République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

BERRAFA HANANE

Equations différentirlles d'ordre fractionnaire sur les échelles de temps

---

Encadreur :

Fatima Zohra LADRANI

Maitre Conférence "A" à ENS d'Oran.

Soutenu le 22/09/2020

Devant le jury composé de :

Président :	Mme. Bennafla Djamila	M.C.B	C.U.A.T
Examinateurs :	Mr. Beniani Abderrahmane	M.C.A	C.U.A.T
Encadreur :	Mme. Ladrani Fatima Zohra	M.C.A	E.N.S.O.

Année Universitaire : 2019 – 2020

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire : A mes très chers parents.

Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler.

À tous mes enseignants pour leur utiles conseils, leur patiences, leur persévérances.

À mes très chers frères : Ali et Mohammed.

À mon très cher mari : Abd el-hafid.

À mon très précieuse petite fille : Aya.

À mes amis,

À toute ma famille.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,

Je vous dis merci.

Remerciements

Tout d'abords, je remercie Dieu le Tout Puissant pour m'avoir guidé dans le bon chemin afin d'accomplir et de pouvoir présenter ce modeste travail.
J'adresse mes profondes reconnaissances et mon chaleureux remerciement à mon encadreur Madame Ladrani Fatima Zohra pour les connaissances qu'elle n'a cessé de me prodiguer, et son assistance tout au long de mon projet.
J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury Madame Bennafla Djamila et Monsieur BENIANI Abderrahmene pour avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury.
J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs du "département Mathématique et Informatique", intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.
Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fière ».
Je remercie mon cher mari Abd el-hafid pour ses sacrifices et soutien moral, matériel qui mon permis de réussir mes études. Ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle.
Je remercie mon cher petite fille que j'aime énormément.
Je remercie mes cher frères pour leur encouragement. Sans oublier de remercier très spécialement mes amies qui m'ont apporté leur soutient moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, je témoigne ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin. En me dispensant temps et conseils.

Hanane BERRAFA.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des échelle de temps a été introduite par le mathématicien Allemand STEFAN HILGER en 1988 dans sa thèse de doctorat, il a des applications dans tous les domaines nécessitant la modélisation simultanée de données discrètes et continues, où une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

La dérivée fractionnaire est un dérivée d'un ordre arbitraire,réel ou complexe, la première apparition du concept d'un dérivée fractionnaire se trouve à la fin de 17^{eme}siècle, elle commence par une lettre écrite qui découle d'une question posée en 1695 par `M. Hôpital` $(1661-1704)$ à `G. Leibniz` $(1646-1716)$, qui cherchait le sens de celui de `Leibniz` actuellement populaire notation $\dfrac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ pour la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sur la possibilité que n soit une fraction (Et si $n = \dfrac{1}{2}$?). Dans sa réponse en 1695, `Leibniz` écrit à `L'Hôpital` comme suit : "Cela conduira à un paradoxe".
En suite, plusieurs mathématiciens ont contribué à son développement : Laplace (1812), Fourier (1822), Abel $(1823-1826)$, Liouville$(1832-1873)$, Riemann (1847), Grunwald $(1867-1872)$, Letnikov $(1868-1872)$, Laurent(1884), Nekrassov (1888), Krug (1890) et Hadamard (1892).

Au cours des dernières années un intérêt considérable est attribué aux applications des dérivées fractionnaire(d'ordre non-entier)dans plusieurs domaines.Il a été trouvé que dans le champ des interdisciplinaires,beaucoup des systèmes peuvent être décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire, par exemple :

- Les dérivée fractionnaire ont été utilisées largement dans le modelé mathématique de la visco-élasticité des matières.

- Les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégro-différentiels fractionnaires.
- En biologie,il a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologiquement la conductance électrique d'ordre fractionnaire, et alors est classé en groupe de modelés d'ordre non-entier.

Ce mémoire se compose de trois chapitre.

Le **premier chapitre :** on a étudier les calculs sur les échelles de temps et on a présenter des résultat principaux sur la différentiabilité et l'intégration : définition,lemme et théorème.

Dans le deuxième chapitre : on a donner quelques résultats utile concernant l'intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville sur une échelles de temps $\mathbb{T}$, et identifier la relation entre les deux, ce chapitre est partagé en deux sections :
La première section,on a définir la dérivée fractionnaire et on a utilisé la définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville sur une échelles de temps$\mathbb{T}$.
La deuxième section, contient les démonstration des propriété fondamentales des opérateur fractionnaire sur les échelle de temps.

Le troisième chapitre : on s'intéresse à l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles du premier d'ordre sur un intervalle borné dans l'échelle de temps et une équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville sur un intervalle borné $\mathbb{R}$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les échelles de temps et nous présentons également des résultats principaux sur la différentiabilité et l'intégration,en fin rappelons quelques théorèmes et définitions.
Démonstrations peuvent être consultées dans les livres [3, 4]

1.1 La Théorie des échelles de temps

1.1.1 Calculs sur les échelles de temps

Définition 1.1.1. *[3, 4]Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.1. *Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont des exemples des échelles de temps.*

Exemple 1.1.2. *Soit h un nombre réel positif fixé, on définit l'échelle de temps par $h\mathbb{Z}$:*

$$h\mathbb{Z} := \{hz : z \in \mathbb{Z}\} = \{..., -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h...\}.$$

Exemple 1.1.3. *Soit q un nombre réel positif fixé. On définit l'échelle de temps $\overline{q^{\mathbb{Z}}}$ par :*

$$\overline{q^{\mathbb{Z}}} = \{q^z : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} = \{...q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, ...\} \cup \{0\}.$$

Définition 1.1.2. *[3, 4] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$, on définit l'opérateur de saut-avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par*

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} \ : \ s > t\}.$$

et l'opérateur de saut-arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par*

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Par convention, on suppose : $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$, *i.e* $\sigma(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* t, $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$, *i.e* $\rho(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* t.

Définition 1.1.3. *[3, 4]La fonction de granulation* $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ *par*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

Les définitions ci-dessus pour l'opérateur de saut avant et l'opérateur de saut arrière prêtent à la classifications des points dans une échelle de temps.

Définition 1.1.4. *[3, 4]Soit* $\mathbb{T}$ *échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$:

1. *Si* $\sigma(t) > t$, *on dit que* t *est un point dispersé à droite.*
2. *Si* $\sigma(t) = t$ *et* $t < \sup \mathbb{T}$, *on dit que* t *est un point dense à droite.*
3. *Si* $\rho(t) < t$, *on dit que* t *est un point dispersé à gauche.*
4. *Si* $\rho(t) = t$ *et* $t > \inf \mathbb{T}$, *on dit que* t *est un point dense à gauche.*
5. *Si un point est dispersé à droite et à gauche,(i.e* $\rho(t) < t < \sigma(t)$*), on dit qu'il est isolé.*
6. *Si un point est dense à droite et à gauche (i.e* $t = \sigma(t) = \rho(t)$*), on dit qu'il est dense.*

Exemple 1.1.4. *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$.

