Centre universitaire de Aïn Temouchent

Institut sciences et technologies

Cours Ondes et vibrations (physique3)

S.Hebri

Année universitaire 2013-2014

Calendrier de présentation de la matière

Cours

Titre :	Ondes et vibrations
Sigle :	PHY 3
Session :	$3^{ème}$ semestre ST

Enseignant

Nom :	Salem Hebri
Courriel :	salem.hebri@gmail.com

Horaire

Cours :	lundi 8h30-10h	Amphi A3
	Mercredi 8h30-10h	Amphi A3

Objectif général

L'objectif général du cours est de familiariser l'étudiant(e) avec les concepts fondamentaux des systèmes et phénomènes physiques ondulatoires.

Objectifs spécifiques

À la fin du cours, l'étudiant(e) sera en mesure :

1. de reconnaître l'équation du mouvement d'un phénomène physique ondulatoire
2. de comprendre le phénomène de battement
3. de comprendre les notions d'amortissement et de résonance
4. de solutionner l'équation du mouvement pour divers systèmes physiques oscillants
5. de comprendre et d'interpréter l'équation d'onde classique
6. de comprendre les notions de vitesse de phase,

Plan du cours

Chapitre	Titre
1	Lagrange
2	Oscillations libres non amortis à un degré de liberté
3	Oscillations libres amorties à un degré de liberté
4	Oscillations amorties forcées à un degré de liberté
5	Oscillateurs à deux degrés de libertés
6	Ondes mécaniques

Bibliographie

Le cours est basé sur des ouvrages, dont :

- Halliday, D., Resnick, R., *Ondes, optique, et physique moderne*, Ed. du renouveau pédagogique, 1980.
- Cours de vibrations I, Emannuel Vient
- Djellouah.H, *vibrations et ondes mécaniques, 2011-2012*

Rappel : Coordonnées généralisées et degré de liberté

Définition : Les coordonnées Généralisées sont l'ensemble de variables réelles indépendantes permettant de décrire et configurer tous les éléments du système à tout instant t.
Exemple : un point matériel libre dans l'espace peut être déterminé par 3 coordonnées généralisées (x, y, z);

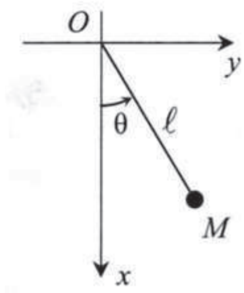
Les coordonnées généralisées : $q_1(t), q_2(t), \ldots \ldots \ldots . q_N(t)$.
Les vitesses généralisées : $\dot{q}1(t), \dot{q}2(t), \ldots\ \ldots\ \ldots . \dot{q}N\ (t)$.

Définition d'une liaison : Une liaison est la relation qui relie deux coordonnées ou plus entre elles

Définition : Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant. Ou, le nombre de coordonnées généralisées **liées** moins (-) le nombre de relations liaisons.

Pour un système suivant une dimension (*x*)
d=N-M
Pour un système dans un repère plan (*xy*)
d=2.N-M
Pour un système à trois dimensions (*xyz*)
d=3.N-M
où
d : nombre de degrés de liberté
N : nombre particules ou de masses
M : nombre de laisons

Exemple :



Prenons l'exemple d'un pendule simple dans un repère plan *xOy*
Nombre de particule ou de masse =1
Liaisons $x^2+y^2=L^2$ on a une seule liaison M=1

Puisqu'on est dans un repère plan d=2.1-1=1

Notre système possède un seule degré de liberté. Pour configurer notre système on peut choisir *x* et *y* on l'exprime en fonction de *x*

$$y = \sqrt{L^2 - x^2}$$

Dans ce genre d'exercice où il y'a rotation, il est préférable d'exprimer x et y en fonction de l'angle utilisé. Par exemple θ $\begin{cases} x = L\sin\theta \\ y = Lcos\,\theta \end{cases}$

Equations de Lagrange

1. Equations de Lagrange pour une particule

Considérons le cas particulier d'une particule astreinte à se déplacer, sans frottement, sur une courbe plane contenue dans le plan xOy. La courbe sur laquelle est astreinte à se déplacer la particule de masse m, est le lieu des points dont les coordonnées vérifient les relations :

$$\begin{cases} z = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

La première relation correspond au plan xOy . La seconde relation représente l'équation de la trajectoire dans ce plan. Ces deux relations définissent les équations des liaisons appelées souvent liaisons. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de coordonnées qui représentent la position de m (trois dans le cas général) moins le nombre de liaisons (deux dans le cas particulier étudié ici). La particule possède donc un degré de liberté. Il faut choisir une variable q pour repérer sa position. Cette variable est appelée coordonnée généralisée. Il est possible d'exprimer le vecteur position $\vec{r}$ de la particule en fonction de la coordonnée généralisée q par la relation :

~

$$\vec{r} = \vec{r}(q)$$

Soit $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces agissant sur la particule. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1)$$

Soit δW le travail fourni par la force $\vec{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal δr:

$$\delta W = \vec{F}.\delta\vec{r} \qquad (2)$$

Le déplacement infinitésimal δr peut s'écrire en fonction de la variation δq de la coordonnée généralisée q :

$$\frac{\delta\vec{r}}{\partial\vec{r}} = \frac{\delta q}{\partial q} \Rightarrow \delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q \qquad (3)$$

Dans ce cas le travail δW peut se mettre la forme :

$$\delta W = \vec{F}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q \qquad (4)$$

On appelle force généralisée conjuguée de q, ou q-composante de la force, la quantité F_q définie par :

$$F_q = \frac{\delta W}{\delta q} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F}$$

Par conséquent δW s'écrit :

$$\delta W = F_q.\delta q \qquad (5)$$

En tenant compte de la relation fondamentale de la dynamique, cette expression peut également s'écrire :

$$\delta W = m\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\delta q \qquad (6)$$

D'autre part

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{v}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right] = \frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} + \vec{v}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right] \qquad (7)$$

Sachant que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{\partial}{\partial q}.\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \qquad (8)$$

Des deux équations (7) et (8) on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right] - \vec{v}\frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \qquad (9)$$

Le vecteur de vitesse v peut aussi s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\dot{q} \qquad (10)$$

D'où la relation

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

Et remplaçant l'équation (10) dans (9), on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}.\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}\right] - \vec{v}.\frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \qquad (11)$$

Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}\right] = \vec{v}.\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} \qquad (12)$$

Et que

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}\right] = \vec{v}.\frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \qquad (13)$$

En remplaçant (12) et (13) dans (11) On obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right] \qquad (14)$$

L'expression numéro (6) du travail δW peut alors s'écrire :

$$\delta W=m\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right\}.\delta q \qquad (15)$$

Si on note $T=m\frac{1}{2}v^2$ l'énergie cinétique de la masse *m*, on obtient finalement les deux expressions équivalentes du travail δW :

$$\delta W=\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}\right\}.\delta q=F_q\delta_q \qquad (16)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert pour un système à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=F_q \qquad (17)$$

2. **Cas des systèmes conservatifs**

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et elle s'écrit :

$$F_q=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

L'équation (17) de Lagrange devient alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial U}{\partial q} \qquad (18)$$

Généralement l'énergie potentielle *U* ne dépend pas de la vitesse, c'est à dire que

$$\frac{\partial U}{\partial\dot{q}}=0$$

L'équation de Lagrange peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial U}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}}\right]-\left[\frac{\partial T}{\partial q}-\frac{\partial U}{\partial q}\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}}\right]-\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial q}\right]=0$$

On introduit la fonction de Lagrange (ou lagrangien du système) qui est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$L = T - U$$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] = 0 \quad (19)$$

3.Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

-Equation de Lagrange

Considérons une situation physique dans laquelle la particule est soumise à des forces de frottement de viscosité dont la résultante f est de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

Pour calculer la force généralisée $\mathbf{f}_q$ correspondante, nous utilisons la définition du paragraphe précédent :

$$\overrightarrow{f_q} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{f} = -\alpha\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = -\alpha\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$$

$$\overrightarrow{f_q} = -\alpha\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2\frac{\partial q}{\partial t} = -\beta\dot{q} \qquad (20)$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme :

