CENTRE UNIVERSITE D'AIN TEMOUCHENT
Institut des Sciences
Département Mathématique et Informatique

COURS D'ANALYSE DE PREMIÈRE ANNÉE

Par

ABDERRAHMANE BENIANI

Année Universitaire **2017-2018**

Préface

Ceci est un avant projet d'un manuel de la partie Analyse du cours de Mathématiques de première année LMD Sciences et techniques. Il peut aussi être utilement utilisé par les étudiants d'autres paliers aussi bien en sciences et sciences et techniques que ceux de Biologie, Sciences économiques ou autre. Il sera composé de six chapitres.

Chaque chapitre comprend des énoncés clairs de définitions de principe et de résultats sous formes de théorèmes ou de propositions, suivies parfois, de corollaires. Les différentes illustrations insérées entre les textes, aideront le lecteur à mieux saisir le concept ou la notion dont il est question.

Les éfforts que vous devrez fournir sont importants : tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaître par coeur les définitions, les théorèmes, les propositions sans oublier de travailler les exemples, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement. Enfin, vous devrez passer autant de temps à pratiquer les mathématiques : il est indispensable de résoudre activement par vous-même des exercices, sans regarder les solutions.

Nous invitons notre aimable lecteur à nous envoyer leurs remarques et critiques afin de pouvoir enrichir ce document : **Email :** a.beniani@yahoo.fr

Dr. Abderrahmane Beniani

Table des matières

Chapitre I

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles

1 Notion de fonction

1.1 Définition

Definition 1.1

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : \mathscr{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle $\mathscr{D}$ le domaine de définition de la fonction f .

Exemple 1.2

La fonction inverse :

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

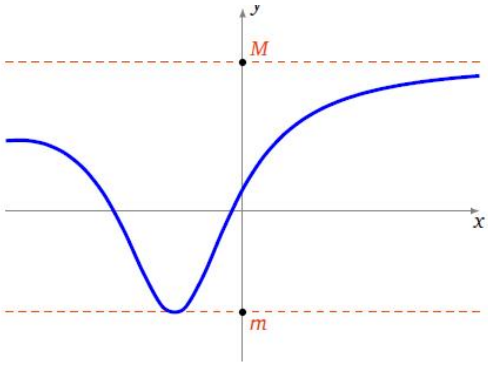
Fonctions majorées, minorées et bornées

Definition 1.3

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est majorée sur $\mathscr{D}$ si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathscr{D}\ f(x) \leq M$.
- f est minorée sur $\mathscr{D}$ si $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathscr{D}\ f(x) \geq m$.
- f est bornée sur $\mathscr{D}$ si f est à la fois majorée et minorée sur $\mathscr{D}$,
  c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in \mathscr{D}\ |f(x)| \leq M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée



Fonctions croissantes, décroissantes

DEFINITION 1.4

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est croissante sur $\mathscr{D}$ si $\forall x, y \in \mathscr{D} \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ si $\forall x, y \in \mathscr{D} \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- f est décroissante sur $\mathscr{D}$ si $\forall x, y \in \mathscr{D} \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est strictement décroissante sur $\mathscr{D}$ si $\forall x, y \in \mathscr{D} \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
- f est monotone (resp. strictement monotone) sur $\mathscr{D}$ si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur $\mathscr{D}$.

EXEMPLE 1.5

- La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est strictement croissante.
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Parité et périodicité

DEFINITION 1.6

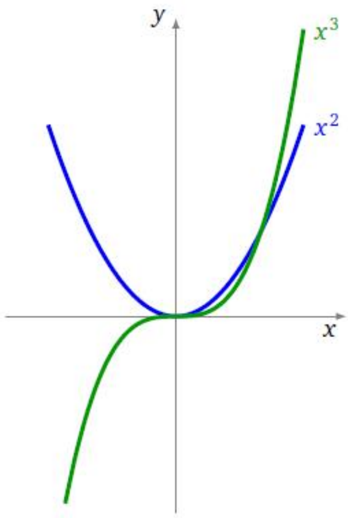
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

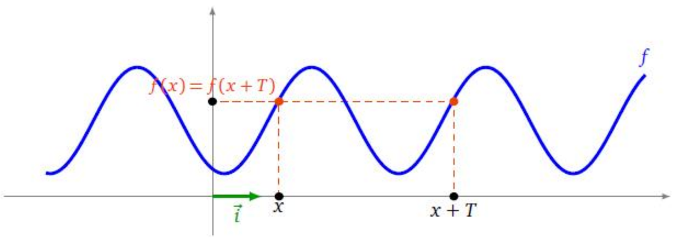
- f est paire si $\forall x \in I \ f(-x) = f(x)$,
- f est impaire si $\forall x \in I \ f(-x) = -f(x)$.

EXEMPLE 1.7

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.



DEFINITION 1.8
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+T) = f(x)$.



EXEMPLE 1.9
Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont 2π-périodiques. La fonction *tangente* est π-périodique.

2 Limites

Définitions

Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I.

DEFINITION 2.1
Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in I \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple 2.2
Calculer la limite de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $x = \frac{\pi}{4}$
Si l'on pose $g(x) = \tan x$, la limite cherchée est celle du taux de variation de g entre 0 et x. Donc

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$

Definition 2.3
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Limite en l'infini

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Definition 2.4
- On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in I \;\; x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in I \;\; x > B \Longrightarrow f(x) > A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 2.5
Calculer la limite de la fonction f définie par $f(x) = x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
En posant $u = \frac{1}{x}$, et $g(u) = \cos u$, on peut écrire

$$f(x) = x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) = -\frac{g(u) - g(0)}{u - 0}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers zero et l'expression precedente tend vers $-g'(0) = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) = -\lim_{u\to 0}\frac{g(u) - g(0)}{u - 0} = -g'(0) = 0.$$

Proposition 2.6
Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition 2.7
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$, alors :

- $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda\cdot f = \lambda l$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f + g) = l + l'$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f \times g) = l \times l'$
- Si $l \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{l}$

De plus, si $\lim\limits_{x\to x_0} f = +\infty$ ou $-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f} = 0$.

Proposition 2.8
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f = l$ et $\lim\limits_{y\to l} g = l'$, alors : $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f = l'$.

Proposition 2.9

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g = l' \in \mathbb{R}$, alors : $l \leq l'$
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes

$$Si f \leq g \leq h ¿et\ si \lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} h = l \in \mathbb{R}, alors \lim_{x\to x_0} g = l \in \mathbb{R}$$

Voici une liste de formes indéterminées

$$\boxed{+\infty - \infty; \quad 0\times\infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^{0}.}$$

3 Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction

Definition 3.1

- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \;\; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemple 3.2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 2, \\ \frac{4}{x^2} & \text{si } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2.

On a $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x^2} = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 1$ donc la fonction f est continue en 2.

Proposition 3.3

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- $f + g$ est continue en x_0,
- $f \times g$ est continue en x_0,
- Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

3.1 Prolongement par continuité

Definition 3.4

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
- On définit alors la fonction $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0, \\ l & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 3.5
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{1\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, comme $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, f est prolongeable par continuité en 1.
Le prolongement par continuité en 1 de la fonction f est la fonction $\widetilde{f}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & si\ x \in \mathbb{R} - \{1\}, \\ 2 & si\ x = 1. \end{cases}$$

4 Dérivée

4.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Definition 4.1
f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Definition 4.2
f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f , elle se note f'.

Exemple 4.3
Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0, \\ 0 & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^-$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_*^+$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} & \text{si } x<0, \\ 0 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

or $\frac{e^{1/x}}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0)=0$.

Exemple 4.4
Étudier la dérivabilité de la fonction $f(x) = \sin x . \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$.
La fonction f est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x=0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ et que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand $x \longrightarrow 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f n'est pas dérivable en 0.

Proposition 4.5
Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

4.2 Opérations de dérivation

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- Somme : La fonction somme $f+g$ est dérivable sur I et on a

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

- Produit : La fonction produit fg est dérivable sur I et on a

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

,

- Quotient : si $g(x) \neq 0$, la fonction f/g est dérivable sur I et on a

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)(x)$$

En particulier

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\left(\frac{g'}{g^2}\right)(x)$$

Dérivée de la composée de deux fonctions

PROPOSITION 4.6
Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

EXEMPLE 4.7
Calculons la dérivée de e^{1+x^2}. Nous avons $g(x) = e^x$ avec $g'(x) = e^x$ et$f(x) = 1 + x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $g \circ f(x) = e^{1+x^2}$ est

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = 2x.g'\left(1 + x^2\right) = 2xe^{1+x^2}.$$

4.3 Dérivée de la fonction réciproque

COROLLAIRE 4.8
Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \longrightarrow J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \longrightarrow I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Exercice Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 2x^2$

1. Monter que : $f :]\frac{4}{3}, +\infty[\longrightarrow] - \frac{32}{27}, +\infty[$ posséde une fonction réciproque.

2. Caculer $(f^{-1})'(-1)$ avec $f(1) = -1$.

4.4 Dérivées de fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Fonction f	Dérivée f'
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u'\cos u$

4.5 Règle de l'Hospital

Corollaire 4.9

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I - \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$Si \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \quad alors \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Exemple 4.10

Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $f(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$,
- Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I - \{x_0\}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2+x-1}.x = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} = 3$$

Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$$

Exercice

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x| + x + 1 & \text{si } x \leq 1, \\ \sqrt{x}(x^2 + 2) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. Etudier la continuité de f en 1.
3. En déduire la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.

Solution

1. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = |x| + x + 1$. Sur cet intervalle, f est la somme de la fonction valeur absolue continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty, 1[$, et de la fonction affine $x \mapsto x + 1$ continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty, 1[$. Par conséquent, f est continue sur $]-\infty, 1[$.
   Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2)$. Sur cet intervalle, f est le produit de la fonction racine carrée, continue sur $\mathbb{R}^+ \supset]1, +\infty[$, par la fonction polynôme continue sur $\mathbb{R} \supset]1, +\infty[$. Par conséquent, f est continue sur $]1, +\infty[$.
2. Etudions la continuité de f en 1
   D'une part, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = |1| + 1 + 1 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sqrt{2}(1^2 + 1) = 3$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 3$. Alors f est continue en 1.
3. Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
   D'après la première question, f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et d'après la question précédente, f est également continue en 1. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Montrons tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Pour tout x non nul, f est le produit de la fonction carré par la composée de la fonction inverse par la fonction sinus d'autre part, toutes continues sur $\mathbb{R}^*$. Par consequent, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrons enfin que f est continue en 0.
   Pour tout $x \neq 0$, $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$. D'où, en multipliant par $x^2 > 0$, $x^2|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2$. Il vient alors que $0 \leq |x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2$, c'est-à-dire $0 \leq |f(x)| \leq x^2$.

