



**Université de Ain Temouchent –Belhadj Bouchaib**

**Faculté des Sciences et de la Technologie**

Département Geni-Mécanique  
Laboratoire (facultatif) IS2M-Tlemcen

# **Polycopié pédagogique**

**Présenté par : Dr. ASSEUM Hassan**

**Titre**

**Dynamique des Machines Tournantes**

Cours destiné aux étudiants de

Master (spécialité et niveau): Master 2 Construction Mécanique.

Année : 2022 - 2023

## **Avant-propos**

Les ensembles tournants sont des structures aux formes et aux comportements très complexes qui sont aux cœurs des équipements Industriels, Dans la transformation d'énergie, Dans le transport terrestre, aéronautique et maritime: Sachant qu'ils ont une influence directe et prépondérante sur la fiabilité et les rendements, ils font l'objet d'études de plus en plus fines et précises pour l'amélioration et l'évolution vers des ensembles de hautes technologies. Les exigences de tous ces équipements sont bien entendu le premier souci du concepteur et pour toutes ces machines on cherche à comprendre et à maîtriser tous les phénomènes vibratoires générés par les vibrations des rotors de ces machines tournantes Ce polycopié pédagogique est destiné aux étudiants de la deuxième année master constructions mécaniques ou élèves ingénieurs en maintenance industrielle, et productique. IL couvre en chapitre 1 la cinématique des rotors et les notions de base de la dynamique des machines et les systèmes des coordonnées et les phénomènes vibratoires générés par un rotor de Laval Jeffcott, le chapitre 2 couvre les diagrammes de Campbell et leurs interprétations : symétrie ou dissymétrie des paliers, effet gyroscopique, et rigidité des rotors de laval. J et la notion des vitesses critiques, le chapitre 3 porte sur la formulation par la méthode des éléments finis une méthode numérique appliquée et expliquée pour résoudre l'équation du mouvement du rotor de Laval J et déterminées les fréquences vibratoires .le chapitre IV traite la notion de la dynamique des rotors en torsion et le chapitre V couvre la notion d'équilibrage avec un cas pratique d'équilibrage sur machine.

## Liste des symboles

$\{r_p\}$	.....Vecteur position d'un point de la section droite / au repère fixe
$\{R_p\}$	.....Vecteur position d'un point de la section droite / au repère mobil..
$[Q]$	.....Matrice de passage du repère mobil au repère fixe.
$\{B\}$	.....Vecteur déplacement.
$u$	.....Déplacement suivant l'axe ox du repère fixe
$w$	.....Déplacement suivant l'axe oz du repère fixe
$u^*$	.....Déplacement suivant l'axe oz du repère mobil
$w^*$	.....Déplacement suivant l'axe oz du repère mobil
$\phi$	..... Angle de rotation.
$[\dot{\phi}]$	..... Matrice des vitesses de rotations.
$\Omega$	.....Vitesse de rotation de l'arbre.
$u_0(y)$	.....Déplacement transversal selon oy
$w_0(y)$	.....Déplacement transversal selon oz
$\psi(y)$	.....Rotation de l'arbre autour de oz selon oz
$\theta(y)$	.....Rotation de l'arbre autour de oz selon ox
$\delta u$	.....Déplacement virtuel sur ox
$\delta w$	.....Déplacement virtuel sur oz
$a$	.....Diamètre intérieur de l'arbre
$b$	..... Diamètre extérieur de l'arbre
$A$	..... Diamètre intérieur du disque
$B$	..... Diamètre extérieur du disque
$F_i$	..... Force généralisée.
$\rho_A$	.....Masse volumique de l'arbre
$\rho_D$	.....Masse volumique du disque
$E_{dA}$	.....Energie de déformation de l'arbre
$E_{cA}$	.....Energie cinétique de l'arbre.
$E_{CD}$	..... Energie cinétique du disque.

$\varepsilon_l$  .....Déformation linéaire  
 $\sigma$  .....Contrainte  
 $E$  .....Module d'young  
 $I_x$  .....Moment d'inertie par rapport a l'axe oz.  
 $I_z$  .....Moment d'inertie par rapport a l'axe ox.  
 $I_m$  .....Moment d'inertie moyen.  
 $I_a$  .....Moment d'inertie asymétrique  
 $K_{xx} = K_{p11}$  .....Raideur des paliers suivant ox  
 $K_{zz} = K_{p22}$  .....Raideur des paliers suivant oz  
 $K_{zx} = K_{p21}$  .....Raideur des paliers des termes croisés  
 $dw$  .....Travail des forces virtuels  
 $P_{ax}$  .....Force axiale  
 $N_u$  ..... fonction de forme suivant ox.  
 $N_w$  ..... fonction de forme suivant oz.  
 $\{q\}$  .....Coordonnée généralisée  
 $S_D$  .....Section du disque.  
 $S_A$  ..... Section de l'arbre.  
 $e$  .....Epaisseur du disque.  
 $L$  ..... longueur de l'arbre.  
 $L$  .....longueur de l'élément de référence  
 $[R_D]$  .....Matrice de rigidification centrifuge globale du disque  
 $[R_{DU}]$  .....Matrice de rigidification centrifuge du disque suivant le plan xoy.  
 $[R_{Dw}]$  .....Matrice de rigidification centrifuge du disque suivant le plan zoy.  
 $[M_D]$  .....Matrice masse global du disque  
 $[M_{DU}]$  .....Matrice masse du disque suivant le plan xoy.  
 $[M_{Dw}]$  .....Matrice masse du disque suivant le plan zoy.  
 $[C_{gD}]$  .....Matrice gyroscopique globale du disque  
 $[C_{gDU}]$  .....Matrice gyroscopique du disque suivant le plan xoy.  
 $[C_{gDw}]$  .....Matrice gyroscopique du disque suivant le plan zoy.

$[R_A]$  .....Matrice de rigidification centrifuge globale de l'arbre.  
 $[R_{AU}]$  .....Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre suivant le plan xoy.  
 $[R_{Aw}]$  .....Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre suivant le plan zoy.  
 $[M_A]$  .....Matrice masse du globale de l'arbre.  
 $[M_{AU}]$  ..... Matrice masse de l'arbre suivant le plan xoy.  
 $[M_{Aw}]$  .....Matrice masse de l'arbre suivant le plan zoy.  
 $[C_{gA}]$  .....Matrice gyroscopique globale de l'arbre.  
 $[C_{gAU}]$  .....Matrice gyroscopique de l'arbre suivant le plan xoy.  
 $[C_{gAw}]$  ..... Matrice gyroscopique de l'arbre suivant le plan zoy.  
 $[K_A]$  .....Matrice de rigidité globale de l'arbre.  
 $[K_{AU}]$  .....Matrice de rigidité de l'arbre suivant le plan xoy.  
 $[K_{Aw}]$  .....Matrice de rigidité de l'arbre suivant le plan zoy.  
 $\xi'$  .....Constante d'amortissement due aux paliers  
 $M_t$  .....Masse totale du rotor.  
 $E_{CR}$  .....Energie cinétique du rotor.  
 $E_{CD}$  .....Energie cinétique du disque.  
 $E_{CA}$  ..... Energie cinétique de l'arbre.  
 $K$  .....Raideur globale  
 $K_A$  .....Raideur de l'arbre.  
 $K_P$  .....Raideur des paliers  
 $R$  .....Rigidification global  
 $\lambda$  .....Facteur scalaire  
 $P$  ..... Amplitude de la grandeur complexe.  
 $I_{Ad}$  .....Moment d'inertie diamétral de l'arbre  
 $I_{Ap}$  ..... Moment d'inertie polaire de l'arbre  
 $I_{Dd}$  ..... Moment d'inertie diamétral du disque  
 $I_{Dp}$  ..... Moment d'inertie polaire du disque.  
 $I_R$  ..... Moment d'inertie du rotor.

## Liste des figures

<b>Figure 1.0</b>	Model d'un rotor Laval Jefcott.....	4
<b>Figure 1.1</b>	Présentation d'un rotor simple avec disque .....	4
<b>Figure 1.2</b>	Poutre d'Euler Bernoulli avant et après déformation .....	5
<b>Figure 1.3</b>	Repères de référence du disque .....	6
<b>Figure 1.4</b>	Nutation, la précession et les cones qu'ils décrivent .....	7
<b>Figure 1.5</b>	Coordonnées fixes et mobile de l'arbre en rotation.....	8
<b>Figure 1.6</b>	Rotation de l'arbre autour de l'axe OY .....	10
<b>Figure 1.7</b>	Déformation de l'arbre et ses repères .....	11
<b>Figure 1.8</b>	Paliers hydrodynamique.....	13
<b>Figure 1.9</b>	Model d'un palier .....	14
<b>Figure 2.1</b>	Diagramme de Campbell .....	16
<b>Figure 2.2</b>	Les trois premiers Modes vibratoires d'une poutre.....	16
<b>Figure 2.3</b>	Déformé modale par rapport à la rigidité des paliers .....	17
<b>Figure 2.4</b>	Diagramme de Campbell et vitesse critique. ....	18
<b>Figure 2.5</b>	Symétrie et dissymétries des paliers sur le diagramme de Campbell .....	19
<b>Figure 2.6</b>	Diagrammes de Campbell des six premiers modes de vibration d'un Rotor .....	19
<b>Figure 3.1</b>	Représentation d'un élément de poutre de type p.....	21
<b>Figure 3.2</b>	déformation de l'arbre autour de l'axe .....	22
<b>Figure 3.3</b>	Déformation de l'arbre autour de l'axe. ....	23
<b>Figure 3.4</b>	Degrés de libertés d'un disque .....	24
<b>Figure 3.5</b>	Degrés de libertés d'un élément arbre .....	30
<b>Figure 4.1</b>	Torsion d'un Arbre avec disque.....	38
<b>Figure 4.2</b>	Système tournant avec un disque .....	40
<b>Figure 4.3</b>	Rotor a deux disques .....	41
<b>Figure 5.1</b>	palier lisse a coussinet.....	44
<b>Figure 5.2</b>	palies lisse a coussinet réglable.....	44
<b>Figure 5.3</b>	Palier lisse a coussinet a bouchon de lubrification.....	44

<b>Figure 5.4</b> Palier a roulement (Rotation de l arbre).....	45
<b>Figure 5.5</b> Palier a roulement pour la rotation et la translation de l'arbre.....	45
<b>Figure 5.6</b> Roulement a billes a contactes radials.....	45
<b>Figure 5.7</b> Roulement a rouleaux coniques.....	46
<b>Figure 5.8</b> Roulement a butées a billes.....	46
<b>Figure 5.9</b> Phases de fonctionnement d'un palier hydrodynamique.....	46
<b>Figure 5.10</b> Géométrie d'un Palier hydrodynamique.....	47
<b>Figure. 6.1</b> Turbine a gaz MS 5002B.....	52
<b>Figure 6.2</b> Origines des Balourds.....	53
<b>Figure 6.3</b> Mesure d'un Balourd pour un Rotor en porte à faux.....	54
<b>Figure 6.4</b> Signal vibratoire d'un balourd.....	54
<b>Figure 6.5</b> Balourd statique.....	54
<b>Figure 6.6</b> Déplacement de l'axe de rotation. ....	55
<b>Figure 6.7</b> Balourd dynamique.....	55
<b>Figure 6.8</b> Balourd de masse m.....	55
<b>Figure 6.9</b> Excentricité e du centre de rotation.....	56
<b>Figure 6.10</b> Rotor après le démontage.....	57
<b>Figure 6.11</b> Arbre et roues encrassées.....	57
<b>Figure 6.12</b> Mesure de la flèche.....	58
<b>Figure 6.13</b> Position du rotor sur la machine. ....	60
<b>Figure 6.14</b> Nomogramme pour la détermination de l'arbre d'entraînement maximum admissible en fonction de qualité d'équilibrage.....	61
<b>Figure 6.15</b> Model du système tournant.....	61
<b>Figure 6.16</b> Rotor avec ses impulseurs sur la machine a équilibrer H6V. ....	62
<b>Figure 6.17</b> Enlèvement de la matière sur un impulseur.....	63

# SOMMAIRE

## LISTE DES SYMBOLES

## LISTE DES FIGURES

1.Introduction .....	1
2.Historique, contexte et importance de la dynamique des Rotors.....	2

### **Chapitre I : Dynamique des Machines Tournantes**

1 Introduction .....	4
2.Eléments d'un Rotor.....	4
3. Model simple d'un Rotor de Lvl Jefcott.....	4
3.1-Hypothèses cinématiq.....	5
4.Système de coordonnées.....	6
4.1 Vitesse d'un point de la section droite d'un arbre.....	6
4.2 Energie cinétique de l'arbre .....	9
4.3 Energie cinétique du disque .....	10
4.4 Energie de déformation de l'arbre.....	10
4.5 Paliers .....	13
4.5.1 Travail des forces de raideurs et d'amortissement .....	14

### **Chapitre II. Diagramme de Campbell et vitesses critiques**

1.Introduction.....	15
2 Diagramme de Campbel .....	15
2.1 Mode vibratoire .....	15
2.2-Vitesse critique.....	17
2.3-Parametre de la symetrie et de la dissym &trie .....	18
3-Exemple d'interpretion de diagramme de Campbell.....	19

### **Chapitre III Formulation par élément finis**

1 Introduction.....	21
2. Méthode des éléments finis version p hierarchique trigonometrique –MEFHT-.....	21
3 Champs des déplacements.....	22
4 Fonctions de forme.....	23
5 Formulation du disque par la MEFHT .....	24
5.1 Détermination des matrices .....	25

5.1.1 Matrice de rigidification centrifuge du disque $[R_D]$ .....	25
5.1.2 Matrice masse du disque $[M_D]$ .....	26
5.1.3 Matrice gyroscopique du disque $[C_{gD}]$ .....	28
6 Formulation de l'arbre par la MEFHT .....	30
6.1 Détermination des matrices .....	31
6.1.1 Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre $[R_A]$ .....	31
6.1.2 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$ .....	32
6.1.3 Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$ .....	33
6.1.4 Matrice de la raideur de l'arbre $[K_A]$ .....	35
7 Détermination des matrices dues aux paliers .....	35
7.1 Matrice raideur et amortissement .....	36
7.1.1 Matrice amortissement des paliers .....	36
7.1.2 Matrice de rigidité des paliers .....	36
8 Equation du mouvement .....	36
9. Résolution de l'équation du mouvement .....	37
9.1 Description du problème aux valeurs propres .....	37

## **Chapitre IV. Dynamique des Rotors en Torsion**

1 Introduction .....	38
2 Mouvement vibratoires a un degrés de libèrte .....	38
2.1 – Energie de l'arbre en Torsion .....	39
2.1.1 Energie cinetique .....	39
2.1.2 Energie potentielle .....	39
3. Loi de Nweton .....	39
4 Mouvement vibratoire de Torsion a deux degres de libertes .....	41

## **Chapitre V Influence des paliers sur les vibrations des Rotors**

1. Introduction .....	44
2. Palier lisse hyydrodynamique .....	46

## **Chapitre VI . Equilibrage des Rotors**

1 Position du problème .....	51
2 Origine du Balourd .....	52
3 Mesure d'un Balourd .....	53

3.1- Signal vibratoire.....	54
4. Balourd statique.....	54
5 Balourd dynamique.....	55
5.1-Equilibrage d'un balourd dynamique.....	55
6. Degres de qualité de l'équilibrage.....	56
7 Déséquilibre résiduel acceptable.....	56

## **Cas Pratique Equilibrage sur Machine**

1 Révision général du compresseur.....	57
2 Etapes d'équilibrages.....	58
2.1 Verification de la fleche.....	58
2.2 Analyse des résultats des calculs.....	58
2.3 Choix de la Technique d'équilibrage.....	58
2.4 Choix de la Machine.....	58
3 Méthode utilisée .....	59
4 Mesure des paramètres géométriques du rotor.....	59
5 Type d'équilibrage.....	59
6 Calcul de la vitesse critique.....	59
7 Analyse des résultats.....	60
8 Positionnement du Rotor sur la Machine.....	60
9 Choix des cardans.....	60
10 Résultats de l'équilibrage.....	61
10.1 Premier Lancer sur la machine.....	61
10.2 Sablage.....	62
10.3 Deuxieme Lancé sur la machine.....	62
10.4 Troisieme Lancé d'équilibrages.....	63
10.5 Quatrieme Lancé .....	63
10.6 Cinquieme Lancé.....	64
10.7 Sixieme Lancé.....	64
11- Conclusion.....	64
Conclusion .....	65

# *Introduction*

## **1.Introduction**

Les ensembles tournants sont des structures aux formes et aux comportements très complexes qui sont aux cœurs des équipements Industriels :

-Dans la fabrication mécanique : arbres tournants des machines outils.

-Dans la transformation d'énergie : arbres d'alternateurs des centrales électriques.

-Dans le transport : arbres de transmission des véhicules et engins, roulants, arbres d'hélice des sous marins, des méthaniers et des grands bateaux pour le transport de gaz et des marchandises.

-Dans l'aéronautique: arbres des réacteurs d'avions et arbre multi rotor concentriques .voir fig 01-02 Moteur d'avion En Annexe.

-Dans le nucléaire : arbres des centrifugeuse nucléaires.

Sachant qu'ils ont une influence directe et prépondérante sur la fiabilité et les rendements, ils font l'objet d'études de plus en plus fines et précises pour l'amélioration et l'évolution vers des ensembles de hautes technologies. Les exigences de tous ces équipements sont bien entendu le premier souci du concepteur et pour toutes ces machines on cherche tout d'abord à augmenter le rendement. Les tendances actuelles visent à diminuer la masse totale, augmenter la vitesse de rotation, accroître la durée de vie et améliorer la fiabilité. De nos jours les machines tournantes sont de plus en plus performantes notamment en terme de rapport masse/puissance. Cela implique qu'elles deviennent de plus en plus souples et rentables.

Les progrès réalisés dans la conception et la fabrication de ces équipements tournants ont donnés jour à des machines plus fiables et aux rendements inégalés. Leurs puissances étant en constante augmentation, les rotors doivent traverser plusieurs vitesses critiques en montée en vitesse et en ralentissement. Les inévitables défauts d'usinages et de montages provoquent alors des problèmes vibratoires importants et sérieux. Les industriels constructeurs et exploitants cherchent à les éliminer pour augmenter la durée de vie des machines tournantes, et pour assurer leurs régularités de fonctionnement. Outre l'optimisation des formes et des matériaux, un des problèmes vibratoires le plus important est du aux balourds qui provoquent des forces centrifuges induisant ainsi des forces axiales et générant des vibrations synchrones. Un balourd correspond à un déséquilibre du rotor due a une répartition de masse non uniforme autour de l'axe de rotation provoquant une non coïncidence de l'axe principale d'inertie avec l'axe de rotation.

Le lecteur trouvera dans ce polycopié

*Chapitre 1 :*

Dans ce chapitre nous traitons la dynamique des machines tournantes, les caractéristiques des éléments des rotors, les systèmes des coordonnées.

*Chapitre 2 :*

Ce chapitre est consacré à la formulation par la méthode des éléments finis hiérarchique trigonométrique et aux problèmes discrétisés pour la détermination de toutes les matrices.