Avec

$$\beta = -\alpha\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2 \quad (21)$$

Dans le cas où il existe des forces de frottement de viscosité, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] = -\beta\dot{q}$$

-Fonction dissipation

Calculons le travail δW_f fourni par la force de frottement pendant un intervalle de temps δt pour un déplacement δr :

$$\delta W_f = \vec{f}.\overrightarrow{\delta r} = -\alpha.\vec{v}.\vec{v}.\delta t = -\alpha v^2\delta t$$

La quantité de chaleur δQ gagnée par le système en interaction avec la particule, est telle que :

$$\delta Q = \left|\delta W_f\right| = \alpha v^2\delta t$$

Soit $P_d = \frac{\delta Q}{\delta t} = \alpha v^2$ la puissance dissipée par les forces de frottement sous forme de chaleur :

$$P_d = \alpha \vec{v}^2 = \alpha \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]^2$$

Par l'intermédiaire de la dérivée partielle on peut écrire, cette puissance dissipée peut être exprimée en fonction de $\dot{q}$, par :

$$P_d = \alpha \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}\right]^2 = \beta \dot{q}^2$$

Par définition, la fonction dissipation est égale à la demi-puissance dissipée :

$$D = \frac{1}{2}P_d = \frac{1}{2}\beta \dot{q}^2$$

La q-composante $\mathbf{f}_q$ de la force de frottement peut alors s'écrire :

$$f_q = -\beta \dot{q}^2 = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$$

4.Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Considérons le cas plus général d'une force extérieure dépendant du temps agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation D. Soit F_{eq} la q-composante de la force extérieure. Dans ce cas l'équation de Lagrange peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{e,q}$$

5. Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant 'équations de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède N degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir N coordonnées généralisées q_i (i = 1, 2, ..., N) ; nous aurons ainsi N équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{e,q_i} \quad (i=1,2,\ldots,N)$$

Oscillations libres non amorties à un degré de liberté

1 Généralités sur les vibrations

Un mouvement est dit périodique s'il se répète identique à lui-même pendant des intervalles de temps égaux. Le plus petit intervalle de répétition intervalle de répétition est appelé période notée « *T* », l'unité est la seconde « s ». Le nombre de répétition est appelé fréquence notée « *f* », l'unité est le hertz « *Hz* » ou « s^{-1} ». Elle est reliée à la période par

$$f=1/T$$

le nombre de tours par seconde est appelé pulsation notée ω, l'unité est le rad/s.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Mathématiquement la périodicité s'exprime par $x(t)=x(t+T)$

Définition d'un mouvement vibratoire (oscillation)

Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique se produisant de part est d'autre d'une position d'équilibre.(on désigne par vibration les oscillations rapides des systèmes mécaniques)

Mouvement vibratoire libre

les vibrations libres sont les vibrations qui résultent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement. Cela se passe sans l'intervention d'une force extérieure.

Exemples : Une masse accrochée à un ressort - un pendule simple

Mouvement vibratoire sinusoïdal :

un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si un point vibrant possède une élongation du type

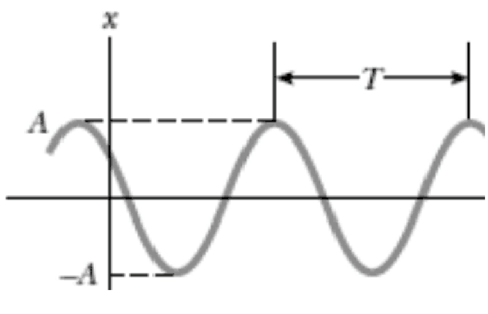
$$x(t) = A\sin(\omega.t+\varphi)$$

$x(t)$: est appelée l'élongation (ou la position) à l'instant t, l'élongation maximale ou l'amplitude du mouvement, elle varie entre $-A$ et $+A$.

ω : la pulsation du mouvement et exprimée en $(rad/\ )$.

$(\omega t + \varphi)$:la phase instantanée, exprimée en (radian, sans dimension),

φ : est la phase initiale, correspond à la phase à l'instant $t = 0$



2.Vibration harmonique/oscillateur harmonique :

En mécanique, on appelle oscillateur harmonique un oscillateur qui, dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de appel opposée et proportionnel à l'écartement x (ou angle θ) :

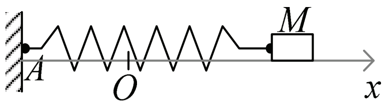
$$F=-Cx$$

C : constante positive

le paramètre (t) qui la caractérise est une fonction sinusoïdale du temps :
$x(t) = A\sin(\omega.t+\varphi)$

Exemple

Le système masse-ressort ci contre est un oscillateur harmonique car la force de rappel est $F_r = -Kx$
k ; la raideur du ressort



Pulsation propre d'un oscillateur harmonique

L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique libre non amorti est de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

L'équation horaire, solution de cette équation différentielle est de la forme :

$x(t) = A\sin(\omega_0.t+\varphi)$

ω_0 : est appelée pulsation propre du système, car elle ne dépend que des grandeurs propres de l'oscillateur. Exemple : cas d'un oscillateur masse-ressort, la pulsation propre dépend de m et k.

A et ϕ dépendent des conditions initiales.

L'énergie d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur est la somme des énergies cinétique notée « T » et potentielles notée « U ».

E=T+U

L'énergie cinétique de translation d'un corps de masse m et de vitesse v est

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

L'énergie cinétique de rotation d'un corps de moment d'inertie J_Δ autour d'un axe Δ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle d'une masse m dans un champ gravitationnel constant g est

U=mgh. (lors d'une ascension d'une hauteur h)

U=-mgh (lors d'une descente d'une hauteur h)

l'énergie potentielle d'une ressort de raideur k lors d'une déformation d est

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Remarque : l'énergie totale E=T+U est conservée (constante) durant le mouvement si :

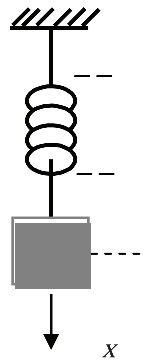
$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Cette équation de conservation de l'énergie donne l'équation du mouvement des systèmes conservés.

Exemples d'oscillateurs harmoniques

Exemple 1 : **Pendule élastique vertical**

Un pendule élastique est constitué d'une masse suspendue à un ressort raideur k et peut donc osciller verticalement avec une élongation (t).
Le système nécessite une seule coordonnée généralisée *x(t)* qui peut dé le mouvement de la masse m et de l'extrémité mobile du ressort.
Donc le système a un seul degré de liberté *d=1.1-0=1.*



L'énergie cinétique du système: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système: l'énergie U emmagasinée dans le ressort dépend de l'allongement des 2 extrémités du ressort. Elle s'exprime:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Le lagrangien du système $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

L'équation de Lagrange est : $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial x}\right] = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \implies \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = m\ddot{x} \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \end{array}\right\} \implies m\ddot{x} - (-kx) = 0$$

En divisant par *m*, on obtient $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

L'équation est bien de la forme

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

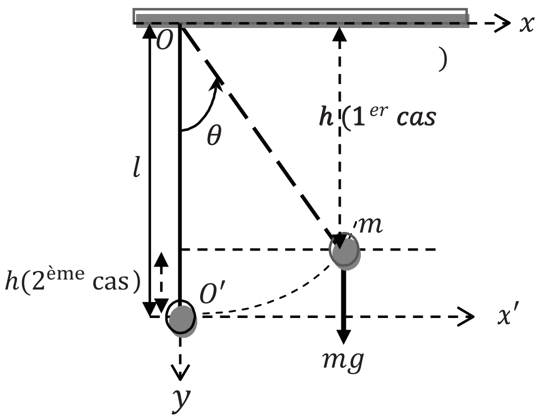
Où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

On voit bien que la pulsation propre du système masse ressort ne dépend que de la masse *m* et la raideur *k.*

La masse oscille donc indéfiniment avec une période propre T_0 donnée par la relation suivante: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Exemple 2 : **Pendule simple**

$\begin{cases} x = l \cdot \sin\theta \\ y = l \cdot \cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = l \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \\ \dot{y} = -l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \end{cases}$