Or, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes en 0, il résulte que $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$. Par conséquent, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. On a bien, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, donc la fonction f est continue en 0.

Il résulte que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ 2. $g(x) = (x^2 - 1) \arccos(x^2)$

Solution

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} = |x|\sqrt{1-x}$ est définie et continue sur $]-\infty, 1]$.
   Il est clair que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. Montrons que f est dérivable en 0
   $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h\sqrt{1-h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{1-h} = 1$$
   et
   $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h\sqrt{1-h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\sqrt{1-h} = -1$$
   f n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.
2. $g(x) = (x^2 - 1) \arccos(x^2)$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Par opération f est dérivable sur $]-1, 1[$. Montrons que f est dérivable en 1et-1
   $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} (2+h) \arccos(1+h)^2 = 0$$
   f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

   Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Exercice 4 On considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer a, b et c pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution

f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^-$, car $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^{+\infty}$, de même un polynôme est $\mathcal{C}^\infty$, donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$

- f doit être continue en 0
  C'est le cas si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$, or $\lim_{x \to 0^+} f(x) = c$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$.
  Donc on doit avoir $c = 1$.

- f doit être dérivable sur $\mathbb{R}$

  Avec le même raisonnement que pour la continuité, il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi elle est dérivable en 0.
  C'est le cas si $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
  Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} ax+b = b$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.
  Donc on doit avoir $b = 1$.
- f doit être $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

  C'est le cas si f' est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi f' continue $\Leftrightarrow$ f' continue en 0. c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2ax+b = b = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1$.
  Donc f est $\mathcal{C}^1$.
- f doit être $\mathcal{C}^2$ en 0.

  f est $\mathcal{C}^2$ ssi f'' contonue sur $\mathbb{R}$, ce qui revient ‘a prouver que f'' contonue en 0.

  On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2a = 2a$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f''(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1$.
  On doit donc avoir $a = \frac{1}{2}$.

  Conclusion

  Ainsi, pour que f soit $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, il faut avoir : $a = \frac{1}{2}, b = 1$ et $c = 1$

Chapitre II

Fonctions usuelles

1 Logarithme et exponentielle

1.1 Logarithme

Definition 1.1
On appelle logarithme népérien et on note ln l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

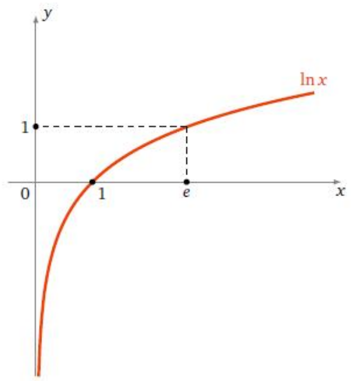
$$\begin{array}{rcl} \ln :]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}. \end{array}$$

Proposition 1.2
Pour tout $a, b > 0$:

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
4. $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$. (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

Proposition 1.3

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
5. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
6. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$



1.2 Exponentielle

Definition 1.4

L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

Proposition 1.5

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

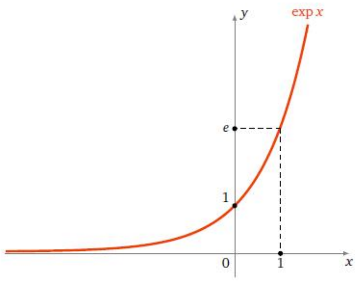
- $\exp 0 = 1 \quad$ et $\quad \exp 1 = e$
- $\exp(x+y) = \exp x \times \exp y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$
- $\exp(nx) = n \exp x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- $\exp(\ln x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_*^+$ et $\ln(\exp x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Proposition 1.6

- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante.
- La fonction exponentielle est dérivable et $(\exp x)' = \exp x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Proposition 1.7

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty,$ 2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$ 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} x \exp x = 0$ 5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$

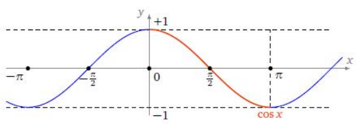


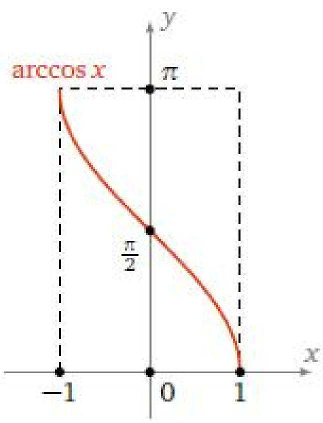
2 Fonctions circulaires inverses

2.1 Arccosinus

La fonction cosinus a une fonction dérivée et strictement négative sur $]0,\pi[$. Elle définit donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arccosinus et est notée arccos :

$$\begin{array}{rcl} \arccos : [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ y & \mapsto & \arccos y. \end{array}$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{array}{ll} \cos(\arccos(x)) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arccos(\cos(x)) = x & \forall x \in [0,\pi] \end{array}$$

Autrement dit :

$$\text{Si } x \in [0, \pi] \quad \cos(x) = y \Longleftrightarrow x = \arccos(y)$$

La dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Preuve 2.1
On a $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned}(\cos(\arccos x))' = x' \quad &\Longrightarrow \quad -\arccos'(x) \times \sin(\arccos(x)) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))}\end{aligned}$$

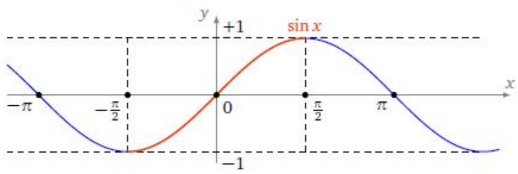
Ainsi : on a l'égalité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. Comme en déduit : $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ Alors

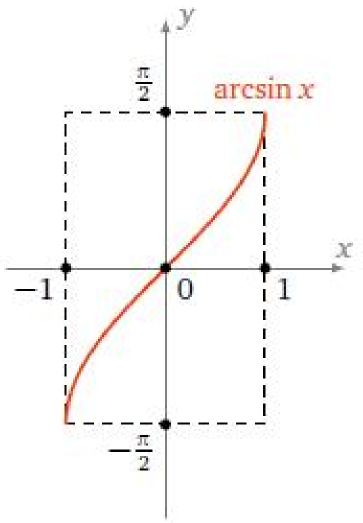
$$\begin{aligned}\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} \quad &\Longrightarrow \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} \\ &\Longrightarrow \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

2.2 Arcsinus

La fonction sinus a une fonction dérivée strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle définit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arcsinus et est notée *arcsin* :

$$\begin{aligned}\arcsin : [-1, 1] \quad &\to \quad [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ y \quad &\mapsto \quad \arcsin y.\end{aligned}$$





$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

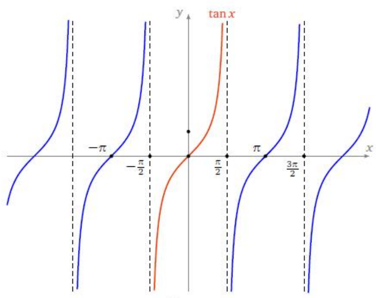
$$\text{Si } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \sin(x) = y \Longleftrightarrow x = \arcsin(y)$$

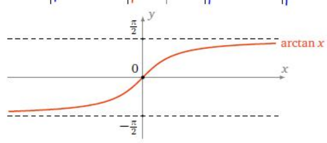
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

2.3 Arctangente

La fonction arctangente a une fonction dérivée et strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle définit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée Arctan :

$$\begin{array}{rrcl} \arctan : & \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & y & \mapsto & \arctan y. \end{array}$$





On a

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) &= x \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

De plus,

- arctan est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2.4 Formulaire de trigonométriques

Propriétés

$$\begin{array}{lll} 1.\ \cos^2 a + \sin^2 a = 1 & 2.\ \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2} & 3.\ \sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2} \\ 4.\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a & 5.\ \sin 2a = 2\sin a \cos a & 6.\ tg2a = \dfrac{2tga}{1-tg^2 a} \end{array}$$

Formules d'addition

$$\begin{array}{ll} 1.\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & 2.\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ 3.\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & 4.\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ 5.\ \mathrm{tg}(a+b) = \dfrac{\mathrm{tg}(a)+\mathrm{tg}(b)}{1-\mathrm{tg}(a)\mathrm{tg}(b)} & 6.\ \mathrm{tg}(a-b) = \dfrac{\mathrm{tg}(a)-\mathrm{tg}(b)}{1-\mathrm{tg}(a)\mathrm{tg}(b)} \end{array}$$

Formules de transformation de produits en sommes et de sommes en produits :

$$\begin{array}{ll} 1.\ \cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] & 2.\ \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ 3.\ \sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] & 4.\ \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ 5.\ \sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right] & 6.\ \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ 7.\ \cos a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right] & 8.\ \sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Definition 3.1

On définit la fonction cosinus hyperbolique ch sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Proposition 3.2

La fonction cosinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle définie donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur son image $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et est notée Argch.

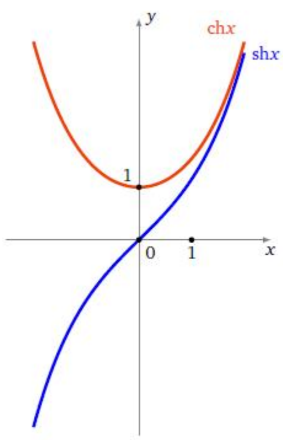
$$\begin{aligned} \mathrm{Argch} : [1, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ y &\mapsto \mathrm{Argch} y \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,(\mathrm{argch}(x)) = x \quad \forall x \in [1, +\infty[\\ \mathrm{argch}\,(\mathrm{ch}(x)) = x \quad \forall x \in [0, +\infty[\end{aligned}$$

De plus,

- argch est continue sur $[1, +\infty[$
- argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et : $\mathrm{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \in]1, +\infty[$



3.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Definition 3.3

On définit la fonction sinus hyperbolique sh sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{sh} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proposition 3.4

La fonction sinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle définie donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et est notée Argsh.