Masse, gyroscopique, raideur et rigidifiassions centrifuge. et la détermination de l'équation du Mouvement du rotor arbre avec disque sur des paliers rigides.

*Chapitre 3 :* est réservé à la description du diagramme de Campbell, des modes vibratoires et des vitesses critiques d'un model simple de rotor de laval Jefcott symetrique et antisymétrique.

*Chapitre 4 :* Dans ce chapitre on traite le concept des vibrations de torsions.

Chapitre 5 : Ce chapitre concerne l'influence des paliers sur les vibrations des rotors.

Chapitre 6 : ce chapitre est consacré à l'étude de l'équilibrage des rotors et a l'étude de cas pratique.

## **2. Historique, Contexte et importance de la dynamique des rotors.**

La dynamique des rotors a une histoire remarquable, due en grande partie à l'interaction entre la théorie et sa pratique. La dynamique des rotors est une branche spécialisée de la mécanique appliquée concernés par le comportement et le diagnostic des structures en rotation. Il est couramment utilisé pour analyser le comportement de structures allant des moteurs à réaction aux turbines à gaz en passant par les turbines à vapeur. Le rotor est une partie tournante d'un dispositif mécanique ou de structures supportées par des paliers et influencé par des phénomènes internes qui tournent librement autour d'un axe fixe dans l'espace. Les rotors se trouvent notamment dans des turbines, générateurs, moteurs, compresseurs, soufflantes, alternateurs, centrifugeuses nucléaires et rotor des réacteurs d'avions ...ect... .

Ils existent des rotors qui tournent autour de son axe de rotation mais à vitesse angulaire constante se sont appelés des rotors fixes (qui considèrent la vitesse de rotation comme constante),

Les rotors ayant des vitesses angulaires non constantes sont appelés rotor libre (qui considérer la vitesse de rotation dépend de la conservation du moment cinétique). En fonctionnement un rotors fournit beaucoup d'énergie de rotation et une petite quantité de vibrations (flexion, axiale et torsion), cela explique le phénomène de la poussée d'un grand avion à grande vitesse par des petits moteurs de turbines à réaction.

La dynamique de rotor a connu un remarquable historique d'évolution, principalement en raison de l'interaction entre sa théorie et sa pratique. Elle a été davantage motivée par sa pratique que par sa théorie. Cette déclaration est particulièrement pertinente pour l'histoire précoce de la dynamique du rotor. La recherche sur la dynamique du rotor s'étend sur au moins quatorze décennies d'histoire.

Rankine (1869) a effectué la première analyse d'un arbre tournant. Il a prédit qu'au-delà d'une certaine vitesse de rotation, l'arbre fléchit considérablement et tourne autour de cette forme courbée. Il a défini cette certaine vitesse comme la vitesse de tournoiement de l'arbre. En fait, on peut montrer qu'au-delà de cette vitesse de tournoiement, la déviation radiale du modèle de Rankine augmente sans limite, ce qui n'est pas vrai dans un cas réel. Cependant, Rankine a ajouté le terme tournoiement (Whirling) au vocabulaire de la dynamique du rotor. Le développement de calcul par éléments finis a incité beaucoup de scientifiques à développer leurs recherches sur cet axe qui est connu par trois types de versions et leurs combinaisons qui sont :

**Version h** : dans cette version le nombre de fonction de forme est fixé pour chaque élément et les fonctions de formes sont des polynômes.

**Version p** : appelée aussi méthode des éléments finis hiérarchique –MEFH, les degrés des fonctions polynomiales peuvent être augmentés tout en gardant la taille de la maille constante, généralement le degré polynomiale est noté par "P" cette version est plus simple et sa convergence est plus rapide

**Version h-p** : c'est la combinaison des deux méthodes citées ci-dessus.

Beaucoup de chercheurs scientifiques se sont focalisés sur cet axe et ont donné naissance à plusieurs codes d'éléments finis on cite le Probe [33] et le Fiesta [34]. Szabo et Babuska [35] ont publié un manuel sur ces deux versions,

# *Chap I*

## *Dynamique des Machines Tournantes*

### 1 Introduction :

Un rotor est constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Pour cette étude on suppose que le rotor de la fig 1.1 est soumis à l'effet des forces axiales et a l'amortissement structural de l'arbre.

### 2-Eléments d'un rotor.

Un rotor est constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques voire Annexe rotor moteur d'avion, rotor avec disques d'un compresseur basse pression, rotor du compresseur BCL603 (Sonatrach hassi Rmel).

### 3- Model simple d'un Rotor Laval Jefcott.

Le rotor du model de Laval Jefcott est un rotor de model tres simple, un model de base ou élémentaire.il se compose d'un arbre flexible et d'un disque rigide.

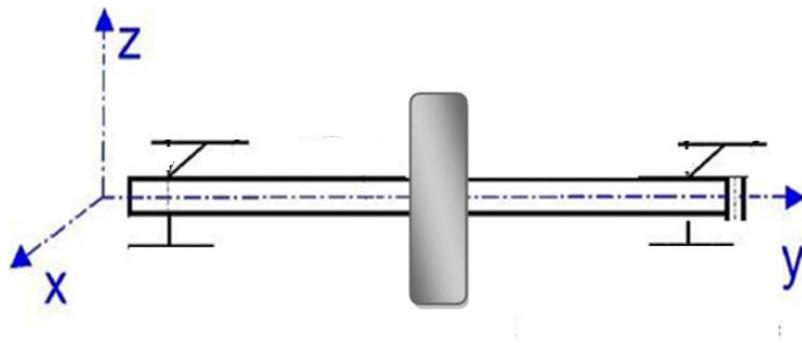


fig1.0 Model d'un rotor Laval Jefcott [1]

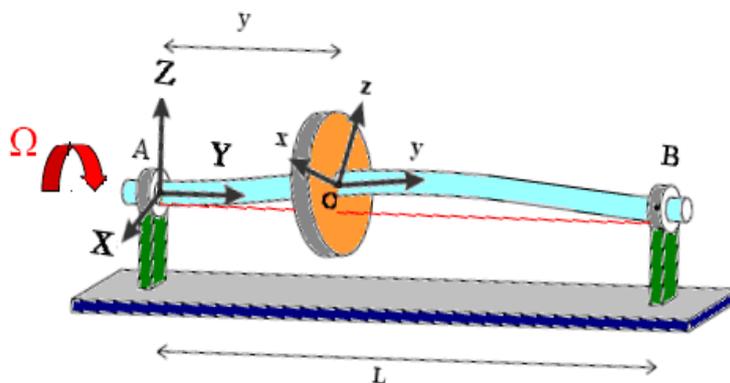


fig1.1 : Présentation d'un rotor simple [1]

### 3.1- Hypothèses cinématiques:

L'étude de ce rotor est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'arbre est déformable.
- Le disque est rigide.
- Le rotor tourne à une vitesse constante  $\Omega$ .
- L'arbre et le disque ont les mêmes caractéristiques mécaniques.
- On se place dans le cas de petites de déplacement et de rotation.
- Déformation linéaire (petites déformations).

L'arbre est du type d'Euler Bernoulli c'est-à-dire toute section plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant déformation reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation de cet arbre et l'effet de cisaillement est nul fig.1.2. Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels.

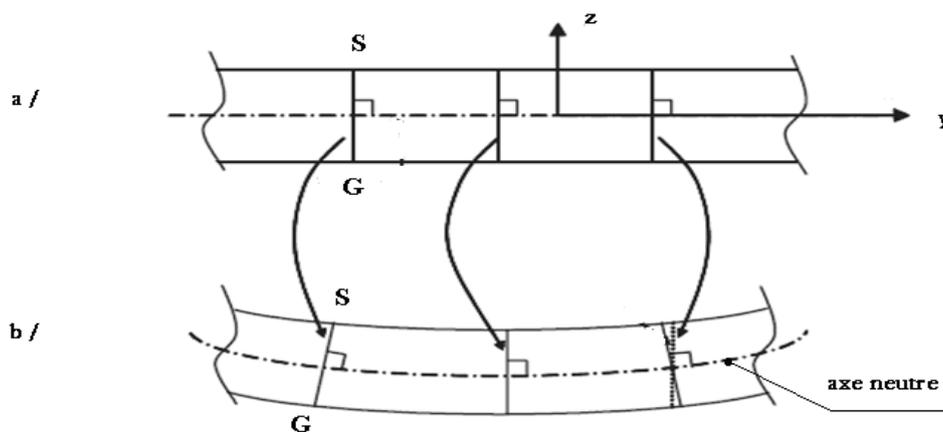


fig 1.2 Poutre d'Euler Bernoulli [1] a : Avant déformation

b : Apres déformation

Lors du mouvement, le rotor génère plusieurs phénomènes qui sont : La nutation, la précession, la rotation propre du rotor fig1.3 et autres spécifications qui seront étudiés et détaillés ultérieurement en définissant toutes les énergies du rotor et leurs équations du mouvement. La mise en équation du mouvement est obtenue à partir des énergies cinétiques et de déformations des différents composants du rotor.

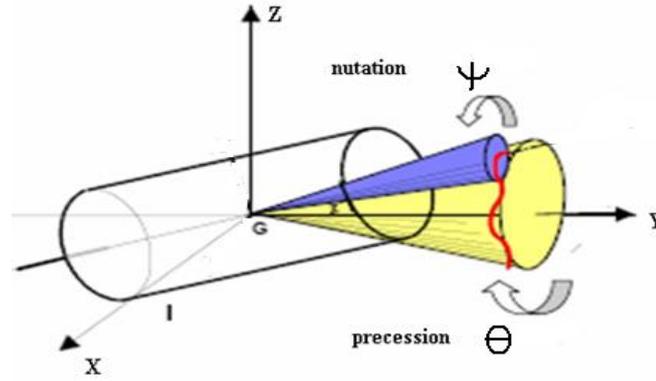


fig 1.3 Nutation et Précession. [1]

#### 4-Systèmes de coordonnées d'un rotor.

L'arbre du rotor est déformable, il est caractérisé par une énergie cinétique et une énergie de déformation. Le disque est rigide, il est caractérisé seulement par son énergie cinétique.

##### 4.1-Vitesse d'un point de la section droite de l'arbre.

Le repère mobile d'un arbre en rotation possède en général trois composantes de vitesse

Et sa matrice vitesse de rotation est définie par  $\dot{\phi}$  [37]:

$$\dot{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Avec :  $\Omega_3$  Vitesse de rotation autour de l'axe ox

$\Omega_2$  Vitesse de rotation autour de l'axe oy

$\Omega_3$  Vitesse de rotation autour de l'axe oz

Soient deux repères  $R(X, Y, Z)$  un repère mobile, et un repère  $r(x, y, z)$  un repère fixe.

La rotation de l'arbre s'effectue autour de l'axe OY(repère mobile) et oy (repère fixe) qui sont confondus et la matrice vitesse de rotation peut s'écrire sous la forme suivante

On pose  $\Omega = \Omega_2$  (1.2)

$$\dot{\phi} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

La position d'un point p de la section droite de l'arbre par rapport au repère fixe est donnée par le vecteur position  $\{R_p\}$  fig1.4.

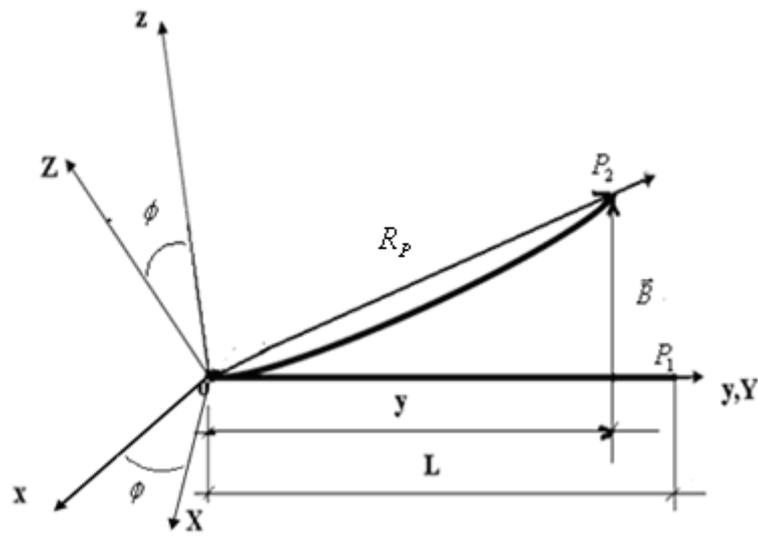


fig1.4 Coordonnée fixes et mobiles de l'arbre en rotation [1]

$P_1$  ; point avant déformation

$P_2$  ; point après déformation

$$\{R_p\} = \{y\} + \{B\} \quad (1.4)$$

La position d'un point p de la section droite de l'arbre par rapport au repère mobile est donnée en fonction de la matrice de passage  $[Q]$  du repère fixe au repère mobile

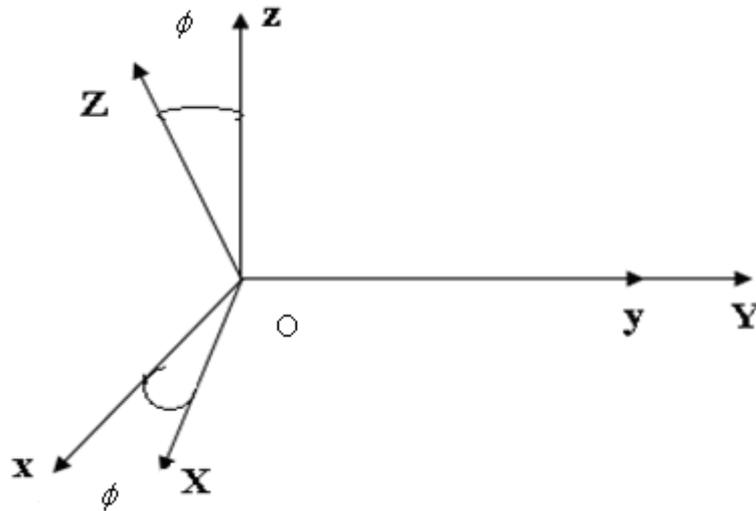


fig 1.5 Rotation de l'arbre autour de l'axe OY. [1]

$$\vec{r}_p = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\vec{R}_p = \begin{Bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Soient :  $\{r_p\}$  vecteur position de  $P_2$  dans le repère mobile et  $\{R_p\}$  vecteur position dans le repère fixe, la position d'un point dans le repère fixe est donnée par la relation suivante :

$$\{r_p\} = [Q] \{R_p\} \quad (1.7)$$

Où  $[Q]$  est la matrice de passage du repère mobile au repère fixe.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

La dérivée par rapport au temps donne :

$$\{\dot{r}_p\} = [\dot{Q}] \{R_p\} + [Q] \{\dot{R}_p\} \quad (1.9)$$

La dérivée de la matrice de transformation est donnée par :

$$[\dot{Q}] = \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (1.10)$$

En substituant  $[\dot{Q}]$  dans la relation (1.8) on a :

$$\{\dot{r}_p\} = \dot{\phi} \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} \{R_p\} + [Q] \{\dot{R}_p\} \quad (1.11)$$

En substituant  $R_p$  dans la relation (1.10).

$$\{\dot{r}_p\} = \dot{\phi} \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) + [Q] \{\dot{B}\} \quad (1.12)$$

Le vecteur déplacement est donnée par :

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Avec :  $u$  Le déplacement suivant la direction  $ox$

$v$  Le déplacement suivant la direction  $oy$

$w$  Le déplacement suivant la direction  $oz$

## 4.2-Energie cinétique de l'arbre :

En appliquant les équations de lagrangien a l'énergies cinétique et l'énergie de déformation d'un rotor, on obtient les termes de l'équation différentielle du mouvement.

L'énergie cinétique est définie par l'expression suivante :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{r}_p\}^T \{\dot{r}_p\} dv \quad (1.14)$$

En substituant  $\{\dot{r}_p\}$  par sa valeur donnée (1.12) dans la relation (1.14) on obtient :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_V \left( \dot{\phi} \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) + [Q] \{\dot{B}\} \right)^T \left( \dot{\phi} \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) + [Q] \{\dot{B}\} \right) dv \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} E_{CA} = & \frac{1}{2} \rho \dot{\phi}^2 \int_V \left( \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right)^T \left( \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right) dv + \frac{1}{2} \rho \dot{\phi} \int_V \left( \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right)^T ([Q] \{\dot{B}\}) dv \\ & + \frac{1}{2} \rho \dot{\phi} \int_V ([Q] \{\dot{B}\})^T \left( \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right) dv + \frac{1}{2} \rho \int_V ([Q] \{\dot{B}\})^T ([Q] \{\dot{B}\}) dv \end{aligned} \quad (1.16)$$

En négligeant les termes qui sont fonction du déplacement longitudinal  $\{y\} = 0$  , la forme finale de l'énergie cinétique de l'arbre est donnée par :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho_A \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}] [\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2} \rho_A \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho_A \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (1.17)$$

Avec le premier terme qui contribue a la formation de la matrice de rigidification centrifuge, le deuxième terme a la matrice masse et le dernier terme a la matrice gyroscopique.

### 4.3-Energie cinétique du disque :

Le disque d'épaisseur « e » de diamètre extérieur  $A_{ext}$  et diamètre intérieur  $A_{int}$  supposé parfaitement rigide est caractérisé seulement par son énergie cinétique fig 1.6.

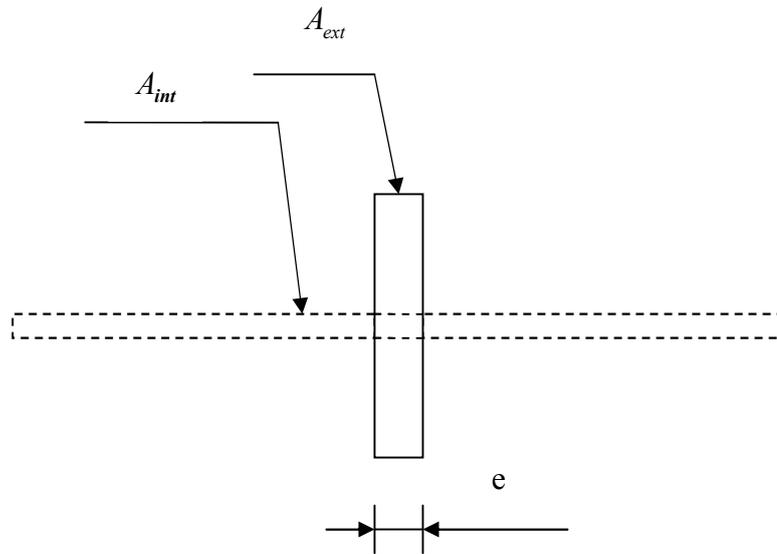


fig 1.6 Représentation du disque du rotor [1]

L'expression de l'énergie cinétique du disque est donnée par analogie avec celle de l'arbre et qui peut s'écrire :

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho_D \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}] [\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2} \rho_D \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho_D \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (1.18)$$

### 4.4-Energie de déformation de l'arbre :

L'énergie de déformation ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre.

Dans ce calcul, le disque est supposé par hypothèse comme rigide, seules les déformations dues a la flexion de l'arbre sont prisent en compte, l'arbre pour ce rotor est modélisé par une poutre d'Euler Bernoulli fig1-2.