L'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}mv^2$

Avec $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

Ce qui donne que $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle : *U=mgh* (*h* est la hauteur de m par rapport à une référence choisit)

On choisit l'axe ox comme référence

$U = -mgl\cos\theta$

Le lagrangien du système L=T-U= $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] = ml^2\ddot{\theta}$$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta = -mgl\theta$ (petites oscillations sinθ ≈ θ)

On obtient $ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$

Il est préférable de diviser par le terme associé à la deuxième dérivée dans ce cas ml^2 :

On obtient $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Equation de la forme

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Remarque :

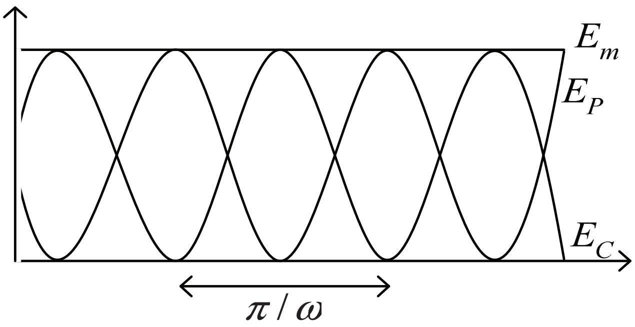
Si on avait choisit l'axe O'X' comme référence pour calculer l'énergie potentielle, on aurait trouvé la même équation du mouvement.

L'étude d'une vibration harmonique en termes d'énergies

Nous voulons montrer que l'énergie totale (mécanique), E=T+U, est constante et déduire la valeur de cette constante. Pour cela prenons $x(t) = A\cos(\omega_0.t+\varphi)$ avec $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$T = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0.t+\varphi)$$
$$U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$
$$\cos^2(\omega_0.t+\varphi) + \sin^2(\omega_0.t+\varphi) = 1, \qquad et \qquad k = m\omega_0^2$$
$$E = T+U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2$$

l'énergie mécanique ne varie pas en fonction du temps t, l'énergie totale est constante



- L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle.
- Quand l'énergie cinétique diminue l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété de est appelée **conservation de l'énergie** totale du système

$\frac{dE}{dt} = 0$.

Cette propriété peut être utilisée pour trouver l'équation du mouvement

Méthode de conservation de l'énergie

Comme démontré dans le paragraphe précédent, on a une conservation d'énergie lorsqu'on cette dernière reste constante au cours du temps est dans le cas où $\frac{dE_T}{dt} = 0$

Exemple

On reprend l'exemple précédent d'un pendule élastique horizontal (masse+ressort).

$$E_T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

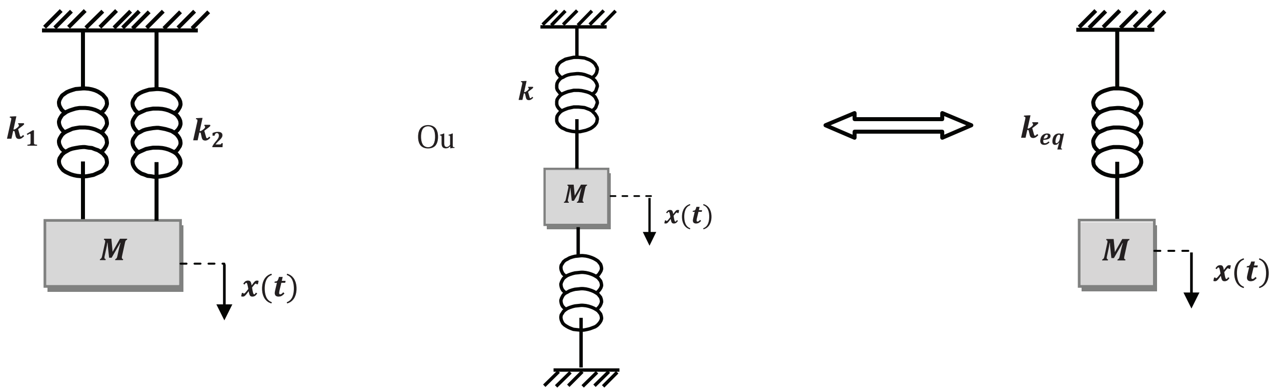
Le système est en mouvement cela veut dire que $\dot{x} \neq 0$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On obtient la même équation que avec la méthode la Lagrange avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Ressorts équivalents :

Ressorts en parallèles

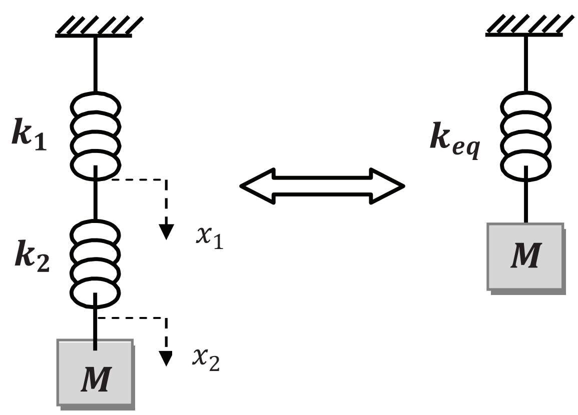


L´élongation de chaque ressort est égale à ***x(t)*** donc :
$M.g = (k_1 + k_2) = keq.x \Longrightarrow \boldsymbol{k_{eq} = k_1 + k_2}$

Ressorts en séries :

Soit x_1 : l'élongation du ressort k_1 tel que : $M.g = k_1\, x_1$

Soit x_2 : l'élongation du ressort k_2 tel que : $M.g = k_2\, x_2$



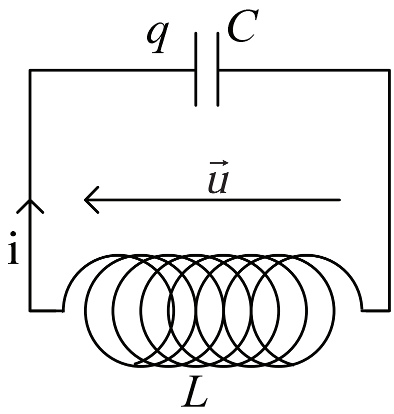
$$x = x_1 + x_2 = Mg.\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \Rightarrow \; k_{eq} = \frac{k_1\, k_2}{k + k}$$

Oscillateur harmonique électrique

Prenons le circuit électrique LC

Par la loi des mailles on a



$V_c + V_l = 0$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Donc $\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

Où $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Oscillations libres amorties à un degré de liberté

1.Introduction :

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas tenu compte de certaines réalités physiques. Comme par exemple les forces de frottements, qui causeraient la perte de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, ainsi que des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps. On parle alors d'**amortissement**

2.Force d'amortissement :

Un système soumis à un frottement est dit amorti. Le frottement le plus simple est le frottement visqueux. Les frottements visqueux sont de la forme

$$f = -\alpha v = -\alpha \dot{q}$$

α *:* constante positive appelée coefficient de frottement $[N.\, s/m]$.

v *:* la vitesse du corps

Le signe moins (-) vient du fait que la force de frottement s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse.
En mécanique, l'amortissement est schématisé par :

3.Equation de Lagrange d'un système amorti

S'il existe un frottement visqueux, l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] = -\alpha \dot{q}$$

En introduisant la fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{q}^2$$

$$f = -\alpha \dot{q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

L'équation de Lagrange d'un système amorti s'écrit avec *(q=x, y, z, θ…)*

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$$

4.Equation du mouvement

L'équation du mouvement d'un système amorti est de la forme

$\ddot{x} + 2\lambda \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (1) ou $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ pour translation

$\ddot{\theta} + 2\lambda \cdot \dot{\theta} + \omega_0^2 x = 0$ pour rotation

Avec

λ : Constante d'amortissement

ω_0 : Pulsation propre

$Q = \dfrac{\omega_0}{2\lambda}$: Facteur de qualité

5.Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle est de la forme

$x(t) = Ae^{rt}$

En remplaçant dans l'équation (1) ($\dot{x}(t) = Are^{rt}$, $\ddot{x}(t) = Ar^2 e^{rt}$)

on obtient

$Ar^2 e^{rt} + 2\lambda \cdot Are^{rt} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0$

$\Rightarrow r^2 + 2\lambda \cdot r + \omega_0^2 A = 0$ Équation caractéristique qui accepte une solution de la forme

$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

De là, il est possible de distinguer trois cas selon que l'amortissement que subit le ressort soit faible, fort ou critique. Cela veut dire aussi suivant le signe du discriminant Δ.