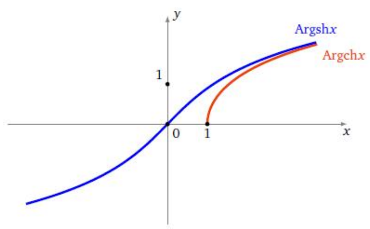
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Argsh} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \mathrm{Argsh} y \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}(x)\right) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Argsh}\left(\mathrm{sh}(x)\right) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

De plus,

- argsh est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\mathrm{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



3.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Definition 3.5

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{th} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}$$

Proposition 3.6
th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\text{th}'x = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition 3.7
La fonction tangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle définie donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]-1,1[$. L'application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et est notée Argth.

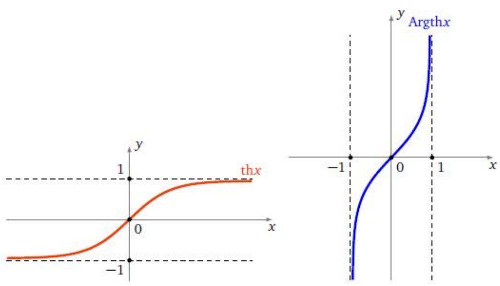
$$\begin{array}{rcl} \text{Argth} :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \text{Argth}\, y \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \text{th}\,(\text{Argth}(x)) = x & \quad \forall x \in]-1,1[\\ \text{Argth}\,(\text{th}(x)) = x & \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

De plus,

- argsh est continue, dérivable sur $]-1,1[$ et : $\text{argth}'x = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



3.4 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

Propriétés

1. $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$	2. $\text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$	3. $\text{coth}x = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$
4. $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$	5. $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$	6. $\text{th}(-x) = -\text{th}(x)$
7. $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$	8. $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$	9. $\text{coth}(-x) = -\text{coth}(x)$

Formules d'addition

1. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$
2. $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$
3. $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$
4. $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$
5. $\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a)$
6. $\mathrm{sh}(2a) = 2.\mathrm{sh}(a).\mathrm{ch}(a)$
7. $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$
8. $\mathrm{th}(a-b) = \dfrac{\mathrm{th}(a)-\mathrm{th}(b)}{1-\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$

Exercice

Exercice 5 Vérifier que

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$$

Solution

1. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in]-1,1[$$

. Donc f est constante sur $[-1,1]$. Or $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ par $g(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. On a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0,$$

donc g est constante sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Sachant $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, on calcule $g(1) = \frac{\pi}{2}$ et $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Alors pour tout $x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, $g(x) = \mathrm{sgn}(x)\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 6 Écrire sous forme d'expression algébrique

1. $\sin(\arccos x)$ 2. $\cos(\arcsin x)$ 3. $\cos(2\arcsin x)$

Solution

1. On utilise l'identité $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$, alors $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. On pose $y = \arccos x$,

ce qui donne $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Avec $\arccos x \in [0,\pi]$, donc $\sin(\arccos x)$ est positif et finalement $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$.

2. De la même manière on trouve $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Avec $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\arcsin x)$ est positif et finalement $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-x^2}$.
3. Puisque
$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$$
On utilise l'identité $\cos(2y) = \sin^2 y - \cos^2 y$, on obtient avec $y = \arcsin x$,
$$\cos(2\arcsin x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x^2 = 1 - 2x^2.$$

Exercice 7 Résoudre l'équation suivante
$$\text{ch}x + 2\text{sh}x = 3$$

Solution
Par définition de ch et sh l'équation s'écrit
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 2\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$$
ou encore
$$\frac{e^{2x}+1}{2} + 2\frac{e^{2x}-1}{2} = 3e^x \Longleftrightarrow 3\left(e^x\right)^2 - 6e^x - 1 = 0$$
En posant $X = e^x > 0$, d'où $X = e^x = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.
L'équation proposée admet une solution unique $\ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
Exercice 8 Soient a et α deux réels.
Résoudre le système suivant :
$$\begin{aligned} \text{ch}x + \text{ch}y &= 2a\text{ch}\alpha \\ \text{sh}x + \text{sh}y &= 2a\text{sh}\alpha \end{aligned}$$

Solution
– Si $a < 1$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
– Si $a = 1$ alors $\mathcal{S} = \{(\alpha, \alpha)\}$.
– Si $a > 1$ alors
$$\mathcal{S} = \{(\ln(a-\sqrt{a^2-1})+\alpha, \ln(a+\sqrt{a^2-1})+\alpha), (\ln(a+\sqrt{a^2-1})+\alpha, \ln(a-\sqrt{a^2-1})+\alpha)\}.$$

Chapitre III

Développements limités

1 Formules de Taylor

1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Theorème 1.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit $a, x \in I$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Exemple 1.2

La fonction $f(x) = \exp x$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I = \mathbb{R}$ pour tout n. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) = \exp x,\ f''(x) = \exp x, \cdots$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp x = \exp a + \exp a.(x-a) + \frac{\exp a}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{\exp a}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{\exp t}{n!}(x-t)^n dt.$$

Si en remplace $a = 0$ alors on retrouve

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

1.2 Formule de Taylor-Young

Theorème 1.3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit $a, x \in I$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

où ε est une fonction définie sur I telle que $\varepsilon(x)_{x \to a} \longrightarrow 0$

Notation. Le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)_{x\to a} \longrightarrow 0$ est souvent abrégé en $\ll$ *petit o* $\gg$ de $(x-a)^n$ et est noté $o(x-a)^n$. Donc $o(x-a)^n$ est une fonction telle que $\lim_{x\to a} \frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0$. Il faut s'habituer à cette notation qui simplifie les écritures, mais il faut toujours garder à l'esprit ce qu'elle signifie.

2 Développements limités au voisinage d'un point

2.1 Définition et existence

DEFINITION 2.1

Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité (DL) au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de a à l'ordre n.
- Le terme $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ est appelé la partie polynomiale du DL.
- Le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé le reste du DL.

2.2 Unicité

PROPOSITION 2.2

Si f admet un DL alors ce DL est unique.

COROLLAIRE 2.3

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

EXEMPLE 2.4

$f(x) = cosx$ est paire et nous verrons que son DL en 0 commence par :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

2.3 DL des fonctions usuelles

à l'origine Les DL suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young

Fonction f	**Développement limité**
$\exp x$	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$
$\mathrm{ch}x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$
$\mathrm{sh}x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$
$\ln(x+1)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)$
$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot1\cdot3\cdots(2n-3)}{2^nn!}x^n+x^n\varepsilon(x)$

3 DL des fonctions en un point quelconque

Proposition 3.1
f admet un DL à l'ordre n en a si et seulement si la fonction $f(x+a)$ admet un DL à l'ordre n en 0.

Plus précésiment, on pose $h=x-a$, si $a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n$ est le DL de f en 0, alors $a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n$ est le DL de f en a.

Exemple 3.2
Calculons le DL de la fonction $f(x)=\exp x$ en 1.
On pose $h=x-1$. Si x est proche de 1 alors h est proche de 0. Nous allons nous ramener à un DL de $\exp h$ en $h=0$. On note $e=exp1$.

$$\begin{aligned}\exp x &= \exp(1+x-1)=\exp 1\cdot\exp(x-1)=e\exp h\\ &= e\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}+h^n\varepsilon(h)\right)\\ &= e\left(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}+(x-1)^n\varepsilon(x-1)\right)\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to1}\varepsilon(x-1)=0$.

Exemple 3.3
Calculons le DL de la fonction $f(x)=\cos x$ en $\frac{\pi}{2}$.
On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ on se ramène au DL de $\sin h$ quand

$h = x - \frac{\pi}{2} \to 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin h \\
&= -\left(h - \tfrac{h^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} + h^{2n+1}\varepsilon(h)\right) \\
&= -\left(\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + h^{2n+1}\varepsilon\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

4 Opérations sur les développements limités

4.1 Somme et produit

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) \quad g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_2(x).$$

Proposition 4.1

- $f + g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0 + a_0) + (c_1 + a_1)x + \cdots + (c_n + a_n)x^n + x^n\varepsilon(x)$$

- $f \times g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = T_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ où $T_n(x)$ est le polynôme

$$T_n(x) = (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \times (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$$

  On conserve seulement les monômes de degré $\leq n$.

Exemple 4.2

Calculer le DL de $\frac{1}{1-x} - e^x$ en 0 à l'ordre 3. On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

Exemple 4.3
Calculons le DL de la fonction $f(x) = \cos x . \sin x$ à l'ordre 5 au point 0. On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_1(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon_2(x).$$

On calcule le produit

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) . \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right),$$

en ne gardant que les monômes de degré ≤ 5. Donc on a

$$f(x) = \cos x . \sin x = x - \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right) x^5\varepsilon(x)$$

Exemple 4.4
Calculer le DL de $\cos x \times \sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2. On sait que

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{16}x^4 + o(x^2) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{8}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

4.2 Composition

On écrit encore :

$$\begin{aligned} f(x) = C(x) + x^n\varepsilon_1(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) \\ g(x) = A(x) + x^n\varepsilon_2(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

Proposition 4.5
Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $a_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme à l'ordre n de la composition $C(A(x))$.

Exemple 4.6
Calculer le DL de $\exp(\sin x)$ en 0 à l'ordre 4.
On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(u^4)$. u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut bien écrire que

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

Mais,

$$\begin{array}{ll} u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), & u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \\ u^3 = x^3 + o(x^4), & u^4 = x^4 + o(x^4). \end{array}$$

En remplaçant, on trouve

$$\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

4.3 Division

Voici comment calculer le DL d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) \quad g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

Nous allons utiliser le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

1. Si $a_0 = 1$ on pose $u = a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.
2. Si $a_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} x} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^n + \frac{x^n \varepsilon_2(x)}{a_0}$$

3. Si $a_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Exemple 4.7
Calculer le DL de $\tan x$ en 0 à l'ordre 4.
On commence par calculer le DL de $\frac{1}{\cos x}$. Pour cela, On remarque que

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1+u}$$

avec

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et} \quad u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^3 + o(u^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\tan x &= \sin x \times \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).
\end{aligned}$$

4.4 Intégration

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dont le DL en $a \in I$ à l'ordre n est

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

Theorème 4.8
Notons F une primitive de f . Alors F admet un DL en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + (x-a)^{n+1}\eta(x).$$

où $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$.

