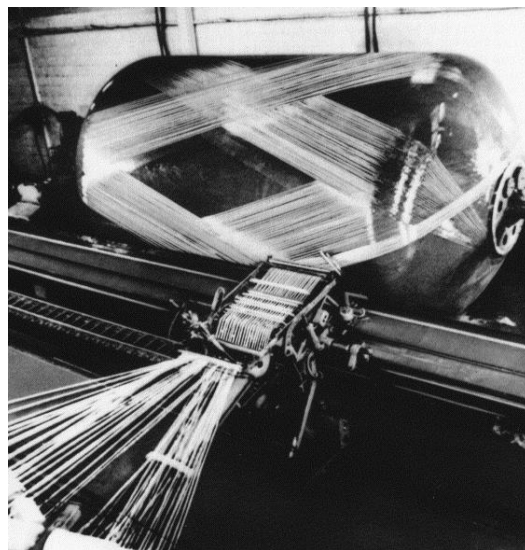


Figure 20 : Moulage par enroulement polaire (Berthelot, 2010)

⁵ Image internet/Libre accès

II.4.8. Drapage des pré-imprégnés

Cette technique consiste à découper des morceaux de composites qualifié de pré-imprégnés (généralement des stratifiés ou des composites tissus) et de les draper dans un moule qui comporte la forme de la pièce à obtenir. La figure 21 montre un exemple de la technique de drapage utilisée dans l'industrie automobile.

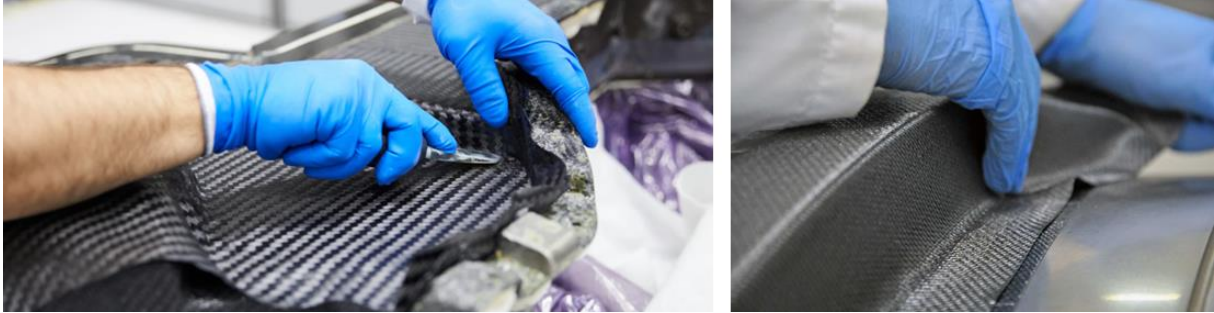


Figure 21 : Obtention des pièces composites par drapage de pré-imprégnés⁶

⁶ Image internet/Libre accès

CHAPITRE III : Propriétés mécaniques des matériaux composites

III.1. Introduction

Les propriétés mécaniques d'un matériau composite dépendent des propriétés mécaniques de ses constituants (matrice et renfort) ainsi que sur la disposition et la proportion du renfort dans la matrice.

Les propriétés mécaniques des matériaux composites s'obtiennent, comme pour les autres matériaux, pas des essais mécaniques comme par exemple l'essai de traction, de compression de cisaillement de dureté, etc. Ces essais mécaniques nécessitent la réalisation des éprouvettes en nombre important pour assurer la répétabilité des résultats. Cette démarche expérimentale est très coûteuse pour les industriels qui cherchent à élaborer des matériaux composites. D'autant plus, qu'il faut faire des composites à des proportions différentes en renfort pour étudier l'impact du taux de renfort sur les propriétés finales d'un matériau composite.

Des approches analytiques permettant d'estimer les propriétés mécaniques des composites ont été développées. Ces approches analytiques se basent sur les propriétés mécaniques des matrices et les propriétés mécaniques du renfort ainsi que sur les taux des renforts dans le composite finale. Cette approche analytique s'appuie sur la loi des mélanges.

Cette partie du cours sera consacrée à la présentation de formules issues de la loi des mélanges permettant de calculer les modules élastiques ainsi que les résistances à la rupture des composites renforcés par des particules et les composites fibreux.

III.2. Propriétés mécaniques des composites renforcés par des particules

Les composites renforcés par des particules sont classés en deux groupes ; des composites renforcés par des grosses particules et de composites renforcés par dispersion. Pour les composites renforcés par des grosses particules, l'interaction entre la matrice et le renfort se font à une échelle macroscopique. On peut supposer que la matrice et le renfort sont deux matériaux en contact parfait permettant ainsi l'utilisation de la loi des mélanges pour calculer les propriétés du composite résultant. Pour les composites renforcés par dispersion, les interactions matrice/renfort se font à l'échelle microscopique. Des interactions à l'échelle moléculaire peuvent exister entre la matrice et le renfort rendant imprécis l'utilisation de la loi des mélange pour estimer les propriétés du composite. De ce fait, les formule développées dans ce paragraphe concerne exclusivement les composites renforcés par des grosses particules.

En se basant sur les propriétés mécaniques intrinsèques de la matrice et du renfort ainsi que sur leurs fractions volumiques et en appliquant la loi des mélanges, les modules élastiques du composite sont calculés par formules suivantes :

$$E_c^{sup} = E_m \cdot V_m + E_p \cdot V_p \quad (1)$$

$$E_c^{inf} = \frac{E_m \cdot E_p}{E_p \cdot V_m + E_m \cdot V_p} \quad (2)$$

Avec :

E_c^{sup} : La limite supérieur du module élastique du composite.

E_c^{inf} : La limite inférieur du module élastique du composite.

E_m et E_p : Les modules élastiques du matériau de la matrice et de celui des particules respectivement.

V_m et V_p : Les fractions volumiques de la matrice et du renfort (particules) respectivement.

Les fractions volumiques sont obtenues par les formules suivantes :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (3)$$

$$V_p = \frac{v_p}{v_c} \quad (4)$$

Avec :

v_m , v_p et v_c sont respectivement, le volume de la matrice, le volume du renfort (particules) et le volume du composite.

Le module élastique du composite renforcé par des particules se situe entre deux valeurs limites, supérieur et inférieur. Une représentation graphique de ces deux modules limites en fonction de la fraction volumique du renfort est donnée par la figure 22.

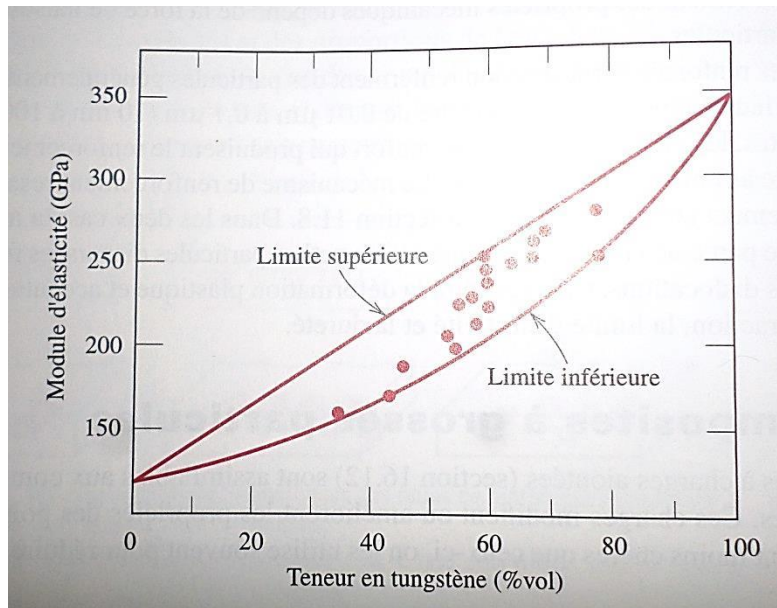


Figure 22 : Variation du module élastique d'un composite renforcé par des particules en fonction de la fraction volumique du renfort (matrice en cuivre)(Doi et al., 1970).

III.3. Propriétés mécaniques des composites renforcés par des fibres

III.3.1. Rôle de la longueur des fibres

Les caractéristiques mécaniques des composites renforcés par des fibres dépendent des propriétés des fibres et de l'ampleur avec laquelle la matrice transfère aux fibres une charge appliquée.

Une fibre renforce la rigidité d'un matériau composite si sa longueur est supérieure ou égale à une longueur critique $l \geq l_c$ (William & Callister, 2001).

$$l_c = \frac{\sigma_f^* d}{2\tau_c} \quad (5)$$

Avec :

l_c la longueur critique de la fibre ;

σ_f^* la résistance à la rupture de la fibre ;

d diamètre de la fibre ;

τ_c la plus petite des deux grandeurs suivantes : la résistance de la liaison fibre-matrice ou la limite d'élasticité en cisaillement de la matrice.

III.3.2. Rôle de l'orientation et de la concentration des fibres

– Composites à fibres continues et alignées (Modules élastiques)

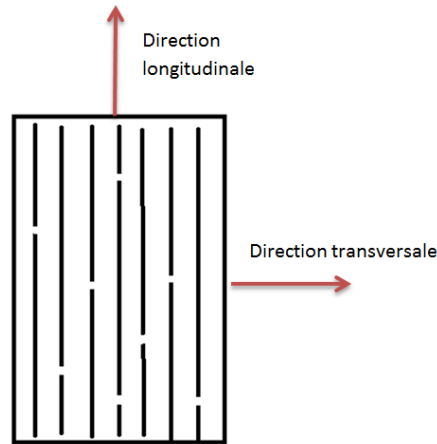


Figure 23 : Présentation des directions caractéristiques d'un composite unidirectionnel.

Hypothèse : les fibres adhèrent fortement à la matrice.

Lors d'une traction dans le sens longitudinal (schéma ci-contre), la charge totale de traction appliquée sur le composite est donnée par :

$$F_c = F_m + F_f \quad (6)$$

Avec :

F_c , F_m , et F_f sont respectivement ; la charge appliquée sur le composite, la charge supportée par la matrice et la charge supportée par les fibres.

Sachant que :

$$F = \sigma \cdot S \quad (7)$$

σ la contrainte et S la section.

La formule (6) peut se présenter sous la forme suivante :

$$\sigma_c = \sigma_m \frac{S_m}{S_c} + \sigma_f \frac{S_f}{S_c} \quad (8)$$

S_c , S_m , et S_f sont respectivement, la section du composite, la section de la matrice et la section des fibres.

Le composite, les fibres et la matrice ont la même longueur. On peut donc remplacer les sections par les volumes et la formule (8) s'écrira :

$$\sigma_c = \sigma_m \frac{v_m}{v_c} + \sigma_f \frac{v_f}{v_c} \quad (9)$$

Avec :

v_c , v_m , et v_f sont respectivement, le volume du composite, le volume de la matrice et le volume des fibres.

$\frac{v_m}{v_c}$ et $\frac{v_f}{v_c}$ représentent respectivement la fraction volumique de la matrice et la fraction volumique des fibres. La formule (9) prendra la forme suivante :

$$\sigma_c = \sigma_m V_m + \sigma_f V_f \quad (10)$$

V_m et V_f sont respectivement les fractions volumiques de la matrice et des fibres.

On sait également que l'allongement du composite ε_c est égal à l'allongement des fibres ε_f est égal à celui de la matrice ε_m (hypothèse : adhérence parfaite entre les fibres et la matrice).

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (11)$$

On peut donc diviser les termes de l'équation (10) par ε ce qui conduit à :

$$\frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} V_m + \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} V_f \quad (12)$$

En appliquant la loi de Hooke, $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$, la formule (12) s'écrira :

$$E_{cl} = E_m V_m + E_f V_f \quad (13)$$

Il est d'usage d'utiliser une seule fraction volumique, généralement celle des fibres, il est possible d'écrire la formule (13) sous la forme suivante :

$$E_{cl} = E_m(1 - V_f) + E_f V_f \quad (14)$$

Dans cette formule, E_{cl} représente le module élastique longitudinal du composite, E_m et E_f sont respectivement les modules élastiques du matériau de la matrice et de celui des fibres.

Pour le module transversal, une charge est appliquée perpendiculairement au sens des fibres. Dans ce cas de figure, les déformations ne sont pas égales mais les contraintes sont identiques.