Cas de l'amortissement fort : Δ>0 ==> $\lambda^2 > \omega_0^2$

On pose $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ alors $r_{1,2} = -\lambda \pm \omega$ donne une solution :

$$x(t) = A_1 e^{(-\lambda+\omega)t} + A_2 e^{(-\lambda+\omega)t} \qquad (14)$$

A nouveau, grâce aux conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ on peut calculer A_1 et A_2. On obtient que $A_1 = \dfrac{x_0(\omega - \lambda)}{2\omega}$ et $A_2 = \dfrac{x_0(\omega + \lambda)}{2\omega}$. On obtient comme solution finale :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{\omega t})$$

Dans ce cas le mouvement est dit **Apériodique**

Cas de l'amortissement critique : *Δ=0 ==>* $\lambda^2 = \omega_0^2$

Dans ce cas, l'équation caractéristique nous donne pour solution $r_1 = r_2 = -\lambda$. La solution est :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(A_1 + A_2 t) \qquad (12)$$

A nouveau les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ permettent de calculer A_1 et A_2. On obtient $A_1 = x_0$ et $A_2 = \lambda x_0$. La solution finale est donc :

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}\,(1+\lambda t)$$

Le mouvement est dit en régime **critique**

Cas de l'amortissement faible : *Δ<0 ==>* $\lambda^2 < \omega_0^2$

Dans ce cas, en posant $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda}$, on a que $r_{1,2} = -\lambda \pm \omega i$ qui est une équation dont la solution est :

$$x(t) = A e^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi) \qquad (11)$$

Ce sont les conditions initiales $x(0) = x_0$ qui permettent de calculer C et φ

Le mouvement est dit **pseudo périodique**

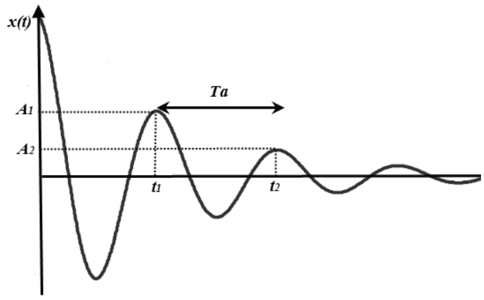
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda}$: Appelée pseudo pulsation

$T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda}}$: Appelée pseudo période

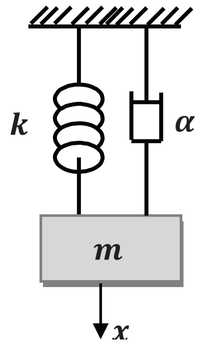
6.Décrément logarithmique

Définition : C'est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillations amorties.

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \lambda T$$



Exemple : système masse-ressort-amortissement



La fonction de dissipation $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange pour un système amorti on aura :

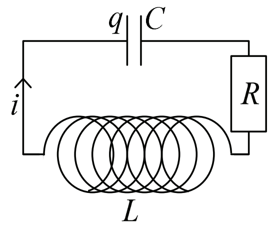
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système masse-ressot libre amorti.

Par rapport aux oscillations libres non amorties, on reconnaît un nouveau terme $\frac{\alpha}{m}\dot{x}$ provenant de la dissipation d'énergie.

$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ [1/s] facteur d'amortissement

6.Oscillateur amorti électrique



Prenons le circuit électrique LC, Par la loi des mailles on a $V_c+V_L+V_R=0$

$$\frac{q}{C}+L\frac{di}{dt}+Ri=0 \Leftrightarrow L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=0 \Leftrightarrow \ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$

C'est donc un oscillateur harmonique amorti avec

$$\lambda=\frac{R}{2L}\,; \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\,;$$

Pour un amortissement critique : $\lambda=\omega_0 \Rightarrow \quad \frac{R}{2L}=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow R=R_c=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

7.Facteur de qualité

Pour décrire l'amortissement d'un système oscillant mécanique ou électrique on emploie le **facteur de qualité *Q*** définit par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{Q=2\pi\frac{E_{max}}{|\Delta E|}}$$

E_{max} : est l'énergie maximale stockée dans le système.

- $|\Delta E|$: est l'énergie perdue par cycle.
- la notion de **qualité** pour caractériser l'oscillateur, comme la grandeur qui traduit l'aptitude du système considéré à garder son énergie tout en oscillant. La qualité est d'autant meilleure que le rapport $\frac{E_{max}}{|\Delta E|}$ est grand.

8.Analogie électromécanique

L'analogie entre le système mécanique masse ressort et le système électrique *RLC* est résumé dans le tableau suivant :

	Electricité	Mécanique
Equation différentielle	$\ddot{u}+\frac{R}{L}\dot{u}+\frac{1}{LC}u=0$	$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$
Variable étudiée	u	x
Dérivée de la variable étudiée		$\dot{x}$
Paramètres de l'oscillateur	R	α
	L	
	C	
Pulsation propre	$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	
Période propre		$T_0=2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$
Facteur de qualité		
Energie de l'oscillateur		

Oscillations forcées amorties à un degré de liberté

1. Introduction :

On a vu que l'amortissement des oscillations était dû à une diminution de l'énergie mécanique sous forme de chaleur dissipée. Pour compenser ces pertes d'énergies et entretenir (conserver) les oscillations, il faut une source d'énergie à travers une force extérieure. On va donc rajouter une force extérieure souvent dite excitatrice.
Il va donc y avoir une force supplémentaire qu'il vaut mieux qu'elle soit colinéaire (harmonique sinusoïdale) au mouvement et qu'elle soit le plus possible dans le sens du mouvement.

2. Equations de Lagrange d'un système forcé :

Si en plus du frottement$f = -\alpha\dot{q}$, il existe une force d'excitation externe F(t), l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial x}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F(t) \quad \text{(cas d'une translation)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = M(t) \quad \text{(cas d'une rotation, M est le moment de la force)}$$

3. Equation du mouvement d'un système forcé

L'équation du mouvement d'un système amorti par $f = -\alpha\dot{q}$ et excité par une force F(t) est de la forme

$$\ddot{q} + 2\lambda \cdot \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F'(t)}{a} \qquad (1)$$

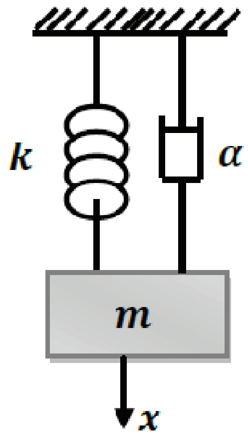
A est une constante

Exemple : système masse-ressort-amortisseur
Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple).L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant une force extérieure *F(t)* A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] - \left[\frac{\partial L}{\partial x}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F(t)$$

Prenons une force sinusoïdale appliquée à la masse m : $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$

La fonction de dissipation $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

En remplaçant dans l'équation Lagrange et en divisant par m, on obtient

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Nous obtenons donc une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

Où

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\alpha}{2m} \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases}$$

Et la constante ***a=m***

4.Résolution de l'équation différentielle du mouvement

La solution générale de l'équation différentielle (1) est la somme de deux termes :
• Une solution de l'équation **sans** second membre : solution Transitoire $x_T(t)$
• Une solution de l'équation **avec** second membre : solution Permanente $x_P(t)$
La solution totale ou générale de l'équation du mouvement sera donc : $x(t)=x_T(t)+x_P(t)$

-Solution transitoire

La solution transitoire correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$\ddot{x} + 2\lambda \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Elle dépend di signe $\lambda^2 - \omega_0^2$

, dans le cas des oscillations faiblement amorties :

$x_T(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Remarque : cette solution ne dure qu'un certain temps

-Solution permanente

Lorsque la composante $x_T(t)$devient vraiment négligeable, il ne reste plus que la solution permanente $x_P(t)$, qui est la solution imposée par la fonction d'excitation. Nous disons que nous sommes en régime forcé ou régime permanent.