· *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *on a* $\sigma(t) = \rho(t) = t$ *et* $\mu(t) = 0$, *donc, chaque point de* $\mathbb{R}$ *est dense..*

· *Si* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *avec* $h > 0$, *alors*

$$\sigma(t) = t + h, \quad \rho(t) = t - h, \quad \mu(t) = h.$$

Donc, chaque point de $h\mathbb{Z}$ *est isolé.*

Définition 1.1.5. *[3, 4]Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps.*

· *Si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* M *dispersé à gauche on pose* $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} - \{M\}$, *si non*

$\mathbb{T}^k := \mathbb{T}$.

$$\mathbb{T}^k := \begin{cases} \mathbb{T}\backslash\left(\rho\left(\sup\mathbb{T}\right), \sup\mathbb{T}\right], & si \ \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & si \ \sup\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

· *Si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* m *dispersé à droit on pose* $\mathbb{T}_k := \mathbb{T} - \{m\}$, *si nom* $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.

Définition 1.1.6. *[3, 4]Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction, on définit la fonction* f^σ : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *par :*

$$f^\sigma(t) := (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

1.1.2 Différentiabilité

Maintenant nous considérons une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et on définit la delta dérivée de f en un point $t \in \mathbb{T}^k$ de la façon suivante.

Définition 1.1.7. *[3, 4]Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$. *On dit que* f *et* Δ*-différentiable en* t *s'il existe un nombre réel* $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* t *(i.e,* $\mathcal{U} = (t-\delta, t+\delta) \bigcap \mathbb{T}$ *pour certain* $\delta > 0$*) tel que*

$$|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \qquad \textit{pour tout } s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^\Delta(t)$ *la* Δ*-dérivée de* f *en* t.
Si f *est* Δ*-différentiable en tout* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors* $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *est appelée la delta dérivée de* f *sur* $\mathbb{T}^k$.

Rappelons quelques propriétés de la delta dérivée qui sont utilisées dans ce travail.

Théorème 1.1.1. *[3, 4]Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$.

1. *Si* f *est* Δ*-différentiable en* t, *alors* f *est continue en* t.
2. *Si* t *est dispersé à droite et* f *est une fonction continue en* t, *alors* f *est différentiable en* t *et*
$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$
3. *Si* t *est dense à droite alors* f *est* Δ*-différentiable en* t, *si seulement si* $\lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$

existe et finie. Dans ce cas on a

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. *Si f est différentiable en t, alors*

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Théorème 1.1.2. *[3, 4]Soient f,g :$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonction Δ-différentiables en $t \in \mathbb{T}^k$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *$f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

2. *Pour tout constante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

3. *$f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t) g(t) + f(\sigma(t)) g^{\Delta}(t) \\ &= f(t) g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t) g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

4. *Si $f(t) f^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est Δ-différentiable en t et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t) f(\sigma(t))}.$$

5. *Si $g(t) g^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t) g(t) - f(t) g^{\Delta}(t)}{g(t) g(\sigma(t))}.$$

Enfin, nous présentons la propriété de la composée $(f \circ g)^{\Delta}$, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Elle a été démontrée par Christian Pötzsche en 1988.

Théorème 1.1.3. *[3, 4]Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction Δ-différentiable.*
Alors $f \circ g$ est Δ-différentiable et on a la formule suivante :

$$[f \circ g]^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t) \left[\int_0^1 f' \left[hg(t) + (1-h) g^{\sigma}(t) \right] dh \right].$$

1.1.3 Intégration

Pour introduire la notion de la Δ-intégrabilité sur les échelles de temps, nous avons besoin tout d'abord de décrire les fonctions qui sont intégrables et pour cela nous présentons les concepts suivants :

Définition 1.1.8. *[3, 4]Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est **régulière** si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Théorème 1.1.4. *[3, 4]Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, alors il existe une fonction F qui est **pré-différentiable** avec une région de différentiation $\mathcal{D}$ tel que :*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \text{pour tout } t \in \mathcal{D}.$$

Définition 1.1.9. *[3, 4]Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on définit l'intégrale indéfinie par :*

$$\int f(t)\Delta t := F(t) + C,$$

où C est une constante arbitraire et F est la primitive de f.

Définition 1.1.10. *[3, 4]Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on définit l'intégrale de Cauchy par*

$$\int_a^b f(t)\Delta t := F(b) - F(a), \qquad \text{pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.1.11. *[3, 4]La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée la primitive de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, telle que*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.1.12. *[3, 4]Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*
On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-continue sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

et l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable et ses dérivées rd-continue sur $\mathbb{T}^k$ par :

$$\mathcal{C}^1_{rd} = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.1.5 (Existence d'Antidérivées)**.** *[3, 4] Chaque fonction rd-continue a une antidérivée. En particulier si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors F défini par :*

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

est une antidérivée de f.

Théorème 1.1.6. *[3, 4]Soient $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, on a :*

1. *Si f est continue, alors f est rd-continue.*
2. *Si f est rd-continue, alors f est régulière.*
3. *L'opérateur de saut avant σ est rd-continue.*
4. *Si f est rd-continue ou régulière, alors $f \circ \sigma$ c'est ainsi.*
5. *Si f est continue et g est rd-continue ou régulière, alors $f \circ g$ est également rd-continue ou régulière respectivement.*

Le théorème suivant fournit plusieurs propriétés élémentaires de la delta intégrale.

Théorème 1.1.7. *[3, 4]Si $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(t) + g(t)]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$

4. $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

5. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$

6. *Si* $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a,b) \cap \mathbb{T}$*, alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$$

7. *Si* $f(t) \geq 0$*, pour tout* $a \leq t \leq b$*, alors* $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

8. *Pour tout* $t \in \mathbb{T}$*, alors* $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta(\tau) = \mu(t)f(t).$

1.1.4 L'intégrale de Lebesgue sur les échelles de temps

dans cette partie, nous définissons une théorie de la mesure et l'intégration pour les échelles de temps $\mathbb{T}$ bornées où $a := \min \mathbb{T}$ et $b := \max \mathbb{T}$.

Définition 1.1.13. *[5]Soit* $\mathcal{F}_1$ *une famille d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite de* $\mathbb{T}$ *de la forme*

$$[c,d) = \{t \in \mathbb{T} : c \leq t < d\}.$$

où $c, d \in \mathbb{T}$ *et* $c \leq d$*.*

Définition 1.1.14. *[5]On définit une mesure additive* $m_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$ *par*

$$m_1([c,d)) = d - c.$$

Une mesure extérieure $m_1^* : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ *est définie par :*
pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{T}$

$$m_1^*(E) = \begin{cases} \inf\left\{\sum_{k=1}^{k=n} m(A_k) : E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{k=m} A_k \text{ avec } A_k \in \mathcal{F}_1\right\} & si \quad b \notin E, \\ +\infty & si \quad b \in E. \end{cases}$$

Définition 1.1.15. *[5]Un ensemble* $A \subset T$ *est* Δ*-mesurable si la relation*

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap (\mathbb{T} \backslash A)),$$

est vérifiée pour tout ensemble $E \subset \mathbb{T}$.