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &\neq \varepsilon_f \neq \varepsilon_m \\ \sigma_c &= \sigma_f = \sigma_m\end{aligned}\tag{15}$$

En suivant la même résolution que pour le cas du module longitudinal, le module élastique du composite dans le sens transversal E_{ct} est donné par :

$$E_{ct} = \frac{E_m E_f}{(1 - V_f) E_f + V_f E_m}\tag{16}$$

– **Composites à fibres continues et alignées (Résistance à la traction longitudinale)**

La résistance à la traction longitudinale est donnée par :

$$\sigma_{Rc} = \sigma'_{Rm}(1 - V_f) + \sigma_{Rf} V_f\tag{17}$$

Avec :

σ_{Rc} est la résistance à la traction longitudinale du composite.

σ_{Rf} est la résistance à la traction des fibres.

σ'_{Rm} représente la contrainte dans la matrice au moment de la rupture des fibres.

– **Composites à fibres discontinues et alignées (Modules élastiques)**

Le module élastique longitudinal d'un composite de hautes performances à fibres courtes et alignées se calcul de la même manière que celui des composites à fibres longues alignées. La formule (14) demeure valable pour ce type de composite.

– **Composites à fibres discontinues et alignées (Résistance à la traction longitudinale)**

Pour les composites à fibres discontinues et alignées qui vérifient la condition ; $l \geq l_c$, la résistance à la traction longitudinale est donnée par :

$$\sigma_{Rc} = \sigma'_{Rm}(1 - V_f) + \sigma_{Rf}V_f\left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) \quad (18)$$

Avec, l et l_c sont respectivement la longueur et la longueur critique des fibres.

– **Composites à fibres discontinues et orientées aléatoirement (module élastique)**

Dans le cas des composites à fibres discontinues et orientées aléatoirement, le module élastique du composite se calcul à l'aide de l'équation (14) modifiée. Cette modification consiste à introduire un facteur correcteur k dont la valeur dépend de l'orientation des fibres. Le module élastique du composite est donné par :

$$E_c = E_m(1 - V_f) + kE_fV_f \quad (19)$$

Le tableau 7 donne quelques valeurs de k pour certaines orientations des fibres.

Tableau 7 : Les valeurs du facteur k en fonction de la direction des fibres (William & Callister, 2001).

Orientation des fibres	Direction de la contrainte	k
Fibres totalement alignées	Parallèle aux fibres	1
	Perpendiculaires aux fibres	0
Fibres orientées aléatoirement et uniformément dans un plan	Toute direction dans le plan des fibres	3/8
Fibres orientées aléatoirement et uniformément dans toutes les directions	Toute direction	1/5

III.4. Conclusion

Les approches de calcul présentées dans la présent partie concernent uniquement les modules élastiques ainsi que les résistances à la traction. IL est à souligner que la connaissance de ces deux paramètres est d'une grande importance lors de la phase de développement des matériaux et structures en composites. Les autres propriétés mécaniques dépendent de la nature du composite et nécessitent généralement des essais mécaniques pour les déterminer.

Chapitre IV : Comportement élastique et thermoélastique d'un composite unidirectionnel

IV.1. Définition d'un composite unidirectionnel

Un composite unidirectionnel, également appelé « pli unidirectionnel », est un composite renforcé par des fibres longues orientées suivant la même direction. Cette direction d'orientation est qualifiée de direction longitudinale tandis que les deux autres directions sont des directions transversales. La figure 24 montre un pli unidirectionnel avec les axes caractéristiques.

Dans le plan perpendiculaire à la direction longitudinale, composé par les deux directions transversales, la répartition moyenne des fibres est la même le long des deux axes T. Le comportement dans ce plan est considéré comme étant isotrope. Les matériaux anisotropes possédant une isotropie dans un plan sont qualifiés d'isotropes transverses et c'est le cas de notre pli unidirectionnel.

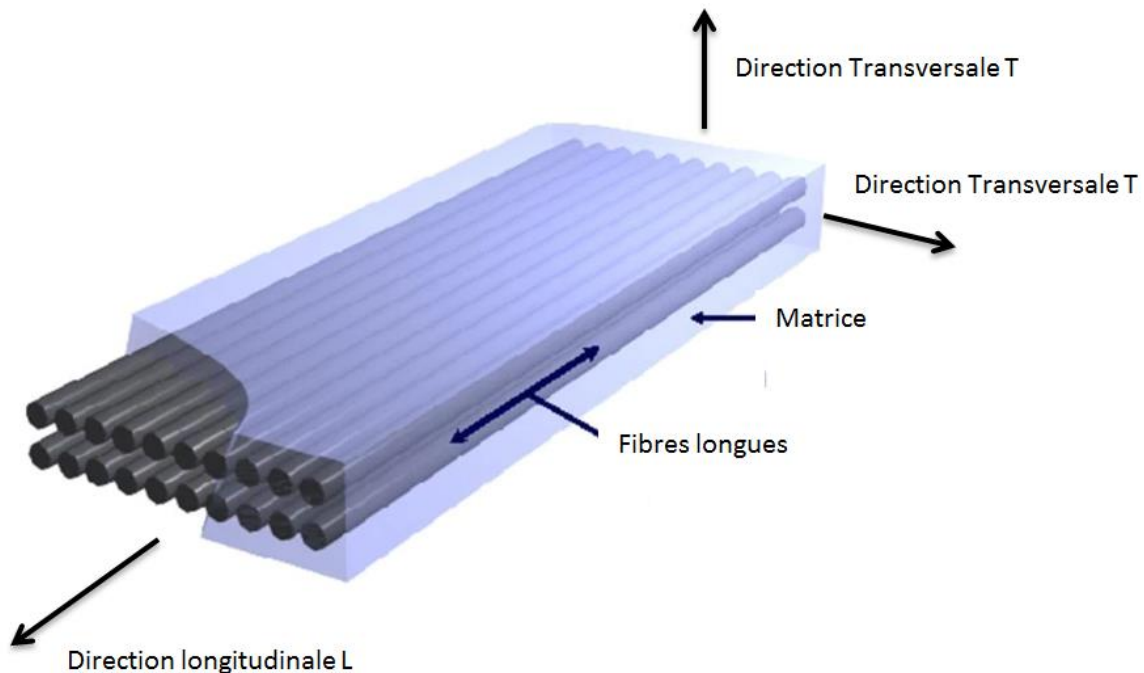


Figure 24 : Composite unidirectionnel (pli unidirectionnel).

IV.2. Comportement élastique d'un composite unidirectionnel

Le comportement élastique d'un matériau conduit à définir la relation entre les contraintes et les déformations. En élasticité, cette relation est décrite par la loi de Hooke.

$$\sigma = Q \cdot \varepsilon \quad (20)$$

$$\varepsilon = S \cdot \sigma \quad (21)$$

Avec :

σ et ε sont respectivement le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

Q et S sont respectivement la matrice de rigidité et la matrice de souplesse ($S=Q^{-1}$).

Les tenseurs des contraintes et des déformations sont donnés par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (23)$$

On constate que les deux tenseurs sont symétriques. Ces deux tenseurs se présentent, selon la notation de Voigh, sous la forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont données par :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{15} & Q_{25} & Q_{35} & Q_{45} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & Q_{46} & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (27)$$

La loi de Hooke prendra la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{15} & Q_{25} & Q_{35} & Q_{45} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & Q_{46} & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Les deux formules, (28) et (29) décrivent le comportement d'un matériau anisotrope. Les matrices de souplesse et de rigidité se présentent sous une forme simplifiée pour les matériaux isotropes et isotrope transverse.

Un composite unidirectionnel est considéré comme étant isotrope transverse. La loi de comportement en élasticité est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{23} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q_{22} - Q_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{23} & s_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(s_{22} - s_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Pour des raisons de simplification, l'indice de la direction 1 sera remplacé par L (direction longitudinale).

Les indices des directions 2 et 3 seront remplacés par T (direction transversale).

En introduisant les modules de l'ingénieur, la formule (31) prendra la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_T}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & \frac{-\nu_T}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \nu_T)}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Avec E , G et ν sont respectivement le module élastique, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

Avec, pour un matériau isotrope transverse :

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T} \quad (33)$$

Etablir la loi de comportement d'un composite unidirectionnel consiste donc à déterminer cinq coefficients indépendants qui sont :

- E_L : le module élastique dans la direction longitudinal ;
- E_T : le module élastique dans les directions transversales ;
- ν_T ; le coefficient de Poisson dans le Plan transverse ;

- ν_{LT} : le coefficient de Poisson dans le plan formé par l'axe longitudinal et l'axe transversal.
- G_{LT} ; le module de cisaillement dans le plan formé par l'axe longitudinal et l'axe transversal.

Note : pour d'un pli unidirectionnel, il est d'usage de remplacer l'axe (xx) par la direction (1) et les axes (yy) et (zz) par les directions (2) et (3). La direction (1) correspond à la direction des fibres (direction longitudinale). Les deux autres directions représentent les directions transversales.

IV.3. Détermination des propriétés élastiques d'un composite unidirectionnel

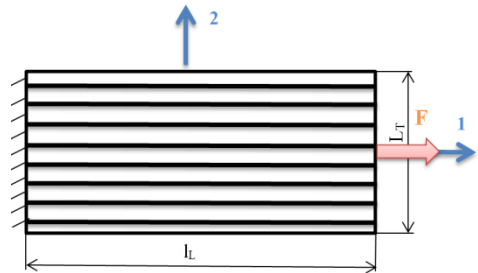
Le comportement élastique d'un pli unidirectionnel nécessite la détermination de cinq propriétés indépendantes ; E_L , E_{LT} , ν_T , ν_{LT} , et G_{LT} .

Trois essais mécaniques simples permettent de déterminer ces cinq propriétés indépendantes :

- un essai de traction dans la direction longitudinale ;
- un essai de traction dans la direction transversale ;
- un essai de traction hors axes.

IV.3.1. Essai de traction dans la direction longitudinale

Une charge F est appliquée suivant la direction des fibres (direction 1). Soit S l'aire de la section sur laquelle agit la force F .



L'état de contrainte est donnée par :

$$\sigma_1 = \frac{F}{S} ; \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \quad (34)$$

En mesurant les allongements, longitudinal et transversaux, on peut calculer les déformations qui sont données par :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_L}{L_L} ; \varepsilon_2 = \frac{\Delta L_T}{L_T} \quad (35)$$

On peut donc calculer deux propriétés mécaniques qui sont :

$$E_L = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad (36)$$

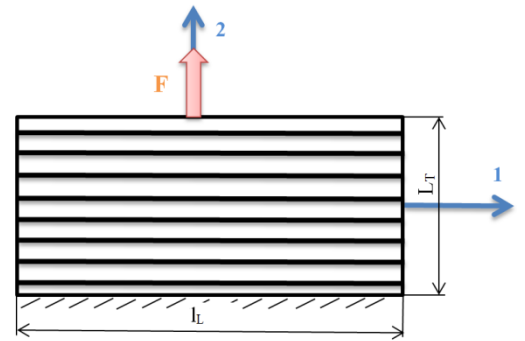
$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (37)$$

IV.3.2. Essai de traction dans la direction transversale

Une charge F est appliquée suivant la direction transversale (direction 2). Soit S l'aire de la section sur laquelle agit la force F .

L'état de contrainte est donnée par :

$$\sigma_2 = \frac{F}{S} ; \sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \quad (38)$$



On mesurant les allongements, on peut calculer les déformations ε_1 et ε_2 (formules 35).

On peut donc calculer deux propriétés mécaniques qui sont :

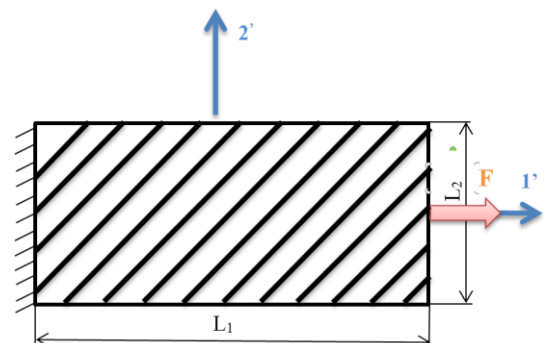
$$E_T = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \quad (39)$$

$$\nu_T = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \quad (40)$$

IV.3.3. Essai de traction hors axes

Dans ce cas de figure, la charge F est inclinée de 45° par rapport à l'orientation des fibres.