La force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle équivalente à la sienne. Donc si $Fext$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω; alors la solution permanente $x_P(t)$ sera une fonction sinusoïdale de même pulsation Ω.

Les oscillations de la masse ne sont pas forcément en phase avec la force excitatrice et présente un déphasage noté φ. La solution permanente correspondant au régime permanent s'écrit dont :

$$x_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) \quad (2)$$

-Solutions générales

Finalement les solutions générales sont :

Cas de l'amortissement faible : $x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + A\sin(\Omega t + \varphi)$

Cas de l'amortissement critique : $x(t) = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) + A\sin(\Omega t + \varphi)$

Cas de l'amortissement fort : $x(t) = C_1 e^{(-\lambda+\omega)t} + C_2 e^{(-\lambda+\omega)t} + A\sin(\Omega t + \varphi)$

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe. La grandeur complexe associée à *x(t)* s'écrit :

$x(t) = Ae^{i(\Omega t+\varphi)}$ (3) $F(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ (4)

En injectant (3) et (4) dans (1) on trouve les valeurs pour A et λ:

L'amplitude

$$A(\Omega) = \frac{F_0 / a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

5-Pulsation de résonance :

La pulsation de résonnance Ω_r correspond à la pulsation pour laquelle le gain A est le maximum.

Cela veut dire qu'on doit résoudre l'équation $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$

Donc $(-4\Omega)(\omega_0{}^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega = 0$

Donc la pulsation de résonance est $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

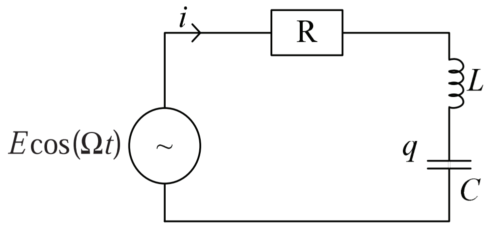
6.Facteur de qualité Q :

Le facteur de qualité de la résonnance est donné par :

$$Q = \frac{\Omega_r^{\ 2}}{2\lambda\omega}$$

7. Oscillateur électrique forcé

Soit le circuit RLC (figure ci-dessous), alimenté par une source de tension alternative



Electrocinétique	q	i	L	$1/C$	R	E
Mécanique	x	v	m	k	α	F

Équation de maille :

$$E\cos(\Omega t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt}$$

donc $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}\cos(\Omega t)$

Oscillations à deux degrés de liberté

1.Définition :
Un système est à plusieurs degrés de liberté (ddl) si plusieurs coordonnées indépendantes sont nécessaires pour décrire son mouvement. Il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté ou de coordonnées généralisées.

2. Systèmes à deux degrés de liberté

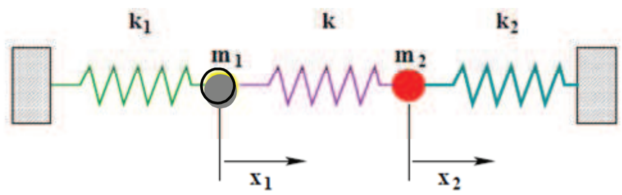
Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange :

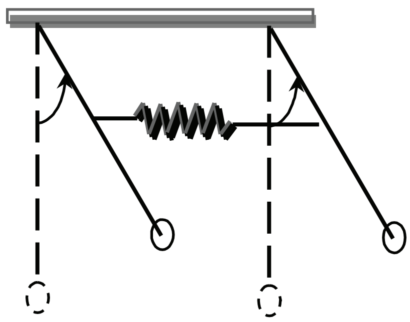
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right] - \left[\dfrac{\partial L}{\partial q_1}\right] + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = F_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right] - \left[\dfrac{\partial L}{\partial q_2}\right] + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = F_2 \end{cases}$$

Un système à 2 degrés de liberté possède 02 coordonnées généralisées, 02 équations différentielles et 02 pulsations propres (ω_1 , ω_2).

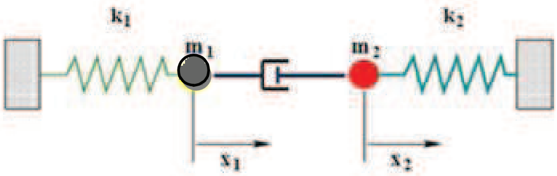
3.Les type de couplages

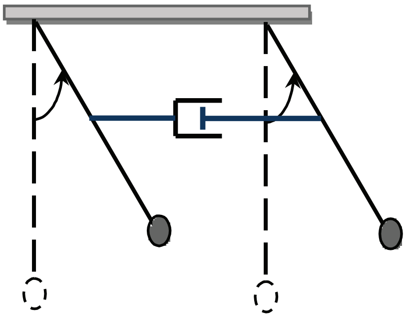
a) Couplage Elastique :
Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.





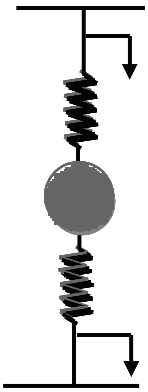
b) Couplage Visqueux :
Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par résistance, équivalents au couplage par amortisseur.

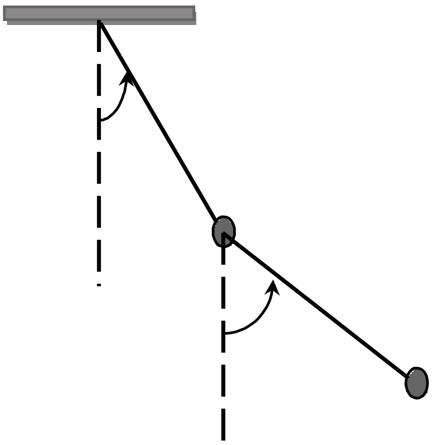




c)Couplage Inertiel :

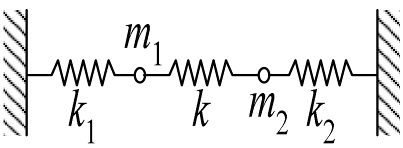
Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.





Exemple

Système masse ressort en translation



$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

L=T-U

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)\,x_1 + kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)\,x_2 + kx_1 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

On remarque l'introduire une force supplémentaire qui, dépendant à la fois de x_1 et de x_2, transforme les équations découplées en un système d'équations couplées:

Modes propres

Définition :
C'est un couple de solutions de l'équation, sinusoïdales de pulsation ω identique pour x_1, x_2 :

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi\ ),\ \ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi\ )$$
$$\ddot{x}_1(t) \ = -\omega^2 A_1\cos(\omega t+\varphi\ )$$
$$\ddot{x}_2(t) \ = -\omega^2 A_2\cos(\omega t+\varphi\ )$$

En remplaçant dans les équations (1)
L'introduction de ces expressions dans le système d'équations précédent donne:

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k\right)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_2 + \left(-\omega^2 m_2 + k_2 + k\ \right)A_2 = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations accepteront une solution si le déterminant caractéristique =0

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k & -k \\ -k & -\omega^2 m_2 + k_2 + k \end{vmatrix}$$

$\Delta(\omega)$: déterminant caractéristique
$\Delta(\omega)$ =0 donne l'équation caractéristique ou l'équation aux pulsations propres qui s'écrit
$(-\omega^2 m_1 + k_1 + k)(\ -\omega^2 m_1 + k_1 + k) - k^2 = 0$
Cette équation admet deux solutions réelles positives ω_1 , ω_2 appelées pulsations propres. La plus petite est appelée fondamentale et la plus grande appelée l'harmonique.

Chacune des coordonnées x et x possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 , ω_2.

$$x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$x_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

Les modes d'oscillations
Le mode c'est l'état dans lequel les éléments dynamiques du système effectuent une oscillation harmonique avec la même pulsation qui correspond à une de ses deux pulsations.

Calcul des modes d'oscillations :

Dans chaque mode les deux masses effectuent des mouvements harmoniques simples avec la même pulsation (***ω_1 ou ω_2***) et les deux pendules passent par la position d'équilibre au même instant.