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(a)$ près

Exemple 4.9
Calcul du DL de $\arctan x$
On sait que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $F(x) = \arctan x$, on écrit

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Et comme $\arctan(0) = 0$ alors

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Exemple 4.10
Calcul du DL de $\arccos x$
On sait que $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En posant $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $F(x) = \arccos x$, on commence par écrire que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Posons $u = x^2 + x^4 + o(x^4)$ et $u^2 = x^4 + o(x^4)$. On déduit que

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

Donc

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

On intègre ce développement limité et comme $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

4.5 Développement limité en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \cdots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $\varepsilon(\frac{1}{x})$ tend vers 0 quand $x \longrightarrow +\infty$.

Exemple 4.11

$$f(x) = e^{2+\frac{1}{x}} = e^2.e^{\frac{1}{x}} = e^2.\left(1 + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} + \cdots + \frac{1}{n!x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})\right)$$

où $\varepsilon(\frac{1}{x})$ tend vers 0 quand $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice

Exercice 9 Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$ à l'ordre 2.

2. $g(x) = (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.
3. $h(x) = \frac{\sinh x - x}{x^3}$ à l'ordre 6.
4. $i(x) = (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 3.

Solution

1. $$\begin{aligned} f(x) = e^x(1+x)^{-3} &= \Big(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) . \Big(1 - 3x + \tfrac{(-3)(-4)}{2}x^2 + o(x^2)\Big) \\ &= \Big(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) . (1 - 3x + 6x^2 + o(x^2)) \\ &= 1 - 2x + \tfrac{7}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

2. $g(x) = (\ln(1+x))^2$ Il s'agit juste de multiplier le DL de $\ln(1+x)$ par lui-même. Tout d'abord
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} g(x) = \ln(1+x) \times \ln(1+x) &= \Big(x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) . \Big(x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) \\ &= x^2 - x^3 + \tfrac{11}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

3. Pour le DL de $h(x) = \frac{\sinh x - x}{x^3}$ on commence par faire un DL du numérateur. Tout d'abord
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9)$$
alors
$$\sinh x - x = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9)$$
Il ne reste plus qu'à diviser par x^3
$$h(x) = \frac{\sinh x - x}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + o(x^6).$$

4. Pour le DL de $i(x) = (\cos x)^{\sin x}$ on exprime i de la façon suivante :
$$i(x) = \exp(\sin(x)\ln(\cos(x)))$$
Or
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Donc

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$\sin(x)\ln(\cos(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right).\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2!} + o(x^3)$$

D'où

$$i(x) = \exp\left(-\frac{x^3}{2!} + o(x^3)\right)$$

et comme $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ Ainsi

$$i(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Exercice 10

1. Ecrire le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $\dfrac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

Solution

1. Le DL de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 3 est

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+X} = \frac{1}{2}\left(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)\right).
\end{aligned}$$

avec

$$X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3), \quad X^2 = X \cdot X = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \text{ et } X^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

Il ne reste plus qu'à rassembler :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2}\left(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) + o(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 11 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan(x \arctan +1)$$

1. Calculer le developpement limité à l'ordre 3 de la fonction derivée f' au voisinage de 0.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.

Solution

1.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{1}{1+(1+x)^2} = \tfrac{1}{2+2x+x^2} = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}} \\
&= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{1+X} = \tfrac{1}{2}\left(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)\right)
\end{aligned}$$

Donc en posant $X = x + \frac{x^2}{2}$, $X^2 = x^2 + x^3$ et ensuite $X^3 = x^3$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{1}{2}\left(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(1 - \left(x + \tfrac{x^2}{2}\right) + (x^2 + x^3) - x^3 + o(x^3)\right) \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{4} + o(x^3).
\end{aligned}$$

2. On en déduit le développement de f à l'ordre 4 en déterminant une primitive de f'

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^3}{12} + o(x^4) \\
&= \arctan(1) + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^3}{12} + o(x^4) \\
&= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^3}{12} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Exercice 12

1. Déterminer le développement limité en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 4 de $f(x) = \cos(x)$.
2. Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solution

1. On applique la formule de Taylor au point $x = \frac{\pi}{3}$

$$f(x) = f(\frac{\pi}{3})+f'(\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})+\frac{f''(\frac{\pi}{3})}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2+\frac{f^{(3)}(\frac{\pi}{3})}{3!}(x-\frac{\pi}{3})^3+\frac{f^{(4)}(\frac{\pi}{3})}{4!}(x-\frac{\pi}{3})^4+o(x-\frac{\pi}{3})^4.$$

Comme $f(x) = \cos(x)$ alors $f'(x) = -\sin(x)$ et donc $f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ensuite on calcule $f''(x), f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.

On trouve le DL de $f(x) = \cos(x)$ au voisinage de $x = \frac{\pi}{3}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \frac{\pi}{3})^3 + \frac{1}{48}(x - \frac{\pi}{3})^4 + o(x - \frac{\pi}{3})^4.$$

2. On applique la formule de Taylor au point $x = 1$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + o(x-1)^3.$$

Comme $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ et donc $f'(1) = \frac{1}{2}$. Ensuite on calcule $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

On trouve le DL de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x = 1$:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o(x-1)^3.$$

Chapitre IV

Primitives et Intégrales

1 Primitives des fonctions

Definition 1.1
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b]$.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I et on note

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Theorème 1.2
Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Remarque 1.3
La valeur de $F(b) - F(a)$ ne dépend donc pas du choix d'une primitive de f. Si on change de primitive, le résultat ne change pas.

Exemple 1.4
Soit $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Alors $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^4}{4}$ est une primitive de f.

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Relation de Chasles

Proposition 2.1
Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$. Et on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.}$$

2.2 Positivité de l'intégrale

Proposition 2.2

Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.

$$\text{Si } f \leq g \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

En particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\text{Si } f \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

2.3 Linéarité de l'intégrale

Proposition 2.3

Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.

1. $f+g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. Pour tous réels λ, μ

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

3. $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ mais en général

$$\int_a^b (fg)(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

4. $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

2.4 Intégration par parties

Theorème 2.4

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment dérivables. Alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Preuve 2.5
La dérivation du produit s 'écrit

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

donc

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exemple 2.6
Calculer une primitive de $\displaystyle\int xe^x dx$
Considérons l'intégration par parties avec $u = x$ et $v' = e^x$. On a donc $u' = 1$ et $v = e^x$. Alors

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c\end{aligned}$$

Exemple 2.7
Calculer une primitive de $\displaystyle\int \ln(x^2+2)dx$
Considérons l'intégration par parties avec $u = \ln(x^2+2)$ et $v' = 1$. On a donc $u' = \frac{2x}{x^2+2}$ et $v = x$. Alors

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2+2)dx &= x\ln(x^2+2) - \int \frac{2x^2}{x^2+2}dx \\ &= x\ln(x^2+2) - \int \left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)dx \\ &= x\ln(x^2+2) - \int 2dx + \int \frac{4}{x^2+(\sqrt{2})^2}dx \\ &= x\ln(x^2+2) - 2x + 2\sqrt{2}\arctan\tfrac{x}{\sqrt{2}} + c.\end{aligned}$$

Exemple 2.8
Calculer une primitive $H = \displaystyle\int e^x \cos x dx$

Regardons l'intégration par parties avec $u = e^x$ et $v' = \cos x$. Alors $u' = e^x$ et $v = \sin x$. Donc

$$H = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Si l'on note $J = \int e^x \sin x dx$, alors on a obtenu

$$H = e^x \sin x - J \tag{IV.1}$$

Pour calculer J on refait une deuxième intégration par parties avec $u = e^x$ et $v' = sinx$. Ce qui donne

$$J = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x dx = -e^x \cos x + H$$

on remplace J par la formule obtenue dans l'équation (IV.1).

$$H = e^x \sin x - (-e^x \cos x + H)$$

D'òu

$$2H = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Donc

$$H = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right)$$

2.5 Changement de variable

Theorème 2.9

Soit $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et strictement monotone. Supposons que g vérifie $g[c, d] = [a, b]$. Pour tout fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Preuve 2.10

Si F est une primitive de f alors $F(g(t))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$. Alors

$$F(g(t)) = \int (F(g(t)))'dt = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

Si g est croissante, c'est -à-dire $g' > 0$, alors

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t))|_c^d = F(g(d)) - F(g(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Si g est décroissante, c'est-à-dire $g' < 0$ soit que $-g' > 0$, d'aprés ce qui précède on a

$$\int f(g(t)) \cdot (-g'(t))dt = -F(g(t))|_c^d = F(g(d)) - F(g(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple 2.11
Calculer une primitive de $\int \frac{1}{3+e^{-x}}dx$. Soit le changement de variable $u = e^x \Rightarrow x = \ln u$ et $du = e^x dx$,

$$\int \frac{1}{3+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1}du = \frac{1}{3}\ln|3u+1| + c = \frac{1}{3}\ln(3e^x+1) + c$$

Exemple 2.12
Calculer une primitive de $\int (x+2)\sqrt{x+1}$. En posant le changement de variable
$u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1$ et $2udu = dx$ on écrit :

$$\begin{aligned}\int (x+2)\sqrt{x+1}dx &= \int \left(u^2+1\right) \times u \times 2udu \\ &= \int \left(2u^4+2u^2\right) du \\ &= \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + c \\ &= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + c\end{aligned}$$

2.6 Formulaire de primitives usuelles

On connaît déjà un formulaire de dérivées usuelles. On obtient un formulaire de primitives par lecture inverse :

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle I
k (constante)	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ et $n \geq 1$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $n > 1$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x+c$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}x+c$	$]1,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{argsh}x+c$	$\mathbb{R}$

Enfin, la formule donnant la dérivée d'une fonction composée fournit un certain nombre de formules de dérivation. Par lecture inverse, on obtient un formulaire de primitives.