Soient  $u^*(y,t)$  et  $w^*(y,t)$  les déplacements des points de la ligne moyenne de l'arbre dans le repère tournant voir fig 1.7

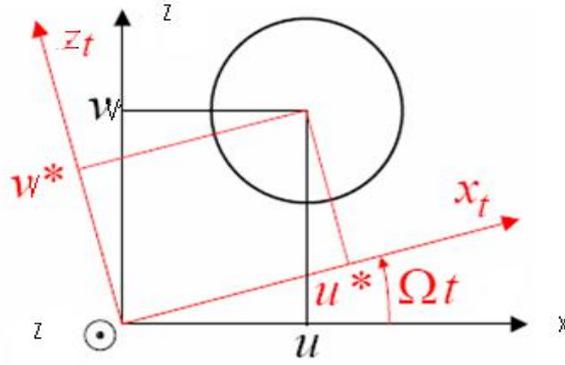


fig 1.7 Déformation de l'arbre et ses repères. [1]

Les projections d'un point de la section droite déformée sur le repère fixe :

$$u^* = u \cdot \cos \Omega t - w \cdot \sin \Omega t \quad (1.19)$$

$$w^* = u \cdot \sin \Omega t + w \cdot \cos \Omega t \quad (1.20)$$

La déformation linéaire en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées x et z dans le repère

lié à l'arbre est :

$$\varepsilon_{yy} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (1.21)$$

L'énergie de déformation est donnée par :

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon_l \cdot \sigma \cdot dv \quad (1.22)$$

$\sigma$  : Contrainte de flexion.

$dv$  : Élément de volume de l'arbre.

La relation entre contrainte et déformation est :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_l \quad (1.23)$$

$E$  : Module de Young

$\varepsilon_l$  : Déformation linéaire

L'énergie de déformation  $E_{dA}$  prend la forme :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_v (\varepsilon_l^2) \cdot dv \quad (1.24)$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^l \int_s \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \quad (1.25)$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^l \int_s \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) ds dy \quad (1.26)$$

Par symétrie le troisième terme de l'intégrale est nul et, en introduisant les inerties de section:

$$I_x = \int_s z^2 . ds \quad \text{Et} \quad I_z = \int_s x^2 . ds \quad (1.27)$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (1.28)$$

En remplaçant  $u^*$  et  $w^*$  par leurs valeurs (1.19) et (1.20) dans (1.28).

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (1.29)$$

En prenant en considération de la relation

$$I_m = \frac{I_x + I_z}{2} \quad (1.30)$$

$$I_a = \frac{I_x - I_z}{2} \quad (1.31)$$

L'énergie de déformation de l'arbre en fonction des relations (1.30) et (1.31).

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ (I_m - I_a) \left( \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \right. \\ \left. + \frac{E}{2} \int_0^L \int_0^L (I_m + I_a) \left( \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy \right] dy \quad (1.32)$$

En développant les termes en moment d'inertie moyen et moment d'inertie asymétrique.

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_m \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_m \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 I_m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t + \right. \\ \left. - I_a \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - I_a \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 I_a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right. \\ \left. + I_m \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_m \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 I_m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy$$

$$I_a \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_a \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2I_a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \quad (1.33)$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_m \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 (\sin \Omega t - \cos \Omega t) + I_a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 (\cos \Omega t - \sin \Omega t) + 4I_a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \Omega t \cos \Omega t \right) dy \quad (1.34)$$

En tenant compte qu'on est en présence d'un arbre symétrique.

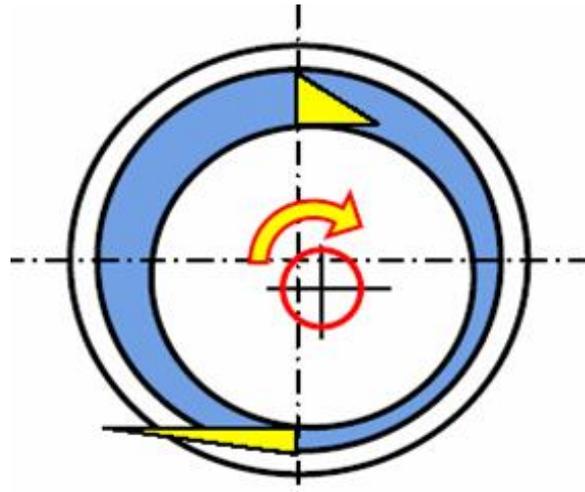
$$I_x = I_z \quad \text{donc} \quad I_a = 0 \quad (1.35)$$

L'énergie de déformation de l'arbre prend la forme suivante :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_m \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy \quad (1.36)$$

#### 4.5-Paliers.

Tous les arbres tournants sont supportés par des paliers. Ces paliers sont de types rigides créent des forces sur l'arbre. On peut trouver des palier lisse hydrodynamique fig 1.8, palier lisse hydrostatique, palier a roulements...



*fig 1.8 Palier hydrodynamique avec Profils de vitesse[2].*

La modélisation des paliers est représentée sur la fig 1.9 :

Ou on note:

$$\text{La raideur suivant l'axe } ox \qquad K_{xx} = K_{p11} \quad (1.37)$$

La raideur suivant l'axe oz  $K_{ZZ} = K_{P22}$  (1.38)

La raideur des termes croisés  $K_{ZX} = K_{XZ} = K_{P21} = K_{P12}$  (1.39)

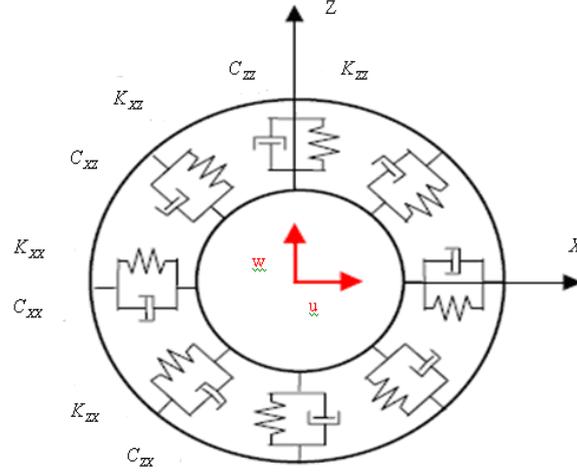


fig 1.9 Modèle d'un Palie [2]r.

#### 4.5.1 Travail des forces de raideur et d'amortissement.

Le travail virtuel des forces de raideurs et d'amortissements est définis par :

$$dW = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (1.40)$$

Avec :  $F_u$  et  $F_w$  sont les forces généralisées

$$dW = -K_{P11} u \delta u - K_{P12} w \delta u - K_{P21} w \delta w - K_{P22} u \delta w - C_{P11} \dot{u} \delta u - C_{P12} \dot{w} \delta u - C_{P21} \dot{w} \delta w - C_{P22} \dot{u} \delta w \quad (1.41)$$

Sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{P11} & 0 & K_{P12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{P21} & 0 & K_{P22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ w_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{P11} & 0 & C_{P12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{P21} & 0 & C_{P22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

En général les termes de raideur et d'amortissement sont différents, Pour cette étude on suppose que les termes de raideur verticales, horizontales et croisés sont égale

$$K_{P11} = K_{P12} = K_{P21} = K_{P22} \quad (1.43)$$

Et les termes d'amortissement verticales, horizontales et croisés sont égaux.

$$C_{P11} = C_{P12} = C_{P21} = C_{P22} \quad (1.44)$$

## *Chap II*

### *Diagramme de Campbell et vitesse critique*

## **1. Introduction**

Un rotor en mouvement est défini en théorie par un modèle mathématique ou une équation différentielle, la résolution de cette équation donne les solutions ou les fréquences vibratoires recherchées et qui sont interprétées par le diagramme de Campbell

## **2-Diagramme de Campbell.**

Le diagramme de Campbell représente l'évolution des fréquences vibratoires en fonction de la vitesse de rotation d'un système tournant fig 1.8. Le comportement vibratoire d'un rotor est défini surtout par la branche de la précession directe

### **2.1-Modes vibratoires.**

Les modes vibratoires définissent les fréquences associées aux vibrations des arbres tournants et leurs évolutions en fonction de la vitesse de rotation. Pour chaque type de mode des vibrations on distingue une déformation de la poutre en vibration fig 1.9 et fig 1.10

- Il est connu que les modes propres d'un système conservatif en rotation sous amortissement structurel sont des modes vibratoires complexes deux à deux conjugués à pulsations propres purement imaginaires. Cela est dû aux effets gyroscopiques induits par la rotation, qui couplent les déplacements horizontaux et verticaux. Ils peuvent cependant être associés pour obtenir des modes réels qualifiés par des modes vibratoires directs, ou des modes vibratoires rétrogradés (inverse), suivant que le mouvement de précession qui leur est associé est dans un sens identique ou contraire au mouvement de rotation fig 1.3. Le point essentiel est la dépendance de leur fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation. Le graphique représentant l'évolution des fréquences en fonction de la vitesse de rotation s'appelle le diagramme de Campbell fig 1.8. On peut démontrer que la partie de l'énergie cinétique relative aux termes gyroscopiques est positive ou négative pour les modes directs ou rétrogradés (3.87) et (3.52), si bien que les effets gyroscopiques tendent à rigidifier ou à assouplir la structure. Ainsi, les courbes croissantes et décroissantes du diagramme de Campbell sont relatives au mode direct et rétrogradé (inverse).

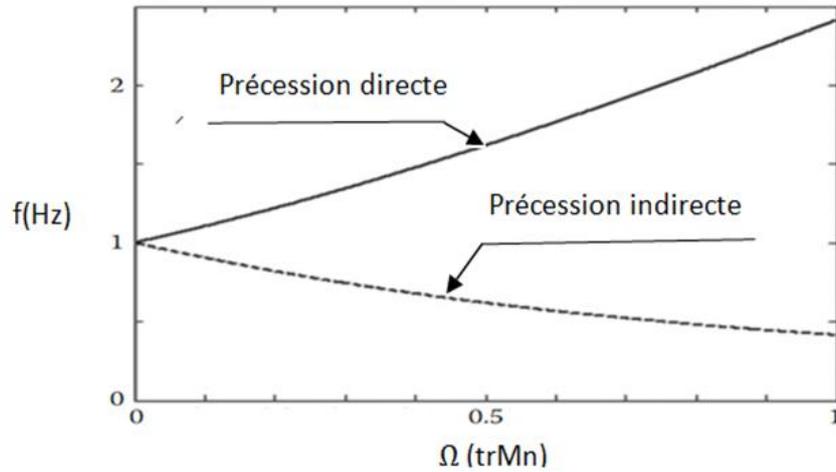


fig 2.1 Diagramme de Campbell

Les trois premières formes des modes de vibration d'un rotor sont représentées sur la figure suivante :

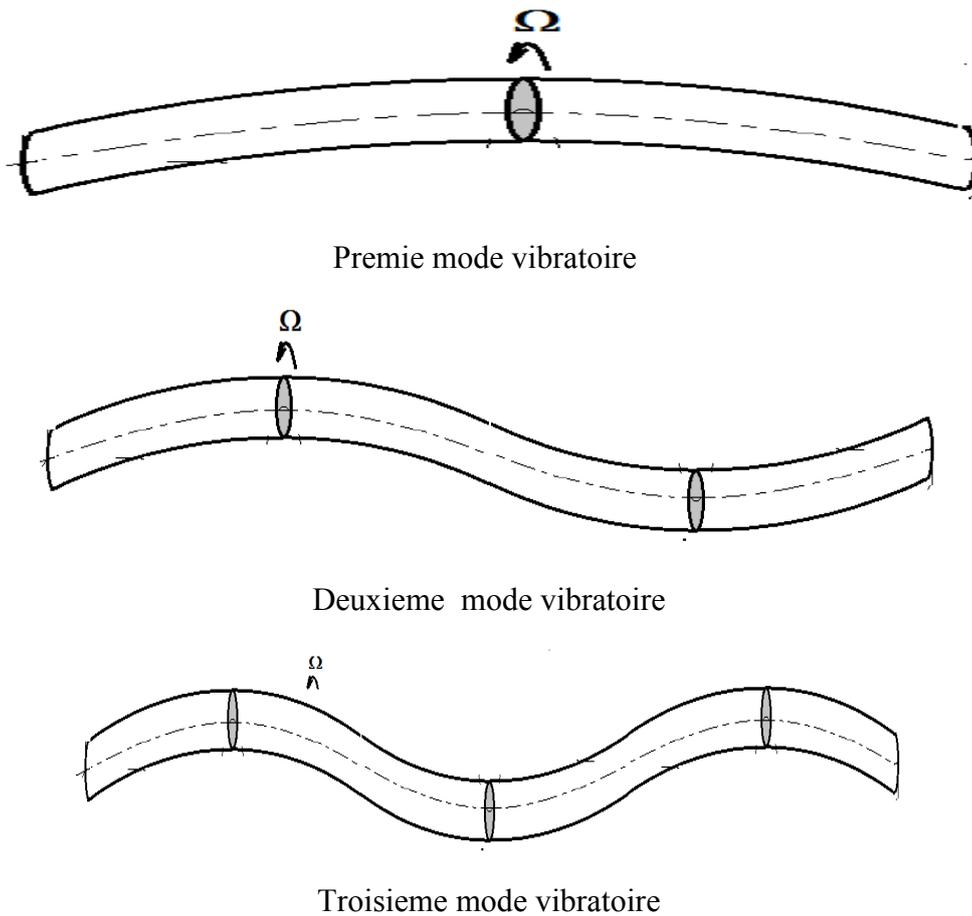


fig.2.2. Les trois premiers Modes vibratoires d'une poutre appuyée- appuyée

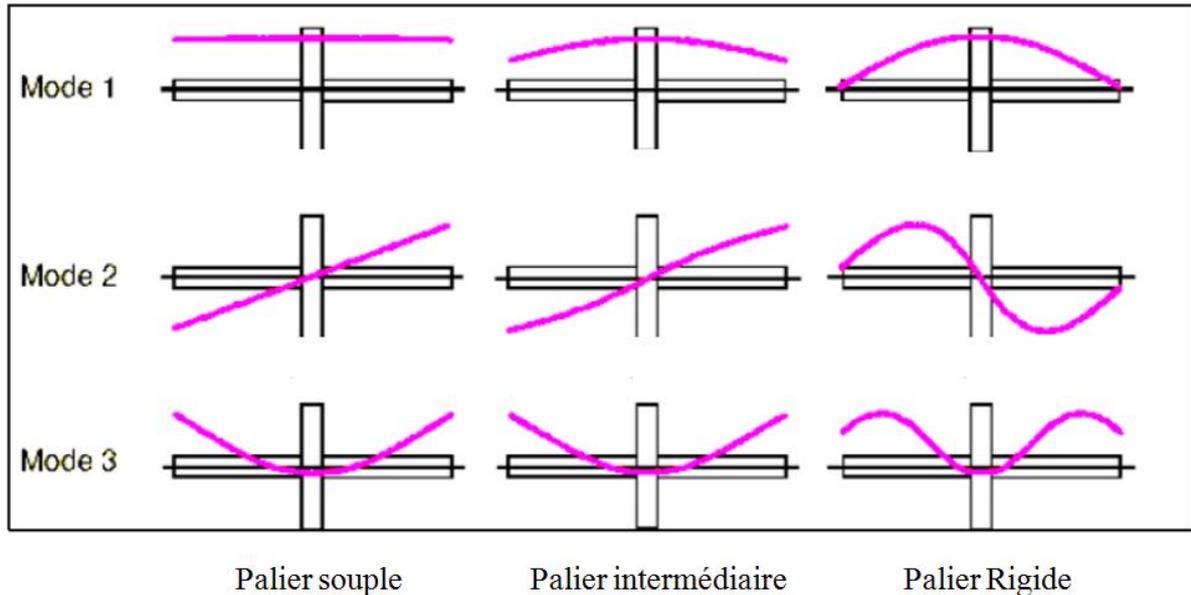


fig.2.3 Déformé modale par rapport à la rigidité des paliers[3]

Le ratio de la rigidité de palier à la rigidité de l'arbre a un impact significatif sur les formes des modes des vibrations. Pour les paliers souples et intermédiaires de l'arbre ne se plie pas beaucoup dans les deux modes inférieurs. Ceux-ci sont généralement appelés les modes de rotor rigide. En considérant le mouvement de rotation du rotor, la déformée modale ressemble au cas du rotor non-tournant (déformée statique). Mais maintenant ils impliquent des mouvements circulaires.

## 2.2-Vitesses critiques.

La vitesse critique est définie comme étant la vitesse à la résonance d'une structure tournante en vibration. Aujourd'hui le concept des vitesses critiques a évolué et se rattache d'un point de vue théorique à la notion des valeurs propres du système tournant, la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd ou autres coïncide avec une des fréquences propres du système. La détermination des vitesses critiques demande donc le tracé du diagramme de Campbell. c'est à dire un calcul des modes propres à chaque vitesse de rotation appelée aussi la méthode de balayage des fréquences. Le temps de calcul est donc important. Pour traiter efficacement les systèmes de taille importante, G. GENTA [44] a proposé une technique itérative basée sur la décomposition en parties proportionnelle et non proportionnelle des matrices d'amortissement et gyroscopique pour le calcul de valeurs propres. Dans le cas particulier de systèmes non amortis et sans couplage directionnel, il est possible de calculer directement les vitesses critiques (c'est-à-dire sans passer par l'extraction des fréquences propres pour diverses valeurs de la vitesse de rotation). Il suffit d'injecter la

relation  $\omega = \pm\lambda\Omega$  dans l'équation homogène du mouvement ou de tracer la droite  $\lambda\Omega$  sur le diagramme de Campbell et l'intersection avec les branches directes et indirectes donnent les vitesses critiques, le signe étant positif (négatif) pour les vitesses critiques directes (rétrogrades). La résolution du problème aux valeurs propres alors obtenu fournit d'emblée les vitesses critiques. Le coefficient  $\lambda$  est introduit pour gérer les excitations induites par les balourds ou rechercher les éventuels pics de réponses vibratoires propres au système tournant fig 1.8.

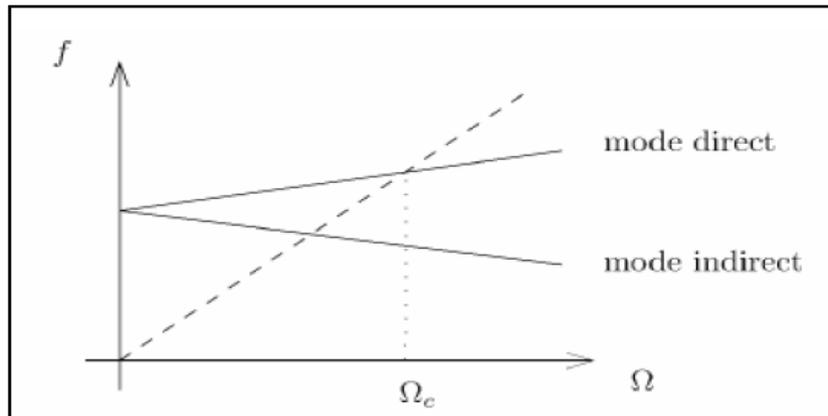


fig 2.4 Diagramme de Campbell et vitesse critique[4].