Premier mode : lorsque $A_{12}=A_{22}=0$, x_1 et x_2 correspondant à la première solution particulière et sont des fonctions sinusoïdales. Les deux masses oscillent en phase avec la pulsation ω_1 ; on dit que le système oscille dans le premier mode.

$$x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (2)$$
$$x_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Deuxième mode : lorsque $A_{11}=A_{21}=0$, x_1 et x_2 correspondant à la deuxième solution particulière et sont des fonctions sinusoïdales. Les deux masses oscillent en opposition de phase avec la pulsation ω_2 ; on dit que le système oscille dans le deuxième mode.

$$x_1(t) = A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3)$$
$$x_2(t) = A_{22}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Notons cependant que les valeurs des A_{11}, A_{21} , A_{12} et A_{22} ne sont pas indépendantes, cela peut être montré par l'exemple du système masse ressort

Exemple

On peut obtenir le rapport d'amplitudes dans le premier mode ou le fondamentale.

On remplace le système d'équations (2) dans (1)

On obtient

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k\right)A_{11} - kA_{21} = 0 \\ -kA_{11} + \left(-\omega^2 m_2 + k_2 + k\right)A_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{21}}{A_{11}} = \mu_1 = \frac{-\omega_1^2 m_1 + k_1 + k}{k}$$

De même, on peut obtenir le rapport d'amplitudes dans le seconde mode .

On remplace le système d'équations (3) dans (1)

On obtient

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k\right)A_{12} - kA_{22} = 0 \\ -kA_{12} + \left(-\omega^2 m_2 + k_2 + k\right)A_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = \mu_2 = \frac{-\omega_2^2 m_2 + k_2 + k}{k}$$

La solution générale(x1 , x2) est une combinaison linéaire de deux solution particulières. X1 et x2 s'écrivent :

$$x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = \mu_1 A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Où A_{11} , A_{12} , φ_1 et φ_2, dont des constantes dont les valeurs sont fixées par les conditions initiales

Cas particulier de deux oscillateurs identiques

Pour illustrer cette notion, étudions le système précédent dans le cas où celui-ci est symétrique, c'est-à-dire $m_1 = m_2 = m$, et $k_1 = k_2 = k$

Concernant le ressort de couplage ou de liaison, sa raideur est *K.*

Dans ce cas on obtient deux pulsations propres, qui sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1+\frac{2K}{k}} = \omega_0\sqrt{1+\frac{2K}{k}}$$

Concernant le rapport d'amplitude on obtient

dans ce cas $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = -1$

On voit alors, puisque les deux pulsations sont différentes, que le mouvement de chacune des masses n'est *à priori* pas harmonique. En effet; ces mouvements sont des combinaisons linéaires de deux mouvements harmoniques. Cependant, dans deux cas très précis, ils le deviennent, et ce sont ces cas que l'on appelle des modes.

a) Mode symétrique: $x_1(0) = x_2(0) = a$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$:

On obtient alors les conditions initiales:

$$\begin{matrix} a = A_{11}\cos\phi_1 + A_{12}\cos\phi_2 \\ 0 = -\omega_1 A_{11}\sin\phi_1 - \omega_2 A_{12}\cos\phi_2 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} a = A_{21}\cos\phi_1 + A_{22}\cos\phi_2 \\ 0 = -\omega_1 A_{21}\sin\phi_1 - \omega_2 A_{22}\sin\phi_2 \end{matrix}$$

Or les coefficients sont reliés ici par les relations: $A_{21} = A_{11}$ et $A_{22} = -A_{12}$, ce qui donne alors

$$\begin{matrix} a = A_{11}\cos\phi_1 + A_{12}\cos\phi_2 \\ 0 = -\omega_1 A_{11}\sin\phi_1 - \omega_2 A_{12}\sin\phi_2 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} a = A_{11}\cos\phi_1 - A_{12}\cos\phi_2 \\ 0 = -\omega_1 A_{11}\sin\phi_1 + \omega_2 A_{12}\sin\phi_2 \end{matrix}$$

On voit alors immédiatement que ceci implique $\phi_1 = \phi_2 = 0$, et que $A_{11} = a$ et $A_{12} = 0$. On a donc alors bien:

$$x_1 = a\cos(\omega_1 t),\ x_2 = a\cos(\omega_1 t), \text{ soit } \boxed{x_1 = x_2}$$

Les deux masses oscillent en phase à la même pulsation. Le système oscille dans le mode fondamentale.

Il s'agit bien là d'un mode, puisque les mouvements sont redevenus harmoniques malgré le couplage.

b) Mode antisymétrique: : $x_1(0) = -x_2(0) = a$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$:

Le système d'équation est alors identique pour les dérivées, ce qui donne toujours $\phi_1 = \phi_2 = 0$, mais cette fois on trouve $A_{11} = 0$ et $A_{12} = a$, soit:

$x_1 = a\cos(\omega_2 t)$ et $x_2 = -a\cos(\omega_2 t)$, soit $\boxed{x_1 = -x_2}$

Les deux masses oscillent en opposition de phase à la même pulsation. Le système oscille dans le mode harmonique.

Cette étude faite dans un cas particulier se généralise à toutes les situations, et on peut alors dire que tout système d'oscillateurs couplés présente deux modes propres.

Phénomène de battement

On reprend l'exemple précédent :

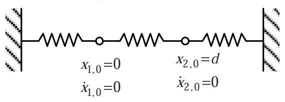
On a $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_0$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\sqrt{1+\dfrac{2K}{k}} = \omega_0\sqrt{1+\dfrac{2K}{k}}$

Si $K << k$, $\omega_2 \approx \omega_0 (1+\dfrac{K}{k})$.

$x_1(0) = a,\qquad x_2(0) = 0\quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$\phi_1 = \phi_2 = 0$

A11=A12=a/2



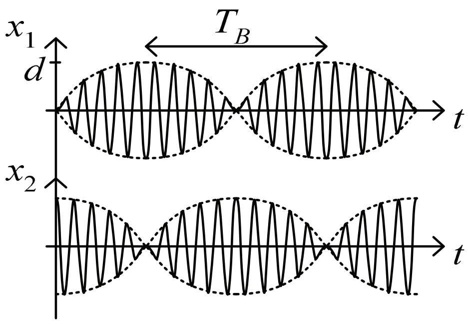
On a $x_1(t) = \dfrac{a}{2}\cos(\omega_1 t) + \dfrac{a}{2}\cos(\omega_2 t)$,

Et $x_2(t) = \dfrac{a}{2}\cos(\omega_1 t) - \dfrac{a}{2}\cos(\omega_2 t)$

Donc après calcul :

Et $x_1 = a\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$

$x_2 = a\sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$



Lorsque le couplage est faible (k faible), les pulsations propres des 2 oscillateurs (ω_1 *et* ω_2) sont voisines ($\omega_1 \approx \omega_2 \Longrightarrow \Delta\,\omega = \omega_2 - \omega_1$ *est faible*), il se produit un phénomène de battement. Les 2 oscillateurs se transmettent de l'énergie entre eux et vibres avec une pulsation ω égal à la moyenne des deux pulsations propres $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Tandis que la pulsation du battement est égale à $\omega_B = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

4. Oscillations forcées à deux degrés de libertés :

On prend l'exemple précédent **(masse-ressort)** c'est-à-dire $m_1 = m_2 = m$, et $k_1 = k_2 = k$**,** l'une des deux parois fixes (par exemple, celle du côté de la masse 1) devient un vibreur. les équations du mouvements 'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k+K)\,x_1 + Kx_2 = F_0\cos(\Omega t) \\ m\,\ddot{x}_2 + (k+K)\,x_2 + Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Résolution de l'équation :

La solution générale du système est la somme de la solution transitoire+ la solution permanente. La solution transitoire tend vers zéro lorsque le temps augmente, il ne reste que la solution permanente

$$x_1(t) = X_1\cos(\Omega\ t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = X_2\cos(\Omega\ t + \varphi_2)$$