Les contraintes et les déformations sont exprimées par rapport à la base ($1'2'3'$). Une fois les propriétés mécanique trouvées dans cette base, on peut utiliser une matrice de rotation (de passage) pour ramener ces propriétés à la base (123).



L'état de contrainte associé est :

$$\sigma_1 = \frac{F}{S} ; \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \quad (41)$$

La mesure de la déformation longitudinale ϵ_1 permet de déduire :

$$\hat{s}_{11} = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \quad (42)$$

D'autre part, on peut exprimer \hat{s}_{11} en fonction de s_{ij} en utilisant la matrice de passage (formules (44) et (45)).

$$\hat{s}_{11} = \frac{1}{4}(s_{11} + s_{22} + 2s_{12} + s_{66}) \quad (43)$$

Avec ; s_{ij} sont les composantes de la matrice de souplesse dans la base (123) (et \hat{s}_{ij} sont les composantes de la matrice de souplesse dans la base ($\hat{1}\hat{2}\hat{3}$) présentant une rotation θ avec la base (123).

Le passage de \hat{s}_{ij} vers s_{ij} se fait en utilisant la matrice de rotation (de passage ou de changement de base) :

$$P = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (44)$$

La relation de changement de base de la matrice de souplesse est :

$$\hat{S} = T.S.T^{-1} , \hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{12} & 0 & 0 & \hat{S}_{16} \\ \hat{S}_{12} & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{23} & 0 & 0 & \hat{S}_{26} \\ \hat{S}_{12} & \hat{S}_{23} & \hat{S}_{22} & 0 & 0 & \hat{S}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{S}_{44} & \hat{S}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{S}_{45} & \hat{S}_{55} & 0 \\ \hat{S}_{16} & \hat{S}_{26} & \hat{S}_{36} & 0 & 0 & \hat{S}_{66} \end{bmatrix} \quad (45)$$

La relation de changement de base de la matrice de rigidité est :

$$\hat{Q} = T.Q.T^{-1} , \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{12} & 0 & 0 & \hat{Q}_{16} \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{23} & 0 & 0 & \hat{Q}_{26} \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{23} & \hat{Q}_{22} & 0 & 0 & \hat{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{44} & \hat{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{45} & \hat{Q}_{55} & 0 \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{26} & \hat{Q}_{36} & 0 & 0 & \hat{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Une fois les constantes de souplesse calculées, on déduit que :

$$\frac{1}{G_{LT}} = 4S_{11} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_{LT}}{E_T} \quad (47)$$

En résumé :

- de l'essai de traction longitudinal, on détermine E_L et ν_{LT} ;
- de l'essai de traction transversal, on détermine E_T et ν_T
- de l'essai de traction hors axes, on détermine G_{LT}

Les cinq propriétés indépendantes ont été déterminées, on peut alors établir la loi de comportement en souplesse (formule 32). Le passage de l'écriture en souplesse vers une écriture en rigidité nécessite l'inversement de la matrice de souplesse ($S=Q^{-1}$).

IV.4. Comportement thermoélastique d'un composite unidirectionnel

En absence d'un chargement mécanique, et sous l'unique effet d'une variation de température ΔT , un composite unidirectionnel dont la matrice est en polymère présente une déformation longitudinale beaucoup plus importante que la déformation transversale (Gay Daniel, 2007). La mesure des allongements résultants d'une variation de température permet de remonter aux déformations et de calculer les coefficients de dilatation thermique du composite.

– Le long de la direction longitudinale

Sous une variation de température, ΔT , la matrice et les fibres présentent le même niveau de déformation longitudinale ($\varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lf}$). Cette hypothèse ne tient pas au compte la présence de contraintes résiduelles entre les fibres et la matrice et stipule que le lien entre les fibres et la matrice est parfait. On peut alors écrire :

$$\varepsilon_{Lm} = \frac{\sigma_{Lm}}{E_m} + \alpha_{lm}\Delta T \quad (48)$$

$$\varepsilon_{Lf} = \frac{\sigma_{Lf}}{E_f} + \alpha_{lf}\Delta T \quad (49)$$

Avec :

α_{lm} et α_{lf} sont respectivement ; le coefficient de dilatation thermique du matériau de la matrice et celui du matériau des fibres.

En utilisant la loi des mélanges et en introduisant les fractions volumiques, on peut écrire :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lf} = \frac{(\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m)}{E_f V_f + E_m V_m} \Delta T \quad (50)$$

Le coefficient de dilatation thermique du composite unidirectionnel dans la direction des fibres (α_{Lc}) est donné par :

$$\alpha_{Lc} = \frac{(\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m)}{E_f V_f + E_m V_m} \quad (51)$$

– **Le long de la direction transversale**

Sous une variation de température, ΔT , le composite présente une déformation thermique constituée de la somme de la déformation transversale des fibres et la déformation transversale de la matrice. Cette hypothèse ne tient pas au compte la présence de contraintes résiduelles entre les fibres et la matrice $\varepsilon_{Tc} = \varepsilon_{Tf} + \varepsilon_{Tm}$.

La déformation thermique transversale du composite dépend des propriétés intrinsèques de la matrice et des fibres ainsi que les fractions volumiques. Elle est donnée par (Gay Daniel, 2007) :

$$\varepsilon_{Tc} = \left\{ (\alpha_m V_m + \alpha_f V_f) + \frac{(E_m \nu_f - E_f \nu_m)}{E_f V_f + E_m V_m} V_m V_f (\alpha_m - \alpha_f) \right\} \Delta T \quad (52)$$

Avec :

- E_m et E_f sont respectivement les modules élastiques du matériau de la matrice et de celui des fibres.
- ν_m et ν_f sont respectivement les coefficients de Poisson du matériau de la matrice et de celui des fibres.
- V_m et V_f sont respectivement les fractions volumiques de la matrice et des fibres.

Le coefficient de dilatation thermique du composite unidirectionnel dans la direction transversale (α_{Tc}) est donné par :

$$\alpha_{Tc} = (\alpha_m V_m + \alpha_f V_f) + \frac{(E_m \nu_f - E_f \nu_m)}{E_f V_f + E_m V_m} V_m V_f (\alpha_m - \alpha_f) \quad (53)$$

En tenant compte du chargement mécanique et thermique, la loi de comportement décrite par l'équation (32) s'écrira sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_T}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & \frac{-\nu_T}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_T)}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} + \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ \alpha_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

IV.5. Conclusion

L'application de la loi des mélanges pour estimer les propriétés mécaniques d'un composite unidirectionnel est conditionnée par la vérification des hypothèses avancés notamment la forte adhérence entre les fibres et la matrice et l'absence des défauts comme par exemple les bulles d'air dans la matrice. Précisant que ces approches analytiques présentent un grand intérêt dans la phase d'étude qui précède l'élaboration des composites. Une fois cette phase achevée, il devient nécessaire de mener des campagnes d'expérimentation (essais mécaniques) dans des conditions réelles afin de mesurer les vraies propriétés mécaniques.

Chapitre V : Comportement en flexion simple d'un composite stratifié

V.1. Introduction à la théorie classique des stratifiés

Un composite stratifié, classé parmi les composites structuraux, est issu d'une superposition de plis unidirectionnels avec un changement d'orientation des fibres d'un pli à l'autre. Le choix de l'orientation des différentes couches dépend des propriétés mécaniques recherchées. L'orientation des couches se fait généralement par des angles de 0° , $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$ et $\pm 90^\circ$ en alternance.

Le comportement mécanique élastique en flexion d'un stratifié consiste à établir une relation globale entre les contraintes et les déformations à l'échelle du composite tout en prenant en compte le comportement, l'épaisseur et l'orientation de chaque pli. Les stratifiés sont considérés comme étant des plaques qui se caractérisent par la faible valeur d'une dimension par rapport aux deux autres. Dans le cadre de la théorie des plaques, le problème tridimensionnel se simplifie en un problème bidimensionnel puisqu'on considère que la contrainte normale le long de l'axe qui présente la dimension la plus petite est nulle. On parle ici d'un état de contraintes planes.

La théorie classique des stratifiés est basée sur l'utilisation du modèle de Kirchhoff (modèle K) pour décrire le comportement des stratifiés *de faible épaisseurs* en flexion simple. On parle d'un stratifié de faible épaisseur quand le rapport largeur sur épaisseur de la plaque est supérieur à 10. Le modèle *K* stipule qu'une section droite perpendiculaire au plan moyen reste droite après déformation et garde sa perpendicularité avec le plan moyen. Dans le cas où le rapport largeur sur épaisseur est inférieur à 10, la prise en considération du cisaillement transverse devient indispensable. Pour le présent document, une extension du modèle Reissner-Midlin (Reissner, 1945)-(Mindlin, 1951) visant à prendre en considération le cisaillement transverse a été utilisé pour décrire le comportement en flexion simple des stratifiés épais.

V.2. Présentation de la théorie classique des stratifiés en flexion simple

V.2.1. Etude de la flexion simple d'un composite stratifié mince (modèle K)

La théorie classique des stratifiés est basée sur l'utilisation d'un schéma de premier degré pour exprimer les déplacements en tout point M d'une plaque en flexion simple. Le modèle de Kirchhoff considère que les sections normales au feuillet moyen (plan moyen) restent

normales lors de la déformation. Cette hypothèse permet de négliger la déformation en cisaillement transverse ($\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$).

Dans la théorie des plaques, la contrainte normale dans l'épaisseur est nulle ($\sigma_3 = 0$).

– **Expression des déplacements**

Le champ des déplacements s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= u_0(x_1, x_2) - z \frac{dw_0}{dx_1}(x_1, x_2), \\ v(x_1, x_2, x_3) &= v_0(x_1, x_2) - z \frac{dw_0}{dx_2}(x_1, x_2), \\ w(x_1, x_2, x_3) &= w_0(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{55}$$

Avec :

u , v et w sont les déplacements le long des axes 1, 2 et 3 d'un point M qui se situe à une distance z du plan moyen (figures 25 et 26).

u_0 , v_0 , et w_0 sont respectivement les déplacements de la membrane (plan moyen) le long des axes 1,2 et 3.

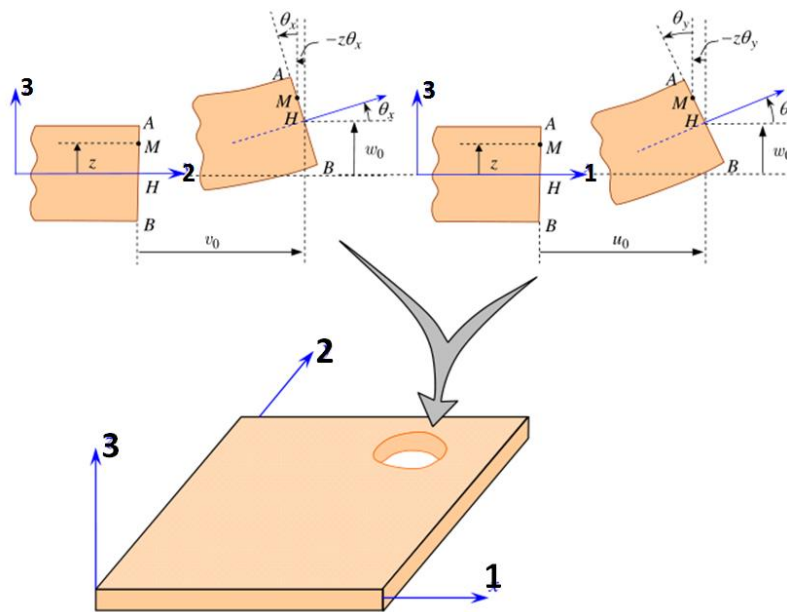


Figure 25 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés (Berthelot, 2010)

– **Expression des déformations**

Les déformations du point M s'expriment en fonction des déplacements :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{du_0}{dx_1} - z \frac{d^2 w_0}{dx_1^2}, \\
 \varepsilon_2 &= \frac{dv_0}{dx_2} - z \frac{d^2 w_0}{dx_2^2}, \\
 \varepsilon_3 &= 0, \\
 \varepsilon_4 &= 0, \\
 \varepsilon_5 &= 0, \\
 \varepsilon_6 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) - 2z \frac{d^2 w_0}{dx_1 dx_2} \right) \\
 \text{avec } \gamma_6 &= \left(\left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) - 2z \frac{d^2 w_0}{dx_1 dx_2} \right)
 \end{aligned} \tag{56}$$

On constate que le champ de déformation se décompose en déformation en membrane et en déformation en flexion (courbure).