### 2.3-Paramètre de la symétrie et de la dissymétrie.

Si les rotors sont souvent axisymétriques, axisymétrique en comportement, il n'en est pas de même pour les stators : la présence d'éléments associés aux carters, la fixation avec l'aile créent des dissymétries à la fois de masse et surtout de raideur. L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique du rotor est importante. Tout d'abord, on note que si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, la réponse synchrone du rotor à un balourd est un mouvement de précession elliptique au lieu de circulaire. De plus, à l'arrêt, les modes propres dans les plans vertical et horizontal ont naturellement des fréquences propres distinctes. Les modes classiquement associés par paires dans le contexte axisymétrique (car identiques à vitesse de rotation nulle), avec un mode direct et un mode rétrograde, sont dès lors différents l'un de l'autre. On montre d'ailleurs que pour chacun des deux, une vitesse critique existe. Lors d'une réponse à balourd, on observe donc non pas un pic de résonance mais deux (on parle de phénomène de dédoublement de résonance, Split résonances dans la littérature (anglo-saxonne): le mode rétrograde est excité.

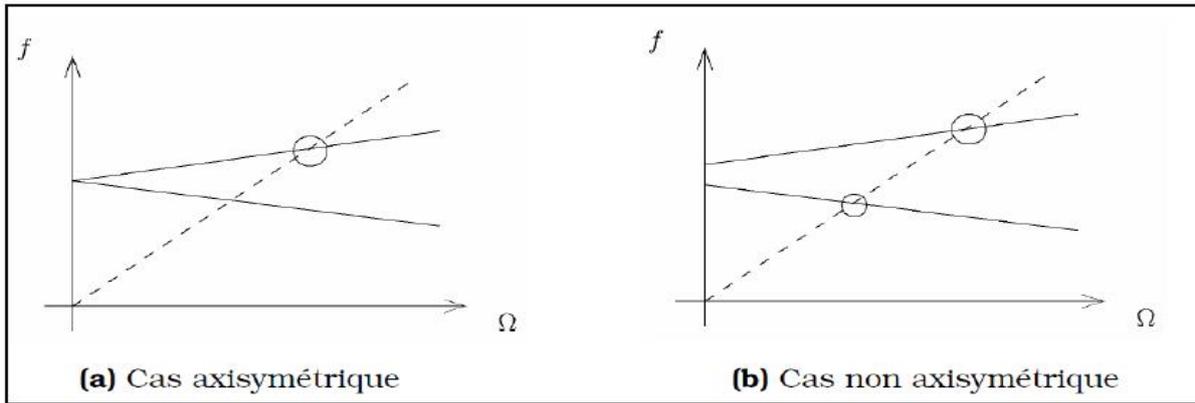


Fig 2.5. Symétrie et dissymétries des paliers sur le diagramme de Campbell[4]

Il faut préciser que les dissymétries dans les rotors peuvent apparaître au cours du temps avec la fatigue. La présence de fissures transversales dans l'arbre entraîne une modification locale de raideur qui rend les caractéristiques élastiques anisotropes.

### 3.-Exemple d'Interprétation des Diagrammes de Campbell.

Soit à étudier le comportement vibratoire d'un système tournant arbre avec un disque placé au milieu. L'arbre en tournant est soumis à la flexion sous l'effet de plusieurs phénomènes qui sont générés au cours de l'évolution du fonctionnement.

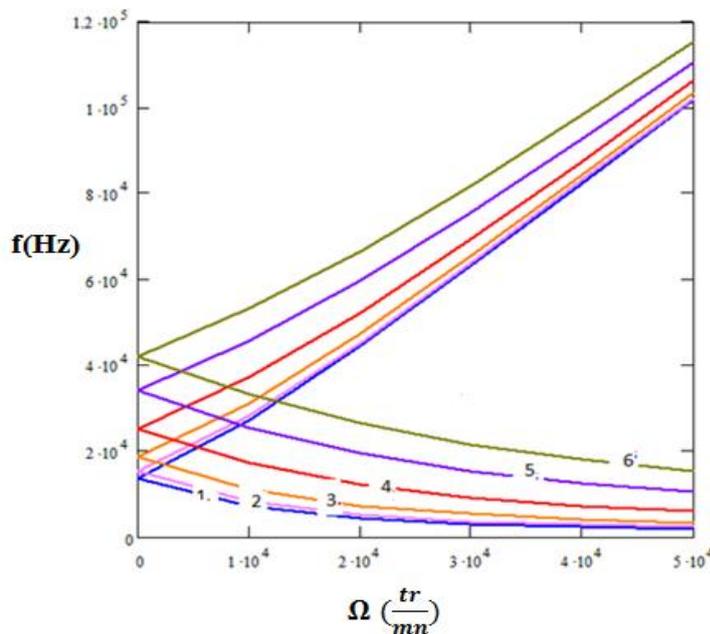


fig 2.6 Diagrammes de Campbell des six premiers modes de vibration d'un Rotor [1]

Sur ce diagramme, on peut déduire le comportement vibratoire:

-Du Rotor par l'évolution des fréquences vibratoires en fonction de la vitesse de rotation.

-Des Paliers par le type des paliers, symétriques ou antisymétriques.

-phénomène vibratoire générés au cours du mouvement du rotor.

(Précession directe, précession rétrogradée).

- phénomène vibratoire gyroscopique et son évolution en fonction de la vitesse de rotation.

\*1/-Sur ce diagramme on constate plusieurs Modes de vibration

Mode 1.....est le mode le plus faible .

Mode 6.....est le Mode le plus élevé.

Entre ces deux Modes il se trouve les Modes intermédiaires du plus faible au plus élevé.(  
Mode 2, Mode 3, Mode 4, Mode 5).

Chacun de ces Modes possède deux branches, l'une correspond à la précession directe et l'autre correspond à la précession rétrogradée.

\*2)-Si la vitesse de rotation est nulle on remarque sur l'axe verticale des fréquences le type de paliers, ici les deux branches ont une seule fréquence cela veut dire que ce Rotor possède des paliers symétriques et son orbite vibratoire est du type circulaire. Si non il est du type elliptique.

\*3)-Si la vitesse de rotation augmente, on constate que les branches de la précession directe augmentent et divergent par rapport à la précession rétrogradée qui diminue. Cette divergence qui est fonction de la vitesse de rotation indique la présence de l'effet gyroscopique et son évolution avec la vitesse de rotation.

\*4)-On constate que ce rotor vibre sur plusieurs modes vibratoires et chaque mode possède deux branches (directe et rétrogradée)

-si la vitesse est moyenne le rotor possède plusieurs modes de vibrations.

-Si la vitesse est très grande le rotor vibre sur un seul mode de vibration

## *Chap III*

### *Méthode des éléments finis (MEF)*

### 1. Introduction.

Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations. La structure est caractérisée par sa géométrie, le ou les matériaux qui la constituent, Elle est soumise à des sollicitations, des efforts, des déplacements, des flux de chaleurs et des vitesses. Pour un dimensionnement optimal de la structure il faut connaître :

Les déplacements en tout points.

Les déformations, les contraintes.

Les températures.

Les fréquences propres ...etc.....

La solution du problème discrétisé est une solution approchée du problème réel, la méthode utilisée pour cette étude est La méthode des éléments finis hiérarchique trigonométrique. La caractéristique particulière de cette méthode est que l'arbre est modélisé par un seul élément à deux nœuds et que la précision du résultat est obtenue en augmentant l'ordre de la fonction trigonométrique à tout instant sans faire varier la modélisation initiale.

### 2. Méthode des éléments finis Version p hiérarchiques et trigonométrique.

La version p hiérarchique trigonométrique de la méthode des éléments finis est définie par la coordonnée adimensionnelle  $\xi = 0$  au nœud 1 et  $\xi = 1$  au nœud 2

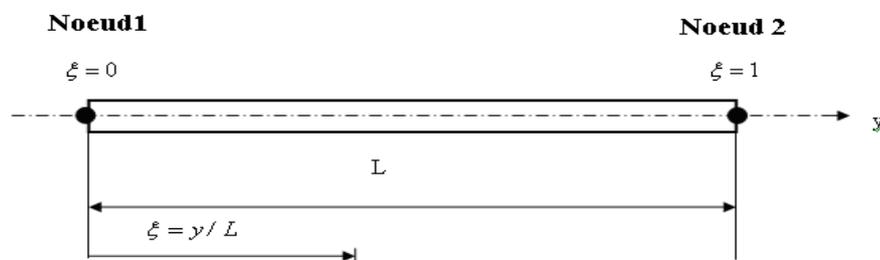


fig 3.1 Représentation d'un élément de poutre de type p[1]

La coordonnée adimensionnelle  $\xi$  est reliée à l'axe  $oy$  par

$$\xi = y/L \quad (3.1)$$

$$\text{Avec : } 0 \leq \xi \leq 1$$

### 3 Champs des déplacements.

Le champ de déplacement d'un point M de la section droite de l'arbre du rotor défini suivant les hypothèses du paragraphe 1.2 du chap1 est donnée par la relation [41]:

$$\begin{cases} u(X,Y,Z) = u_0(Y) \\ v(X,Y,Z) = v_0(Y) - Z\psi(Y) - X\theta(Y) \\ w(X,Y,Z) = w_0(Y) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec  $u_0(Y)$  : Déplacement transversal suivant  $OX$ .

$v_0(Y)$  : Déplacement longitudinal négligé suivant  $OY$ .

$w_0(Y)$  : Déplacement transversal suivant  $OZ$ .

$\psi(Y)$  : Rotation de la section droite autour de  $OZ$

$\theta(Y)$  : Rotation de la section droite autour de  $OX$

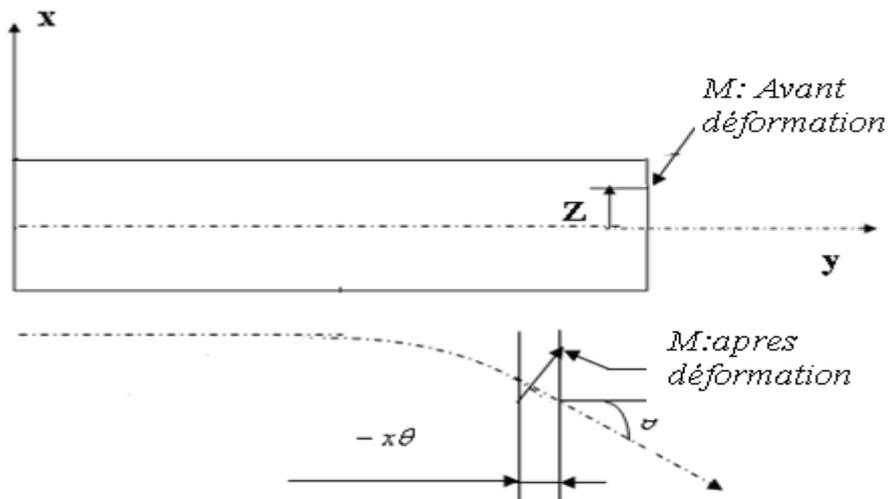


Fig3.2 déformation de l'arbre autour de l'axe  $OZ$  [1]

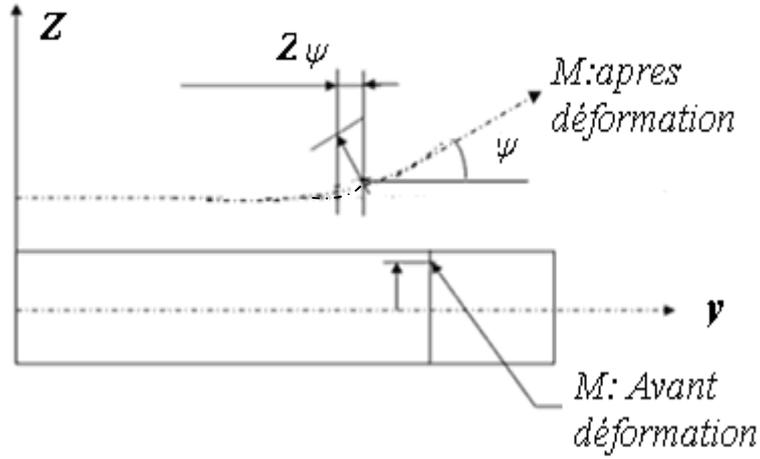


Fig3.3 Déformation de l'arbre autour de l'axe Ox [1]

Dans le cas des hypothèses d'Euler Bernoulli, les rotations  $\theta$  et  $\psi$  s'expriment en fonction de  $u_0$  et  $w_0$

$$\theta(Y) = u_{0,Y} \quad (3.3)$$

$$\psi(Y) = w_{0,Y} \quad (3.4)$$

Pour une flexion dominante ( $v_0 = 0$ ), le déplacement s'exprime par :

$$v(X, Y, Z) = -Z w_{0,Y} + X u_{0,Y} \quad (3.5)$$

Le champ de déplacement obtenu est le suivant

$$\begin{cases} u(X, Y, Z) = u_0(Y) \\ v(X, Y, Z) = -Z \psi(Y) + X \theta(Y) \\ w(X, Y, Z) = w_0(Y) \end{cases} \quad (3.6)$$

#### 4- Fonctions de forme.

Les fonctions de forme utilisées sont les fonctions de forme hiérarchique trigonométrique définies [35].

$$N : \begin{cases} f_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ f_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ f_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ f_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \\ f_{r+4}(\xi) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$f_{r+4}(\xi) = \delta r \left[ -\xi + (2 + (-1)^r) \xi^2 - (1 + (-1)^r) \xi^3 \right] + \sin \delta r \xi \quad (3.8)$$

$$\delta r = r \pi$$

$$r = 1,2,3\dots$$

Les fonctions de forme associées aux deux nœuds sont :

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi) \tag{3.9}$$

Les fonctions de forme associées à l'intérieur de l'élément arbre (entre les nœuds) sont :

$$f_{r+4}(\xi) \tag{3.10}$$

$$u_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} X_i f_i(\xi) = [N_u] \{q_u\} \tag{3.11}$$

$$\{q_u\}^T = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_{P_x}\}^T$$

$$w_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} Z_i f_i(\xi) = [N_w] \{q_w\} \tag{3.12}$$

$$\{q_w\}^T = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{P_z}\}^T$$

$N_u$  : Les fonctions de forme suivant la direction x.

$N_w$  : Les fonctions de forme suivant la direction z.

$q_u$  et  $q_w$  Représentent les vecteurs déplacements généralisés

$$\{q\} = \{q_u, q_w\}^T \tag{3.13}$$

### 5 Formulation du disque par la méthode des éléments finis.

L'étude par la méthode des élément fini hiérarchique trigonométriques présentée ici concerne le cas le plus répandu d'un disque symétrique et rigide, on modélise ce disque par un nœud possédant quatre degrés de libertés fig 2 .4

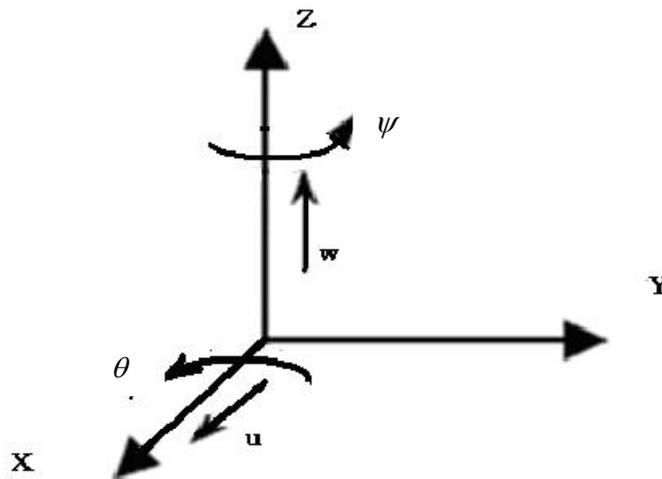


fig 3.4 Degrés de libertés d'un disque

Ces quatre degrés de libertés sont modélisés par deux déplacements  $u, w$  et par deux rotations  $\theta, \psi$ .

### 5.1 Détermination des matrices.

La détermination des matrices : masse, gyroscopique et rigidification centrifuge sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique du disque donnée par la relation (1.18):

Après intégration, l'expression de l'énergie cinétique prend la forme suivante[1].

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho S e \left( \{B\}^T [\dot{\phi}] [\dot{\phi}] \{B\} \right) + \frac{1}{2} \rho S e \left( \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} \right) + \rho S e \Omega \left( \{B\}^T [\dot{\phi}] \{B\} \right) \quad (3.14)$$

Avec  $\{B\}$  le vecteur déplacement exprimé par les fonctions de forme, le disque est placé au nœud  $\xi = 1$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y, t) \\ \theta_0(y, t) \\ w_0(y, t) \\ \psi_0(y, t) \end{Bmatrix} = N(\xi = 1) q(t) \quad (3.15)$$

Avec le premier terme qui contribue a la formation de la matrice de rigidification centrifuge, Le deuxième terme a la matrice masse et le troisième terme a la matrice gyroscopique.

#### 5.1.1 Matrice de rigidification centrifuge $[R_D]$ .

La matrice de rigidification centrifuge est déduite du premier terme de la relation (2.14).

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \left( \{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}] \{B\} \right) \quad (3.16)$$

L'énergie cinétique exprimée par la matrice des vitesses de rotations

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \left( \{B\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} \right) \quad (3.17)$$

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \Omega^2 \left( \{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\} \right) \quad (3.18)$$

On a deux déplacements suivant  $u$  et  $w$  et les rotations  $\theta$  et  $\Psi$  sont négligées l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme.

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \Omega^2 \left( \{q\}^T [N]^T [N] \{q\} \right) \quad (3.19)$$

En introduisant les deux plans la matrice de rigidification est.

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \Omega^2 \left( \{q_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{q_u\} \right) + \frac{1}{2} \rho S_D e \Omega^2 \left( \{q_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{q_w\} \right) \quad (3.20)$$

$$[R_{D_u}] = \rho S_D e \Omega^2 \left( [N_u]^T [N_u] \right) \quad (3.21)$$

$$[R_{D_w}] = \rho S_D e \Omega^2 \left( [N_w]^T [N_w] \right) \quad (3.22)$$

La matrice globale de rigidification centrifuge est donnée par la matrice suivante.

$$[R_D] = \begin{bmatrix} [R_{D_u}] & 0 \\ 0 & [R_{D_w}] \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

La matrice de rigidification centrifuge globale est donnée par les fonctions de formes:

$$[R_D] = \begin{bmatrix} \rho S_D e \Omega^2 \left( [N_u]^T [N_u] \right) & 0 \\ 0 & \rho S_D e \Omega^2 \left( [N_w]^T [N_w] \right) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Les blocs des matrices  $[R_{D_u}]$  et  $[R_{D_w}]$  sont définis par l'expression suivantes :

$$[R_{D_u}] = \rho S_D e \Omega^2 \begin{bmatrix} f_1(\xi) f_1(\xi) & f_1(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi) f_{m_u}(\xi) \\ f_2(\xi) f_1(\xi) & f_2(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi) f_{m_u}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m_u}(\xi) f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{m_u}(\xi) f_{m_u}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$[R_{D_w}] = \rho S_D e \Omega^2 \begin{bmatrix} f_1(\xi) f_1(\xi) & f_1(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi) f_{m_w}(\xi) \\ f_2(\xi) f_1(\xi) & f_2(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi) f_{m_w}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m_w}(\xi) f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{m_w}(\xi) f_{m_w}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

### 5.1.2 Matrice masse $[M_D]$ .

Le deuxième terme de la relation (2.14) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse.