Maintenant, on considère la famille

$$\mathcal{M}\left(m_1^*\right) = \{A \subset \mathbb{T} : A \text{ est } \Delta - \text{mesurable}\},$$

et la mesure μ_Δ comme étant la restriction de m_1^* sur l'ensemble $\mathcal{M}\left(m_1^*\right)$.

Nous présentons plusieurs concepts de la mesure générale et de l'intégration, appliqués à l'espace mesurable complet avec le triplet $\left(\mathbb{T}, \mathcal{M}\left(m_1^*\right), \mu_\Delta\right)$. Cet espace mesuré est utilisé pour définir la Δ-mesurabilité et la Δ-intégrabilité des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

Lemme 1.1.1. *[5]L'ensemble de tous les points dispersés à droit de $\mathbb{T}$ est dénombrable, c'est-à-dire, il existe $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ tels que*

$$\mathcal{R} := \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) > t\} = \{t_i\}_{i \in I}. \tag{1.1}$$

Pour $E \subset \mathbb{T}$, nous définissons

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap \mathcal{R}\},$$

avec $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$.

Voici une correspondance intéressante qui existe entre la mesure μ_Δ sur $\mathbb{T}$ et la mesure de Lebesgue μ_L sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.8. *[5]Soit $A \subset \mathbb{T}$. Alors A est Δ-mesurable si et seulement si A est mesurable pour la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, si $b \notin A$, nous avons la propriété suivante*

$$\mu_\Delta(A) = \sum_{i \in I_E} (\sigma(t_i) - t_i) + \mu(A).$$

Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, nous avons besoin d'une fonction auxiliaire qui prolonge $\widetilde{f}$ à l'intervalle $[a, b]$, $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\widetilde{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in \mathbb{T}, \\ f(t_i) & \text{si } t \in (t_i, \sigma(t_i)), \text{ pour } i \in I. \end{cases} \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.1. *[5]Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}$ son extention sur $[a, b]$. Alors, f est $\Delta-$mesurable si et seulement si, $\widetilde{f}$ est mesurable au sens de Lebesgue.*

Le théorème suivant donne une formule pour calculer Lebesgue $\Delta-$intégrale.

Théorème 1.1.9. *[5]Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta-$mesurable tel que $b \notin E$ et $\widetilde{E} = E \cup (\cup_{i \in I_E}(t_i, \sigma(t_i)))$. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$intégrable, alors*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_E f(s)ds + \sum_{i \in I_E} \mu(t_i) f(t_i).$$

Définition 1.1.16 (Espace de Lebesgue sur les échelles de temps)**.** *[14]Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et soit $E \subseteq \mathbb{T}$ un ensemble Δ-mesurable ; on pose*

$$L^p_\Delta(E, \mathbb{R}) := \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ est } \Delta - \text{mesurable et } \int_E |f|^p \Delta t < \infty \right\}.$$

On note la norme sur $L^p_\Delta(E, \mathbb{R})$

$$\|f\|_{L^p_\Delta(E,\mathbb{R})} := \left(\int_E |f(t)|^p \Delta t \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Définitions et Théorèmes d'analyses Fonctionnelles

Cette section est consacrée à quelques définitions de l'analyse fonctionnelle et Théorèmes du point fixe

1.2.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur K. On appelle une norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

(iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire).*

Une norme est généralement notée $\|.\|$ et la couple $(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé.

Exemple 1.2.1. *On définit une norme sur l'espace vectoriel* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *de la maniére suivantes*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Définition 1.2.2. *On dit qu'un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est complet si toute suite de Cauchy de* E *est convergente. Un espace vectoriel normé qui est complet s'appelle espace de Banach noté* $(E, \|.\|)$.

Dans la suite $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent des espaces de Banach.

Définition 1.2.3. *On dit qu'une partie* A *de* $(E, \|.\|_E)$ *est bornée s'il existe une boule fermée* $\overline{B}(a,r)$ *telle que* $A \subset \overline{B}(a,r)$ *i.e.*

$$\exists r > 0, \qquad \exists a \in E, \qquad A \subset \overline{B}(a,r).$$

Où

$$\exists r > 0, \qquad A \subset \overline{B}(0,r).$$

Définition 1.2.4. *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application. On dit que* F *est bornée si elle envoie les parties bornées de* E *sur des parties bornées de* F *i.e.* $F\,(bornée)$ *est bornée.*

Remarque 1.2.1. *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application bornée, i.e, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que*

$$\text{pour tout } x \in E : \|x\|_E \leq \varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x)\|_F \leq \delta.$$

Définition 1.2.5. *Soient* $a \in E$ *et* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. *On dit que* F *est continue au point* a *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *pour* $x \in E$, *on a*

$$\|x-a\|_E < \delta \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a)\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.6. *On dit que* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est* $k-$*lipschitzienne si, pour tout* $x, y \in E$, *on a*

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\| \leq k\,\|x-y\|_E.$$

Lorsque $k < 1$, *on dira que* $\mathcal{F}$ *est contractante.*

Proposition 1.2.1. *Une application $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ est continue au point x, si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n$ converge vers x dans E, alors $(\mathcal{F}(x_n))_n$ converge vers $F(x)$ dans F.*

Définition 1.2.7. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un ensemble $M \subset E$ est dit convexe si*

$$\forall u, v \in M, \qquad \forall \lambda \in [0,1], \qquad \text{on a } \lambda u + (1-\lambda)v \in M.$$

Définition 1.2.8. *Un ensemble M est relativement compact si $\overline{M}$ est compact.*

Définition 1.2.9. *Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. L'application $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ est dite compacte si :*

i) $\mathcal{F}$ est continue sur E.

ii) $\mathcal{F}(E)$ est relativement compact dans F.

Définition 1.2.10. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. L'application $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ est dite complètement continue si :*

i) $\mathcal{F}$ est continue sur E.

ii) Pour tout sous-ensemble borné A de E, implique que $\mathcal{F}(A)$ est relativement compacte dans F.

Définition 1.2.11. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (E, \|.\|_E)$ une application. Un élément x_0 de E est dit point fixe de $\mathcal{F}$ si :*

$$\mathcal{F}(x_0) = x_0.$$

1.2.2 Théorème d'Arzéla-Ascoli

Définition 1.2.12 (Equicontinuité)**.** *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_E)$ espaces normés et H une partie de $\mathcal{C}(E, F)$. On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \eta \qquad \text{implique} \qquad \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E.

Remarque 1.2.2. *Le point important, η ne dépend pas de f.*

Théorème 1.2.1 (Arzéla-Ascoli)**.** *Soit K un sous-ensemble compact dans E et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(K,F)$. Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(K,F)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\mathcal{H}$ est équicontinue

ii) $\forall x \in K$, $\mathcal{H}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compacte dans F.