Les déformations en membrane

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx_1} \\ \frac{dv_0}{dx_2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) \end{pmatrix} \tag{57}$$

Les déformations en courbure

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \\ -z \frac{d^2 w_0}{dx_2^2} \\ -z \frac{d^2 w_0}{dx_1 dx_2} \end{pmatrix} \tag{58}$$

On pose :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \\ -\frac{d^2 w_0}{dx_2^2} \\ -\frac{d^2 w_0}{dx_1 dx_2} \end{pmatrix} \quad (59)$$

La déformation globale s'exprimera sous la forme :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_6^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad (60)$$

- Expression des contraintes

Les contraintes au point M appartenant à la couche « c » s'expriment en fonction des déformations de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \hat{Q}_c \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Avec :

\hat{Q}_c est la matrice de rigidité réduite de la couche « c ». Elle est donnée par :

$$\hat{Q}_c = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{26} & \hat{Q}_{66} \end{bmatrix}_c \quad (62)$$

Les termes de la matrice de rigidité réduite sont exprimés dans la base globale en utilisant la matrice de passage (formule 44). On trouve alors :

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \hat{Q}_{12} &= Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \hat{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \hat{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \hat{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \hat{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{12} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (63)$$

Pour un matériau isotrope transverse, comme pour le cas d'un pli unidirectionnel, les constantes Q_{ij} sont exprimées en fonction des propriétés élastiques de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (64)$$

Les contraintes dans la couche c sont exprimées de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{16} \\ \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{26} \\ \dot{Q}_{16} & \dot{Q}_{26} & \dot{Q}_{66} \end{bmatrix}_c \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_6^0 \end{pmatrix} + z \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{16} \\ \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{26} \\ \dot{Q}_{16} & \dot{Q}_{26} & \dot{Q}_{66} \end{bmatrix}_c \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad (65)$$

– **Expression de l'équation constitutive d'une plaque stratifiée mince**

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_6^0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Ou encore, sous la forme simplifiée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ F \end{bmatrix} \quad (67)$$

Avec :

$N_1, N_2,$ et N_6 représentent les résultantes en membrane (N_{xx}, N_{yy} et N_{xy}).

M_1, M_2 et M_6 représentent les moments de flexion et de torsion (M_{xx}, M_{yy} et M_{xy}).

A, B et D sont des matrices dont les termes sont exprimés par :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{c=1}^n (\hat{Q}_{ij})_c e_c \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{c=1}^n (\hat{Q}_{ij})_c (h_c^2 - h_{c-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{c=1}^n (h_c^3 - h_{c-1}^3) (\hat{Q}_{ij})_c.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Avec :

e_c représente l'épaisseur de la couche « c »,

h_c la distance séparant la partie supérieure de la couche « c » du plan moyen comme le montre la figure 24.

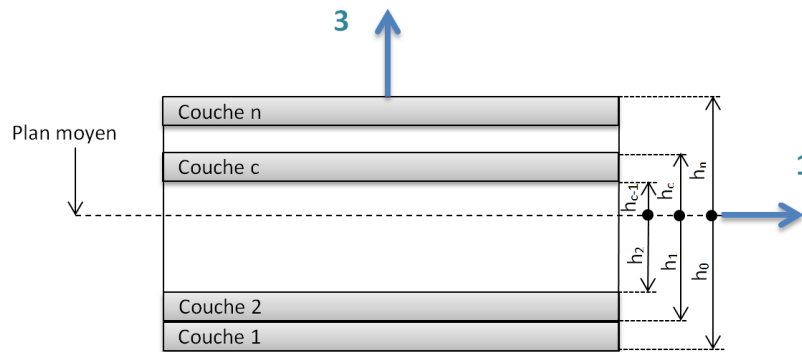


Figure 26 : Eléments d'un stratifié.

V.2.2. Etude de la flexion simple d'un composite stratifié épais (modèle Reissner-Midlin)

Le modèle de Kirchhoff, utilisé pour décrire le comportement en flexion d'un stratifié mince, considère que les sections normales au feuillet moyen (plan moyen) restent normales lors de la déformation ce qui permet de négliger des cisaillements transverses. Cette hypothèse atteindra ses limites quand le stratifié, considéré comme étant une plaque, devient épais. Dans ce cas de figure, la prise en considération des cisaillements transverses devient inévitable ($\epsilon_4 \neq 0, \epsilon_5 \neq 0$). Cette prise en considération des cisaillements transverses est présentée comme étant une extension du modèle Reissner-Midlin (Reissner, 1945)-(Mindlin, 1951).

– **Expression des déplacements**

Comme pour le cas des stratifiés mince, un schéma du premier degré est utilisé pour décrire les déplacements :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= u_0(x_1, x_2) + z\varphi_1(x_1, x_2, t), \\ v(x_1, x_2, x_3) &= v_0(x_1, x_2) + z\varphi_2(x_1, x_2, t), \\ w(x_1, x_2, x_3) &= w_0(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (69)$$

Avec φ_i sont des fonctions de rotation.

– **Expression des déformations**

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du_0}{dx_1} + z \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{dv_0}{dx_2} + z \frac{d\varphi_2}{dx_2}, \\ \varepsilon_3 &= 0, \\ \varepsilon_4 &= \frac{1}{2} \left(\varphi_2 + \frac{dw_0}{dx_2} \right), \\ \varepsilon_5 &= \frac{1}{2} \left(\varphi_1 + \frac{dw_0}{dx_1} \right), \\ \varepsilon_6 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) + z \left(\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Le tenseur des déformations en un point M du stratifié est donnée, en utilisant la notation de Voigt, par :

$$\varepsilon_M = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Les déformations comportent deux champs ;

– **un champ des déformations en membrane-flexion ;**

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx_1} + z \frac{d\varphi_1}{dx_1} \\ \frac{dv_0}{dx_2} + z \frac{d\varphi_2}{dx_2} \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) + z \left(\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (72)$$

- un champ des déformations en cisaillement transverse.

$$\varepsilon_{cis}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\varphi_2 + \frac{dw_0}{dx_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\varphi_1 + \frac{dw_0}{dx_1} \right) \end{pmatrix} \quad (73)$$

Le champ des déformations en membrane est la superposition de :

- des déformations en membrane ;

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx_1} \\ \frac{dv_0}{dx_2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) \end{pmatrix} \quad (74)$$

- des déformations en flexion et torsion ;

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \frac{d\varphi_1}{dx_1} \\ z \frac{d\varphi_2}{dx_2} \\ \frac{1}{2} z \left(\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} \right) \end{pmatrix} \quad (75)$$

On pose :

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} \right) \end{pmatrix} \quad (76)$$

La déformation globale de la membrane s'exprimera sous la forme :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad (77)$$

– **Expression des contraintes**

Les contraintes au point M appartenant à la couche « c » s'expriment en fonction des déformations de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{26} & \hat{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{C}_{44} & \hat{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{C}_{45} & \hat{C}_{55} \end{bmatrix}_c \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_6 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Dans la formule (78) ;

- les coefficients \hat{C}_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche C ;

Avec :

$$\hat{C}_{44} = C_{44}\cos^2\theta + C_{55}\sin^2\theta$$

$$\hat{C}_{45} = (C_{55} - C_{44})\sin\theta\cos\theta$$

$$\hat{C}_{55} = C_{44}\sin^2\theta + C_{55}\cos^2\theta$$

- les coefficients \hat{Q}_{ij} sont les coefficients de la matrice de rigidité réduite de la couche C et ils sont donnés par la formule (63).

Pour rappel, les coefficients de rigidité s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \\ C_{44} &= G_{T\hat{T}} \\ C_{55} &= G_{L\hat{T}} \end{aligned} \quad (79)$$

De la formule (78) on peut constater que les contraintes se décomposent en contraintes en membrane σ_1, σ_2 et σ_6 et en contraintes en cisaillement σ_4 et σ_5 .

La formule (78) peut se présenter sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{16} \\ \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{26} \\ \dot{Q}_{16} & \dot{Q}_{26} & \dot{Q}_{66} \end{bmatrix}_c \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_6^0 \end{pmatrix} + z \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{16} \\ \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{26} \\ \dot{Q}_{16} & \dot{Q}_{26} & \dot{Q}_{66} \end{bmatrix}_c \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Les contraintes de cisaillement de la couche C s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{44} & \dot{C}_{45} \\ \dot{C}_{45} & \dot{C}_{55} \end{bmatrix}_c \begin{pmatrix} 2\varepsilon_4^0 \\ 2\varepsilon_5^0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

– **Expression de l'équation constitutive d'une plaque stratifiée épaisse**

La forme de l'équation constitutive d'un stratifié épais est analogue à celle d'un stratifié mince (formules 66 et 67) avec prise en considération du cisaillement transverse.

L'équation constitutive d'un stratifié épais est donnée par :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \\ Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_6^0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_6 \\ 2\varepsilon_4^0 \\ 2\varepsilon_5^0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Egalement sous la forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ f \\ 2\varepsilon_{cis} \end{bmatrix} \quad (83)$$

Avec :

Avec :

$N = N_1, N_2,$ et N_6 représentent les résultantes en membrane (N_{xx}, N_{yy} et N_{xy}).

$M = M_1, M_2$ et M_6 représentent les moments de flexion et de torsion (M_{xx}, M_{yy} et M_{xy}).

$Q = Q_2$ et Q_1 représentent les résultantes et cisaillement.

A, B, D et F sont des matrices dont les termes sont exprimés par :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{c=1}^n (\hat{Q}_{ij})_c e_c \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{c=1}^n (\hat{Q}_{ij})_c (h_c^2 - h_{c-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{c=1}^n (h_c^3 - h_{c-1}^3) (\hat{Q}_{ij})_c \\
 F_{ij} &= \sum_{c=1}^n (\hat{C}_{ij})_c e_c
 \end{aligned} \tag{84}$$

V.3. Comportement en flexion d'une plaque sandwich

Les composites sandwichs sont des composites structuraux composés d'une âme de faible masse volumique et de deux feuilles comme le montre la figure 27. Le comportement en flexion des plaques sandwichs est en partie semblable à celui des stratifiés épais avec prise en considérations des hypothèses suivantes (Berthelot, 2010) :

- l'épaisseur de l'âme est plus élevée que celles des peaux ;
- les déplacements de l'âme u_a et v_a suivant les directions 1 et 2 sont des fonctions linéaires de la coordonnée 3 (z).
- les déplacements u et v suivant les directions 1 et 2 sont uniformes dans l'épaisseur de la peau ;
- le déplacement w suivant la direction 3 est indépendant de la variable z ce qui implique une négligence de la déformation ε_3 ($\varepsilon_3=0$) ;
- pour l'âme, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_6 = 0$;
- pour la peau, $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$.

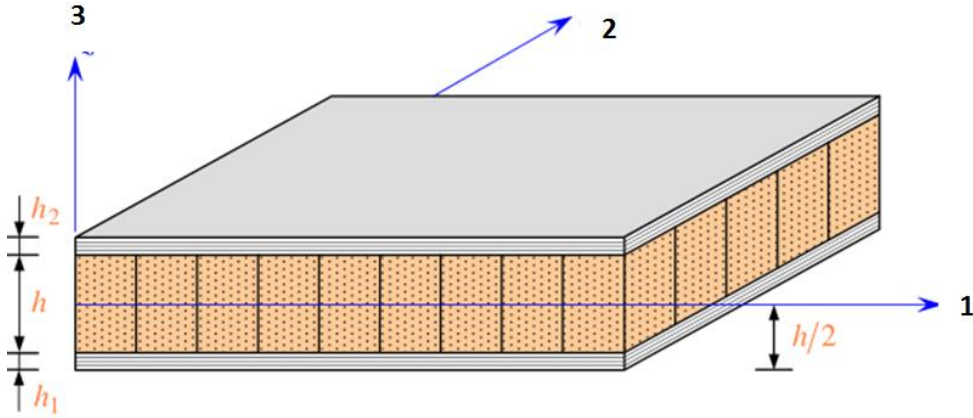


Figure 27 : Eléments d'une plaque sandwich (Berthelot, 2010).