Pour calculer x_1 et x_2, utilisons la représentation complexe déjà utilisée dans le chapitre précédent

$$F_o\cos\omega t = \mathrm{Re}\left[\underline{f} = F_o e^{j\omega t}\right],\ x_1 = \mathrm{Re}\left[\underline{x_1} = \underline{X_1 e^{j\omega t}}\right],\ x_2 = \mathrm{Re}\left[\underline{x_2} = \underline{X_2 e^{j\omega t}}\right]$$

On obtient

$$X_1 = \frac{F_o}{m}\frac{\Omega_a^2 - \Omega^2}{\left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)},\ X_2 = \frac{KF_o}{m^2}\frac{.\Omega_a^2}{\left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)},\ \Omega_a^2 = \sqrt{\frac{k+K}{m}}$$

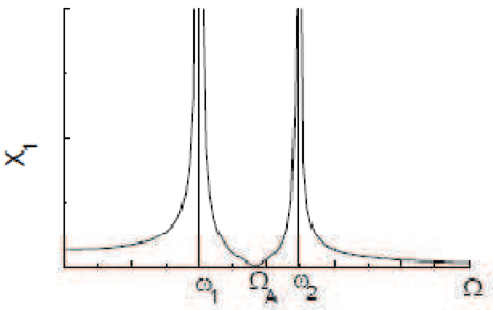
Résonances et antirésonance : en l'absence de frottements, les amplitudes de vibration X_1 et X_2 (qui sont réelles, donc les oscillateurs sont en phase ou en opposition de phase) sont infinies (résonances) pour $\omega = \omega_1$ *ou* ω_2. Pour $\omega = \omega_a$, on a $X_1 = 0$ (antirésonance). L'introduction de frottements fluides qu'une chose : limiter l'amplitude des vibrations aux résonances.ne modifierait

$X_1=X_2=\infty$ ==> $\begin{cases} \Omega = \omega_1 = \Omega_{R1} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \Omega = \omega_2 = \Omega_{R2} = \sqrt{\dfrac{k+2K}{m}} \end{cases}$ Appelée première pulsation de résonance

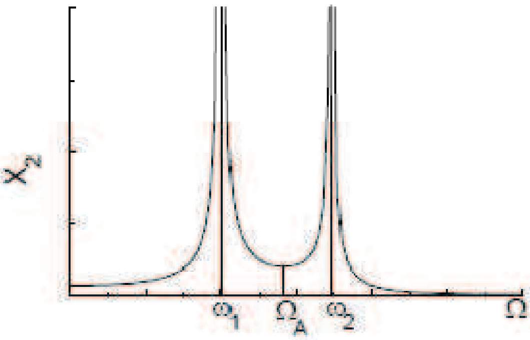
Appelée deuxième pulsation de résonance

$X_1=0$ lorsque $\Omega=\Omega_A$ appelée pulsation d'antirésonance

Les figure ci-dessous montrent la variation de X_1 et X_2 en fonction de Ω



Variation de X_1 en fonction de Ω



Variation de X_2 en fonction de Ω

Ondes mécaniques

1. Définitions

On appelle **onde mécanique progressive** le phénomène de propagation d'une perturbation mécanique dans un milieu matériel élastique sans transport de matière.
La direction dans laquelle la perturbation se déplace représente la direction de propagation de l'onde.

Exemple

- **Déformation qui parcourt une corde**
  Une dimension 1D

- **Perturbation dans une cuve à onde**
  Deux dimensions 2D

Ondes sonores et ondes lumineuse
Trois dimensions 3D

Remarque
Les ondes lumineuses sont des ondes électromagnétiques

Nature des ondes

On distingue deux sortes d'ondes : les ondes transversales et les ondes longitudinales.

Ondes transversales : Si la déformation du milieu matériel est perpendiculaire à la direction de propagation de la perturbation, l'onde est dite transversale.

Ondes longitudinales : Si la déformation du milieu matériel et la propagation de l'onde se font dans la même direction (direction de propagation // à la direction de la déformation), l'onde est dite longitudinale.

Célérité d'une onde

Définition : La **célérité** v d'une onde représente la vitesse de propagation de l'onde. Si une onde parcourt une distance $d = MM$ pendant la durée $\Delta t = t - t$, sa célérité v est :

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

v : célérité de l'onde en $m \cdot s^{-1}$
d : distance en mètre (m)
Δt : durée en seconde (s)

On utilise le terme célérité au lieu de vitesse car la propagation s'effectue sans transport de matière.

2.Onde mécanique progressive périodique

1 Définition

Une onde progressive est une perturbation périodique (qui se répète dans le temps) et qui se déplace dans l'espace, tels les vagues à la surface de l'eau, les ondes sonores, ou les ondes électro-magnétiques.

Equation de propagation d'une onde à une dimension

Dans les phénomènes vibratoires traités dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps. Nous allons maintenant examiner toute une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps t et d'une variable d'espace, x par exemple.

Ces phénomènes sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation de d'Alembert ou équation d'onde ou encore équation de propagation à une dimension de la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

dans laquelle V est une grandeur physique qui a les dimensions d'une vitesse et sera appelée dans la suite vitesse de propagation.

Solution de l'équation de propagation
Méthode de d'Alembert

Pour résoudre l'équation des ondes à une dimension, opérons le changement de variable suivant :

$$\eta = t - \frac{x}{V}$$
$$\xi = t + \frac{x}{V}$$

Calculons les dérivées partielles par rapport à t et x, en fonction des dérivées partielles par rapport à η et ξ.

Sachant que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

Et que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{V}$$

On obtient

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{\partial s}{\partial \xi}\right)$$

En tenant compte de ces résultats et sachant que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial^2 s}{\partial \xi \partial \eta}$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\left\{\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2}\right\}$$

En remplaçant dans l'équation d'onde par les expressions ci-dessus, on obtient l'équation d'onde exprimée en fonction des dérivées partielles par rapport aux variables η et ξ :

Cette dernière équation peut s'écrire $\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial s}{\partial \eta}\right) = 0$$

Une intégration par rapport à ξ donne :

$$\frac{\partial s}{\partial \eta} = \mathbf{f}(\eta)$$

où $\mathbf{f}(\eta)$ est une fonction qui ne dépend que de η (et pas de ξ). Enfin une intégration par rapport à η donne :

$$s(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$$

où $F(\eta)$, qui ne dépend que de η, est une primitive de $\mathbf{f}(\eta)$. La fonction $G(\xi)$ est une fonction
qui ne dépend que de ξ. En revenant aux variables x et t, on obtient la solution générale de l'équation des ondes à une dimension :

$$s(x,t) = F(t-\frac{x}{V}) + G(t+\frac{x}{V})$$

Les fonctions $F(t-\frac{x}{V})$ et $G(t+\frac{x}{V})$ sont des fonctions dont la nature est fixée par les conditions aux frontières imposées à la solution s (x, t).

Remarque

$F(t-\frac{x}{V})$ Correspond à une onde se propageant dans le sens des *x, elle* est appelée onde progressive et cette expression constituera dans la suite la définition d'une onde progressive.

$G(t+\frac{x}{V})$ Correspond à une onde se propageant dans le sens des *x* décroissants

3.Ondes stationnaires

-Définition

On appelle onde stationnaire le phénomène vibratoire résultant de la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation ω se propageant en sens contraire. Des ondes stationnaires se produisent par exemple par la superposition d'une onde incidente et de son onde réfléchie par un obstacle.