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv. \quad (3.27)$$

L'énergie cinétique du disque peut s'écrire sous la forme suivante

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \left( \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} \right) \quad (3.28)$$

L'énergie cinétique du disque exprimée par les fonctions de forme

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \left( \{\dot{q}\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}\} \right) \quad (3.29)$$

En introduisant les deux plans on obtient.

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \left( \{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{q}_u\} \right) + \frac{1}{2} \rho S_D e \left( \{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} \right) \quad (3.30)$$

$$[M_{Du}] = \rho S_D e \left( [N_u]^T [N_u] \right) \quad (3.31)$$

$$[M_{Dw}] = \rho S_D e \left( [N_w]^T [N_w] \right) \quad (3.32)$$

La matrice globale de rigidification centrifuge est donnée par.

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [M_{Du}] & 0 \\ 0 & [M_{Dw}] \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Avec  $[M_{Du}]$  la matrice de rigidification dans la direction ox et  $[M_{Dw}]$  la matrice de rigidification dans la direction oz, ces deux composantes de matrice peuvent être exprimées par les fonctions de formes

$$[M_D] = \begin{bmatrix} \rho S_D e \left( [N_u]^T [N_u] \right) & 0 \\ 0 & \rho S_D e \left( [N_w]^T [N_w] \right) \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

$$[M_{Du}] = \rho S e \begin{bmatrix} f_1(\xi) f_1(\xi) & f_1(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi) f_{nu}(\xi) \\ f_2(\xi) f_1(\xi) & f_2(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi) f_{nu}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{nu}(\xi) f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{nu}(\xi) f_{nu}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$[M_{Dw}] = \rho S e \begin{bmatrix} f_1(\xi) f_1(\xi) & f_1(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi) f_{mw}(\xi) \\ f_2(\xi) f_1(\xi) & f_2(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi) f_{mw}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{mw}(\xi) f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{mw}(\xi) f_{mw}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

### 5.1.3 Matrice gyroscopique $[C_{gD}]$ :

Le troisième terme de la relation (2.14) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique du disque

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (3.37)$$

Substituons la matrice des vitesses et le vecteur déplacement par leurs valeurs dans l'expression de l'énergie cinétique on obtient

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (3.38)$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (3.39)$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w} \quad 0 \quad \Omega \dot{u}\} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (3.40)$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w} u + \Omega \dot{u} w\} dv \quad (3.41)$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \Omega \int_v \{-\dot{w} u + \dot{u} w\} dv \quad (3.42)$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gD}) = \rho \Omega \int_v \left( -[N_u] \{q_u\} [N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T + [N_w] \{q_w\} [N_u]^T \{\dot{q}_u\}^T \right) dv \quad (3.43)$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour déterminer l'expression des sous matrices gyroscopiques dans les plans oxy et oxz.

1°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_u\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = \rho \Omega \int_v \left( \frac{d}{dt} ([N_w] \{q_w\} [N_u]^T) + [N_u] [N_w]^T \{\dot{q}_w\} \right) dv \quad (3.44)$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle, le disque est modélisé par un nœud  $\xi = 1$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = 2 \rho S_D e \Omega \left( [N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} \right) \quad (3.45)$$

2°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_w\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = \rho \Omega \int \left( \frac{d}{dt} \left( -[N_u] \{q_u\} [N_w]^T \right) - [N_w] \{\dot{q}_u\} [N_u]^T \right) dv \quad (3.46)$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = -2 \rho S_D e \Omega \left( \frac{d}{dt} \left( -[N_u]^T [N_w] \right) \{\dot{q}_u\} \right) \quad (3.47)$$

On conclusion on peut dire que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = - \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} \right) \quad (3.48)$$

Ou encore on posant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = 2 \rho S_D e \Omega \left( \frac{d}{dt} \left( [N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} \right) \right) = C_{gD1} \quad (3.49)$$

Et :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = -2 \rho S_D e \Omega \left( \frac{d}{dt} \left( -[N_u]^T [N_w] \right) \{\dot{q}_u\} \right) = C_{gD2} \quad (3.50)$$

On remarque que :

$$C_{gD1} = -C_{gD2} \quad (3.51)$$

Et la matrice gyroscopique du disque peut s'écrire et se mettre sous la forme.

$$[C_{gD}] = \begin{bmatrix} 0 & -[C_{gD2}] \\ [C_{gD2}] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La matrice gyroscopique du disque  $[C_{g2}]$  exprimée par les fonctions de formes peut s'écrire

$$[C_{gD2}] = \rho S_D e \Omega \begin{bmatrix} f_1(\xi) f_1(\xi) & f_1(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi) f_{nu}(\xi) \\ f_2(\xi) f_1(\xi) & f_2(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi) f_{nu}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{nu}(\xi) f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{nu}(\xi) f_{nu}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

### 6 Formulation de l'arbre par la méthode des éléments finis .

La modélisation par la méthode des élément finis hiérarchique trigonométrique concerne un arbre symétrique et déformable a deux nœuds figure 2.5 et pour chaque nœud quatre degrés de liberté

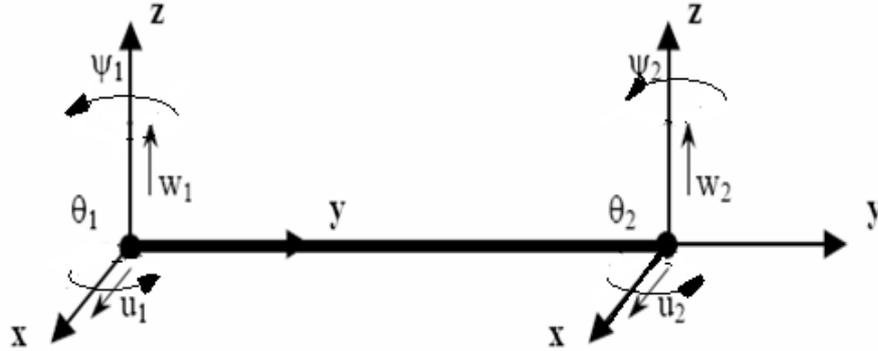


fig 3.5 : Degrés de libertés d'un élément arbre

Soit  $\{B\}$  le vecteur déplacement exprimer par les fonctions de formes.

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y,t) \\ \theta_0(y,t) \\ w_0(y,t) \\ \psi_0(y,t) \end{Bmatrix} = N(\xi = 0;1) q(t) \tag{3.54}$$

$q(t)$  : Vecteur déplacement généralisé

$$\{B\} = [N] \{q\} = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 \\ 0 & [N_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} \tag{3.55}$$

$$u_0 = N_u q_u \tag{3.56}$$

$$\theta_0 = \frac{\partial N_u}{\partial y} q_u \tag{3.57}$$

$$w_0 = N_w q_w \tag{3.58}$$

$$\psi_0 = \frac{\partial N_w}{\partial y} q_w \tag{3.59}$$

$N_u$  et  $N_w$  sont les fonctions de forme des poutres en flexion suivant deux directions. x et z

$q_u$  et  $q_w$  sont les déplacements aux nœuds et à l'intérieur de la poutre dans deux directions x et z.

### 6.1 Détermination des matrices de l'arbre.

La détermination des matrices : masse, gyroscopique et rigidification centrifuge sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la relation (1.17)

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}] [\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv$$

#### 6.1.1 Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre $[R_A]$ :

Le premier terme de la relation (1.17) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice de rigidification centrifuge.

$$: \quad E_C(R_A) = \frac{1}{2} \rho \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (3.60)$$

Substituons la matrice des vitesses par sa valeur on obtient:

$$E_C(R_A) = \frac{\rho}{2} \int_V \{B\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (3.61)$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho}{2} \int_V \{B\}^T \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (3.62)$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho \Omega^2}{2} \int_V \{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (3.63)$$

Substituons les vecteurs déplacements par les fonctions de forme.

$$E_C(R_A) = \frac{\rho \Omega^2}{2} \int_V \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} dv \quad (3.64)$$

L'énergie cinétique exprimée par la coordonnée adimensionnelle

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L \Omega^2}{2} \int_0^1 \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} d\xi \quad (3.65)$$

On a que deux déplacements  $u$  et  $w$ , donc la matrice de rigidification centrifuge de l'arbre exprimée par les fonctions de formes est.

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L \Omega^2}{2} \left( \int_0^1 \{q_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{q_u\} d\xi + \int_0^1 \{q_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{q_w\} d\xi \right) \quad (3.66)$$

Les composantes de la matrice de rigidification sont.

$$[R_{Au}] = \rho S_A L \Omega^2 \int_0^1 [N_u]^T [N_u] d\xi \quad (3.67)$$

$$[R_{Aw}] = \rho S_A L \Omega^2 \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \quad (3.68)$$

Avec

$$[R_{Au}] = \rho S_A L \Omega^2 \int_0^1 \begin{bmatrix} f_1(\xi)f_1(\xi) & f_1(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi)f_{nu}(\xi) \\ f_2(\xi)f_1(\xi) & f_2(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi)f_{nu}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{nu}(\xi)f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{nu}(\xi)f_{nu}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (3.69)$$

$$[R_{Aw}] = \rho S_A L \Omega^2 \int_0^1 \begin{bmatrix} f_1(\xi)f_1(\xi) & f_1(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi)f_{nw}(\xi) \\ f_2(\xi)f_1(\xi) & f_2(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi)f_{nw}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{nw}(\xi)f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{nw}(\xi)f_{nw}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (3.70)$$

La matrice de rigidification centrifuge globale peut s'écrire sous forme matricielle suivante.

$$[R_A] = \begin{bmatrix} [R_{Au}] & 0 \\ 0 & [R_{Aw}] \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

### 6.1.2 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$ .

Le deuxième terme de la relation (1.17) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse

:

$$E_C(M_A) = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv. \quad (3.72)$$

En substituant le vecteur déplacement par les fonctions de forme.

$$E_C(M_A) = \frac{\rho S_A L}{2} \left( \int_0^1 \{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{q}_u\} d\xi + \int_0^1 \{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} d\xi \right). \quad (3.73)$$

Les composantes de la matrice de rigidification sont.

$$[M_{Au}] = \rho S_A L \int_0^1 [N_u]^T [N_u] d\xi \quad (3.74)$$

$$[M_{Aw}] = \rho S_A L \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \quad (3.75)$$

En substituant les fonctions de forme par leurs valeurs on obtient.

$$[M_{Au}] = \rho S_A L \int_0^1 \begin{bmatrix} f_1(\xi)f_1(\xi) & f_1(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi)f_{nu}(\xi) \\ f_2(\xi)f_1(\xi) & f_2(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi)f_{nu}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{nu}(\xi)f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{nu}(\xi)f_{nu}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (3.76)$$

$$[M_{Aw}] = \rho S_A L \int_0^1 \begin{bmatrix} f_1(\xi)f_1(\xi) & f_1(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi)f_{nw}(\xi) \\ f_2(\xi)f_1(\xi) & f_2(\xi)f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi)f_{nw}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{nw}(\xi)f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{nw}(\xi)f_{nw}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (3.77)$$

La matrice masse peut s'écrire sous forme matricielle.

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M_{Au}] & 0 \\ 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

### 6.1.3 Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$ .

Le troisième terme de la relation (1.17) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique de l'arbre

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (3.79)$$

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (3.80)$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gA}) = \rho S_A L \Omega \int_0^1 \left( -[N_u] \{q_u\} [N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T + [N_w] \{q_w\} [N_u]^T \{\dot{q}_u\}^T \right) d\xi \quad (3.81)$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour avoir une séparation des vecteurs de coordonnées généralisées dans la relation (2.81) :

1°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_u\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}^T} = 2 \rho S_A L \Omega \int_0^1 \left( [N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} \right) d\xi \quad (3.82)$$

$$C_{gA1} = 2 \rho S_A L \Omega \int_0^1 \left( [N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} \right) d\xi \quad (3.83)$$

2°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_w\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} = -2 \rho S_A L \Omega \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} \left( -[N_u]^T [N_w]^T \right) \{\dot{q}_u\} \right) d\xi \quad (3.84)$$

$$C_{gA2} = -2 \rho S_A L \Omega \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} \left( -[N_u]^T [N_w]^T \right) \{\dot{q}_u\} \right) d\xi \quad (3.85)$$

On peut dire que :

$$C_{gA1} = -C_{gA2} \quad (3.86)$$

La matrice gyroscopique de l'arbre peut s'écrire sous la forme suivante.

$$[C_{gA}] = \begin{bmatrix} 0 & -[C_{gA2}] \\ [C_{gA2}] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Les matrices gyroscopique de l'arbre  $[C_{g1}]$  et  $[C_{g2}]$  exprimées par l'intégrale des fonctions de formes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[C_{gA2}] = -\rho S_A L \Omega \int_0^1 \begin{bmatrix} f_1(\xi) f_1(\xi) & f_1(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi) f_{m_u}(\xi) \\ f_2(\xi) f_1(\xi) & f_2(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi) f_{m_u}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m_u}(\xi) f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{m_u}(\xi) f_{m_u}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (3.88)$$

$$[C_{gA1}] = \rho S_A L \Omega \int_0^1 \begin{bmatrix} f_1(\xi) f_1(\xi) & f_1(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_1(\xi) f_{m_w}(\xi) \\ f_2(\xi) f_1(\xi) & f_2(\xi) f_2(\xi) & \dots & f_2(\xi) f_{m_w}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m_w}(\xi) f_1(\xi) & \dots & \dots & f_{m_w}(\xi) f_{m_w}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (3.89)$$

### 6.1.4 Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$ :

La matrice rigidité de l'arbre est déterminée à partir de son énergie de déformation donnée par la relation (1.36). Par substitution du champ de déplacement en terme des fonctions de forme et de la coordonnée adimensionnelle, on a :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^l \left[ I_m \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy. \quad (3.90)$$

L'énergie de déformation donnée par la coordonnée adimensionnelle

$$E_{dA} = \frac{E}{2L^3} \int_0^1 \left[ I_m \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 \right) \right] d\xi. \quad (3.91)$$

$$E_{dA} = \frac{EI_m}{2L^3} \int_0^1 \left( \{q_u\}^T [N_u] [N_u] \{q_u\} + \{q_w\}^T [N_w] [N_w] \{q_w\} \right) d\xi \quad (3.92)$$

Avec les dérivées seconde

$$\frac{\partial^2 N_u}{\partial \xi^2} = N_u'' \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi^2} = N_w'' \quad (3.94)$$

$$[K_{dAu}] = \frac{EI_m}{L^3} \int_0^1 \begin{pmatrix} f_1''(\xi)f_1'(\xi) & f_1'(\xi)f_2''(\xi) & \dots & f_1'(\xi)f_{nu}''(\xi) \\ f_2''(\xi)f_1'(\xi) & f_2''(\xi)f_2''(\xi) & \dots & f_2''(\xi)f_{nu}''(\xi) \\ f_{nu}''(\xi)f_1'(\xi) & \dots & \dots & f_{nu}''(\xi)f_{nu}''(\xi) \end{pmatrix} d\xi \quad (3.95)$$

$$[K_{dAw}] = \frac{EI_m}{L^3} \int_0^1 \begin{pmatrix} f_1''(\xi)f_1'(\xi) & f_1'(\xi)f_2''(\xi) & \dots & f_1'(\xi)f_{nu}''(\xi) \\ f_2''(\xi)f_1'(\xi) & f_2''(\xi)f_2''(\xi) & \dots & f_2''(\xi)f_{nu}''(\xi) \\ f_{nu}''(\xi)f_1'(\xi) & \dots & \dots & f_{nu}''(\xi)f_{nu}''(\xi) \end{pmatrix} d\xi \quad (3.96)$$

Par raison de symétrie des deux plans oxy et ozy on a..

$$[K_{dA}] = \begin{bmatrix} [K_{dAu}] & 0 \\ 0 & [K_{dAw}] \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

### 7 Détermination des matrices dues aux paliers :

La détermination des matrices de la rigidité  $[K_p]$  et la matrice d'amortissement  $[C_p]$ .

## 7.1 Matrices raideurs et amortissements visqueux des paliers.

Par hypothèse on a supposé que les composantes de la matrice raideur sont de l'ordre de  $10^8$  N/m et la matrice d'amortissement [42] est déduite de la relation suivante:

$$\xi' = \frac{C_p}{2M_t \omega_1} \quad (3.98)$$

$\xi'$  : Constante d'amortissement est de l'ordre  $10^{-2}$ .

$M_t$  : Masse totale du rotor

$\omega_1$  Première pulsation obtenue avec  $K_p = 10^8$  N/m

### 7.1.1 Matrice amortissement des paliers :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de l'amortissement  $C_p$  dus aux paliers sont par hypothèse égaux. La matrice de l'amortissement  $C_p$  dus aux paliers est déterminée en annexe 4.

### 7.1.2 Matrice de rigidité des paliers :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de la rigidité  $K_p$  dus aux paliers sont par hypothèse égaux, La matrice de la rigidité  $K_p$  due aux paliers est déterminée en annexe 4.

La matrice raideur et la matrice d'amortissement sont en général symétriques et peuvent varier d'une manière significative avec la vitesse de rotation

## 8. Equation du mouvement :

Les équations de Lagrange utilisent l'expression des énergies calculées à partir d'une formulation de type éléments finis, le vecteur des déplacements du rotor est noté  $\{q\}$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cR}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_{cR}}{\partial q} + \frac{\partial E_{dR}}{\partial q} = 0 \quad (3.99)$$

Avec l'énergie cinétique du rotor :

$$E_{cR} = E_{cD} + E_{cA} \quad (3.100)$$

$$E_{dR} = E_{dA} \quad (3.101)$$

$E_{cR}$  : Energie cinétique du rotor.

$E_{cD}$  : Energie cinétique du disque.

$E_{cA}$  : Energie cinétique de l'arbre.

$E_{dR}$  : Energie de déformation du rotor

$E_{dA}$  : Energie de déformation de l'arbre.

Les divers types des matrices déjà calculées précédemment sont utilisés pour l'écriture finale de l'équation différentielle du mouvement.

$$[M]\ddot{q} + (\Omega[C_g] + [C_p])\dot{q} + ([K_A] + [K_p] + [R])q = 0 \quad (3.102)$$

$[M]$  : Matrice masse.

$[C_g]$  : Matrice gyroscopique.

$[C_p]$  : Matrice d'amortissement visqueux due aux paliers

$[K_A]$  : Matrice de raideur de l'arbre.

$[K_p]$  : Matrice de raideur des paliers.

$[R]$  : Matrice de la rigidification centrifuge.