– Expression des déplacements de l'âme

$$\begin{aligned} u_a(x_1, x_2, x_3) &= u_0(x_1, x_2) + z\varphi_1(x_1, x_2, t), \\ v_a(x_1, x_2, x_3) &= v_0(x_1, x_2) + z\varphi_2(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (85)$$

– Expression des déplacements de la peau inférieure

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_0(x_1, x_2) - \frac{h}{2}\varphi_1(x_1, x_2), \\ v_1(x_1, x_2, x_3) &= v_0(x_1, x_2) - \frac{h}{2}\varphi_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (86)$$

– Expression des déplacements de la peau supérieure

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_0(x_1, x_2) + \frac{h}{2}\varphi_1(x_1, x_2), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &= v_0(x_1, x_2) + \frac{h}{2}\varphi_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (87)$$

– Expression des déformations de la peau inférieure

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^1 &= \frac{du_0}{dx_1} - \frac{h}{2} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \\ \varepsilon_2^1 &= \frac{dv_0}{dx_2} - \frac{h}{2} \frac{d\varphi_2}{dx_2}, \\ \varepsilon_3^1 &= 0, \\ \varepsilon_4^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx_2} \right), \\ \varepsilon_5^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx_1} \right), \\ \varepsilon_6^1 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) - \frac{h}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (88)$$

Il est à noter que les déformations ε_4^1 et ε_5^1 sont négligeables. Le champ de déformations se réduit au champ des déformations en membrane que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (89)$$

Avec

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dx_1} \\ \frac{dv_0}{dx_2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) \end{pmatrix} \quad (90)$$

et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} \right) \end{pmatrix} \quad (91)$$

Par analogie, les déformations de la peau supérieure s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (92)$$

– **Expression des déformations de l'âme**

$$\varepsilon_1^a = \frac{du_0}{dx_1} + z \frac{d\varphi_1}{dx_1},$$

$$\varepsilon_2^a = \frac{dv_0}{dx_2} + z \frac{d\varphi_2}{dx_2},$$

$$\varepsilon_3^a = 0,$$

$$\varepsilon_4^a = \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx_2} + \varphi_2 \right), \quad (93)$$

$$\varepsilon_5^a = \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx_1} + \varphi_1 \right),$$

$$\varepsilon_6^a = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} \right) + z \left(\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} \right) \right)$$

Sous une forme simplifiée comportant :

– Les déformations en membrane-flexion :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^a \\ \varepsilon_2^a \\ \varepsilon_6^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (94)$$

– Les déformations en cisaillement transverse :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_4^a \\ \varepsilon_5^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx_2} + \varphi_2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx_1} + \varphi_1 \right) \end{pmatrix} \quad (95)$$

– **Expression des contraintes dans l'âme**

D'après les hypothèses, l'âme ne transmet que les contraintes en cisaillement ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_6 = 0$).

Les contraintes en cisaillement sont données par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_4^a \\ \sigma_5^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \acute{C}_{44}^a & \acute{C}_{45}^a \\ \acute{C}_{45}^a & \acute{C}_{55}^a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2\varepsilon_4^a \\ 2\varepsilon_5^a \end{pmatrix} \quad (96)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \acute{C}_{44}^a &= C_{44}^a \cos^2 \theta + C_{55}^a \sin^2 \theta \\ \acute{C}_{45}^a &= (C_{55}^a - C_{44}^a) \sin \theta \cos \theta \\ \acute{C}_{55}^a &= C_{44}^a \sin^2 \theta + C_{55}^a \cos^2 \theta \\ C_{44}^a &= G_{23}^a \\ C_{55}^a &= G_{13}^a \end{aligned} \quad (97)$$

– **Expression des contraintes dans la peau**

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^{1,2} \\ \sigma_2^{1,2} \\ \sigma_6^{1,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \acute{Q}_{11} & \acute{Q}_{12} & \acute{Q}_{16} \\ \acute{Q}_{12} & \acute{Q}_{22} & \acute{Q}_{26} \\ \acute{Q}_{16} & \acute{Q}_{26} & \acute{Q}_{66} \end{bmatrix}_c \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{1,2} \\ \varepsilon_2^{1,2} \\ 2\varepsilon_6^{1,2} \end{pmatrix} \quad (98)$$

Avec 1,2 indique la peau inférieure et supérieure.

– **Expression de l'équation constitutive d'un composite sandwich**

L'équation constitutive d'un composite sandwich est donnée par :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \\ Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_6^0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_6 \\ 2\varepsilon_4^0 \\ 2\varepsilon_5^0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

Ou encore sous la forme simplifiée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ f \\ 2\varepsilon_{cis} \end{bmatrix} \quad (100)$$

Avec :

$N = N_1, N_2$, et N_6 représentent les résultantes en membrane (N_{xx}, N_{yy} et N_{xy}).

$M = M_1, M_2$ et M_6 représentent les moments de flexion et de torsion (M_{xx}, M_{yy} et M_{xy}).

$Q = Q_2$ et Q_1 représentent les résultantes et cisaillement.

A, B, D et F sont des matrices dont les termes sont exprimés par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2 \\ B_{ij} &= \frac{h}{2}(A_{ij}^2 - A_{ij}^1) \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2 \\ D_{ij} &= \frac{h}{2}(C_{ij}^2 - C_{ij}^1) \\ A_{ij}^1 &= \sum_{\substack{c=1 \\ n_2}}^{n_1} (\hat{Q}_{ij})_c e_c \\ A_{ij}^2 &= \sum_{\substack{c=1 \\ n_1}}^{n_2} (\hat{Q}_{ij})_c e_c \\ C_{ij}^1 &= \sum_{\substack{c=1 \\ n_2}}^{n_1} (\hat{Q}_{ij})_c e_c z_c \\ C_{ij}^2 &= \sum_{\substack{c=1 \\ n_1}}^{n_2} (\hat{Q}_{ij})_c e_c z_c \\ F_{ij} &= h \hat{C}_{ij}^a \end{aligned} \quad (101)$$

V.4. Conclusion et recommandations

Quand le nombre de couches est faible et que les propriétés élastiques sont les mêmes pour chaque couche, le calcul des matrices A, B et D est simple à mener. On peut alors utiliser la théorie des plaques avec le modèle de *Kirchhoff*. Par contre, quand le nombre de couche augmente avec des propriétés mécaniques différentes d'une couche à l'autre, le calcul devient difficile et nécessite une programmation sur Matlab par exemple. Il existe également des calculateurs en ligne qui permettent de calculer les matrices A, B et D . Nous citons à titre d'exemple « efunda calculator »⁷ et « ABD Composites »⁸. Des applications et programmes

⁷ https://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/composites/calc_ufrp_abd_layout.cfm

⁸ <https://abdcomposites.com/>

sont également proposés pour calculer les matrices A , B et D comme par exemple « The Laminator »⁹.

La méthode des éléments finis offre également la possibilité de mener des calculs de structures en composite. Des logiciel éléments finis, comme par exemple Ansys, Abaqus, Comsol et autres, permettent de réaliser des calculs de structures en composites structuraux (stratifiés et panneaux sandwich). Ces logiciels offre la possibilité à l'utilisateur de modéliser les composites sous différentes sollicitations (mécaniques, thermiques, modales...) et même à différents comportements (élastiques, élastoplastiques, viscoplastiques...). L'usage de ces outils numériques est devenu incontournable dans les phases de développement de nouveaux matériaux composite notamment avec les outils d'optimisation dont ils disposent.

⁹ <http://www.thelaminator.net/>

Chapitre VI : Rupture et endommagement des composites

VI.1. Introduction

La nature de la rupture des matériaux composites diffère d'un type de composites à un autre. Il est à rappeler qu'une grande partie des composites de hautes performances est constituée de composites renforcés par des fibres. La présente partie s'intéresse à une présentation des mécanismes d'endommagement des composites fibreux, des moyens de détection des fissures ainsi qu'aux critères de rupture.

L'endommagement par rupture des composites, comme celui des autres classes des matériaux, peut intervenir à différentes phases de la vie : durant l'élaboration et l'assemblage, pendant le stockage et le transport, en service et même au repos. Le phénomène de rupture peut se dérouler sous des sollicitations statiques ou dynamiques comme la fatigue.

Une meilleure connaissance des mécanismes d'endommagement des composites permet de prévenir les ruptures brutales conduisant ainsi à une augmentation de la durée de vie et une amélioration de la fiabilité.

VI.2. Principaux mécanismes d'endommagement des composites stratifiés

La rupture des matériaux composites est généralement précédée par un endommagement microscopique caractérisé par une apparition de microfissures dans la matrice, au niveau des interfaces fibres/matrice, au niveau de l'interface entre les plis formant le stratifié (délaminage) et au niveau des fibres (figure 28). L'endommagement global peut se manifester après une accumulation de ces différents types d'endommagements élémentaires.

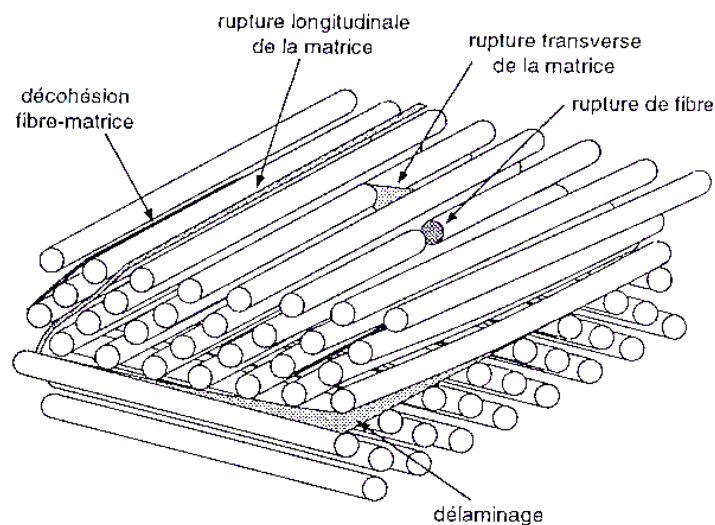


Figure 28 : Mécanismes d'endommagement dans les composites stratifiés (Berthelot, 1992).

VI.2.1. Délaminage des composites stratifiés

Le délaminage est un phénomène de propagation de fissures interfaciales entre les plis formant le stratifié. Le délaminage produit donc un dédoublement du composite dans l'épaisseur. IL est accentué par l'arrivée à l'interface entre-plis des fissures initiées dans la matrice, au niveau de l'interface fibre/matrice et au niveau des fibres (figure 29).

Le délaminage est donc un phénomène à surveiller pour éviter toute rupture brutale. Le contrôle et l'évaluation de ce phénomène peut se faire au laboratoire par des essais mécaniques dédiés et/ou en conditions réelles en employant des techniques de contrôles non destructives.

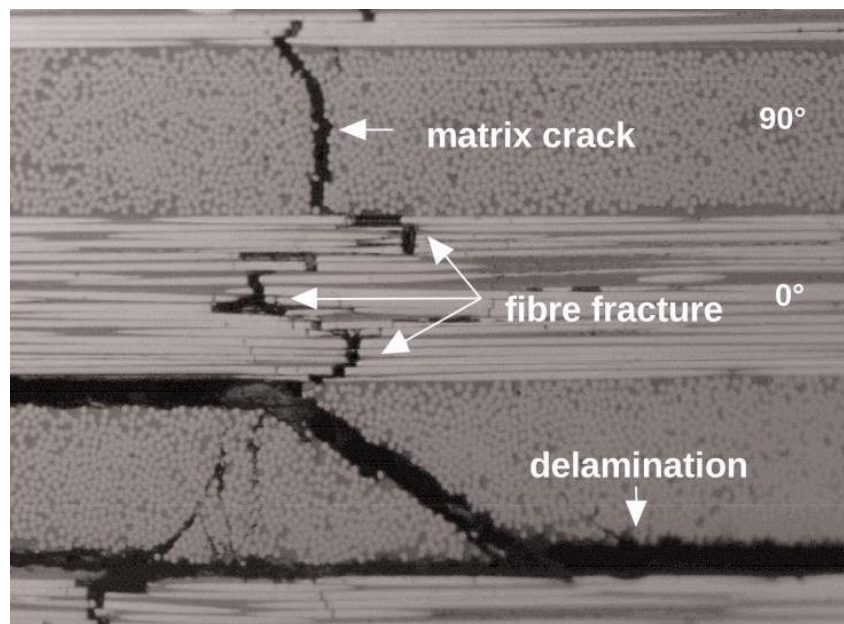


Figure 29 : Endommagement d'un composite stratifié (les différents types de fissuration)
(Davies & Olsson, 2004)

VI.2.2. Contrôle de l'endommagement des composites stratifiés

Plusieurs techniques ont été mises au point pour contrôler les structures composites en mode non destructif (ultrasons, radiographie X, émission acoustique...).