1.2.3 Théorème du point fixe de type Leray Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.2.2 (Schauder)**.** *[1] Soit M un sous-ensemble de E fermé et convexe et $\mathcal{F} : M \to M$ une application continue telle que $\mathcal{F}(M)$ est relativement compact. Alors F possède un point fixe.*
Plus généralement, si M est un compact convexe alors toute fonction continue de M sur M possède un point fixe.

1.2.4 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.2.3. *[1] Soit $(E, \| \, . \, \|_E)$ un espace de Banach et $\mathcal{F} : E \to E$ une contraction, s'il existe $0 < k < 1$, tel que :*

$$\forall y_1, y_2 \in E, \qquad \|\mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2)\|_E \leq k \|y_1 - y_2\|_E ,$$

alors l'opérateur $\mathcal{F}$ admet un point fixe unique $x \in E$.

1.3 Fonctions spéciales

Définition 1.3.1 (Fonction Gamma)**.** *On appelle fonction Gamma d'Euler noté $\Gamma(z)$ avec z est un nombre complexe, la fonction*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad Re(z) > 0.$$

Définition 1.3.2 (Fonction Béta). *La fonction Béta ou fonction de Bessel du second espèce est définie par :*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \qquad z,w \in \mathbb{C} \quad avec \quad Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0.$$

Lemme 1.3.1. *La fonction gamma satisfait les la formules suivantes*

(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0 : \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n) = (n-1)!$,

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Lemme 1.3.2. *La fonction Béta satisfait les la formules suivantes*

(i) Pour tout $z,w \in \mathbb{C}$, *tel que* $Re(z) > 0, Re(w) > 0 : \beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

(ii) Pour tout $z,w \in \mathbb{C}$, *tel que* $Re(z) > 0, Re(w) > 0 : \beta(z,w) = \beta(w,z)$.

(ii) Pour tout $z,w \in \mathbb{C}$, *tel que* $Re(z) > 0, Re(w) > 0 : \beta(z,w+1) = \frac{w}{z}\beta(z+1,w) = \frac{w}{z+w}\beta(z,w)$.

Chapitre 2

Calcul fractionnaire aux sens de Riemann-Liouville sur les échelles de temps

Dans ce chapitre on va donner clairement quelques résultats utiles concernant l'intégrale et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville sur une échelle de temps $\mathbb{T}$ et on va identifer la relation entre les deux.

La notion de différenciation fractionnelle sur les échelles de temps est introduite et ensuite seulement à l'aide d'un tel concept, l'intégrale de fraction est définie.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville sur les échelles de temps

Définition 2.1.1 (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville sur les échelles de temps)**.** *[2]Supposons que* $\mathbb{T}$ *est une échelle de temps,* $[a, b]$ *est un intervalle de* $\mathbb{T}$ *et* h *est une fonction intégrable sur* $[a, b]$*, soit* α *un nombre réel, tel que* $\alpha > 0$*, l'intégrale fractionnaire d'ordre* α *de* h *est définie par :*

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h(t) := \int_{a}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\Delta s, \tag{2.1}$$

où Γ *est la fonction gamma.*

Exemple 2.1.1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Soit la fonction puissance suivante :*

$$h(t) = (t-a)^{\alpha}, \qquad \text{pour tout } t > a, \ \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas on a

$${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} h(t) = I_a^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\alpha} ds$$

On change de variable en posant $s = a + (t-a)v$, ce qui donne $ds = (t-a)dv$, alors

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}(t-a)^{\alpha} v^{\alpha}(t-a)dv \\ &= \frac{(t-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} v^{\alpha} dv. \end{aligned}$$

En utilisant la d ́efinition de Béta, on trouve

$$I_a^{\alpha} h(t) = \frac{\beta(\alpha+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{2\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}(t-a)^{2\alpha}.$$

Remarque 2.1.1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, soit h une fonction constante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $h(x) = C \in \mathbb{R}$, l'intégrale d'une fonction constante de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(h) &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.2. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Soit h une fonction constante sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $h(t) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$. Nous prenons $a = 1$, alors*

$${}_1^{\mathbb{N}}I_t^{\alpha} h(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (t-s)^{\alpha-1} \Delta s.$$

Nous rappelons que l'intégrale sur $\mathbb{N}$ est défini par

$$\int_a^b f(t)\,\Delta s = \sum\nolimits_{t=a}^{t=b-1} f(t), \ \text{avec } a, b \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Donc

$$\begin{aligned}
{}_{1}^{\mathbb{N}}I_{t}^{\alpha}h(t) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\sum\nolimits_{s=1}^{s=t-1}(t-s)^{\alpha-1} \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left[(t-1)^{\alpha-1}+(t-2)^{\alpha-1}+...+1^{\alpha-1}\right] \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\sum\nolimits_{\tau=1}^{\tau=t-1}\tau^{\alpha-1}, \qquad \textit{pour tout } t\geq 2.
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.2. *Si $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, on peut écrire ${}_{a}^{\mathbb{R}}I_{t}^{\alpha}=I_{a}^{\alpha}$ sous la forme suivante :*

$$I_{a}^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t-a}s^{\alpha-1}f(t-s)ds.$$

Proposition 2.1.1. *Supposons que $\mathbb{T}$ est une échelle de temps, $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{T}$. Soient $h\in L_{\Delta}^{1}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ et $\alpha\in(0,1)$. Alors,*

i) l'intégrale ${}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h$ existe pour presque tout t dans $[a,b]$,

ii) la fonction ${}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h$ est un élément de $L_{\Delta}^{1}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$.

Démonstration.
Par l'équation (2.1), nous avons

$$\left|{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h(t)\right|\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)\right|\Delta s,$$

Par le Théorème de Fubini, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b}\left|{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h(t)\right|\Delta t &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{b}\left(\int_{a}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)\right|\Delta s\right)\Delta t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{b}\int_{a}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)\right|\Delta s\Delta t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{b}\left|h(s)\right|\int_{s}^{b}(t-s)^{\alpha-1}\Delta t\Delta s.
\end{aligned}$$

Par le Théoréme 1.1.9, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{s}^{b}(t-s)^{\alpha-1}\Delta t &= \int_{[s,b)\cap\mathbb{T}}(t-s)^{\alpha-1}dt+\sum_{\tau\in[s,b)\cap\mathcal{R}}\mu\left(\tau\right)\left(\tau-s\right)^{\alpha-1} \\
&= \int_{s}^{b}(t-s)^{\alpha-1}dt-\sum_{\tau\in[s,b)\cap\mathcal{R}}\int_{\tau}^{\sigma(\tau)}(t-s)^{\alpha-1}dt \\
&\quad+\sum_{\tau\in[s,b)\cap\mathcal{R}}\mu\left(\tau\right)\left(\tau-s\right)^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\mu(\tau)(\tau-s)^{\alpha-1}-\int_{\tau}^{\sigma(t)}(\tau-s)^{\alpha-1}dt\leq 0,\text{ pour tout }\tau\in[s,b)\cap\mathcal{R},$$

ce qui implique

$$\int_s^b (t-s)^{\alpha-1}\Delta t\leq\int_s^b (t-s)^{\alpha-1}dt=\frac{(b-s)^{\alpha}}{\alpha},$$

donc

$$\begin{aligned}\int_a^b\left|{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h(t)\right|\Delta t &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-s)^{\alpha}\left|h(s)\right|\Delta s\\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b\left|h(s)\right|\Delta s\\ &= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|h\right\|_{L^1_{\Delta}}<\infty,\end{aligned}$$