## 9. Résolution de l'équation du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement du rotor (arbre et disque).

$$([M_A] + [M_D])\ddot{q} + \Omega([C_{gA}] + [C_{gD}] + [C_p])\dot{q} + ([K_A] + [K_p] + [R])q = 0 \quad (3.103)$$

On pose :

$$K = K_A + K_p + R \quad (3.104)$$

$$M = M_A + M_D \quad (3.105)$$

$$C = C_g = C_{gA} + C_{gD} + C_p \quad (3.106)$$

L'équation du mouvement prend la forme suivante :

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = 0 \quad (3.107)$$

### 9.1 Description du problème aux valeurs propres :

La solution générale de l'équation (2.108) représentant le mouvement vibratoire du rotor est du type exponentielle :

$$q(t) = p e^{\lambda t} \quad (3.108)$$

Ou :

$\lambda$  : Facteur scalaire

$p$  : Amplitude de la grandeur complexe  $q(t)$

## *Chap IV*

### *Dynamique des Rotors en Torsion*

## 1. Introduction.

L'arbre d'un système tournant est soumis à divers types de phénomène de vibration (vibration de flexion, vibration longitudinale, vibration de torsion...) qui possède chacun une fréquence vibratoire définissant le mouvement. Ces fréquences ne doivent pas coïncider entre elles si non il y a naissance du problème de résonance qui peut causer des dysfonctionnements graves à l'arbre tournant.

Dans ce chapitre on étudiera les vibrations de torsions des arbres tournants. Ce phénomène occupe une place très importante en industrie surtout lorsqu'il s'agit de système tournant possédant une grande inertie des disques ou des volants à géométrie très grande par rapport à celle de l'arbre. Exemple machine à poinçonner.

L'étude de ce rotor est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'arbre est déformable.
- Le disque est rigide.
- Le rotor tourne à une vitesse constante  $\Omega$ .
- L'inertie de l'arbre est négligeable par rapport à celle du disque.

## 2. Mouvement vibratoire à un degré de liberté.

### Application n°1

Pour aborder les phénomènes de la torsion vibratoire des systèmes tournants, examinons la torsion d'un arbre verticale possédant un disque à son extrémité inférieure fig 1.1. Le rayon du disque est très grand par rapport à celui de l'arbre donc une grande inertie par suite il y a naissance des vibrations de torsion dans le rotor en mouvement.

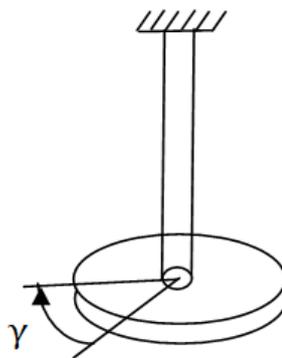


fig 4.1 Torsion d'un Arbre avec disque [5]

Recherchons l'équation différentielle du mouvement de cet arbre en appliquant la méthode des énergies ou la 2<sup>ème</sup> loi de Newton.

## 2.1- Energie de l'arbre en torsion.

Les énergies recherchées sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'arbre

### 2.1.1 Energies cinétique.

L'énergie cinétique est fonction du moment d'inertie du disque et de sa vitesse angulaire de torsion.

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\gamma}^2 \quad (4.1)$$

$J$  : Moment d'inertie

$\dot{\gamma}$  : vitesse angulaire

### 2.1.2 Energies potentielle.

L'énergie potentielle est fonction du moment d'inertie de l'arbre et de l'angle de torsion.

$$E_p = \frac{1}{2} k_{tr} \gamma^2 \quad (4.2)$$

$k_{tr}$ : Raideur de l'arbre en torsion.

$\gamma$ : Angle de torsion de l'arbre.

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = 0 \quad (4.3)$$

$$J \ddot{\gamma} \dot{\gamma} + k_{tr} \gamma \dot{\gamma} = 0 \quad (4.4)$$

$$J \ddot{\gamma} + k_{tr} \gamma = 0 \quad (4.5)$$

$$\omega = \sqrt{k_{tr}/J} \quad (4.6)$$

## 3. Loi de Newton.

La 2 eme loi de la méthode de Newton pour un mouvement de translation:

$$\sum F_R = M \ddot{y} \quad (4.7)$$

Par analogie avec le mouvement de torsion on obtient.

$$J \ddot{\gamma} = -k_{tr} \gamma \rightarrow J \ddot{\gamma} + k_{tr} \gamma = 0. \quad (4.8)$$

Qui a pour solution :

$$\omega = \sqrt{k_{tr}/J} \quad (4.9)$$

## Application n°2

Soit a étudier le mouvement de la torsion du rotor définit par la figure ci-dessous

-On constate que le rayon du disque est très grand par rapport a celle du disque cela veux dire que l'arbre est sous l'effet de inertie du disque en rotation et subit une torsion donc des vibrations de torsions

D'apres la théorie des poutres , le moment de torsion

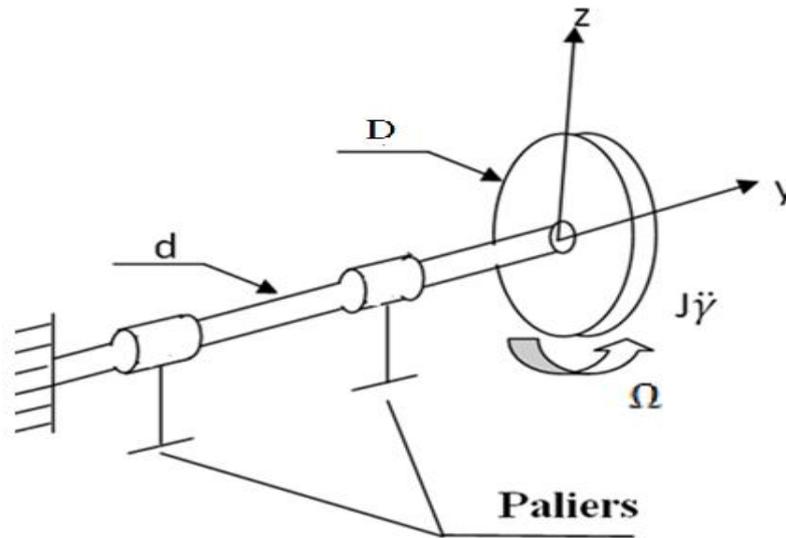


fig 4.2 Système tournant avec un disque[5]

L'arbre de diamètre d du système tournant de la fig ci-dessus en mouvement est sous l'effet d'un moment de torsion induit par l'inertie du disque de diamètre D.

D'après la théorie des poutres, le moment de torsion  $M_{tr}$  de l'arbre est :

$$M_{tr} = E_{sc} \frac{\gamma}{L} J_p = k_{tr} \cdot \gamma \tag{4.10}$$

$$J_p = \pi \frac{d^4}{32} \tag{4.11}$$

$E_{sc}$  : Module de young (élasticité) sur la section transversale.

$J_p$  : Moment d'inertie polaire.

$k_{tr}$  Raideur en torsion de l'arbre

Appliquons la 2 eme loi de Newton

$$\Sigma \text{Moment} = J\ddot{\gamma} \tag{4.12}$$

$$-k_{tr} \cdot \gamma = J \cdot \ddot{\gamma} \tag{4.13}$$

J : Moment d'inertie du disque

$$J \cdot \ddot{\gamma} + k_{tr} \cdot \gamma = 0 \quad (4.14)$$

Mouvement harmonique libre.

$$\ddot{\gamma} + \frac{k_{tr}}{J} \cdot \gamma = 0 \quad (4.15)$$

La pulsation vibratoire propre du rotor.

$$\omega^2 = \frac{k_{tr}}{J}. \quad (4.16)$$

### 3 Mouvement vibratoire de torsion a deux degrés de libertés.

#### Application n°3.

Soit à déterminer les équations des fréquences vibratoires et l'équation générale du mouvement a deux degrés de libertés du rotor représenté sur la figure suivante fig

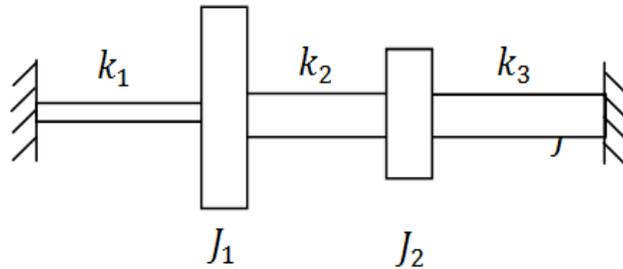


fig 4.3 Rotor a deux disques[5]

Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  angles de rotations respectives des rotors  $J_1$  et  $J_2$  appliquons l'équation du mouvement de torsion :

$$\Sigma \text{Moment de torsion} = J \cdot \ddot{\gamma} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\gamma}_1 = -k_1 \gamma_1 - k_2 (\gamma_1 - \gamma_2) \\ J_2 \ddot{\gamma}_2 = -k_2 (\gamma_2 - \gamma_1) - k_3 \gamma_2 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\gamma}_1 + k_1 \gamma_1 + k_2 (\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \\ J_2 \ddot{\gamma}_2 + k_2 (\gamma_2 - \gamma_1) + k_3 \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Le système tournant est en mouvement périodique composé de mouvement harmonique simple a plusieurs amplitudes :

$$\begin{cases} \gamma_1 = A \cos (\omega t + \varphi) \\ \gamma_2 = B \cos (\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}_1 = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{\gamma}_2 = -\omega^2 B \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (4.21)$$

A, B et  $\varphi$  sont des constantes arbitraires.

$\omega$  : Fréquence naturelle du mouvement vibratoire en torsion.

Par substitution dans le système des équations des fréquences on obtient :

$$(k_1 + k_2 - J_1 \omega^2)A - k_2 B = 0 \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} (k_1 + k_2 - J_1 \omega^2)A - k_2 B = 0 \\ -k_2 A + (k_2 + k_3 - J_2 \omega^2)B = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Se sont des équations algébriques linéaires avec A et B des amplitudes des fréquences vibratoires.

La solution du système est obtenue la recherche du déterminant .

Le déterminant :

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - J_1 \omega^2) & k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - J_2 \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.24)$$

On obtient l'équation générale quadratique des fréquences:

$$\omega^4 - \left[ \frac{k_1 + k_2}{J_1} + \frac{k_2 + k_3}{J_2} \right] \omega^2 + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{J_1 J_2} = 0 \quad (4.25)$$

Les solutions de cette équations donne les fréquences naturelles du système en mouvement de vibrations de torsion.

L'équation du mouvement général est comparable au mouvement harmonique simple

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \gamma_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (4.26)$$

Avec  $A_1, A_2, B_1, B_2$  et  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des constantes arbitraires

Le rapport des amplitudes :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{(k_1+k_2-J_1\omega_1^2)} = \frac{(k_2+k_3-J_2\omega_2^2)}{k_2} \quad (4.27)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2}{(k_1+k_2-J_1\omega_1^2)} = \frac{(k_2+k_3-J_2\omega_2^2)}{k_2} \quad (4.28)$$

## *Chap V*

### *Influence des paliers sur les vibrations des rotors*

**1-Introduction.**

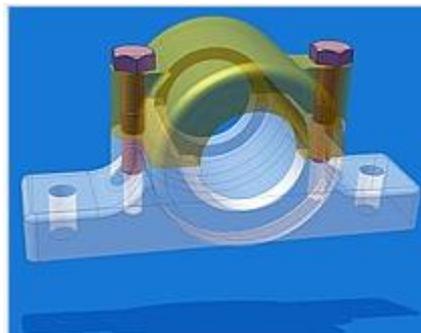
Le système mécanique des machines tournantes est constitué par le mécanisme tournant appelé Rotor ou arbre tournant qui est porté par des supports fixes appelés paliers.

Un palier est un support mécanique fixe constitué par un assemblage des pièces mécaniques ayant pour fonction de positionner dans l'espace l'ensemble des pièces mécaniques tournantes et d'assurer la rotation avec un minimum de frottement, on dit que le palier assure le guidage en rotation de l'ensemble du système tournant appelé arbre. On distingue les paliers:

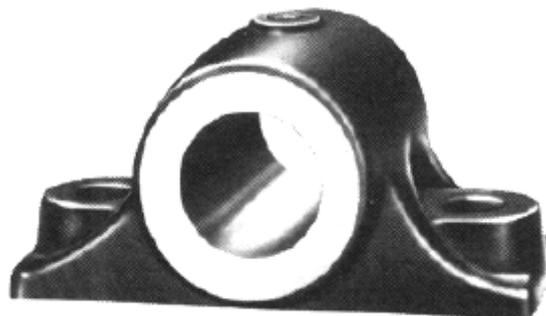
a)-Palier lisse: Le contact entre la pièce fixe et la pièce tournante est soit directe ou indirecte dans ce cas les deux pièces sont séparées par de l'huile assurant le glissement de la pièce tournante par rapport à celle fixe ou palier.



*fig 5.1 palier lisse a coussinet [3].*



*fig 5.2 palies lisse a coussinet réglable[6]*



*fig 5.3 Palier lisse a coussinet a bouchon de lubrification[6]*

b)- Palier a roulement : le mouvement de rotation est assuré par l'utilisation d'un roulement assurant le guidage en rotation de l'arbre par rapport aux paliers. On distingue plusieurs types de roulements et pour une optimisation du bon fonctionnement de la rotation de l'arbre par rapport aux paliers, les roulements sont choisis correctement selon le type de charge.



Fig 5.4 Palier a roulement (Rotation de l'arbre) [7]



fig 5.5 Palier a roulement pour la rotation et la translation de l'arbre[7]

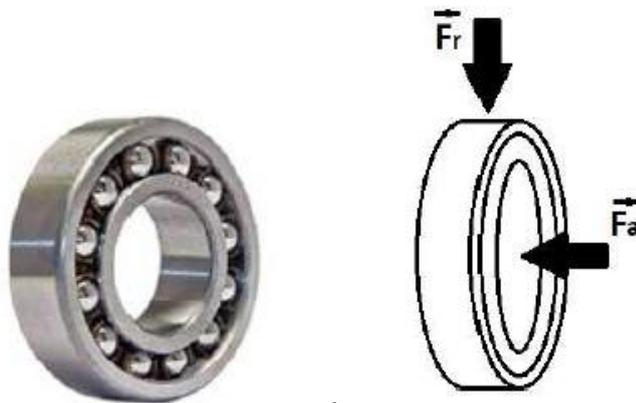


Fig 5.6 Roulement a billes a contacts radials[8].

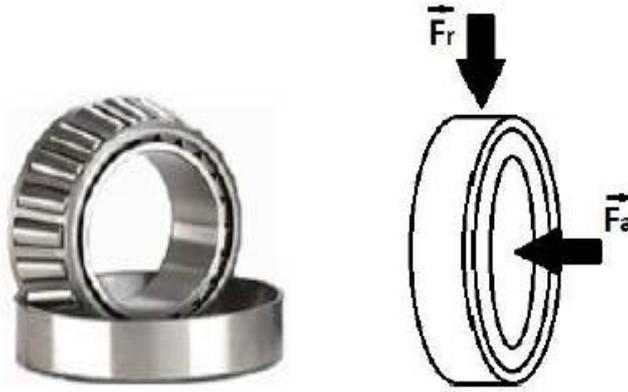


fig 5.7 Roulement a rouleaux coniques. [7]



fig 5.8 Roulement a butées a billes. [8]

## 2. Palier lisse (hydrodynamique).

Le palier lisse hydrodynamique assure la rotation de l'arbre par rapport au batis constitué par le coussinet fixe du palier. Ces deux pièces sont séparées par un film d'huile permettant de générer le glissement de l'arbre par rapport au coussinet du palier.

Le centre du palier ne coïncide pas avec le centre de l'arbre, la figure suivante montre les trois phases observées lors de la mise en marche d'un palier hydrodynamique sous une charge créée par le poids de l'ensemble du rotor[3]

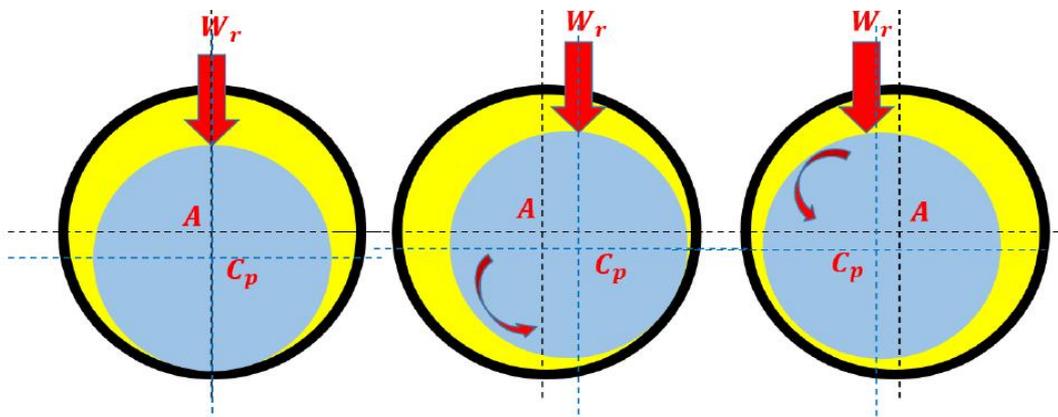


Fig 5.9 Phases de fonctionnement d'un palier hydrodynamique[3].

Le palier hydrodynamique est caractérisé par les paramètres géométrique suivantes :

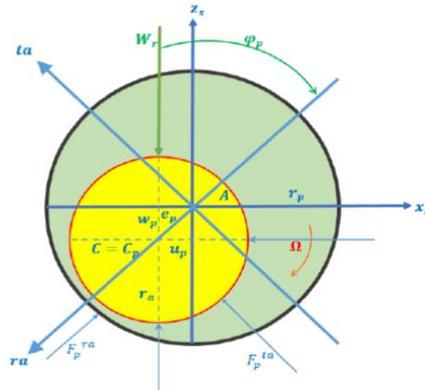


fig 5.10 Géométrie d'un Palier hydrodynamique[3]

\*l'excentricité statique  $e_p$  : represente la distance qui sépare le centre du palier et le centre géométrique de l'arbre.

\*Le rayon  $r_p$  et la longueur  $l_p$  du palier.

\*Le jeu radial  $j_p=r_p-r_a$ . L'ecart entre le rayon de l'arbre et le rayon du palier.

\*La viscosité dynamique  $\mu_p$ .

L'excentricité statique est définie [3]  $e_p = \|q_p^o\|$  avec  $q_p^o = \begin{Bmatrix} u_p^o \\ w_p^o \end{Bmatrix}$  vecteur de déplacement exprimé dans le repere lié au batis fixe attache au palier: par l'angle de calage  $\varphi_p^o$  entre la direction de la charge  $w_r$  et la ligne des centres AC ( du palier A et celle de l'arbre C).

Les forces hydrodynamique extérieur du palier [3]:  $F_p = \begin{Bmatrix} F_p^u \\ w_p^w \end{Bmatrix}$  qui agissent sur l'arbre. et sont déduites par l'intégration de l'équation de Reynolds qui définit la distribution de la pression du filme d'huile dans le palier. Le vecteur des déplacements transversaux dynamique du centre de l'arbre est défini par  $q_p = \begin{Bmatrix} u_p \\ w_p \end{Bmatrix}$

-Les coordonnées polaires dynamiques du centre de l'arbre dans le paliers exprimées dans le repere  $R_s^{Pa}$  attache au palier, sont l'excentricité dyanmique  $\varepsilon_p$ (deplacement radial dynamique relatf) et l'angle de calage dynamique  $\varphi_p$  qui sont défints par[3] :

$$\varepsilon_p = \frac{e_p}{j_p} = \frac{\sqrt{u_p^2 + w_p^2}}{j_p} \tag{5.1}$$

$$\tan \varphi_p = \frac{u_p}{w_p} \quad (5.2)$$

Leurs dérivées.