– Contrôle par ultrasons

Cette technique consiste à envoyer des ondes ultrasonores dans la structure composite à contrôler. Lorsque les ondes rencontrent une fissure, il y a réflexion des ondes sous forme d'écho visible sur un oscilloscope. La position et les dimensions de la fissure sont calculables en comparant le temps mis par les ondes pour faire le trajet aller-retour dans la structure.

présentant un défaut avec le temps mis par ces mêmes ondes dans la même structure mais qui ne présente aucun défaut.



Figure 30 : Contrôle par ultrason du fuselage d'un avion¹⁰

– Radiographie X

Cette technique de contrôle non destructif consiste envoyer des rayons X à travers la structure à contrôler et de récupérer l'image transmise sur la face opposée du rayonnement. Les rayons sont partiellement absorbés par les défauts comme les fissures par exemple. Des traitements d'image sont pratiqués par des logiciels permettant ainsi de visualiser les défauts (fissures). La figure 31 présente le principe de contrôle par rayonnement x.

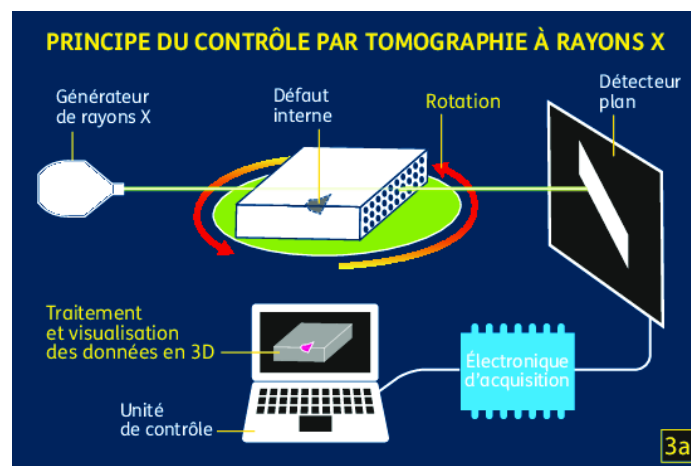


Figure 31 : Principe de contrôle par rayons X¹¹

¹⁰ Image prise du site de fournisseur de solutions de contrôles non destructifs
<https://www.olympus-ims.com/fr/applications/non-destructive-bond-testing-aircraft-composites/>

¹¹ Image internet- libre accès.

– **Emission acoustique**

L'émission acoustique (EA) repose sur le phénomène de création d'ondes élastiques transitoires dues à des micro-déplacements locaux au sein d'un matériau dans un domaine de fréquence compris entre 20 et 1000 kHz. Ces ondes émises par le matériau sont détectées par l'intermédiaire de capteurs puis analysées. Un traitement avancé des images permet de visualiser le défaut rencontré par les ondes (figure 32).

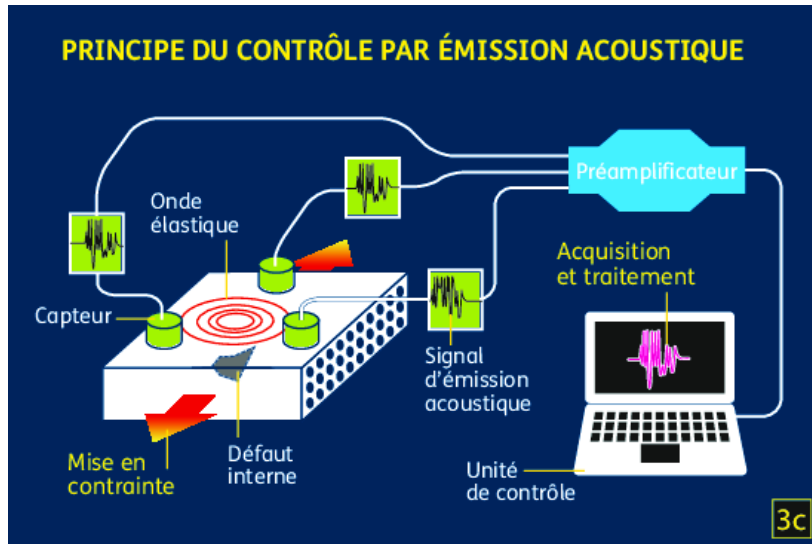


Figure 32 : Principe de contrôle par émission acoustique¹²

VI.2.3. Essais de propagation du délaminage

La propagation du délaminage est étudiée principalement sur des éprouvettes sous formes de barreaux ou de poutres. Les tests normalisés se font principalement en mode I et en mode II. La figure 33 présente les éprouvettes normalisées destinées à mesurer la propagation du délaminage (Bathias Claude et al., 2005).

– **Propagation du délaminage en mode I**

Pour des éprouvettes minces dont l'épaisseur ne dépasse pas quelques millimètres, l'éprouvette est sollicitée à l'aide d'attaches articulées et collées (figure 31.a). Pour des éprouvettes plus épaisses, des trous peuvent être forés dans la largeur de l'éprouvette pour être montée dans une chape (figure 31.b).

– **Propagation du délaminage en mode II**

¹² Image internet-Libre accès

Les essais en mode II se font généralement sur des éprouvettes de flexion 3 points (figure 31.c).

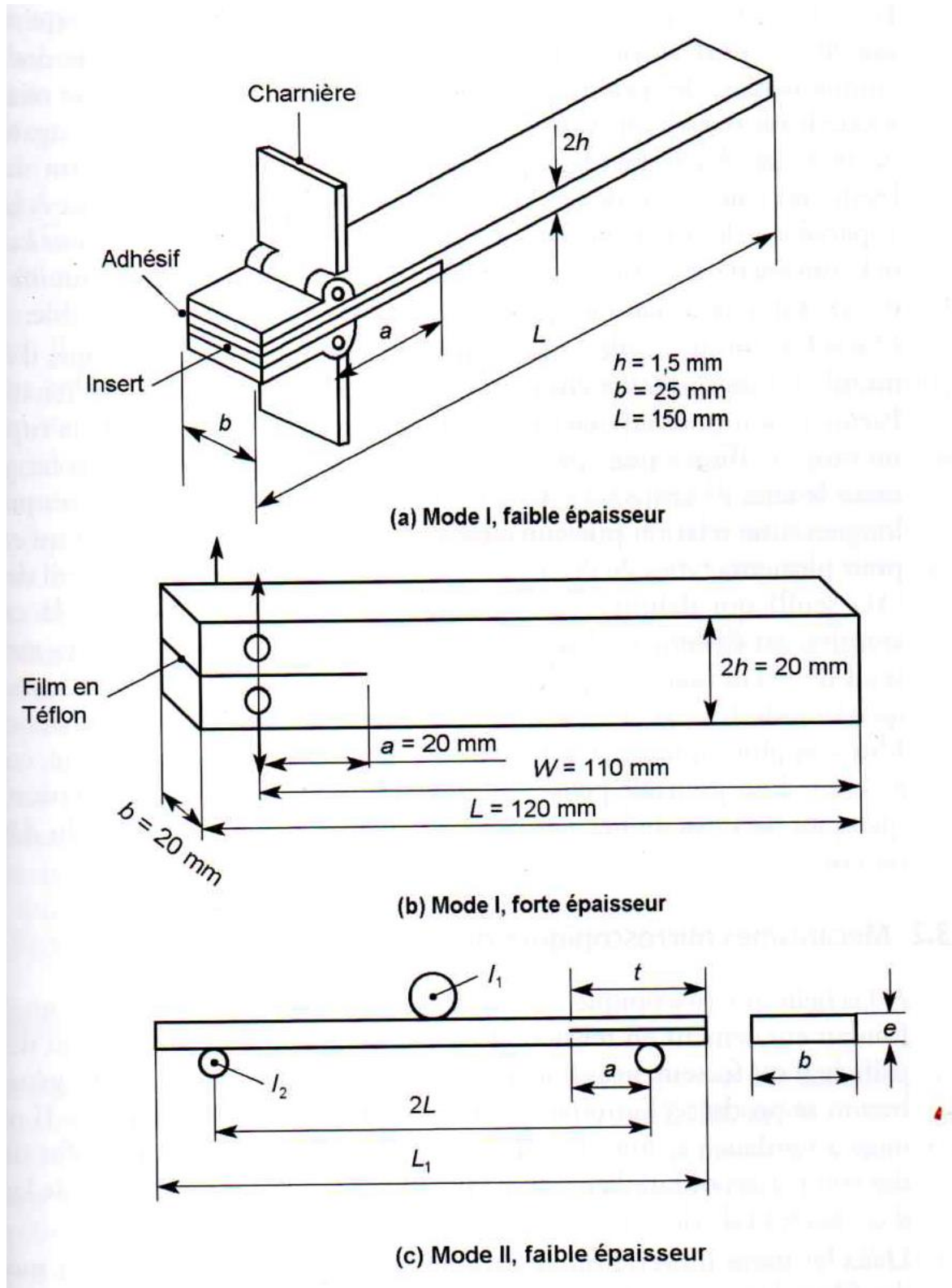


Figure 33 : Eprouvettes de délaminage normalisées (Bathias Claude et al., 2005).

VI.3. Critère de rupture des composites stratifiés

VI.3.1 Energie de rupture

L'énergie de rupture, ou ténacité G_c d'un composite mesure l'énergie absorbée par la création d'une fissure de surface unité.

En mode I l'énergie de rupture peut se calculer par la théorie des poutres. Elle est donnée par :

$$G_{cI} = \frac{F^2}{3BEI} 3((a + a_0)^2 + h^2) \quad (102)$$

Avec :

- G_{cI} l'énergie de rupture en mode I (taux d'énergie dissipée) ;
- F la force appliquée sur l'éprouvette ;
- E le module élastique du composite dans le sens longitudinal ;
- I le moment d'inertie de l'éprouvette ($bh^2/12$) ;
- B la largeur de l'éprouvette ;
- a la longueur de la fissure ;
- a_0 la correction de l'épaisseur (0.6h).

En mode II, l'énergie dissipée est calculée par la formule :

$$G_{cII} = \frac{9F^2 a^2 C}{2b(2L^3 + 3a^3)} \quad (103)$$

Avec :

- G_{cII} l'énergie de rupture en mode II (taux d'énergie dissipée) ;
- F la force appliquée sur l'éprouvette ;
- a, b et L des grandeurs caractéristiques de l'éprouvettes utilisée (figure 33.C) ;
- C c'est la compliance de l'éprouvette.

VI.3.2 Critères de rupture

Plusieurs critères de prédiction de la rupture des matériaux composites ont été proposés dans la littérature. Le lecteur souhaitant avoir une idée générale sur les critères de rupture utilisés pour les matériaux composites peut se référer au document de Chevalier (Chevalier, 1991) et à celui de Berthelot (Berthelot & Cole, 1999) . Pour le présent support de cours, quelques critères de rupture sont présentés de manière succincte.

– Critère de Hill

Ce critère est l'un des premiers critères proposés pour prédire la rupture d'un matériau anisotrope fut celui de Hill (Hill, 1950). Selon Hill, la fracture du composite aura lieu quand l'égalité suivante est vérifiée :

$$F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 + 2L\sigma_{LT}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{TT'}^2 = 1 \quad (104)$$

Avec :

Les σ_i sont les composantes du tenseur des contraintes.