Fonction f	**Fonction primitive F**	**Intervalle I**
$u'.u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+c$	$u\neq 0$
$u'e^u$	e^u+c	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|+c$	$u\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$u>0$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2+k^2}$	$\frac{1}{k}\arctan\frac{u}{k}+c$	
$\frac{u'}{\sqrt{k^2-u^2}}$	$\arcsin\frac{u}{k}+c$	
$\frac{u'}{\sqrt{u^2+k^2}}$	$\mathrm{argsh}\frac{u}{k}+c$	
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-k^2}}$	$\mathrm{argch}\frac{u}{k}+c$	

3 Intégration des fonctions rationnelles

3.1 Décomposition en éléments simples

On appelle fonction ou fraction rationnelle le quotient de deux polynômes algébriques :

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \text{ où } \begin{cases} P_m(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, \ b_m \neq 0, m \in \mathbb{N}^* \\ Q_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \ a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1er cas : si $degP(x) \geq degQ$ $(m \geq n)$, on effectue la division euclidienne

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

où N est un polynôme de degré $n - m$ et R un polynôme de degré au plus $n - 1$.
On en déduit que

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int N(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q_n(x)}dx$$

2ème cas : si $degP(x) < degQ$ $(m < n)$ et si $Q_n(x)$ possède k racines réelles a_k chacune de multiplicité m_k, alors $Q(x)$ s'écrit

$$Q(x) = c(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_k)^{m_k}$$

et $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se décompose en fractions simples sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x - a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{x - a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x - a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(x - a_2)^{m_2}} \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_{k,1}}{x - a_k} + \frac{A_{k,2}}{(x - a_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(x - a_k)^{m_k}} \end{aligned}$$

où les $A_{i,j}$ sont des constantes.

Exemple 3.1

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 1}{x + 2} = x - 9 + \frac{19}{x + 2}$$

3.2 Intégration d'éléments simples

D'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad ou \quad \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$

Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$

1. Si $k=1$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma}{x-x_0} = \gamma \ln|x-x_0| + c \; (x \neq x_0)$
2. Si $k \geq 2$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma}{(x-x_0)^k} = \frac{-\gamma}{(k-1)(x-x_0)^{k-1}}$

Intégration de l'élment simple $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$

On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

1. Si $k=1$ calcul de $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| = \ln|ax^2+bx+c| + c$
2. Si $k \geq 2$ alors
   $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}dx = \frac{-1}{(k-1)u(x)^{k-1}} = \frac{-1}{(k-1)(ax^2+bx+c)^{k-1}}$
3. Si $k=1$ calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$. On écrit le trinome sous forme canonique
   $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Exemple 3.2

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \arctan(x+2) + c$$

Exemple 3.3

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx &= \int \frac{1}{4}\frac{4x+4}{2x^2+x+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x^2+x+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2\left[(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}\right]}dx \\
&= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| + \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4}) + c
\end{aligned}$$

4 Intégration des fonctions irrationnelles

Intégration de la forme $I = \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

1. Si $a = 0$, le changement de variable $u = bx + c \Longrightarrow du = bdx$. On obtient

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{b}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{b}\sqrt{u} + c = \frac{2}{b}(bx+c).$$

2. Si $a \neq 0$, on écrit le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Exemple 4.1

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \arg\ \mathrm{ch}\frac{x}{2} \quad \text{si } x > 2$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \arg\ \mathrm{sh}\frac{x}{2}$

Exemple 4.2

Calculer une primitive de $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+48}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+48}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+6)^2+12}} = argsh\left(\frac{x+6}{2\sqrt{3}}\right) + c$$

Exemple 4.3

Calculer une primitive de $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}} \\ &= \mathrm{argch}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

5 Intégrales trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\displaystyle\int P(\cos x, \sin x)dx$ ou $\displaystyle\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant àintégrer une fraction rationnelle.

Il existe deux méthodes :

– les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours
– le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Les règles de Bioche On note $\omega(x) = f(x)dx$. On a alors
$\omega(-x) = f(-x)d(-x) = -f(-x)dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x)d(\pi - x) = -f(\pi - x)dx$.
– Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
– Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
– Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple 5.1
Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}dx$.
On note $\omega(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}dx$. Comme $\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)}d(\pi - x) = \frac{-\cos x}{2-\cos^2 x}d(-x) = \omega(x)$ alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x \Rightarrow du = \cos dx$. Ainsi :

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{2 - (1 - \sin^2 x)}dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + c = \arctan(\sin x) + c$$

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\text{Avec} \quad t = \tan \frac{x}{2} \quad \text{On a} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}dt.$$

Exemple 5.2
Calcul de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin x}$
On a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}dt$.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| = \ln|\tan \frac{x}{2}| + c$$

Exemple 5.3
Calcul de l'intégrale $\int \frac{dx}{\cos x}$
On a $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}dt$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= 2\int \frac{1}{1 - t^2}dt \\
&= 2\int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1 - t} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + t}\right) dt \\
&= -\ln|1 - t| + \ln|1 + t| \\
&= -\ln|1 - \tan \tfrac{x}{2}| + \ln|1 + \tan \tfrac{x}{2}| + c
\end{aligned}$$

6 Intégration des fonctions hyperboliques

Exemple 6.1
Calcul de la primitive $\int \mathrm{ch}^3 x dx$

$$\begin{aligned} I = \int \mathrm{ch}^3 x dx &= \int \mathrm{ch}^2 x \mathrm{ch} x dx \\ &= \int (1+\mathrm{sh}^2 x)\mathrm{ch} x dx \end{aligned}$$

Posons $u = \mathrm{sh}x \Longrightarrow du = \mathrm{ch}x dx$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int (1+u^2)du = u + \frac{u^3}{3} + c \\ &= \mathrm{sh}x + \tfrac{\mathrm{sh}^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

Exemple 6.2
Calcul de la primitive $\int \mathrm{sh}x dx$

$$\int \mathrm{sh}x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + c = \mathrm{ch}x + c$$

Intégration de la forme $I = \int F(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)\, dx$

Méthode générale

Posons $t = \mathrm{th}\frac{x}{2} \Longrightarrow dx = \frac{2dt}{1-t^2}$ sachant que $\mathrm{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\quad \mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$,

Exemple 6.3
Calculer une primitive de $\int \frac{1}{\mathrm{ch}x} dx$ Posons $t = \mathrm{th}\frac{x}{2} \Longrightarrow dx = \frac{2dt}{1-t^2}$ et $\mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mathrm{ch}x} dx &= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \times \frac{2dt}{1-t^2} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2\arctan t + c = 2\arctan\left(\mathrm{th}\tfrac{x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

Exercice

Exercice 13 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$ 2. $f(x) = \frac{3x+2}{(x-2)(3x+1)}$ 3. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \frac{3}{x^2+x+1}$ 5. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x+1}$

Solution

1. Par la dévition euclidienne, on a

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2} = x - 2 + \frac{5}{x+2}$$

Et finalement :

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2+1}{x+2}dx = \int (x-2)dx + \int \frac{5}{x+2}dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5\ln|x+2| + c$$

2. Commençons par décomposer la fraction en éléments simples

$$f(x) = \frac{3x+2}{(x-2)(3x+1)} = \frac{1}{7}\left(\frac{8}{x-2} - \frac{3}{3x+1}\right)$$

D'où

$$\int \frac{3x+2}{(x-2)(3x+1)}dx = \frac{1}{7}\int \left(\frac{8}{x-2} - \frac{3}{3x+1}\right)dx = \frac{8}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{7}\ln|3x+1| + c$$

3. On remarque d'abord que

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1} = \frac{3x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

En effet,

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) \quad \text{et} \int \frac{3x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$$

Donc

$$\int f(x)dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + c$$

4. Le dénominateur $u = x^2 + x + 1$ est irréductible. On cherche une primitive de la forme

$\frac{1}{k}\arctan\frac{v}{k}$ en utilisant la formule $\frac{1}{k}\arctan\frac{v}{k}$. On trouve

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{x^2+x+1}dx &= 3\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \tfrac{2.3}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c \\
&= 2\sqrt{3}\arctan\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c
\end{aligned}$$

5. Le dénominateur $u=x^2+x+1$ est irréductible. On a

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+x+1}=\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{x^2+x+1}$$

Chacune de ces fractions s'intègre, la première est du type $\frac{u'}{u}$ dont une primitive sera $\ln|u|$, la deuxième sera du type $\frac{v'}{v^2+k^2}$ dont une primitive est $\frac{1}{k}\arctan\frac{v}{k}$.
En détails cela donne :

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int \frac{2}{x^2+x+1}dx \\
&= \ln|x^2+x+1|+2\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \ln|x^2+x+1|+2\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx \quad \text{En posant } v=x+\frac{1}{2} \\
&= \ln|x^2+x+1|+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c \\
&= \ln|x^2+x+1|+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c
\end{aligned}$$

Exercice 14 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$1.\ \int \frac{3}{2x^2+1}dx \qquad 2.\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad 3.\ \int \frac{1}{\sin x}dx$$

$$4.\ \int \sin^8(x)\cos^3(x)dx \qquad 5.$$

Solution

1. On cherche à se ramener au cas connu de la primitive de $\frac{1}{x^2+1}$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{2}x$ avec $du = \sqrt{2}dx$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{2x^2+1}dx &= \tfrac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x)^2+2}dx \\
&= \tfrac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{u^2+1}du \\
&= \tfrac{3}{\sqrt{2}} \arctan u + c \\
&= \tfrac{3}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + c
\end{aligned}$$

2. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}$ avec $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \tfrac{2}{2} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \\
&= 2 \int e^u du \\
&= 2e^u + c \\
&= 2e^{\sqrt{x}} + c
\end{aligned}$$

3. Comme $\omega(-x) = \frac{1}{\sin(-x)}d(-x) = \frac{1}{\sin(x)} = \omega(x)$ la règle de Bioche nous indique le changement de variable $u = \cos(x) \Longrightarrow du = -\sin(x)dx$.

   Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin(x)}dx &= \int \frac{-1}{\sin^2(x)}(-\sin(x)dx) \\
&= \int \frac{-1}{1-\cos^2(x)}(-\sin(x)dx) \\
&= -\int \frac{du}{1-u^2} \\
&= -\tfrac{1}{2} \int \frac{du}{1-u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} \quad \text{(décomposition en éléments simples)} \\
&= -\tfrac{1}{2} \ln|1-u| - \tfrac{1}{2}\ln|1+u| + c \\
&= -\tfrac{1}{2} \ln|1-\cos(x)| - \tfrac{1}{2}\ln|1+\cos(x)| + c
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \sin^8(x)\cos^3(x)dx$

   Comme
   $\omega(\pi - x) = \sin^8(\pi - x)\cos^3(\pi - x)d(\pi - x) = \sin^8(x)(-\cos^3(x))(-dx) = \sin^8(x)\cos^3(x)dx$
   la règle de Bioche nous indique le changement de variable $u = \sin(x) \Longrightarrow du = \cos(x)dx$.