Nous concluons que ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h\in L^1_{\Delta}([a,b],\mathbb{R})$ et

$$\left\|{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h\right\|_{L^1_{\Delta}}\leq\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|h\right\|_{L^1_{\Delta}},$$

cela signifie ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h$ existe pour presque tout t dans $[a,b]$. □

Proposition 2.1.2 (Composition de l'intégrale fractionnaire)**.** *Si* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$*, Soit* h *une fonction intégrable et bornée sur* $[a,b]\subset\mathbb{R}$*,* α *et* β *deux nombres réels strictement positifs. Alors*

$$\left[I_a^{\beta}\circ I_a^{\alpha}\right]h(t)=I_a^{\alpha+\beta}h(t). \tag{2.4}$$

Démonstration.

Soient h est une fonction intégrable et bornée, et α,β deux nombres réels strictement positifs, alors

$$\begin{aligned}I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}h(t)\right]&=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t-a}s^{\beta-1}I_a^{\alpha}f(t-s)ds\\ &=\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-a}s^{\beta-1}\left(\int_a^{t-s}(t-s-u)^{\alpha-1}h(u)du\right)dt\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini nous pouvons échangés l'ordre de l'intégrale et obtenant :

$$I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}h(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t h(u)du\int_0^{t-u} t^{\beta-1}(t-u-s)^{\alpha-1}dt$$

On change de variable en posant $\tau = v(t-u)$ ce qui donne $d\tau = (t-u)dv$, alors :

$$\begin{aligned}I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}h(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t h(u)du\int_0^1 (v(t-u))^{\beta-1}(t-u-v(t-u))^{\alpha-1}(t-u)dv\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}h(u)du\right)\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\alpha-1}dv\end{aligned}$$

En utilisant la d´éfinition de Béta, on trouve

$$\begin{aligned}I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}h(t)\right] &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta))}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}h(u)du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}h(u)du\\ &= I^{\alpha+\beta}h(t).\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.1.3. *L'égalité 2.4 dans la proposition 2.1.2 n'est pas vrais quelle que soit échelle de temps.*

Exemple 2.1.3. *Pour $\mathbb{T}=\mathbb{N}$, soit $h:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ une fonction est définit par $h(t)=1$, si $a=1$, par l'exemple 2.1.2, on a*

$$\begin{aligned}{}_1^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum\nolimits_{s=1}^{s=t-1} s^{\alpha-1}, \quad \textit{pour tout } t\geq 2,\\ : &= g(t)\end{aligned}$$

$${}_1^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha+\beta}h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum\nolimits_{s=1}^{s=t-1} s^{\alpha+\beta-1}, \quad \textit{pour tout } t\geq 2.$$

D'autre part,

$${}_1^{\mathbb{T}}I_t^{\beta}\left[{}_1^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h(t)\right] ={}_1^{\mathbb{T}} I_t^{\beta}\left[g(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t (t-s)^{\beta-1}g(s)\Delta s$$

Par (2.3), on obtient

$${}_1^{\mathbb{T}}I_t^{\beta}\left[{}_1^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{s=1}^{s=t-1}(t-s)^{\beta-1}f(s).$$

Ainsi, nous concluons

$$ {}_{1}^{\mathbb{T}}I_t^{\beta}\left[{}_{1}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h(2)\right]=\frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} \qquad et \qquad {}_{1}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha+\beta}h(2)=\frac{2^{\alpha+\beta-1}+1}{\Gamma(\alpha+\beta)}, $$

Par conséquent

$$ {}_{1}^{\mathbb{T}}I_t^{\beta}\left[{}_{1}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h(2)\right]\neq{}_{1}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha+\beta}h(2), $$

d'où l'égalité 2.4 n'est pas vrais sur $\mathbb{N}$.

Proposition 2.1.3. *Supposons que* $\mathbb{T}$ *est une échelle de temps,* $[a,b]$ *est un intervalle de* $\mathbb{T}$*, Soit* $h\in\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$*, alors*

$$ \lim_{\alpha\to 0^{+}}\left[{}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h(t)\right]=h\left(t\right). $$

Démonstration.

Par le Théoréme 1.1.9, on a

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\left(1\right)=\int_a^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Delta s\leq\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, $$

et nous aussi

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\left(1\right) &\geq \sum_{s\in[a,t)\cap\mathcal{R}}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\geq \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s\in[a,t)\cap\mathcal{R}}1=\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned} $$

On pose $\varphi\left(t\right)=\left[{}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\left(1\right)\right]$, par les dérniére inégalites, on obtient

$$ \lim_{\alpha\to 0^{+}}\varphi\left(t\right)=\lim_{\alpha\to 0^{+}}\left[{}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\left(1\right)\right]=1. $$

On pose

$$ m=\sup\left\{\left|h\left(t\right)\right|:t\in[a,b]\right\}<\infty $$

D'une part, on a la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$, alors

$$ \forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0\quad\text{tel que}\quad\forall t,x\in[a,b],\quad\left|t-s\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(t\right)-f\left(s\right)\right|<\varepsilon. $$

Et comme

$$\begin{aligned}
\left|{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h\left(t\right)-\varphi_{\alpha}\left(t\right)h\left(t\right)\right| &= \left|{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h\left(t\right)-\varphi\left(t\right)\left[{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}\left(1\right)\right]\right| \\
&= \left|\int_{a}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\Delta s-\int_{a}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(t)\Delta s\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)-h\left(t\right)\right|\Delta s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t-\delta}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)-h\left(t\right)\right|\Delta s \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)-h\left(t\right)\right|\Delta s
\end{aligned}$$

On conclut

$$\int_{t-\delta}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)-h\left(t\right)\right|\Delta s\leq\varepsilon\int_{t-\delta}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\Delta s\leq\frac{\varepsilon\delta^{\alpha}}{\alpha} \tag{2.5}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{t-\delta}(t-s)^{\alpha-1}\left|h(s)-h\left(t\right)\right|\Delta s &\leq \int_{a}^{t-\delta}(t-s)^{\alpha-1}\left[\left|h(s)\right|+\left|h\left(t\right)\right|\right]\Delta s \\
&\leq 2\sup_{t\in[a,b]}\left|h\left(t\right)\right|\int_{a}^{t-\delta}(t-s)^{\alpha-1}\Delta s \\
&\leq 2\sup_{t\in[a,b]}\left|h\left(t\right)\right|\int_{a}^{t-\delta}(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{2m}{\alpha}\left[(t-a)^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right], \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

d'après les inégalités (2.5) et (2.6), en déduire

$$\left|{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h\left(t\right)-\varphi_{\alpha}\left(t\right)h\left(t\right)\right|\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left(\varepsilon-2m\right)\delta^{\alpha}+2m\left(t-a\right)^{\alpha}\right].$$