F , G , H , L , M et N sont des paramètres caractéristiques du matériau. Ces paramètres caractéristiques sont déterminables par six essais élémentaires ; trois essais de traction et trois essais de cisaillement.

Pour un chargement en traction (compression) dans la direction L , on a :

$$G + H = \frac{1}{\sigma_{RL}^2} \quad (105)$$

De même, pour un chargement de traction (compression) dans les directions transversales T et T' on a :

$$F + H = \frac{1}{\sigma_{RT}^2} \quad (106)$$

$$F + G = \frac{1}{\sigma_{RT'}^2} \quad (107)$$

Avec ;

σ_{RL} , σ_{RT} et $\sigma_{RT'}$ représentent respectivement la résistance à la traction dans les directions L , T et T' .

Pour trois essais de cisaillement dans les plans (L, T) , (L, T') et (T, T') on a :

$$2L = \frac{1}{\tau_{LT}^2} \quad (108)$$

$$2M = \frac{1}{\tau_{LT'}^2} \quad (109)$$

$$2N = \frac{1}{\tau_{TT'}^2} \quad (110)$$

τ_{ij} représente la résistance au cisaillement dans le plan (i,j).

– Critère de Tsai-Hill

Le critère de Tsai-Hill (Azzi & Tsai, 1965) se base sur celui de Hill en intégrant une simplification dans le cas d'une configuration en contraintes planes. En effet, pour un matériau isotrope transverse, comme c'est le cas d'un composite unidirectionnel, les résistances à la traction dans les directions transversales T et T' sont égales ($\sigma_{RT} = \sigma_{RT'}$). La fracture du composite aura lieu quand l'égalité suivante est vérifiée :

$$\left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{RL}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{RT}}\right)^2 - 2\frac{\sigma_L\sigma_T}{\sigma_{RL}^2} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{\tau_{LT}}\right)^2 = 1 \quad (111)$$

Avec :

Les σ_i sont les composantes du tenseur des contraintes.

σ_{RL} et σ_{RT} représentent respectivement les résistances à la traction dans les directions L et T.

τ_{LT} représente la résistance au cisaillement dans le plan (L, T) .

– Critère de Hoffman

Le critère de Hoffman (Hoffman, 1967) est basé sur le critère de Hill en prenant en considération la différence que peut avoir le comportement d'un matériaux entre la compression et en traction. Pour ce critère, la rupture aura lieu quand l'égalité suivante est vérifiée :

$$C_1(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + C_2(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + C_3(\sigma_L - \sigma_T)^2 + C_4\sigma_L + C_5\sigma_T + C_6\sigma_{T'} + C_7\tau_{TT'}^2 + C_8\tau_{LT'}^2 + C_9\tau_{LT}^2 = 1 \quad (112)$$

Avec :

σ_L , σ_T et $\sigma_{T'}$ sont respectivement les composantes des contraintes normales dans les directions L , T et T' .

τ_{ij} sont les composantes de cisaillement dans les plan (L, T) , (L, T') et (T, T') .

C_i avec $i=1,2,\dots,9$ sont des constantes caractéristiques du matériau calculables par les formules suivantes :

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{RTt}\sigma_{RTc}} + \frac{1}{\sigma_{RT't}\sigma_{RT'c}} - \frac{1}{\sigma_{RLt}\sigma_{RLc}} \right] \quad (113)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{RT't}\sigma_{RT'c}} + \frac{1}{\sigma_{RLt}\sigma_{RLc}} - \frac{1}{\sigma_{RTt}\sigma_{RTc}} \right] \quad (114)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{RLt}\sigma_{RLc}} + \frac{1}{\sigma_{RTt}\sigma_{RTc}} - \frac{1}{\sigma_{RT't}\sigma_{RT'c}} \right] \quad (115)$$

$$C_4 = \frac{1}{\sigma_{RLt}} - \frac{1}{\sigma_{RLc}} ; C_5 = \frac{1}{\sigma_{RTt}} - \frac{1}{\sigma_{RTc}} ; C_6 = \frac{1}{\sigma_{RT't}} - \frac{1}{\sigma_{RT'c}} \quad (116)$$

$$C_7 = \frac{1}{\tau_{RTT'}^2} ; C_8 = \frac{1}{\tau_{RLT'}^2} ; C_9 = \frac{1}{\tau_{RLT}^2} \quad (117)$$

Avec :

σ_{RLt} et σ_{RLc} sont respectivement, la résistance à la rupture en traction et en compression dans la direction L .

σ_{RTt} et σ_{RTc} sont respectivement, la résistance à la rupture en traction et en compression dans la direction T .

$\sigma_{RT't}$ et $\sigma_{RT'c}$ sont respectivement, la résistance à la rupture en traction et en compression dans la direction T' .

τ_{RLT} , $\tau_{RLT'}$ et $\tau_{RTT'}$ sont respectivement les résistances au cisaillement dans les plans (L, T) , (L, T') et (T, T') .

– **Critère de Tsai-Wu**

Le critère de Tsai et Wu (Tsai & Wu, 1971) estime que la rupture aura lieu quand l'équation suivante est vérifiée :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (118)$$

Avec :

σ_i et σ_j sont les composantes du tenseur des contraintes. $i, j=1, \dots, 6$.

Pour rappel :

$$\sigma_1 = \sigma_L; \sigma_2 = \sigma_T; \sigma_3 = \sigma_{T'}; \sigma_4 = \sigma_{TT'}; \sigma_5 = \sigma_{LT'}; \sigma_6 = \sigma_{LT}$$

F sont des constantes caractéristiques à déterminer par des essais élémentaires.

Dans le cas d'une sollicitation en contraintes planes dans le plan (L, T), le critère Tsai-Wu prendra la forme :

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (119)$$

Les constantes F sont à déterminer par des essais élémentaires. Ainsi, pour un essai de traction dans la direction L, on peut écrire :

$$F_1 \sigma_{RLt} + F_{11} \sigma_{RLt}^2 = 1 \quad (120)$$

Avec σ_{RLt} est la résistance à la rupture en traction dans la direction L.

Pour un essai de compression dans la direction L, on peut écrire :

$$F_1 \sigma_{RLc} + F_{11} \sigma_{RLc}^2 = 1 \quad (121)$$

σ_{RLc} est la résistance à la rupture en compression dans la direction L.

Des deux formules, (114) et (115), on peut déterminer F_1 et F_{11} :

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_{RLt}} - \frac{1}{\sigma_{RLc}} \quad (122)$$

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{RLt} \sigma_{RLc}} \quad (123)$$

Par analogie, et en menant un test de traction et un test de compression dans la direction T on trouve :

$$F_2 = \frac{1}{\sigma_{RTt}} - \frac{1}{\sigma_{RTC}} \quad (124)$$

$$F_{22} = \frac{1}{\sigma_{RTt}\sigma_{RTC}} \quad (125)$$

Avec :

σ_{RTt} et σ_{RTC} sont respectivement, la résistance à la rupture en traction et en compression dans la direction T.

Pour un composite unidirectionnel ;

$$F_6 = 0 \text{ et } F_{66} = \frac{1}{\tau_{RLT}^2} \quad (126)$$

Avec : τ_{RLT} est la résistance au cisaillement dans le plan (L, T) .

Le paramètre F_{12} peut être obtenu par un essai avec une sollicitation bi axiale. Un essai avec deux sollicitations $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ permet d'identifier F_{12} comme suit :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{\sigma_{RLt}} - \frac{1}{\sigma_{RLc}} + \frac{1}{\sigma_{RTt}} - \frac{1}{\sigma_{RTC}} \right) \sigma + \left(\frac{1}{\sigma_{RLt}\sigma_{RLc}} + \frac{1}{\sigma_{RTt}\sigma_{RTC}} \right) \sigma^2 \right] \quad (127)$$

IV.4. Conclusion

Cette partie du document, consacrée à l'étude de rupture des composites, offre aux lecteurs des idées générales sur les modes de rupture des composites de hautes performances, les moyens de contrôle des composites fissurés ainsi que les approches de calcul basées sur des critères de rupture proposés dans la littérature. Il est à noter que la rupture des composite constitue un axe de recherche toujours en actualité. Des approches mixtes comportant des essais de fissuration complétés par des simulations numériques par éléments finis sont en pleine développement et permettent d'évaluer la résistance à la fissuration des structures composites sous diverses sollicitations et dans des environnements différents.

Conclusion générale

Le présent support de cours sur les matériaux composite, destiné principalement aux étudiants en Master Génie Mécanique ; option Construction Mécanique est préparé en toute conformité avec le programme préconisé par la tutelle. Les matériaux composites présentent actuellement un enjeu majeur dans le développement de divers secteurs. De ce fait, des nouveautés sur les composites apparaissent régulièrement obligeant chaque acteur dans le domaine « étudiant, chercheur ou porteur de projet » d'actualiser ses connaissances.

Les approches de calcul des matériaux composites, présentées dans le présent document, demeurent limitées par la validité des hypothèses simplificatrices. Les calculs par éléments finis constituent une alternative fiable permettant d'estimer autrement les propriétés mécaniques des matériaux composites ainsi que le comportement mécanique et thermomécaniques sous diverses sollicitations. Il est à noter que rien ne peut remplacer l'expérimentation pour déterminer, de la manière la plus fiable possible, les propriétés mécaniques d'un matériau composite.

Ce manuscrit reste évidemment perfectible, je remercie toute personne me rapportant des commentaires, suggestions ou corrections.

Contenu

Préface.....	2
Introduction Générale.....	3
CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites et leurs applications.....	5
I.1. Introduction.....	6
I.2. Matériaux composites	6
I.2.1. Exemples d'utilisation des matériaux composites	7
I.3. Classification des matériaux composites	7
I.3.1. Composites renforcés par des particules	8
I.3.2. Composites renforcés par des fibres	9
I.3.3. Composites structuraux.....	9
– Les stratifiés	9
– Les panneaux sandwich.....	10
CHAPITRE II : Elaboration des matériaux composites.....	11
II.1. Introduction.....	12
II.2 Les renforts	12
II.2.1 Obtention des renforts fibreux	12
– Les fibres de verre.....	12
– Les fibres de carbone.....	14
– Les fibres aramides.....	15
– Les fibres de Carbone de Silicium (SiC) et les fibres de Bore (B)	16
II.3. Les matrices.....	17
– Les matrices organiques	17
– Les matrices métalliques	18
– Les matrices céramiques.....	18
II.4. Techniques d'élaboration des matériaux composites	19
II.4.1. Moulage sans pression.....	19
– Moulage au contact	19
– Moulage par projection simultanée	20
II.4.2. Moulage sous vide	21
II.4.3. Moulage par compression.....	21

– Moulage par injection de résine	21
– Moulage par compression.....	22
– Moulage par injection.....	22
II.4.4. Moulage en continu	23
II.4.5. Moulage par pultrusion.....	24
II.4.6. Moulage par centrifugation.....	24
II.4.7. Moulage par enroulement filamentaire.....	25
– Enroulement circonférentiel	25
– Enroulement hélicoïdal.....	25
– Enroulement polaire	26
II.4.8. Drapage des pré-imprégnés	27
CHAPITRE III : Propriétés mécaniques des matériaux composites	28
III.1. Introduction	29
III.2. Propriétés mécaniques des composites renforcés par des particules	29
III.3. Propriétés mécaniques des composites renforcés par des fibres	31
III.3.1. Rôle de la longueur des fibres	31
III.3.2. Rôle de l'orientation et de la concentration des fibres	32
– Composites à fibres continues et alignées (Modules élastiques).....	32
– Composites à fibres continues et alignées (Résistance à la traction longitudinale).....	34
– Composites à fibres discontinues et alignées (Modules élastiques).....	34
– Composites à fibres discontinues et alignées (Résistance à la traction longitudinale).....	34
– Composites à fibres discontinues et orientées aléatoirement (module élastique).....	35
III.4. Conclusion.....	35
Chapitre IV : Comportement élastique et thermoélastique d'un composite unidirectionnel.....	36
IV.1. Définition d'un composite unidirectionnel.....	37
IV.2. Comportement élastique d'un composite unidirectionnel.....	37
IV.3. Détermination des propriétés élastiques d'un composite unidirectionnel	41
IV.3.1. Essai de traction dans la direction longitudinale	41
IV.3.2. Essai de traction dans la direction transversale	42
IV.3.3. Essai de traction hors axes	42
IV.4. Comportement thermoélastique d'un composite unidirectionnel.....	44
– Le long de la direction longitudinale.....	44
– Le long de la direction transversale.....	45
IV.5. Conclusion.....	46