Donc

$$\begin{aligned}
\int \sin^8(x)\cos^3(x)dx &= \int \sin^8(x)\cos^2(x)(\cos(x)dx) \\
&= \int \sin^8(x)(1-\sin^2(x))(\cos(x)dx) \\
&= \int u^8(1-u^2)du = \int (u^8-u^{10})du \\
&= \tfrac{1}{9}u^9 - \tfrac{1}{11}u^{11} + c \\
&= \tfrac{1}{9}\sin^9 x + \tfrac{1}{11}\sin^{11} x + c
\end{aligned}$$

Exercice 15 Calculer les intégrales suivantes :

$$1.\ \int_0^1 (4x-1)e^{3x}dx \qquad 2.\ \int_0^\pi (2x-1)\cos(3x)dx \qquad 3.\ \int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

Solution

1. En intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4x-1)e^{3x}dx &= \left[\tfrac{1}{3}(4x-1)e^{3x}\right]_0^1 - \tfrac{4}{3}\int_0^1 e^{3x}dx \\
&= e^3 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}\left[\tfrac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{5}{9}e^3 + \tfrac{7}{9}
\end{aligned}$$

2. En intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (2x-1)\cos(3x)dx &= \left[\tfrac{1}{3}(2x-1)\sin(3x)\right]_0^\pi - \tfrac{2}{3}\int_0^\pi \sin(3x)dx \\
&= -\tfrac{2}{3}\left[-\tfrac{\cos(3x)}{3}\right]_0^\pi \\
&= -\tfrac{4}{9}
\end{aligned}$$

3. En intégrant par parties on obtient :

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \left[-x^2e^{x^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^{-x}dx$$

En intégrant par parties à nouveau intégrale nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= [xe^{-x}]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}dx \\
&= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 \\
&= -2e^{-1} + 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = -5e^{-1} + 2$$

Chapitre V

Les Equations Différentielles

1 Géneralités

Definition 1.1

- Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{V.1}$$

  où F est une fonction de $(n+2)$ variables.
- Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (V.1).

2 Equations différentielles du premier ordre

2.1 Equations différentielles du premier ordre à variables séparables

Une équation différentielle à variables séparées est une équation du type :

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)} \quad \text{ou} \quad f(y)y' = g(x)$$

où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a

$$f(y)y' = (F(y))' = g(x) \tag{V.2}$$

On intègre des deux côtés :

$$F(y) = G(x) + c$$

et si F possède une fonction réciproque F^{-1}, on en déduit

$$y = F^{-1}(G(x) + c)$$

Exemple 2.1
On veut résoudre l'équation différentielle $y' - xy = 0$.

On commence par séparer les variables x d'un côté et y de l'autre

$$y' - xy = 0 \Longrightarrow \frac{y'}{y} = x \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx \Longrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Ainsi, toute solution non nulle est

$$y = ke^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2
On veut résoudre l'équation différentielle $x^2y' = e^{-y}$

$$x^2y' = e^{-y} \Longrightarrow y'e^y = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int e^y dy = \int \frac{1}{x^2}dx \Longrightarrow e^y = -\frac{1}{x} + c$$

Ce qui permet d'obtenir y

$$y = \ln\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

2.2 Equations homogènes

Definition 2.3
Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{E}$$

On dit que l'équation différentielle (E) est homogènes si

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Exemple 2.4
Soit l'équation différentielle

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, \quad \text{avec } f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}$$

On sait que

$$f(tx,ty) = \frac{ty-tx}{ty+tx} = f(x,y)$$

Donc c'est une équation différentielle homogène.

Résolution de l'équation différentielle homogène

Ce sont les équations de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

On pose $z = \frac{y}{x} \Longrightarrow\Longrightarrow y = z.x$ et $y' = z'.x + z$. On obtient

$$\begin{aligned} y' = z'.x + z &\Longrightarrow f(z) = z'.x + z \\ &\Longrightarrow f(z) - z = \tfrac{dz}{dx}.x \\ &\Longrightarrow \tfrac{dz}{f(z)-z} = \tfrac{dx}{x} \end{aligned}$$

Exemple 2.5
On veut résoudre l'équation différentielle $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour résoudre cette équation, on divise l'équation fifférentielle par x, on peut poser $z = \frac{y}{x} \Longrightarrow\Longrightarrow y = z.x$ et $y' = z'.x + z$. On obtient

$$\begin{aligned} y' - \tfrac{y}{x} = \sqrt{1+\left(\tfrac{y}{x}\right)^2} &\Longrightarrow z'.x + z - z = \sqrt{1+z^2} \\ &\Longleftrightarrow z'x = \sqrt{1+z^2} \\ &\Longleftrightarrow \tfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \tfrac{dx}{x} \\ &\Longleftrightarrow \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \ln x + c \\ &\Longleftrightarrow z + \sqrt{1+z^2} = k.x \\ &\Longleftrightarrow 1 + z^2 = ((kx-z)^2 \\ &\Longleftrightarrow 1 + z^2 = k^2x^2 + z^2 - 2kxz \\ &\Longleftrightarrow z = \frac{-1+k^2x^2}{2kx} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir y

$$y = x\left(\frac{-1+k^2x^2}{2kx}\right) \Longleftrightarrow y(x) = \frac{-1+k^2x^2}{2k}$$

2.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Definition 2.6

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E}$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Équation différentielle linéaire sans second membre (SSM)

Theorème 2.7

Soit $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a. Soit l'équation différentielle :

$$y' = a(x)y \tag{E}$$

Les solutions sur I de (E) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = ke^{A(x)} \tag{E}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exemple 2.8

On veut résoudre l'équation différentielle $y' + e^x y = 0$

$$\begin{aligned} y' + e^x y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{dy}{dx} = -ye^x \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{dy}{y} = -e^x dx \\ &\Leftrightarrow \quad \ln y = -e^x + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = Ke^{-e^x} \end{aligned}$$

Équation différentielle linéaire avec second membre (ASM)

Il nous reste le cas général de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E}$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

L'équation homogène associée est :

$$y' = a(x)y \tag{E_0}$$

Proposition 2.9

Si y_p est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$y(x) = y_p(x) + ke^{A(x)} \quad k \in \mathbb{R} \tag{V.3}$$

où $x \mapsto A(x)$ est une primitive $x \mapsto a(x)$.

Méthode de variation de la constante

On utilise cette technique lorsqu'on ne peut pas trouver de solution particulière de l'équation avec second membre

La solution générale de (E_0) $y_p = a(x)y$ est donnée par $y(x) = ke^{A(x)}$, avec $k \in \mathbb{R}$ une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)e^{A(x)}$, où k est maintenant une fonction à déterminer pour que y_p soit une solution de (E) $y' = a(x)y + b(x)$. On obtient :

$$k'(x)e^{A(x)} + k(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)k(x)e^{A(x)} + b(x)$$

Donc

$$k'(x)e^{A(x)} = b(x) \Longleftrightarrow k'(x) = b(x)e^{-A(x)} \Longleftrightarrow k(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx$$

Ce qui donne une solution particulière $y_p = k(x)e^{A(x)} = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx\right)e^{A(x)}$ de (E) sur I.
La solution générale de (E) est donnée par

$$y(x) = y_p + ke^{A(x)} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.10

Soit l'équation $y' - xy = x$. L'équation homogène est $y' - xy$ dont les solutions sont les $y(x) = ke^{\frac{x^2}{2}} \quad k \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_p = k(x)e^{\frac{x^2}{2}}$.

On doit trouver $k(x)$ afin que y_p vérifie l'équation différentielle $y' - xy = x$.

$$\begin{aligned}
& y_p' - xy_p = x \\
\iff & \left(k'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + xk(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right) - xk(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x \\
\iff & k'(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x \\
\iff & k'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \\
\iff & k(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = k(x)e^{\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} = -1$$

Les solutions générales de l'équation $y' - xy = x$ s'obtiennent en additionnant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = ke^{\frac{x^2}{2}} - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.4 Les équations de Bernoulli

Elles sont du premier ordre et de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{V.4}$$

où a et b sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Méthode de résolution

En divisant les deux membres de l'équation par y^{α}

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

En effectuant le changement de fonction $z = y^{1-\alpha} \Longrightarrow z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$ l'équation (V.4) devient

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + a(x)z = b(x)$$

qui est une équation linéaire du premier ordre.

Exemple 2.11

On veut résoudre l'équation différentielle $xy' + y = y^2 \ln x$

En divisant par y^2 et en posant $z = y^{-1} \Longrightarrow z' = -y'y^{-2}$

On obtient une équation linéaire d'ordre 1

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

◇ Résolution de l'équation homogène associée $z' - \frac{1}{x}z = 0$

$$z' = \frac{1}{x}z \Longrightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|z| = \ln|x| + c$$

Ce qui permet d'obtenir z

$$z = kx$$

◇ Résolution de l'équation avec second membre (la variation de la constante)

On pose

$$z = k(x).x \Longrightarrow z' = k'(x).x + k(x)$$

On obtient

$$k'(x).x + k(x) - \frac{1}{x}(k(x).x) = -\frac{\ln x}{x} \Longrightarrow k'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow \int k'(x)dx = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

et donc

$$k(x) = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + c$$

La solution générale est donc

$$z(x) = \ln x + 1 + c.x \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + c.x}$$

3 Equations différentielles linéaires du second ordre

3.1 Définitions

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{E}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.

L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E'}$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).

3.2 Équation homogène

On cherche une solution de (E') sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$ay'' + by' + cy = 0 \Longleftrightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Longleftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Definition 3.1
L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (E').

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E0).

Theorème 3.2

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E') sont les

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E') sont le

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E') sont les

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.3
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{V.5}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2.
La solution générale est donc

$$y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{2x}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.4
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{V.6}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racines double $r_0 = 2$.

La solution générale est donc

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.5
Résoudre l'équation différentielle :

$$4y'' + 4y' + 5 = 0 \tag{V.7}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines complexes $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ et $r_2 = -\frac{1}{2} - i$.