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\dot{u}_p u_p + \dot{w}_p w_p}{j_p^2 \varepsilon_p} \quad (5.3)$$

$$\dot{\varphi}_p = \frac{\dot{u}_p w_p - \dot{w}_p u_p}{j_p^2 \varepsilon_p} \quad (5.4)$$

Le palier étudié est un palier court défini par la condition  $\frac{l_p}{2r_p} \leq \frac{1}{8}$  et il est soumis à un lubrifiant à écoulement laminaire visqueux et incompressible et isotherme

les composantes dynamiques tangentielle et radiale des efforts hydrodynamiques dans le repère polaire attaché au palier  $R_s^{pa}$  peuvent être analytiquement déduites de l'intégration du champ de pression de fluide hydrodynamique basé sur l'équation de Reynolds utilisant les conditions aux limites de Gumbel qui écartent la pression négative de l'intégral de la force. Les expressions de ces deux composantes polaires dynamiques des forces fluides sont comme suit :

Ces composantes polaires sont données par[3]:

$$\begin{cases} \frac{\mu_p r_p l_p^3}{2j_p^2} \frac{\varepsilon_p}{(1 - \varepsilon_p^2)^2} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{(1 - \varepsilon_p^2)} (\Omega - 2\dot{\varphi}_p) + 4\varepsilon_p \right) \\ - \frac{\mu_p r_p l_p^3}{2j_p^2} \frac{1}{(1 - \varepsilon_p^2)^2} \left( 2\varepsilon_p^2 (\Omega - 2\dot{\varphi}_p) + \frac{\pi \varepsilon_p (1 + 2\varepsilon_p^2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon_p^2)}} \right) \end{cases} \quad (5.5)$$

Pour la détermination des coordonnées de la position statique du centre géométrique de l'arbre dans le palier hydrodynamique  $C_p^o$  on doit supposer que les dérivées temporelles  $\dot{\varepsilon}_p$  et  $\dot{\varphi}_p$  soient négligeables dans le système des efforts hydrodynamiques et la force résultante  $(F_p^{ta}, F_p^{ra})$  est égale à la charge statique  $W_r$ .

Dans le palier, le centre de l'arbre  $e_p^o$  est soumis à un déplacement radial qui dépend de l'excentricité statique relative  $\varepsilon_p^o$ . [3]

Les composantes du vecteur de la position d'équilibre statiques  $\{q_p^o\}$  et le vecteur des forces des fluides dynamiques  $\{F_p\}$  exprimés dans le repère lié au sol  $R_s$  sont obtenus par un changement de repère [3] :

$$\{q_p^o\} = - \left[ R_{R_p}^{R_s^0} \right]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ e_p^o \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\{F_p\} = -[R_{R_p}^{R_s}]^T \begin{Bmatrix} F_p^{ta} \\ F_p^{ra} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p^u \\ F_p^w \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

$[R_{R_p}^{R_s^0}]$  et  $[R_{R_p}^{R_s}]$  sont les matrices de rotation du repère polaire  $R_p(C_p, \varepsilon_p, \varphi_p)$   
Le vecteur des forces de fluides dynamique (hydrodynamiques)  $\{F_p\}$  peut s'écrire :

$$\{F_p\} = \{F_p(\{q_p\}, \{\dot{q}_p\})\} \quad (5.8)$$

Pour le palier hydrodynamique le travail virtuel peut se mettre sous la forme :

$$\delta W_p = \{F_p(\{q_p\}, \{\dot{q}_p\})\}^T q\{q_p\} = F_p^u q u_p + F_p^w q w_p \quad (5.9)$$

Au voisinage de l'équilibre statique  $\{q_p^0\}$  les déplacements latéraux sont supposés très petits, on peut dire que c'est une analyse linéaire.

Selon Frêne et al. [52] et Uğur Yücel [53] les coefficients d'amortissement et raideur du palier dans le repère lié au support sont calculés par les expressions suivantes :

$$[C_p] = [R_{R_p}^{R_s^0}]^T [C_p^{R_s^{pa}}] [R_{R_p}^{R_s^0}] \quad (5.10)$$

$$[K_p] = [R_{R_p}^{R_s^0}]^T [K_p^{R_s^{pa}}] [R_{R_p}^{R_s^0}] \quad (5.11)$$

$$[C_p^{R_s^{pa}}] = \frac{W_r}{j_p \Omega} \begin{bmatrix} C_p^{tata} & C_p^{tara} \\ C_p^{rata} & C_p^{rara} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$[K_p^{R_s^{pa}}] = \frac{W_r}{j_p} \begin{bmatrix} K_p^{tata} & K_p^{tara} \\ K_p^{rata} & K_p^{rara} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$C_p^{tata} = 2K_p^{rata} \quad (5.14)$$

$$C_p^{tara} = -2K_p^{tata} \quad (5.15)$$

$$C_p^{rata} = -2K_p^{tata} \quad (5.16)$$

$$C_p^{rara} = -2K_p^{tara} \quad (5.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p^{tata} = \frac{4}{\sqrt{(16\varepsilon_p^{02} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{02}))}} \\ K_p^{tara} = \frac{-\pi (1 + 2\varepsilon_p^{02})}{\varepsilon_p^0 \sqrt{(1 - \varepsilon_p^{02})} \sqrt{(16\varepsilon_p^{02} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{02}))}} \\ K_p^{rata} = \frac{\pi \sqrt{(1 - \varepsilon_p^{02})}}{\varepsilon_p^0 \sqrt{(16\varepsilon_p^{02} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{02}))}} \\ K_p^{rara} = \frac{8 (1 + \varepsilon_p^{02})}{(1 - \varepsilon_p^{02}) \sqrt{(16\varepsilon_p^{02} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{02}))}} \end{array} \right. \quad (5.18)$$

# *Chap VI*

## *Equilibrage des Rotors*

## 1. Position du problème.

Les machines tournantes sont exposées à de nombreuses anomalies nécessitant une détection préalable utilisant les moyens des diagnostics de maintenance vibratoire suivie d'une correction par ajout ou par enlèvement de la matière, cette correction est appelée équilibrage. La première anomalie vibratoire, peut être due à une mauvaise répartition de la masse autour de l'axe de rotation induisant la création des forces centrifuges qui peuvent déplacer l'axe de rotation suivie d'un dysfonctionnement de la machine tournante. Ce dysfonctionnement est appelé balourd. La correction du balourd est appelée équilibrage du rotor. Il est défini par la connaissance minutieuse du type de balourd et des méthodes appliquées pour leurs éventuelles corrections. Le problème consiste à ramener le centre de masse sur l'axe de rotation défini par l'axe des paliers. En général, les rotors présentent plusieurs roues, disques, masses, ou accouplements montés sur un arbre qui est plus long que le plus grand diamètre extérieur. La difficulté rencontrée est que la distribution du balourd tout le long du rotor est inconnue et par conséquent, le balourd ponctuel ne peut être corrigé individuellement. La correction de ce balourd est l'opération qui consiste à minimiser l'effet des forces centrifuges sur les vibrations du rotor et sur les efforts transmis aux paliers. Cette correction est appelée équilibrage du balourd du rotor.

Les procédures utilisées consistent à appliquer, sur cette distribution inconnue de balourd, un ensemble fini de balourds correcteurs, de façon à ce que l'ensemble se comporte de façon satisfaisante. Il s'agit donc bien de la recherche d'un compromis, dont le résultat est lié aux conditions choisies pour réaliser l'opération d'équilibrage.

Pour palier à ces dysfonctionnements et contourner ces anomalies dangereuses pour le bon fonctionnement des rotors, on va définir l'origine des balourds et décrire les procédures et les critères d'équilibrages. Ces méthodes définissant les procédures d'équilibrages sont utilisées pour la correction des balourds des systèmes tournants des machines telles que moteurs électriques, pompes rotatives, turbines à gaz, turbines à vapeurs, compresseurs, turbopropulseurs aéronautique et turboréacteurs d'avions, , alternateurs, générateurs de courant électrique ventilateurs et engrenages, qui sont d'un usage particulièrement courant pour la transformation d'énergie, transport : terrestres, aéronautiques et maritimes et pour toutes autres industries des machines tournantes.



a-Rotor de la Turbine Haute Pression



b-Rotor de la Turbine basse Pression

fig. 6.1 Turbine a gaz MS 5002B

## 2-Origine des Balourds d'un système tournant.

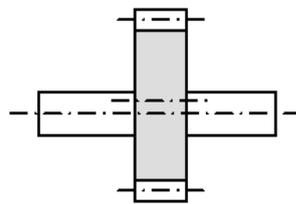
La distribution de balourd d'un rotor est liée à la position du centre de masse de chacun des tronçons élémentaires par rapport à la ligne de rotation, elle-même différente de l'axe géométrique passant par Les centres des paliers . Les origines des balourds sont multiples. On pense souvent aux inhomogénéités des matériaux (soufflure ou inclusion), Tolérances d'usinages (circularité et concentricités), défauts de montages, assymétrie de montage des pièces (montage par clavette et goupille), défauts de services ( usure due a un enlèvement de

la matière (meules..), modification de la répartition de la matière autour de l'axe de rotation (dépôts par encrassement). Ces phénomènes entraînent une mauvaise répartition de la matière autour de l'axe de rotation créant une excentricité de rotation.

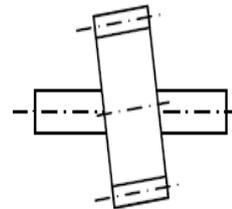
De cette non concentricité fig 1, résulte l'application des forces centrifuges proportionnelle a la vitesse de rotation selon la relation  $F = Mr \omega^2$  qui déforment le rotor. On dit que le rotor présente un balourd. Ce balourd peut être, un balourd statique ou un balourd dynamique et provient généralement des défauts d'usinage, d'assemblage et de montage, ou sont la conséquence:

\*d'une altération mécanique : perte d'ailette, érosion ou encrassement.

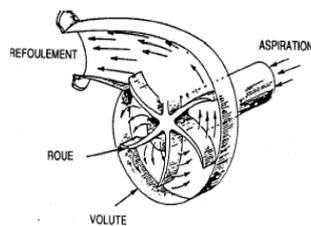
\*d'une altération thermique : déformation suite a des dilatations différentes des matériaux Constituant le rotor ou a des différences de température localisées ...



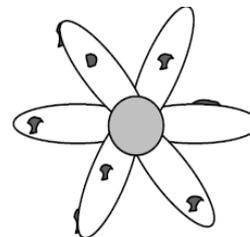
**Défaut d'usinage**



**Défaut de montage**



**Détérioration d'ailette**



**Pales encrassées**

*fig 6.2 Origines des Balourds*

### 3.Mesure d'un Balourd.

La détection d'un balourd est effectuée a l'aide d'un capteur placé sur des paliers le plus souvent pour des mesures radiales sauf pour le cas d'un rotor en porte a faux pour lequel on peut constater en plus une vibration axiale.

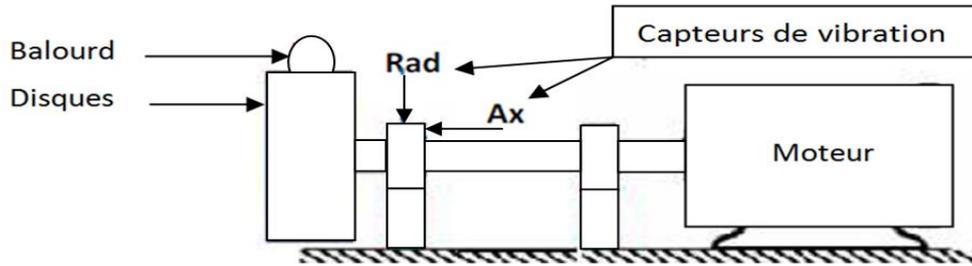


fig 6.3 Mesure d'un Balourd pour un Rotor en porte à faux

### 3.1-Signal vibratoire.

L'amplitude du signal vibratoire donné par un capteur placé sur le palier supportant un rotor déséquilibré, montre que l'Amplitude de la signature vibratoire est une sinusoïde qui représente le maximum lorsque la masse supplémentaire du balourd est en haut du rotor et elle est minimale lorsqu'elle est en bas du rotor.

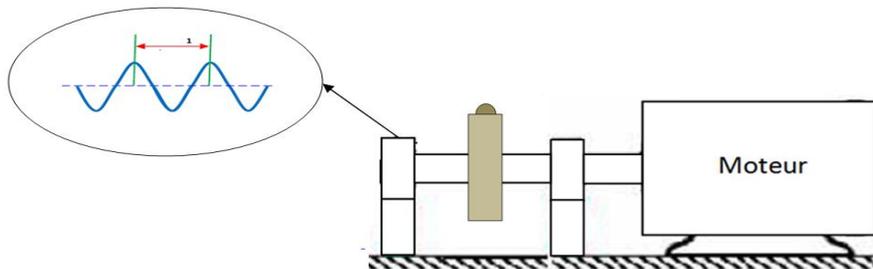


fig 6.4 Signal vibratoire d'un balourd.

### 4.Balourd statique.

Affecte généralement les systèmes tournants a faible vitesses de rotation. Supposant un rotor équilibré, ajoutons une masse ( $m$ ) a la surface supérieur de ce rotor, ce rotor présente un balourd et va osciller avec la masse vers le bas. Ce déséquilibre agit aussi s'il n'ya pas de rotation, ce phénomène est appelé balourd statique, les deux paliers supportant le rotor vont subir en meme temp l'effort centrifuge crée par la masselote ( $m$ ) on dit qu'il ny a aucun déphasage entre les mesures prisent au meme point des deux paliers.

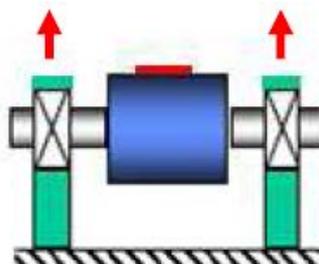


fig 6.5 Balourd statique.

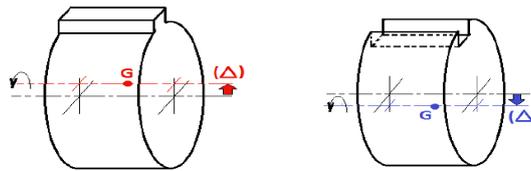


fig 6.6 Déplacement de l'axe de rotation.

**5. Balourd dynamique.**

Soit le rotor précédant et présentant maintenant deux masses identiques mais décalées de 180° et placées de part et d'autre de l'axe de rotation.. Ce déséquilibre agit aussi pendant la rotation on l'appel alors Balourd dynamique, les deux paliers vont subir l'effort centrifuge de façon alternées le déphasage est proche de 180°

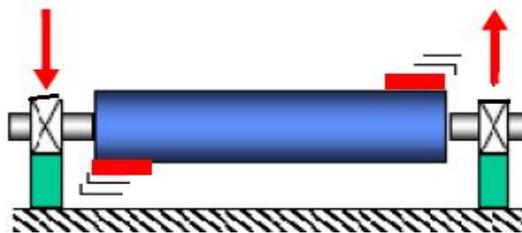


Fig 6.7 Balourd dynamique

**5.1-. Equilibrage d'un Balourd dynamique.**

Soit un arbre en rotation avec un balourd défini par une masse m placée a une distance r du centre de rotation, cette masse crée une force centrifuge qui a tendance a déplacer le centre de rotation d'une distance e appelée excentricité du centre de rotation.

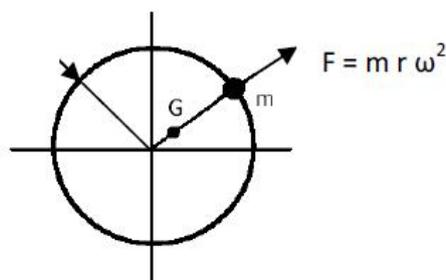


fig 6.8 Balourd de masse m

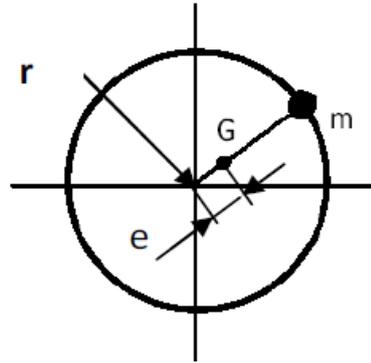
Le balourd peut être calculé par :

$$B = m \cdot r \tag{5.1}$$

m : masse du balourd. en (g)

r : rayon de l'emplacement de la masse en (mm).

B : balourd en (g.mm)

fig 6.9 Excentricité  $e$  du centre de rotation

L'excentricité peut être calculée par.

$$e = \frac{1}{M} \cdot mr \quad (5.2)$$

$$e = \frac{B}{M} \quad (5.3)$$

$M$  : masse de l'arbre en (g).

$e$  : excentricité en (mm).

### 6. Degrés de qualité de l'équilibrage.

Le degré de qualité de l'équilibrage ( $G$ ), est fonction de la vitesse de rotation  $\omega$  et du type des machines..

$$G = e \cdot \omega \quad (5.4)$$

$\omega$  : vitesse angulaire en (rd/mn).

$G$  : degré de qualité d'équilibrage en (mmrd/mn).

### 7. Déséquilibre résiduel acceptable.

Le déséquilibre résiduel acceptable est défini par la masse du balourd qui est fonction de la vitesse de rotation  $\omega$ .

$$m_{rs} = \frac{M \cdot G}{r \cdot \omega} \quad (5.5)$$

$M$  : masse du rotor.

$G$  : qualité d'équilibrage.

$r$  : rayon du balourd  $m$ .

$\omega$  : vitesse de rotation

**Cas pratique : Equilibrage sur Machine du compresseur BCL603.****Hassi Rmel Sonatrach****1-Révision générale du compresseur.**

La révision générale du compresseur consiste à l'ouverture complète du compresseur et de la réalisation des taches suivantes.

- Nettoyage complet du compresseur, les accessoires, des conduites d'aspiration refoulement.
- Relèvement de l'ensemble des jeux de labyrinthe sur deux demi-coquilles.
- Comparaison avec les tolérances données par le constructeur.
- Changement des labyrinthes si nécessaire.
- Changement des pièces d'usure des sous-ensembles paliers porteurs et la butée, ainsi que la boîte d'étanchéité de refoulement et d'aspiration.
- Changement des joints plats et toriques.
- Vérification de l'équilibrage statique et dynamique du rotor.
- Démontage : Le démontage de la section rotor stator du compresseur suivi par un équilibrage dynamique du rotor.



*fig 6.10 Rotor après le démontage*



*fig 6.11 Arbre et roues encrassées*

Lors de l'équilibrage effectué après l'enlèvement des boues/tartes qui recouvraient les roues de manière inhabituelle, on avait constaté un déséquilibre énorme de **494 g (52°)** à l'aspiration et de **206 g (15°)** au refoulement.