Chapitre V : Comportement en flexion simple d'un composite stratifié.....	47
V.1. Introduction à la théorie classique des stratifiés	48
V.2. Présentation de la théorie classique des stratifiés en flexion simple	48
V.2.1. Etude de la flexion simple d'un composite stratifié mince (modèle K)	48
– Expression des déplacements	49
– Expression des déformations.....	50
– Expression des contraintes	51
– Expression de l'équation constitutive d'une plaque stratifiée mince	52
V.2.2. Etude de la flexion simple d'un composite stratifié épais (modèle Reissner-Midlin).....	53
– Expression des déplacements	54
– Expression des déformations.....	54
– Expression des contraintes	56
– Expression de l'équation constitutive d'une plaque stratifiée épaisse.....	57
V.3. Comportement en flexion d'une plaque sandwich.....	58
– Expression des déplacements de l'âme	59
– Expression des déplacements de la peau inférieure.....	59
– Expression des déplacements de la peau supérieure	59
– Expression des déformations de la peau inférieure	59
– Expression des déformations de l'âme	60
– Expression des contraintes dans l'âme	61
– Expression des contraintes dans la peau.....	61
– Expression de l'équation constitutive d'un composite sandwich	61
V.4. Conclusion et recommandations.....	62
VI.1. Introduction	65
VI.2. Principaux mécanismes d'endommagement des composites stratifiés	65
VI.2.1. Délaminage des composites stratifiés.....	66
VI.2.2. Contrôle de l'endommagement des composites stratifiés	66
– Contrôle par ultrasons.....	66
– Radiographie X.....	67
– Emission acoustique	68
VI.2.3. Essais de propagation du délaminage.....	68
VI.3. Critère de rupture des composites stratifiés	70
VI.3.1 Energie de rupture	70
VI.3.2 Critères de rupture.....	71
Dr BELHENINI Soufyane. Email : soufianeing@yahoo.fr	79

– Critère de Hill	71
– Critère de Tsai-Hill.....	72
– Critère de Hoffman.....	72
– Critère de Tsai-Wu	74
Conclusion générale	76
Liste des figures.....	80
Liste des tableaux	81
Références bibliographiques	81

Liste des figures.

Figure 1 : Classification des matériaux composites (William & Callister, 2001).....	8
Figure 2 : Composite à matrice métallique renforcé par dispersion (Hairy, 2018).....	8
Figure 3 : Les différents types des composites renforcés par des fibres.	9
Figure 4 : Principe d'empilement de panneaux pour constituer un stratifié.....	10
Figure 5 : Représentation schématique d'un panneau sandwich.	10
Figure 6 : Procédé d'obtention des fibres de verre par étirage.	13
Figure 7 : Principe d'élaboration des fibres en carbone (Avignon et al., 2010).....	14
Figure 8 : a) Fabrication des fibres de bore (à gauche) et des fibres de SiC (à droite), b) Section d'une fibre de SiC fabriquée par déposition en phase vapeur (Bathias Claude et al., 2005).....	16
Figure 9 : Moulage au contact (Berthelot, 2010).	20
Figure 10 : Principe du moulage par projection simultanée (Berthelot, 2010).	20
Figure 11 : Moulage sous vide (Berthelot, 2010).....	21
Figure 12 : Moulage par injection de résine (Berthelot, 2010).	21
Figure 13 : Moulage par compression (Berthelot, 2010).	22
Figure 14 : Moulage par injection (Berthelot, 2010).....	22
Figure 15 : Moulage en continu (Berthelot, 2010).....	23
Figure 16 : Moulage par pultrusion (Berthelot, 2010).	24
Figure 17 : Moulage par centrifugation (Berthelot, 2010).	24
Figure 18 : Moulage par enroulement circonférentiel (Berthelot, 2010).	25
Figure 19 : Moulage par enroulement hélicoïdal (Berthelot, 2010).....	26
Figure 20 : Moulage par enroulement polaire (Berthelot, 2010).....	26
Figure 21 : Obtention des pièces composites par drapage de pré-imprégnés.....	27
Figure 22 : Variation du module élastique d'un composite renforcé par des particules en fonction de la fraction volumique du renfort (matrice en cuivre)(Doi et al., 1970).....	31
Figure 23 : Présentation des directions caractéristiques d'un composite unidirectionnel.....	32
Figure 24 : Composite unidirectionnel (pli unidirectionnel).	37
Figure 25 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés (Berthelot, 2010)	49
Figure 26 : Eléments d'un stratifié.	53
Figure 27 : Eléments d'une plaque sandwich (Berthelot, 2010).....	59
Figure 28 : Mécanismes d'endommagement dans les composites stratifiés (Berthelot, 1992).....	65

Figure 29 : Endommagement d'un composite stratifié (les différents types de fissuration) (Davies & Olsson, 2004).....	66
Figure 30 : Contrôle par ultrason du fuselage d'un avion.....	67
Figure 31 : Principe de contrôle par rayons X.....	67
Figure 32 : Principe de contrôle par émission acoustique.....	68
Figure 33 : Eprouvettes de délaminage normalisées (Bathias Claude et al., 2005).	69

Liste des tableaux

Tableau 1 : Caractéristiques et applications de divers types de fibres de verre pour matériaux composites (Dupeux, 2008).....	13
Tableau 2 : Caractéristiques et applications de divers types de fibres de carbone pour matériaux composites (Dupeux, 2008).....	14
Tableau 3 : Caractéristiques et applications des fibres aramidées (Dupeux, 2008).....	15
Tableau 4 : Caractéristiques mécaniques des fibres de bore, bore-carbure et carbure de silicium (Berthelot, 2010).	17
Tableau 5 : Principales caractéristiques mécaniques des matrices organiques (Gornet, 2008).....	18
Tableau 6 : Principales caractéristiques des céramiques utilisées comme matrice dans les matériaux composites (Dupeux, 2008).....	19
Tableau 7 : Les valeurs du facteur k en fonction de la direction des fibres (William & Callister, 2001).	35

Références bibliographiques

- Ashby Michael F., Courbon Joël, & Dupeux Michel. (2008). *Matériaux. 2, Microstructures, mise en œuvre et conception / Michael F. Ashby,... David R. H. Jones,... ; Traduit de l'anglais par Joël Courbon,... Michel Dupeux,...* (3e édition [entièrement refondue]). Dunod.
- Avignon, M., Khatib, A., Gaffet, E., Jaurand, M.-C., Marchalddd, D., & Soyez, A. (2010). « *Fabrication et usinage des matériaux composites à base de fibres de carbone—Éléments pour l'évaluation des risques sanitaires des travailleurs en France* »— *Saisine n°2008/002*.
- Azzi, V. D., & Tsai, S. W. (1965). Anisotropic Strength of Composites. *Experimental Mechanics*, 5(9), 283-288. <https://doi.org/doi:10.1007/BF02326292>
- Bailon, J.-P. (2000). *Des matériaux / Jean-Paul Bailon, Jean-Marie Dorlot*.

- Bathias Claude, Wolff Claude, Bouteville Ursula, & Bouteville Alain. (2005). *Matériaux composites / Claude Bathias et coll. ; Sous la direction de Claude Wolff [illustrations intérieures de Alain et Ursula Bouteville-Sanders]*. Dunod l'Usine nouvelle.
- Berthelot, J.-M. (1992). *Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures*. Paris Masson.
- Berthelot, J.-M. (2010). *Mécanique des Matériaux et Structures Composites*. ISMANS.Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés.
- Berthelot, J.-M., & Cole, M. (1999). *Composite Materials : Mechanical Behavior and Structural Analysis*.
- Chevalier, Y. (1991). Critères de rupture : Approche macroscopique. In *Plastiques et composites*.
- Davies, G. A. O., & Olsson, R. (2004). Impact on composite structures. *The Aeronautical Journal*, 108(1089), 541-563. Cambridge Core.
<https://doi.org/10.1017/S0001924000000385>
- Doi, H., Fujiwara, Y., Miyake, K., & Oosawa, Y. (1970). A systematic investigation of elastic moduli of Wc-Co alloys. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 1(5), 1417-1425. <https://doi.org/10.1007/BF02900264>
- Dupeux, M. (2008). *Aide-Mémoire De Science Des Matériaux*. Dunod.
- Gay Daniel. (2007). *Composite materials : Design and applications / Daniel Gay, Suong V. Hoa* (Second edition). CRC Press.
- Gornet, L. (2008). *Généralités sur les matériaux composites*. HAL open science.
<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00470296v1>
- Hairy, P. (2018). *Les composites à matrice métallique pour résister à l'usure*.
<https://metalblog.ctif.com/2018/03/19/les-composites-a-matrice-metallique-pour-resister-a-lusure/>
- Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford.
- Hoffman, O. (1967). The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, 1(2), 200-206. <https://doi.org/10.1177/002199836700100210>
- Mindlin, R. D. (1951). Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1), 336-343.
<https://doi.org/10.1115/1.4010217>

- Reissner, E. (1945). The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12(2), A69-A77.
<https://doi.org/10.1115/1.4009435>
- Tsai, S. W., & Wu, E. M. (1971). A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, 5(1), 58-80.
<https://doi.org/10.1177/002199837100500106>
- William, D., & Callister, J. (2001). *Science et génie des matériaux* (MODULO).

Annexe/Programme de la matière Matériaux Composite préconisé par la tutelle.

Semestre : 3

Unité d'enseignement : UEM 2.1.2

Matière : Matériaux composites

VHS : 45h (cours : 01h30, TD : 1h30)

Crédits : 4

Coefficient : 2

Objectifs de l'enseignement :

Connaître les nouveaux matériaux composites et hétérogènes et leurs applications.

Connaissances préalables recommandées :

Connaissances en sciences des matériaux, en M.M.C. et techniques d'élaborations.

Contenu de la matière :

Chap I Généralités sur les matériaux composites et leurs applications (02 semaines).

Chap II Procédés d'obtention des constituants et de fabrication des composites (02 semaines).

II. 1. obtentions des fibres (verre, carbones, aramides, bore etc...)

II.2. Matrices organiques et polymères.

II. 3. Fabrication des composites.

- Moulage "au contact"
- Moulage par projection
- Enroulement filamentaire
- La pultrusion
- La compression
- L'injection
- Drapage de préimprégné

Chap III Propriétés mécaniques des composites (03 semaines).

-Homogénéisation micromécanique - **Loi des mélanges** -Détermination des propriétés Elastiques d'un pli orthotrope.

Chap IV comportement élastique d'un composite unidirectionnel (04 semaines).

- » Loi de comportement dans le plan d'un pli unidirectionnel
 - Comportement en souplesse
 - Comportement en rigidité
 - Loi de comportement en dehors des axes d'orthotropie
 - Loi de comportement d'un stratifié multicouches

Chap V comportement thermomécanique d'un composite unidirectionnel (01 semaines).

Chap VI comportement en flexion des stratifiés composites (03 semaines).

- » Flexion des plaques minces (Hypothèse de Kirchhoff)
- » Flexion des plaques épaisses avec cisaillement transverse (Hypothèse de Mindlin)
- » Flexion des plaques Sandwich

Chap VII Ruptures et endommagement des composites (02 semaines).

- Endommagement des composites et moyen de contrôle.
- Critères de rupture des composites (critères classiques et interactifs)

Mode d'évaluation : Contrôle Continu : 40%, Examen : 60%.

Références (*Livres et photocopiés, sites internet, etc*).

1. Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures, Jean-Marie Berthelot Hermès - Lavoisier
2. Matériaux et surfaces en tribologie, de Jamal Takadoum , edition hermes 2001.
3. Matériaux composites, Auteur Claude Bathias, dunod 2005
4. Matériaux composites a matrices organiques v15 - Constituants, Procédés, Propriété. Traite Des Matériaux, Auteur(s) : J. Manson, P.-E. Bourban, L. Carlsson, J.-p. Mercier , Éditeur : Presses polytechniques et universitaires romandes