Par conséquent

$$0\leq\lim_{\alpha\to0^{+}}\left|{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h\left(t\right)-\varphi_{\alpha}\left(t\right)h\left(t\right)\right|\leq\lim_{\alpha\to0^{+}}\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)},\quad\text{pour tout }\varepsilon>0,$$

Lorsque $\varepsilon\to0$, on obtient

$$\lim_{\alpha\to0^{+}}\left|{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{\alpha}h\left(t\right)-\varphi_{\alpha}\left(t\right)h\left(t\right)\right|=0,$$

ce qui implique

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h\left(t\right)\right]=\lim_{\alpha\to 0^+}\varphi_{\alpha}\left(t\right)h\left(t\right)=h\left(t\right).$$

□

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemman-Liouville sur les échelles de temps

Dans cette section, on introduit la notion de dérivation fractionnaire sur les échelles de temps. L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la défnition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville sur les échelles de temps.

Définition 2.2.1 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville sur les échelles de temps)**.** *[2]Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $[a,b]\subset\mathbb{T}$ et $\alpha\in(0,1)$. Soit h une fonction intégrable sur $[a,b]$. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville sur les échelles de temps de h 'ordre α et on la note ${}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}h$ la fonction définie par*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}h\left(t\right):=\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int_a^t(t-s)^{-\alpha}h(s)\Delta s\right]^{\Delta}. \tag{2.7}$$

Exemple 2.2.1. *Si $\mathbb{T}=\mathbb{N}$. Soit h une fonction constante sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $h(t)=c$, avec $c\in\mathbb{R}$. Par l'exemple 2.1.2, on a*

$$ {}_1^{\mathbb{N}}D_t^{\alpha}h(t):=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\sum_{s=1}^{s=t-1}(t-s)^{-\alpha}\right)^{\Delta}$$

Nous rappelons que Δ-différentiable sur $\mathbb{N}$ est défini par

$$f^{\Delta}\left(t\right)=f\left(t+1\right)-f\left(t\right),\qquad \textit{pour tout } t\in\mathbb{N} \tag{2.8}$$

Donc

$$\begin{aligned}
{}_1^{\mathbb{N}}D_t^{\alpha}h(t)&=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\sum_{s=1}^{s=t}(t+1-s)^{-\alpha}-\sum_{s=1}^{s=t-1}(t-s)^{-\alpha}\right]\\
&=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\sum_{s=0}^{s=t-1}(t-s)^{-\alpha}-\sum_{s=1}^{s=t-1}(t-s)^{-\alpha}\right]\\
&=\frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\qquad \textit{pour tout } t\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons ,cependant facilement généraliser la défnition de dérivée fractionnaire a tout α réel positif , En effet

Définition 2.2.2 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville sur les échelles de temps)**.** *[2]Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $[a,b] \subset \mathbb{T}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+} \backslash \mathbb{N}$. Soit h une fonction intégrable sur $[a,b]$. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville sur les échelles de temps de h 'ordre α et on la note ${}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha}h$ la fonction définie par*

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha}h\left(t\right) = {}_{a}^{\mathbb{T}} D_{t}^{\beta}h^{\Delta^{[\alpha]}}\left(t\right). $$

Avec $[\alpha]$ est la partie entière de α et $\beta = \alpha - [\alpha] \in (0,1)$.

Remarque 2.2.1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Soit $\alpha \in (0,1)$ et h une fonction intégrable sur $[a,b] \subset \mathbb{Z}$. Par (2.8), on obtient*

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{\mathbb{Z}}D_{t}^{\alpha}h(t) &= \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}h(s)\Delta s\right]^{\Delta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_{a}^{t+1}(t+1-s)^{-\alpha}h(s)\Delta s - \int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}h(s)\Delta s\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}\left[(t+1-s)^{-\alpha}-(t-s)^{-\alpha}\right]h(s)\Delta s \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t}^{t+1}(t+1-s)^{-\alpha}h(s)\Delta s \end{aligned} $$

Par la propriété (8) dans le Théoréme 1.1.7, nous avons

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{\mathbb{Z}}D_{t}^{\alpha}h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum\nolimits_{s=a}^{s=t-1}\left[(t+1-s)^{-\alpha}-(t-s)^{-\alpha}\right]h(s) + \frac{\mu\left(t\right)h\left(t\right)}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum\nolimits_{s=a}^{s=t-1}\left[(t+1-s)^{-\alpha}-(t-s)^{-\alpha}\right]h(s) + \frac{h(t)}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned} $$

Exemple 2.2.2. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on note ${}_{a}^{\mathbb{R}}D_{t}^{\alpha} := D_{a}^{\alpha}h$, soit la fonction suivante :*

$$ t \to (t-a)^{\beta}, \qquad \textit{pour tout } t \geq a. $$

Soit $\alpha \in [0,\infty)$, avec $\beta \leq \alpha$, on a

$$ D^{\alpha}\left(t-a\right)^{\beta} = \left[D^{n} \circ I_{a}^{n-\alpha}\right]\left(t-a\right)^{\beta}. $$

Par (2.2) , *on a*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \Gamma(\beta+1)\left[D^{n}\circ I_{a}^{n-\alpha}\circ I_{a}^{\beta}(1)\right] \\ &= \Gamma(\beta+1)\left[D^{n}\circ I_{a}^{n+\beta-\alpha}(1)\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}D^{n}(t-a)^{n+\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si on pose $\beta = 0$ dans l'égalité précédent, on obtient

$$D^{\alpha}(1) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad \text{avec } \alpha \in (0,1).$$

2.3 Propriétés des opérateurs fractionnaire sur les échelles de temps

Dans cette section, nous prouvons quelques propriétés fondamentales des opérateurs fractionnaire sur les échelles de temps.

Proposition 2.3.1. *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps,* $a \in \mathbb{T}$ *et* $\alpha \in (0,1)$*, alors*

$${}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha} = \Delta \circ {}_{a}^{\mathbb{T}} I_{t}^{1-\alpha}.$$

Avec Δ *l'opérateur de différentiabilité sur* $\mathbb{T}$*.*

Démonstration.
Soit h est une fonction intégrable sur $[a,b] \subset \mathbb{T}$, par (2.1) et (2.7), on a

$$\begin{aligned} {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha}h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}h(s)\Delta s\right)^{\Delta} \\ &= \left[{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{1-\alpha}h(t)\right]^{\Delta} \\ &= \left[\Delta \circ {}_{a}^{\mathbb{T}} I_{t}^{1-\alpha}\right]h(t). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.2. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$*, soient* h *une fonction intégrable, bornée,* α *et* β *deux* *nombres réels strictement positif. Alors on a*

$$\left[D_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta}\right] h\left(t\right) = I_a^{\beta-\alpha} h\left(t\right), \qquad \textit{pour tout } t \geq a. \tag{2.10}$$

Avec $\beta \geq \alpha$.