## 2. Etapes d'équilibrage :

### 2.1. vérification de la flèche :

Il faut contrôler la flèche du rotor. La flèche mesurée ne doit pas dépassé la flèche calculée.



fig 6.12 Mesure de la flèche

$$F_{cal} = 6,35 * \sqrt{6350 / RPM}$$

**AN:**

$$F_{cal} = 6.35 \sqrt{6350 / 9200}$$

$$F_{cal} = 0,0052 \text{ mm.}$$

$$F_{mes} = 0.004 \text{ mm.}$$

$$F_{cal} > F_{mes}$$

### 2.2. Analyse des résultats :

On remarque la flèche calculée est supérieur par report a la flèche mesure ( $F_{mes} \leq F_{cal}$ ).alors la condition de la flèche est vérifiée et l'équilibrage du rotor sur machine est possible.

### 2.3. Choix de la technique d'équilibrage :

La technique utilisé est l'équilibrage sur machine.

### 2.4 Choix de la machine:

Le choix de la machine est suivant le poids du rotor.

Tableau Choix de la machine d'équilibrage.

Poids du rotor	Choix de la machine
$P_{rot} = 10\text{kg}$	Equilibrage impossible sur machine
$10\text{kg} < P_{rot} < 1000\text{kg}$	Machine d'équilibrage H4B
$500\text{kg} < P_{rot} < 9000\text{kg}$	Machine d'équilibrage H6V

Le poids du Rotor du Compresseur BCL 603.  
Donnée du constructeur.

$$P_{rot} = 1600\text{kg}$$

La machine choisie est donc la machine H6V

$$\text{Car: } 500\text{kg} < 1600\text{kg} < 9000\text{kg}$$

### 3. Méthode d'équilibrage.

La méthode utilisée pour cet équilibrage est La méthode dynamique.

### 4. Mesure des paramètres géométriques du Rotor.

- diamètres des deux paliers du rotor
- distance entre les deux paliers
- diamètre des impulseurs ou disques (plans de correction)
- poids du rotor nu et équipé.

### 5. Type d'équilibrage:

On utilise un équilibrage par enlèvement de la matière qui est indiqué dans la machine par ce symbole (  )

### 6. Calcul de la vitesse critique :

La vitesse critique pour la machine H6V est déterminée comme suit :

$$P \cdot N^2 = 1800 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad N = 1000 \cdot \sqrt{1800/p}$$

P: Poids du Rotor

On a:

$$P = 1600 \text{ kg}$$

Vitesse de rotation est définie par le constructeur du compresseur est :  $V = 9200 \text{ tr/min}$

**AN:**

$$N=1000 * \sqrt{1800/1600} \quad \longrightarrow \quad N=1225 \text{ tr/min}$$

Le Rotor ne doit pas tourner a la vitesse de  $N_{cr} = N_{critique}=1225 \text{ tr/mn}$ , c'est une vitesse critique OU vitesse de résonance dangereuse pour le système tournant.

### 7. Analyse des résultats.

Pour éviter le phénomène de résonance, on doit choisir une vitesse de rotation d'équilibrage inférieur a la vitesse critique  $V_{eq} < N_{cr}$ .

Il existe donc dans cette boite a vitesse Cinq rapports : (2080, 1450, 850, 480, 250 tr/m)

Alors on choisi ici :  $V=850 \text{ tr/min}$

### 8. Positionner le rotor sur la machine.

La position du rotor sur la machine a équilibrer consiste a placer ce rotor sur des paliers et faire un accouplement avec la machine.

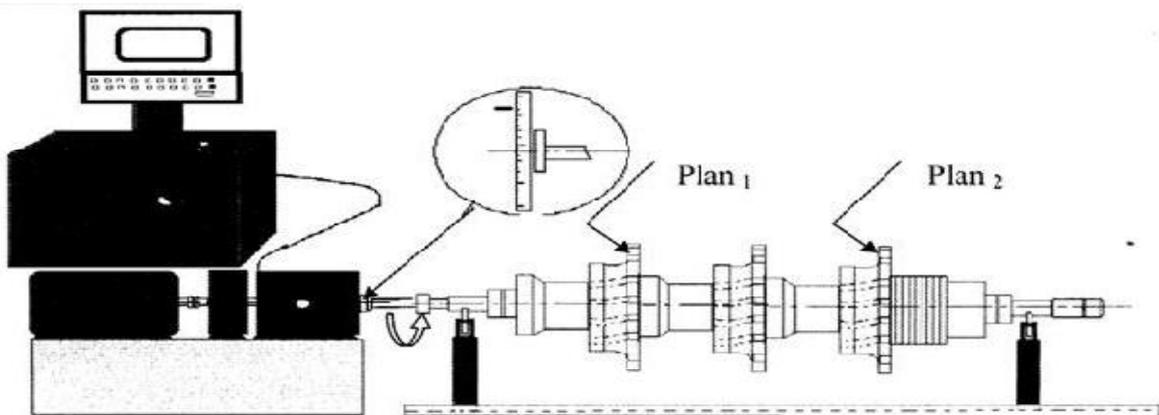


fig. 6.13 Position du rotor sur la machine.

### 9. Choix des cardans.

Le cardan est utilisé ici pour relié le rotor avec la machine a équilibré H6V Le choix de cardan se fait à partir du poids du rotor et son excentricité et en reliant ces deux points sur la figure ( ), on arrive à déterminer le type du cardan à utiliser.

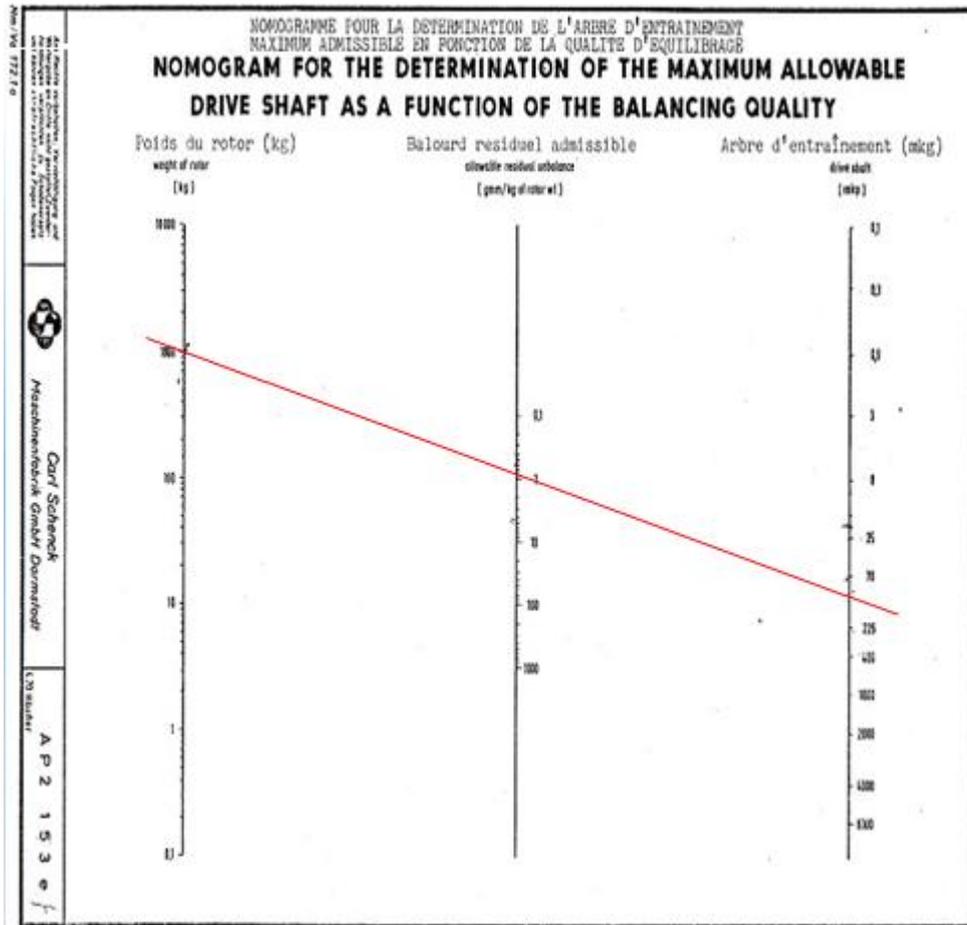


fig. 6.14 Nomogramme pour la détermination de l'arbre d'entraînement maximum admissible en fonction de qualité d'équilibrage.

**10 - Résultat d'équilibrage.**

Les paramètres du rotor avant le nettoyage.

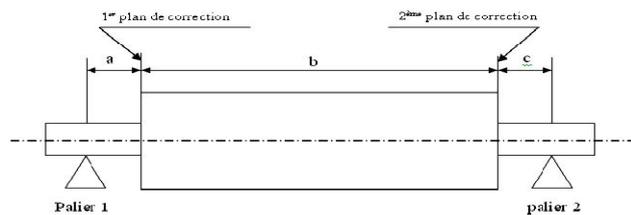


fig 6.15 Model du système tournant

Les résultats obtenus après l'enlèvement de la boue.

**10.1 Lancé 1.**

Les résultats du lancé 1 sont donnés dans le tableau 1.

a=545mm	b=1220mm	c=845mm
$r_1=115.9\text{mm}$	Lancé 1	$r_2=104.7\text{mm}$
$m_1$  Pol		$m_2$  Pol
N réelle=880 tr/mn		N réelle=880 tr/mn
Plan 1		Plan 2
 206g 15 degrés		 494g 52 degré

On constate sur le tableau du lancé1 que la masse provoquant le déséquilibre est aussi importante sur le plan 1 que sur le plan 2. Et avant de faire la première opération de l'enlèvement de la matière sur les deux plans on va passer l'arbre et les impulseurs à une opération de sablage à haute pression.

### 10.2 Sablage.

Le sablage est une technique pratiqué pour le nettoyage des surfaces avant d'effectuer l'équilibrage sur la machine choisie que ce soit un rotor, une poulie, ou des roues, en utilisant un abrasif projeté à grande vitesse et haute pression. et le projectile en question est un mélange de sable (oxyde aluminium), il sert à colmater les fissures et enlevé la rouille et la boue encrassée.



fig 6.16 Rotor avec ses impulseurs sur la machine a équilibrer H6V.

### 10.3 Lancé 2.

Les résultats obtenus apres le sablage (sans butée, et accouplement) pour le 1<sup>er</sup> lancé sont donnés dans le tableau 2 ci dessous.

Tableau 2 Lancé 2.

a=545mm	b=1220 mm	c=845 mm
$r_1 = 115,9 \text{ mm}$	Lancé 2	$r_2 = 104,7 \text{ mm}$
$m_1 = 23,5 \text{ g}$  Plan1		$m_2 = 147 \text{ g}$  Plan2
$e_1 = 136^\circ$  Plan1		$e_2 = 168^\circ$  Plan2

Sur le tableau 2 est représenté le lancé 2 de l'opération de l'équilibrage, on constate que la masse provoquant le déséquilibre est égale 23.5g pour le plan 1 et de 147g pour le plan 2, on doit faire une opération d'enlèvement de la matière sur les deux plans et selon les angles d'excentricités données par la machine.



fig 6.17 Enlèvement de la matière sur un impulseur

**10.4 Lancé 3.**

Les résultats obtenus après l'enlèvement de la matière sont donnés dans le tableau 2.

**Tableau 3 Lancé 3.**

a=545mm	b=1220 mm	c=845 mm
$r_1 = 115,9 \text{ mm}$	Lancé 3	$r_2 = 104,7 \text{ mm}$
$m_1 = 13,9 \text{ g}$  Plan1		$m_2 = 113 \text{ g}$  Plan2
$e_1 = 342^\circ$  Plan1		$e_2 = 170^\circ$  Plan2

Après l'enlèvement de la matière, la masse provoquant le déséquilibre est égale a 13.9g sur le plan 1et dans la direction 342° et de 113g sur le plan 2 dans la direction 170°.le rotor est en déséquilibre par suite un enlèvement de la matière doit être faite avant le lancé 4.

**10.5 Lancé 4.**

Après avoir effectuer un enlèvement de la matière sur les impulseurs des deux plans, la machine donne les résultats suivantes

**Tableau 4 Lancé 4.**

a=545mm	b=1220 mm	c=845 mm
$r_1 = 115,9 \text{ mm}$	Lancé 4	$r_2 = 104,7 \text{ mm}$
$m_1 = 9.4 \text{ g}$  Plan1		$m_2 = 101 \text{ g}$  Plan2
$e_1 = 143^\circ$  Plan1		$e_2 = 169^\circ$  Plan2

Le déséquilibre existe toujours mais la masse provoquant cette excentricité est devenue faible 9.4 g sur le plan 1 et 101g sur le plan 2. On peut dire que le rotor tourne avec des petites vibrations signalées par la machine et qui peuvent être anéanties par un dernier enlèvement de la matière sur les deux plans avant de faire le lancé 5

**10.6 Lancer 5.**

a=545mm	b=1220 mm	c=845 mm
$r_1 = 115,9 \text{ mm}$	Lancé 5	$r_2 = 104,7 \text{ mm}$
$m_1 = 3.16 \text{ g}$  Plan1		$m_2 = 2.68\text{g}$  Plan2
$e_1 = 347^\circ$  Plan1		$e_2 = 355^\circ$  Plan2

Le rotor tourne mais avec de petites vibrations causées par l'excentricité de la masse 3.16g sur le plan 1 et 2.68g sur le plan 2.

**10.7 Lancer 6.**

a=545mm	b=1220 mm	c=845 mm
$r_1 = 115,9 \text{ mm}$	Lancé 6	$r_2 = 104,7 \text{ mm}$
$m_1 = 1.66 \text{ g}$  Plan1		$m_2 = 1.53\text{g}$  Plan2
$e_1 = 333^\circ$  Plan1		$e_2 = 317^\circ$  Plan2

La machine a équilibré indique que le rotor tourne sans aucunes excentricités cela veut dire que ce rotor tourne sans vibrations, on peu dire que le rotor est équilibré.

**11. Conclusion.**

Le rotor du compresseur centrifuge BCL 603 est équilibré après 6 lancés. Cet équilibrage est effectué par enlèvement de la matière sur les deux plans et sur plusieurs angles.

Le rotor entre dans son équilibrage après enlèvement d'une quantité de la matière sur le premier plan égale a 91.02g Et sur le deuxième plan d'une quantité de la matière égale a 381.11g

## *Conclusion*

## **Conclusion**

Dans ce polycopié on a traité la dynamique des Rotors des machines tournantes au repos et en plein régime, ces rotors se trouvent au cœur des équipements industriels : Turbines a gaz, Turbo réacteurs ou Turbo propulseurs des petites avions et Compresseur haute et basse pression.....

La théorie et la cinématique des arbres tournants est basée sur celle d'un rotor de **Laval Jefcott**. On a défini les systèmes des coordonnées d'un repère fixe et d'un repère tournant pour déterminer la position d'un point de la section droite du rotor et pour pouvoir déterminer toutes les énergies cinétiques et de déformation du système tournant qui nous permettent d'écrire l'équation du mouvement.

On a traité aussi et on a définis tous les phénomènes vibratoires générés par un rotor en pleine vitesse de rotation qui sont la Nutation, la précession directe et la précession indirecte ou rétrogradée qui sont représentées par le diagramme de Campbell ainsi que l'effet gyroscopique assurant le couplage des vibrations des deux plans et qui a pour effet secondaire de rigidifier ou assouplir la structure tournante et enfin on a traité le phénomène de la rigidification centrifuge pour laquelle la structure retrouve sa rigidité même pour de très faible mode de vibration ou les fréquences sont faibles c'est à dire une structure moins rigide. On a présenté dans ce document une méthode numérique basée sur un modèle mathématique appelée Méthode des éléments finis version p (MEFP) (hiérarchique et trigonométrique) où la taille de la structure étudiée (poutre) reste constante et le raffinement du maillage est assuré par l'augmentation du degré p de la fonction trigonométrique. Pour initier les étudiants aux calculs par éléments finis on a utilisé une méthode claire pour la détermination de toutes les matrices de l'équation différentielle représentant le mouvement du rotor qui sont des matrices carrées et symétriques (Anti symétrique pour l'effet gyroscopique) et par la suite on a déterminé toutes les fréquences vibratoires du rotor, On a traité ensuite les modes des fréquences vibratoires et on a tracé le diagramme de Campbell et on a interprété ce diagramme par un exemple réel constitué par plusieurs modes de vibrations on a montré sur ce diagramme le type de palier (symétrique ou antisymétrique), les deux branches des fréquences vibratoires directe et rétrogradée, et l'effet gyroscopique. ensuite on a traité la dynamique des rotors en torsion avec quelques exercices d'applications enfin on est passé aux problèmes de l'équilibrage et on a traité un cas pratique d'équilibrage réel d'un compresseur sur machine d'équilibrage H6V.

**Bibliographie :**

- [1]. Assem hassen Magister en dynamique des Machines université de Tlemcen 2009
- [2] Cours les paliers de Technologie Mecanique.
- [3] : Saimi Ahmed Doctorat Unviersité de Tlemcen 2017
- [4] Cours de dynamique des Machines Assem H 2019-/2020
- [5] Cours de vibration Série shaume (Mechanical Vibrations)-william.W Seto,B.S in M.E,M.S (Shaum s Outline Serie Mc graw Hill BookCompany
- [6] Paliers hydrodynamiques web / Google wikipedia.
- [7] Palier a roulement Web/ Google wikipedia
- [8] Roulement a rouleaux et charges appliquées wikipedia Google.

ANNEXES

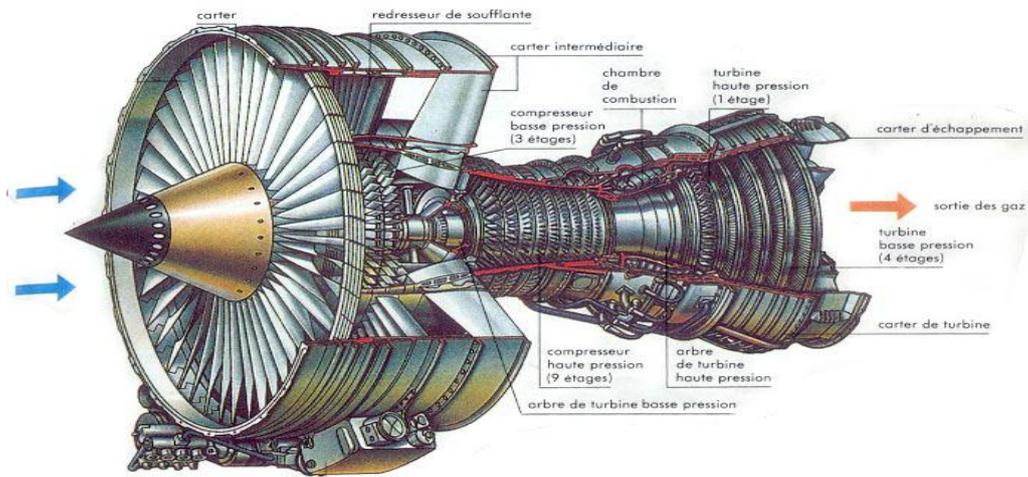


Figure1.A .Rotor avec disques d'un moteur d'avion.



Figure 2.A.Rotor d'un compresseur basse pression



Figure3.A. Rotor d'un compresseur haute pression



Figure4.A. Rotor d'un compresseur BCL603 (Sonatrach hassi Rmel)