La solution générale est donc

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(\lambda \cos x + \mu \sin x), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.3 Équation avec second membre

Nous passons au cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, mais avec un second membre g qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{E}$$

Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre

Proposition 3.6
Les solutions générales de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène (E') à une solution particulière de (E).

3.4 Recherche d'une solution particulière

Second membre du type polynôme de degrés n

EXEMPLE 3.7
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1 \tag{V.8}$$

Étape 1. L'équation homogène correspondante est

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Le polynome caractéristique $P(r) = r^2 - 3r + 2$, donc les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. La solution de l'équation homogène est donc de la forme

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Étape 2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = ax^2 + bx + c$
Lorsque l'on injecte y_p dans l'équation (V.8), on obtient :

$$\begin{aligned} & 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 + 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a + 2c - 3b = 2x^2 + 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2a = 2,\ (2b - 6a = 0 \text{ et } 2a + 2c - 3b = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & a = 1,\ b = 3 \text{ et } c = -4 \end{aligned}$$

Donc $y_p = x^2 + 3x - 4$.

Second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = e^{\alpha x} x^n Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_p = e^{\alpha x} Q(x)$ $(n = 0)$, si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_p = e^{\alpha x} x Q(x)$ $(n = 1)$, si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $y_p = e^{\alpha x} x^2 Q(x)$ $(n = 2)$, si α est une racine double de l'équation caractéristique.

EXEMPLE 3.8
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \tag{V.9}$$

Étape 1. L'équation homogène correspondante est

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Le polynome caractéristique $P(r) = r^2 + 2r + 1$, donc $r_0 = -1$l racines double . La solution de l'équation homogène est donc de la forme

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Étape 2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = Ax^2e^{-x}$ Alors

$$y_p' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x} \Longrightarrow y_p'' = A(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

On remplace cela dans (V.9)

$$\begin{aligned} & y_p'' + 2y_p' + y_p = 2e^{-x} \\ \Longleftrightarrow \quad & A(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + 2A(-x^2 + 2x)e^{-x} + Ax^2e^{-x} = 2e^{-x} \\ \Longleftrightarrow \quad & 2A = 2 \Longleftrightarrow A = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$y_p = x^2e^{-x}$$

Et la solution générale de (V.9) est

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x} + x^2e^{-x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Second membre du type $e^{\alpha x}(a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x))$

On cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_p = e^{\alpha x}(M\cos(\beta x) + N\sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_p = xe^{\alpha x}(M\cos(\beta x) + N\sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

Exemple 3.9

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y = \sin x \tag{V.10}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = M\cos x + N\sin x$

Étape 1. L'équation homogène correspondante est

$$y'' + y = 0$$

Le polynome caractéristique $P(r) = r^2 + 1$, donc les racines sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. La solution de l'équation homogène est donc de la forme

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Étape 2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x(a \cos x + b \sin x)$ Alors

$$y_p' = (a + bx) \cos x + (b - ax) \sin x \Longrightarrow y_p'' = (2b - ax) \cos x - (2a + bx) \sin x$$

Lorsque l'on injecte y_p dans l'équation (V.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
& y_p'' + y_p = \sin x \\
\Longleftrightarrow \quad & (2b - ax) \cos x - (2a + bx) \sin x + x(a \cos x + b \sin x) = \sin x \\
\Longleftrightarrow \quad & 2b \cos x - 2a \sin x = \sin x \\
\Longleftrightarrow \quad & a = -\tfrac{1}{2} \text{ et } b = 0
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p = -\frac{x}{2} \cos x$$

la solution générale de (V.10) est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x - \frac{x}{2} \cos x \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice

Exercice 16 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \cos x + \sin x$
2. $y' - \frac{1}{x} y = \frac{x}{1+x^2}$
3. $2x^2 y' + y = 1$
4. $y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Solution

1. **Étape 1.** (**SSM**) L'équation homogène associée est $y' + y = 0$

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\implies \tfrac{dy}{dx} = -y \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\implies \ln|y| = -x + c \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = ke^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Étape 2. (**ASM**) On cherche une solution particulière de la forme $y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, alors $y_p' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

En remplaçant, on obtient que

$$\begin{aligned} & y_p' + y_p = \cos x + \sin x \\ \iff & (c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x = \cos x + \sin x \\ \iff & -c_1 + c_2 = 1 \text{ et } c_1 + c_2 = 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$. On obtient $y_p(x) = \sin x$

La solution générale est alors

$$y(x) = ke^{-x} + \sin x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. **Étape 1.**(**SSM**) L'équation homogène associée est $y' - \frac{1}{x}y = 0$

$$\begin{aligned} y' - \tfrac{1}{x}y = 0 &\implies \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{y}{x} \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\implies \ln|y| = \ln|x| + c \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = k.x, \quad k \in \mathbb{R}$$

Étape 2.(**ASM**) Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_p(x) = k(x).x$

On doit trouver $k(x)$ afin que y_p vérifie l'équation différentielle $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}
& y_p' - \tfrac{1}{x} y_p = \tfrac{x}{1+x^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & k'(x)x + k(x)x - k(x)x = \tfrac{x}{1+x^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & k'(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & \int k'(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx \\
\Longleftrightarrow\quad & k(x) = \arctan x
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = x.\arctan x$$

La solution générale est alors

$$y(x) = kx + x.\arctan x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. **Étape 1.**(**SSM**) L'équation homogène associée est $2x^2y' + y = 0$

$$\begin{aligned}
2x^2y' + y = 0 \quad & \Longrightarrow \quad \tfrac{y'}{y} = -\tfrac{1}{2x^2} \\
& \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{2x^2}dx \\
& \Longrightarrow \quad \ln|y| = \tfrac{1}{2x} + c
\end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = ke^{\frac{1}{2x}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Étape 2.(**ASM**) Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_p(x) = k(x)e^{\frac{1}{2x}}$

On doit trouver $k(x)$ afin que y_p vérifie l'équation différentielle $2x^2y' + y = 1$

$$\begin{aligned}
& 2x^2y_p' + y_p = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & 2x^2\left(k'(x)e^{\frac{1}{2x}} - \tfrac{k(x)}{2x^2}e^{\frac{1}{2x}}\right) + k(x)e^{\frac{1}{2x}} = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & k'(x) = \tfrac{1}{2x^2}e^{-\frac{1}{2x}}
\end{aligned}$$

D'où

$$k(x) = -e^{\frac{1}{2x}}$$

On en déduit que $y_p(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

La solution générale est alors

$$y(x) = ke^{\frac{1}{2x}} - e^{\frac{1}{x}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. **Étape 1.**(**SSM**) L'équation homogène associée est $y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0$

$$\begin{aligned} y' + \tfrac{y}{\sqrt{x}} = 0 &\implies \tfrac{y'}{y} = -\tfrac{1}{\sqrt{x}} \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &\implies \ln|y| = -2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = k.e^{-2\sqrt{x}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Étape 2.(**ASM**) Cherchons une solution particulière de la forme $y_p(x) = a$

En remplaçant, on obtient que

$$\begin{aligned} & y_p' + \tfrac{y_p}{\sqrt{x}} = \tfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \iff & \tfrac{a}{\sqrt{x}} = \tfrac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

On en déduit que $a = 1$. On obtient $y_p(x) = 1$

La solution générale est alors

$$y(x) = k.e^{-2\sqrt{x}} + 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 17 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$
2. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
3. $y'' + 2y' + 5y = 5\cos(2x) - 3\sin(2x)$

Solution

1. **Étape 1.**(**SSM**) L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2

   La solution générale homogène est donc

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$$

   Étape 2.(**ASM**) On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Alors

$$y_p'(x) = 2ax + b \text{ et } y_p''(x) = 2a$$

   En remplaçant, on trouve

$$\begin{aligned}
& y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2x^2 - 6x + 4 \\
\iff\ & 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 6x + 4 \\
\iff\ & 2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c = 2x^2 - 6x + 4
\end{aligned}$$

On en déduit que $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. On obtient $y_p(x) = x^2 + 1$

La solution générale est alors

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + x^2 + 1 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. **Étape 1.**(**SSM**) L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1.

   La solution générale homogène est donc

   $$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x}$$

   Étape 2.(**ASM**) On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 e^{-x}$. Alors

   $$y_p'(x) = a(-x^2 + 2x)e^{-x} \text{ et } y_p''(x) = a(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

   En remplaçant, on obtient que

   $$\begin{aligned}
   & y_p'' + 2y_p' + y_p = 2e^{-x} \\
   \iff\ & a(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + 2a(-x^2 + 2x)e^{-x} + ax^2 e^{-x} = 2e^{-x} \\
   \iff\ & 2ae^{-x} = 2e^{-x}
   \end{aligned}$$

   On en déduit que $a = 1$. On obtient $y_p(x) = x^2 e^{-x}$

   La solution générale est alors

   $$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x} + x^2 e^{-x} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. **Étape 1.**(**SSM**) L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 5 = 0$ de racines $r = -1 \pm 2i$

   La solution générale homogène est donc

   $$y(x) = e^{-x}(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)).$$

   Étape 2.(**ASM**) On cherche une solution particulière de la forme

$y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. Alors

$$y_p'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) \text{ et } y_p''(x) = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$$

En remplaçant, on obtient que

$$\begin{aligned} & y_p'' + 2y_p' + 5y_p = 5\cos(2x) - 3\sin(2x) \\ \iff \quad & (a+4b)\cos(2x) + (-4a+b)\sin(2x) = 5\cos(2x) - 3\sin(2x) \end{aligned}$$

On en déduit que $a = 1$et $b = 1$. On obtient $y_p(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.
La solution générale est alors

$$y(x) = e^{-x}(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)) + \cos(2x) + \sin(2x) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Chapitre VI

Fonctions de plusieurs variables

1 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

1.1 Définitions

DEFINITION 1.1

Une application de $\mathbb{R}^n$, ou d'une partie $D \subset \mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction réelle de n variables réelles. i.e de la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longrightarrow & f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}$$

où D est le domaine de définition de f.

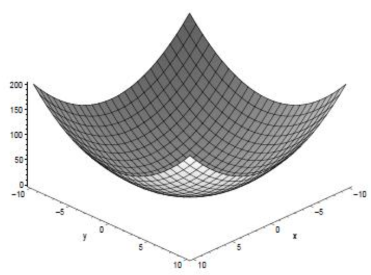
EXEMPLE 1.2

Les fonctions f et g définies par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) = x + y, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & g(x, y) = x^2 + y^2, \end{array}$$



Exemple 1.3
Les fonctions f et g définies par

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y)=(x+y^2,3x+y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & g(x,y)=(x^2,y^2,x^2-y^2), \end{array}$$

sont des fonctions réelles à plusieurs variables.