Démonstration.

Soit n entier naturel supérieure strictement à α, on a

$$\begin{aligned}
\left[D_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta}\right] h\left(x\right) &= \left[\left[D_a^{n} \circ I_a^{n-\alpha}\right] \circ I_a^{\beta}\right] h\left(t\right) \\
&= \left[D_a^{n} \circ \left(I_a^{n-\alpha} \circ I_a^{\beta}\right)\right] h\left(t\right) \\
&= \left[D_a^{n} \circ I_a^{n+\beta-\alpha}\right] h\left(t\right) \\
&= \left[\left(D_a^{n} \circ I_a^{n}\right) \circ I_a^{\beta-\alpha}\right] h\left(t\right).
\end{aligned}$$

Comme $D_a^n \circ I_a^n = Id$, alors, il résulte que

$$\begin{aligned}
\left[D_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta}\right] h\left(t\right) &= \left[Id \circ I_a^{\beta-\alpha}\right] h\left(t\right) \\
&= I_a^{\beta-\alpha} h\left(t\right).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *par* (2.10), *on déduit que* $I_a^{\beta} h\left(t\right)$ *admet toutes les dérivées d'ordre entier inférieur à* β.

Corollaire 2.3.1. *Soient* h *une fonction intégrable sur* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$. *Alors on a*

$$\left[D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right] h\left(t\right) = h\left(t\right), \qquad \textit{pour tout } t \geq a. \tag{2.11}$$

Démonstration.

Par proposition 2.3.2, nous avons

$$\begin{aligned}
\left[D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right] h(t) &= D_a^{1} \circ \left[I_a^{1-\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right] h(t) \\
&= \left[D_a^{1} \circ I_a^{1}\right] h\left(t\right) \\
&= h(t).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.2. *L'égalité 2.11 n'est pas vrais quelle que soit échelle de temps.*

Exemple 2.3.1. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{N}$*, soit* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *une foncction est définit par* $h(t) = 1$*, si* $a = 1$*, par l'exemple 2.1.3, on a*

$$ {}_{1}^{\mathbb{N}}I_t^{1-\alpha}\left[{}_{1}^{\mathbb{N}}I_t^{\alpha}h(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\sum\nolimits_{s=1}^{s=t-1}\sum\nolimits_{\tau=1}^{\tau=s-1}(t-s)^{-\alpha}\tau^{\alpha-1}.$$

donc

$$ {}_{a}^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_{a}^{\mathbb{T}} I_t^{\alpha} h\left(t\right) \neq h\left(t\right).$$

Lemme 2.3.1. *Soit* r *un entier naturel et supposons que* $h^{(r)}$ *est intégrable sur* $[a, b]$*. Alors*

$$h^{(r-1)}\left(x\right) = I_a^1 h^{(r)}\left(x\right) + h^{(r-1)}\left(a\right), \qquad \textit{pour tout } x \geq a. \tag{2.12}$$

Démonstration.

Par définition de $I_a^1 h^{(r)}$, on a

$$\begin{aligned} I_a^{(1)}h^{(r)}\left(x\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(1\right)}\int_a^x \left(x-t\right)^0 h^{(r)}\left(t\right)dt \\ &= \int_a^x h^{(r)}\left(t\right)dt \\ &= h^{(r-1)}\left(x\right) - h^{(r-1)}\left(a\right), \end{aligned}$$

d'où

$$h^{(r-1)}\left(x\right) = I_a^1 h^{(r)}\left(x\right) + h^{(r-1)}\left(a\right), \qquad \text{pour tout } x \geq a.$$

□

Lemme 2.3.2. *Soit* r *un entier naturel et supposons que* $h^{(r)}$ *est intégrable sur* $[a, b]$*. Alors*

$$h\left(t\right) = I_a^{(r)}h^{(r)}\left(x\right) + \sum_{i=0}^{r-1}\frac{\left(x-a\right)^i}{i!}h^{(i)}\left(a\right), \qquad \textit{pour tout } x \geq a. \tag{2.13}$$

Démonstration.

En appliquant l'opérateur I_a^1 sur les deux membres de (2.12),

$$I_a^1 h^{(r-1)}\left(x\right) = I_a^2 h^{(r)}\left(x\right) + I_a^1 h^{(r-1)}\left(a\right).$$

Par (2.2), on obtient

$$h^{(r-2)}(x) = I_a^2 h^{(r)}(x) + (x-a)\, h^{(r-1)}(a) + h^{(r-2)}(a). \tag{2.14}$$

En appliquant l'opérateur I_a^1 sur les deux membres de (2.14), on trouve

$$I_a^1 h^{(r-2)}(x) = I_a^3 h^{(r)}(x) + I_a^1 (x-a)\, h^{(r-1)}(a) + I_a^1 h^{(r-2)}(a).$$

Par (2.2), on obtient

$$h^{(r-3)}(x) = I_a^3 h^{(r)}(x) + h^{(r-1)}(a) \frac{(x-a)^2}{2} + (x-a)\, h^{(r-2)}(a) + h^{(r-3)}(a).$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} h(t) &= I_a^r h^{(r)}(x) + h^{(r-1)}(a) \frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} + h^{(r-2)}(a) \frac{(x-a)^{r-2}}{(r-2)!} + .. \\ &\quad + h^{(1)}(a)(t-a) + h(a) \\ &= I_a^r h^{(r)}(t) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(t-a)^i}{i!} h^{(i)}(a). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $r = [\alpha] + 1$. Supposons que I_a^r est intégrable sur $[a, b]$. Alors*

$$D_a^\alpha h(t) = I_a^{r-\alpha} h^{(r)}(t) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} h^{(i)}(a), \qquad \textit{pour tout } t \geq a. \tag{2.15}$$

Démonstration.