3.1 Lois de la réflexion:

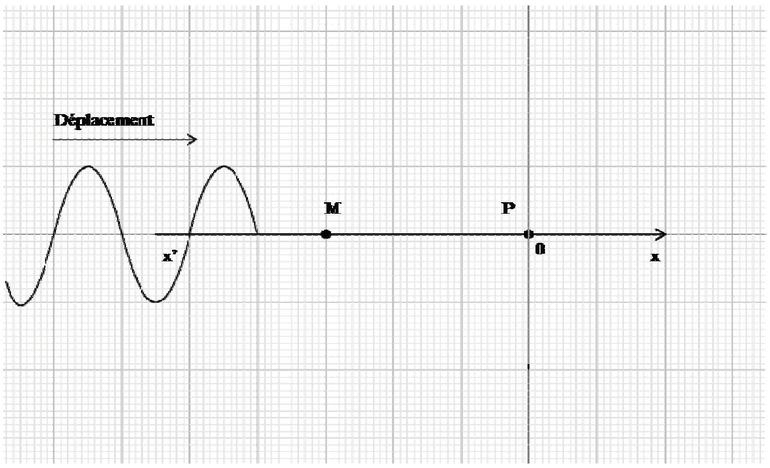
L'onde réfléchie se propage à la même vitesse que l'onde incidente.
Si la réflexion se fait sans perte d'énergie, l'onde réfléchie à la même amplitude que l'onde inci- dente.
La réflexion introduit un déphasage ϕ entre l'onde réfléchie et l'onde incidente.
si $\phi = 0$ l'onde réfléchie et l'onde incidente sont en phase. (cas d'une corde vibrante dont l'extré- mité est libre)
si $\phi = \pi$ l'onde réfléchie et l'onde incidente sont en opposition de phase. (cas d'une corde vibrante dont l'extrémité est fixe)

3.2 Lois de superposition:

Dans un milieu de propagation linéaire (c'est en particulier le cas pour le vide dans lequel se propagent les ondes électromagnétiques), un point M, sous l'action simultanée de deux perturbations $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sera soumis à la somme $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$

3.3 Etude Théorique

Prenons le cas d'un milieu de propagation non absorbant (l'amplitude des ondes n'est pas amortie au cours de leur propagation) à une dimension d'espace (le long d'une droite donc) et limité d'un côté par un obstacle (en orange sur le graphique) réfléchissant l'onde sans perte d'énergie au point P.



Soit une onde progressive incidente, sinusoïdale d'amplitude A se propageant vers le point P. L'onde incidente provoque au point M

$$S_{iM}(t) = A\cos(\omega t - kx)$$

L'onde réfléchie provoque au point M

$$S_{rM}(t) = A\cos(\omega t + kx + \phi)$$

Sous l'action de ces deux ondes agissant simultanément, le point M subit la perturbation résul- tante S_M (t) telle que $S_M(t) = S_{iM}(t) + S_{rM}(t)$

$$S_{rM}(t) = A[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \phi)]$$

$$S = 2A\cos(kx + \frac{\phi}{2})\cos(\omega t + \frac{\phi}{2})$$

C'est une fonction sinusoïdale du temps (facteur $\cos(\omega t + \frac{\phi}{2})$)

et d'amplitude $2A\cos(kx + \frac{\phi}{2})$ qui est une fonction sinusoïdale de la position x.

Remarquons que l'amplitude maximale est 2A soit le double de l'amplitude maximale du signal incident.

4.Vitesse de phase

Considérons une onde progressive sinusoidale qui se propage dans le sens des x croissants. Un point d'abscisse x possède, à l'instant, l'élongation :

$$s\,(x,\ t) = S_0 \cos(\omega t\text{-}kx)$$

Entre l'instant t et t + Δt l'onde progresse d'une quantité Δx. A l'instant t + Δt, le point d'abscisse x + Δx possède la même élongation que celle que possédait le point d'abscisse x à l'instant antérieur t. Ceci se traduit par l'égalité :

$$s\,(x,\ t) = s\,(x + \Delta x, t + \Delta t)$$
$$S_0 \cos(\omega t - kx) \ = S_0 \cos[\omega\ (t + \Delta t) - k\,(x + \Delta x)]$$

Cette égalité est satisfaite si les phases instantanées sont égales :

$$\omega t - kx = \omega\ (t + \Delta t) - k\,(x + \Delta x)$$

Soit encore

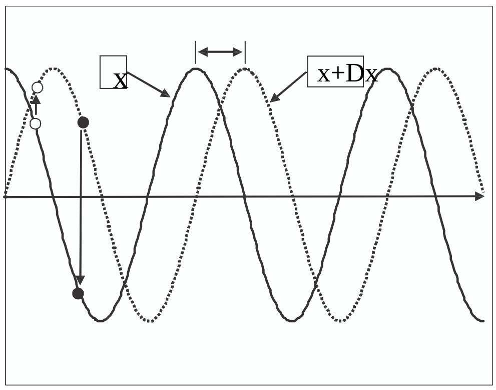
$$\omega\ \Delta t = k\ \Delta x$$

On définit la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ qui s'exprime en fonction de ω et k par :

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de ω, le milieu est dit non dispersif. Dans le cas contraireil est dit dispersif.

La figure ci-dessous permet d'illustrer la notion de vitesse de phase en considérant deux représentations à des instants différents d'une corde parcourue par une onde. La courbe continue représente l'ensemble des points de la corde à l'instant t. Le point de la corde d'abscisse x est représenté par le point blanc, tandis que le point d'abscisse x + Δx est représenté par le point noir. On constate qu'entre les instants t et t + Δt chacun de ces points suit une trajectoire rectiligne et le déplacement du point noir à l'instant t + Δt est égal au déplacement du point blanc à l'instant t. En particulier la crête de la corde, correspondant à une valeur particulière de la phase instantanée, semble se déplacer dans le sens de propagation de l'onde avec la vitesse de V_φ mais la trajectoire de chaque point matériel est une trajectoire rectiligne perpendiculaire à la direction de propagation.



5.CORDE VIBRANTE

Introduction

La vibration d'une corde de violon est un phénomène physique complexe, néanmoins, sous certaines hypothèses simplificatrices, nous allons pouvoir modéliser ce phénomène à l'aide d'une équation aux dérivées partielles que nous allons pouvoir résoudre.

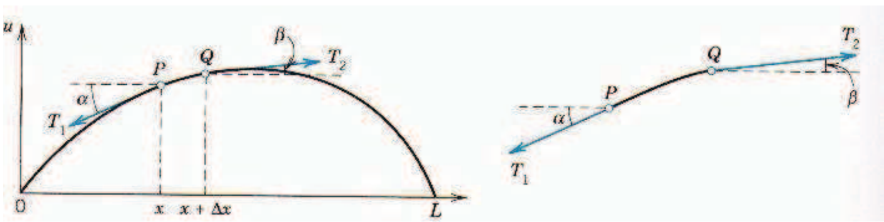
La corde vibrante

Soit une corde de violon, dont les deux bouts sont fixés, l'un à l'abscisse $x = 0$, l'autre à l'abscisse $x = L$. Le problème consiste à déterminer les vibrations de cette corde lorsqu'on le relâche du pincement. Il s'agit de connaître en tout point de l'axe des x et à tout instant t, la déviation transversale u. Il s'agit donc de trouver la fonction $u(x,t)$ qui soit solution de l'équation de vibration.

Pour poser cette équation de vibration, nous allons assumer les données physiques

- La masse de la corde est répartie uniformément par unité de
- La corde est entièrement élastique et n'a pas de frottement (résistance de déformation mécanique de la
- Les mouvements transverses sont tellement petits qu'on peu considérer que chaque point de la corde se
- La tension de rappel de la corde est si élevée qu'on peut négliger l'apport de la force de gravitation sur la

Dans ces conditions on peut chercher l'équation d'équilibre des forces comme suit (voir figure ci-



Étant donnée l'absence de résistance mécanique de déformation, la tension est toujours tangentielle à la

De plus comme nous avons postulé que tous les points de la corde n'effectue qu'un mouvement strictement

Ainsi, si au point F la corde subit une tension $\vec{T1}$ et qu'au point Q elle subit un tension $\vec{T2}$, les composantes

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$$

où $T = const$ est la tension originelle de la

Dans le sens vertical, la seconde loi de Newton nous donne que le résultante des forces provoque une

Accélération verticale

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho.\Delta x.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

En divisant cette équation par la précédente, nous obtenons

Densité linéaire massique

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho.\Delta x}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Soit :

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho.\Delta x}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

or $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ sont respectivement les pentes aux points x et $x+\Delta x$. C'est

$$\tan\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \qquad \text{et} \qquad \tan\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

d'où l'équation

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right] = \frac{\rho}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit lorsque Δx est infiniment

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que l'on met souvent sous forme

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

C'est la forme de l'équation de la corde vibrante simplifiée, mais c'est aussi l'équation d'onde A dimension qu'on retrouve pour la propagation des ondes électromagnétiques