On s'intéressera aussi parfois aux fonctions de n variables et à valeurs vectorielles $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

1.2 Représentation graphique

Une fonction d'une variable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles est décrite par son graphe, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D\},$$

et que l'on représente par la courbe du plan d'équation $y = f(x)$.
Dans le cas d'une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, on définie de même graphe

$$G_f = \{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D\},$$

et que l'on représente comme une suface d'équation $z = f(x,y)$ dans l'espace à 3 dimensions.

Exemple 1.4
La représentation géométrique de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

La notion de graphe s'étend de manière évidente au cas des fonctions de n variables.

Definition 1.5 (graphe d'une fonction)
On appelle **graphe** d'une fonction $f$de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs

réelles, l'ensembles des points $(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ où x parcours D. Le graphe de f est noté

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}.$$

2 Limites des fonctions de plusieurs variables

Soit f une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage d'un point a, sauf peut-être en a, et soit $l \in \mathbb{R}$.

Definition 2.1
On dit que la fonction f admet l pour limite au point a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Definition 2.2
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point a si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow f(x) > A(resp.f(x) < -A).$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Theorème 2.3
Si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique.

3 Continuité d' une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Definition 3.1
Une fonction f définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **continue** au point a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definition 3.2
Une fonction f est continue sur un ensemble D si elle est continue en tout point de cet ensemble.

Exemple 3.3

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + y$ est continue dans $\mathbb{R}^2$ (polynôme du second degré à deux variables).
2. $f(x,y,z) = e^y + xy^2 - z$ est continue dans $\mathbb{R}^3$ (somme d'une exponentielle et d'un polynôme)

Exercice Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{VI.1}$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors $f(t,t) = \frac{1}{2}$.
En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers $\frac{1}{2}$, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

4 Fonctions différentiables

4.1 Dérivée partielles, gradient et matrice jacobienne

Definition 4.1 (Dérivée partielle)
On dit que la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable au point a. On appelle alors dérivée partielle de f par rapport à la i-ième variable, au point a le nombre noté $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ défini par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a)}{h}.$$

Exemple 4.2
On considère la fonction $f(x,y,z) = xy^2 + y^3 + xz$. Alors la dérivée partielles par rapport à y vaut :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy + 3y^2$$

Exemple 4.3
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(xy)$ admet des dérivées partielles par rapport aux variables x et y en tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Différentielles Totale

Definition 4.4

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles par rapport aux variables x et y. On appelle différentielle totale de f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Remarque 4.5

Evidemment si f est une fonction de trois variables (x, y, z) alors on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Dérivée de fonctions composées

Soit f une fonction de deux variables u et v elles-même fonctions des deux variables x et y.

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto f(u, v) & (x, y) \mapsto u(x, y) & (x, y) \mapsto v(x, y) \end{array}$$

On peut définir la fonction composée $F(x, y) = f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y))$ Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Definition 4.6 (gradient)

Si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a, on appelle *gradient* de f en a noté $\mathrm{grad}f(a)$ ou $\nabla f(a)$ défini par

$$\mathrm{grad}f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Exemple 4.7

Calculer le gradient de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 4y, 6z)$$

DEFINITION 4.8 (MATRICE JACOBIENNE)
Si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}^m$ admettant des dérivées partielles en a, on appelle *matrice jacobienne* de f en a la matrice à m lignes et n colonnes notée $\mathrm{Jac}_f(a)$ défini par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 4.9

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ 2. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 - xy$ $\quad$ $(x, y) \mapsto g(x, y) = (x^2 + y, y^2)$

1. $$Jac(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \end{pmatrix}$$

2. $$Jac(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

4.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

DEFINITION 4.10
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant sur D une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ par rapport à la j-ième variable au point a, on dit que $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ est une dérivée partielle d'ordre 2 au point a par rapport à la i-ième et j-ième variables pries dans cet ordre.

NOTATION 4.11
La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ est généralement noté $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(a)$.

EXEMPLE 4.12
Cherchons les dérivées partielles d'ordre 3 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x + y - x^2 y^3.$$

1. Les dérivées partielles d'ordre 1 sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - 3x^2y^2.$$

2. Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -6xy^2.$$

3. Les dérivées partielles d'ordre 3 sont

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -6x^2, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = -12xy, \\ &\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = -6y^2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = -6y^2. \end{aligned}$$

Definition 4.13
Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur D et on écrit $f \in \mathcal{C}^k(D)$ si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existant et sont continues sur D.

Théoreme de Schwarz

Theorème 4.14
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent sur D et sont continues au point a. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Corollaire 4.15
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D \subset \mathbb{R}^n$, on a alors en tout point de D

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Exercice

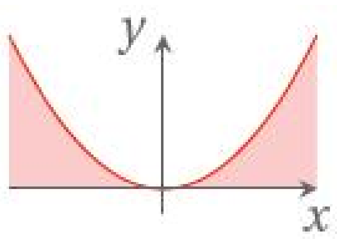
Exercice 18 Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}}$,
2. $f(x,y) = \ln(x + y)$.

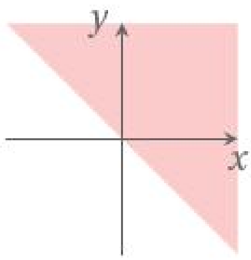
3. $f(x,y) = \dfrac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$
4. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}y}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$
6. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

Solution

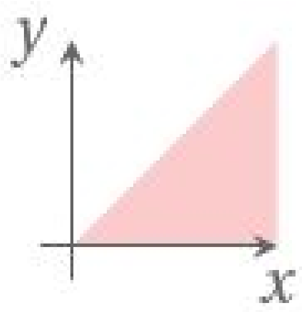
1. $f(x,y) = \frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}$
   $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2 \text{ et } y > 0\}$,



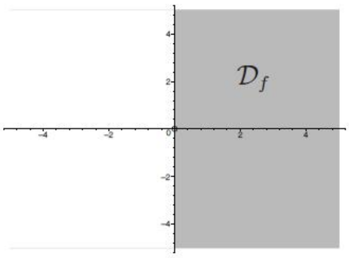
2. $f(x,y) = \ln(x+y)$
   On doit avoir $x + y > 0$ pour que $\ln(x+y)$ existe. D'où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > -x\}$.



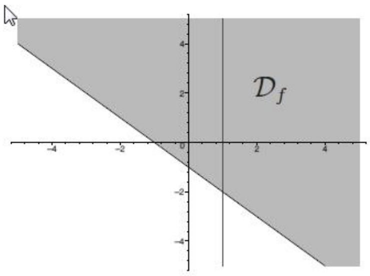
3. $f(x,y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$
   $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \text{ et } x > y\}$.



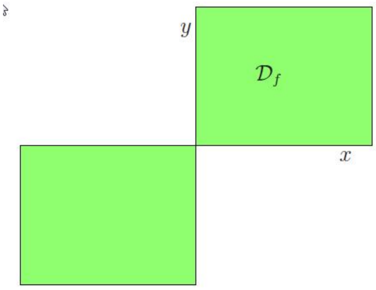
4. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, (x,y) \neq (0,0)\}$,



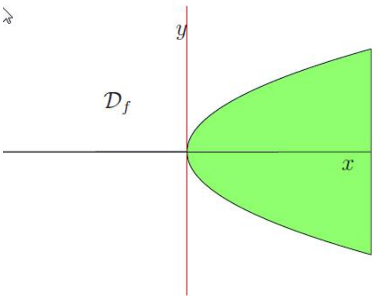
5. $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$
   Pour que le numérateur existe, nous devons avoir $x+y+1 \geq 0$
   $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq -x-1,\ x \neq 1\}$,



6. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$
   On doit avoir $xy > 0$, donc x et y ont le même signe. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$,



7. $f(x,y) = x \ln(y^2 - x)$
   On doit avoir $y^2 - x > 0$ pour que $\ln(y^2 - x)$ existe. D'où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 > x\}$,



Exercice 19 Calculez les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \cos(x)\sin(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$
2. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$
3. $f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$
4. $f(x,y,z) = \exp\left(x^2+y^2\right)\ln(1+z^4), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$
5. $f(x,y) = x^y, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

Solution

1. Pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x)\sin(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\cos(y).$$

2. Pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

3. Pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2}.$$

4. Pour tous réels x, y et z

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x\exp\left(x^2+y^2\right)\ln(1+z^4) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y\exp\left(x^2+y^2\right)\ln(1+z^4)$$

$$\text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2x\exp\left(x^2+y^2\right)\frac{4z^3}{1+z^4}.$$

5. Pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)x^y.$$

Exercice 20 Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2\sin(y)$
2. $f(x,y,z) = x^2y^3z^7 + x + \sin(z) + \sqrt{2}$

Solution

1. Pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(y).$$

D'où

$$df(x,y) = (2x\sin(y))dx + (x^2\cos(y))dy.$$

2. Pour tous réels x, y et z

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy^3z^7 + 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3x^2y^2z^7 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 7x^2y^3z^6 + \cos(z).$$

D'où

$$df(x,y,z) = (2xy^3z^7 + 1)dx + (3x^2y^2z^7)dy + (7x^2y^3z^6 + \cos(z))dz.$$

Bibliographie

[1] André Girouxarc, *Analyse 2 -Notes de cours*, Avril 2004.

[2] Gloria Faccanoni, *Calcul différentiel*, 2013-2014.

[3] Hitta Amara, *Cours Algebre et Analyse I* , LMD : DEUGI.MI/ST, 2008-2009.

[4] Jean-Pierre Ramis, *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence Cours complet et 270 exercices corrigés* , 2007.

[5] J. Quinet, *cours élémentaire de mathématiques superieures* , Tome 3 Calcul intégral et séries, 1976.

[6] Kada Allab, *éléments d'analyse*, O.P.U.

[7] J. Rivaud, *Exercices d'analyse*, Tome 1. Vuibert, 1971.

[8] P. Thuillier, J.C. Belloc, *Mathématique, Analyse1*. Masson, 1990.

[9] P. Thuillier, J.C. Belloc, *Mathématique, Analyse2*. Masson, 1989.