En appliquant l'opérateur D_a^α sur les deux membres de (2.13), on trouver

$$\begin{aligned} D_a^\alpha h(t) &= (D_a^\alpha \circ I_a^r)\, h^{(r)}(t) + D_a^\alpha \left(\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(t-a)^i}{i!} h^{(i)}(a) \right) \\ &= (D_a^\alpha \circ I_a^r)\, h^{(r)}(t) + \sum_{i=0}^{r-1} D_a^\alpha \left(\frac{(t-a)^i}{i!} h^{(i)}(a) \right). \end{aligned}$$

Par (2.9), on a

$$D_a^\alpha \left[\frac{(t-a)^i}{i!} h^{(i)}(a) \right] = \frac{(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} h^{(i)}(a), \qquad \text{pour tout } 0 \leq i \leq r-1.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left(D_a^{\alpha} \circ I_a^{r}\right) h^{(r)} &= \left(D_a^{r} \circ I_a^{r-\alpha} \circ I_a^{r}\right) h^{(r)} \\
&= \left(D_a^{r} \circ I_a^{r} \circ I_a^{r-\alpha}\right) h^{(r)} \\
&= \left(Id \circ I_a^{r-\alpha}\right) h^{(r)} \\
&= I_a^{r-\alpha} h^{(r)},
\end{aligned}$$

d'où

$$D_a^{\alpha} h(t) = I_a^{r-\alpha} h^{(r)}(t) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} h^{(i)}(a).$$

□

Chapitre 3

Théorèmes d'existence pour d'équations différentielles aux échelles de temps

Dans ce chapitre, nous intéressons a l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un équation différentielle du premier ordre sur un intervalle borné dans l'échelle de temps et un équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville sur un intervalle borné $\mathbb{R}$.

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limite suivant :

$$\lambda x^{\Delta}(t) + {}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha}\left(p(t)\,x(t)\right) = f\left(t, x(t)\right), \quad t \in [a,b] \tag{3.1}$$

avec la condition intégrale

$$\lambda x^{\sigma}(a) + \left[{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{1-\alpha}\right]^{\sigma}\left(p(a)\,x(a)\right) = 0. \tag{3.2}$$

Avec ${}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α sur l'échelles de temps. Ici, $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{T}$ et $\alpha \in (0,1)$. De plus, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire donnée, $p : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, et

$\lambda \in \mathbb{R}- \{0\}$.

Pour le problèmes nous présenterons un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder et le théorème de point fixe de Banach.

3.2 Équations différentielles du premier ordre sur les échelles de temps

Dans cette section, on s'intéresse à montrer l'existence et l'unicité de d'une solution d'un problème $(3.1),(3.2)$ défini sur $[\sigma(a), b] \subset \mathbb{T}$, où x est une fonction dans $\mathcal{C}([\sigma(a), b], \mathbb{R})$.

Lemme 3.2.1. *[14]Les espaces $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Définition 3.2.1. *Une fonction $x \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est dite solution du problème $(3.1),(3.2)$ si elle satisfait l'équation $(3.1),(3.2)$ sur $[a,b]$ et vérifie la condition (3.2) .*

Lemme 3.2.2. *Soient $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, $[a,b] \subset \mathbb{T}$ et f, p des fonctions, tels que $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Une fonction x dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est une solution du probléme $(3.1),(3.2)$ si et seulement si elle est une solution de l'équation intégrale suivante

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}\int_{\sigma(a)}^{t} f(s, x(s))\,\Delta s - \frac{1}{\lambda\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} p(s)\, x(s)\,\Delta s. \tag{3.3}$$

Démonstration.

$\Rightarrow$D'abord nous prouvons la condition nécessaire :

Par la corollaire 2.3.1 et (3.1), nous avons

$$\left[\lambda x(t) + {}_a^{\mathbb{T}} I_t^{1-\alpha}(p(t)\, x(t))\right]^{\Delta} = f(t, x(t)),$$

Par intégration la dernier égalité, on obtient

$$\lambda x(t) + {}_a^{\mathbb{T}} I_t^{1-\alpha}(p(t)\, x(t)) = \int_{\sigma(a)}^{t} f(s, x(s))\,\Delta s,$$

donc

$$\lambda x(t)=\int_{\sigma(a)}^{t} f(s,x(s))\,\Delta s-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}p(s)\,x(s)\,\Delta s.$$

$\Leftarrow$Maintenant nous montrons la condition suffisante :

Nous appliquons l'opérateur Δ aux deux membres de l'équation (3.3), nous trouvons :

$$\begin{aligned}\lambda x^{\Delta}(t) &= f(t,x(t))-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}p(s)\,x(s)\,\Delta s\right)^{\Delta}\\ &= f(t,x(t))-\left({}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{1-\alpha}p(t)\,x(t)\right)^{\Delta}\\ &= f(t,x(t))-{}_{a}^{\mathbb{T}}D_{t}^{\alpha}\left(p(t)\,x(t)\right).\end{aligned}$$

Si $t\to\sigma(a)$, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned}\lambda x^{\sigma}(a) &= -\lim_{t\to\sigma(a)}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}p(s)\,x(s)\,\Delta s\\ &= -\left[{}_{a}^{\mathbb{T}}I_{t}^{1-\alpha}p(a)\,x(a)\right]^{\sigma}.\end{aligned}$$

Ainsi la condition suffisante est satisfaite. □

3.2.1 Théorème d'existence

Notre première résultat concernant d'existence de la solution du problème $(3.1),(3.2)$, est basé sur le Théorème de point fixe de Schauder 1.2.2.

Théorème 3.2.1. *Supposons que*

(C_1) *La fonction* $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est continue.*

(C_2) *Il existe deux fonction* $r\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\varphi\in\mathcal{C}(\mathbb{R},[0,\infty))$, *tel que*

$$|f(t,x)|\leq r(t)\,\varphi(x)\,,\quad \textit{pour tout } x\in\mathbb{R}\quad \textit{et}\quad t\in[a,b]\,.$$

D'où le problème $(3.1),(3.2)$ *à une solution sur l'intervalle* $[a,b]$.

Démonstration.

Nous transformons le problème $(3.1),(3.2)$ en problème à point fixe.

Considérez l'opérateur suivant :

$$L_\lambda : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$$

défini par

$$L_\lambda x(t) := \frac{1}{\lambda}\int_{\sigma(a)}^{t} f(s,x(s)) - \frac{1}{\lambda\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} p(s)\,x(s)\,\Delta s. \tag{3.4}$$

Nous utilisons le théorème du point fixe de Schauder pour prouver que L_λ a un point fixe.

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

•**Etape** 1 : L_λ est continue.

Soit $(x_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ qui converge vers x. Alors, il existe $q>0$, tel que

$$\|x_n\| \le q, \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_\lambda x_n - L_\lambda x\| = 0$. En effet, pour tout $t\in[\sigma(a),b]$, on a

$$\begin{aligned}
|L_\lambda x_n(t) - L_\lambda x(t)| &\le \frac{1}{|\lambda|}\int_{\sigma(a)}^{t} |f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|\,\Delta s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}|p(s)|\,|x_n(s)-x(s)|\,\Delta s \\
&\le \frac{1}{|\lambda|}\int_a^t |f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|\,\Delta s \\
&\quad + \frac{1}{|\lambda|}\sup_{t\in[a,b]}\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}|p(t)|\right)\|x_n - x\|.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ainsi, f est uniformément continue sur $[a,b]\times[-q,q]$. Soit $\varepsilon>0$, on pose $\varepsilon^* = \varepsilon\left[\lambda^{-1}(b-a) + \left\|{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}|p|\right\|_\infty\right]^{-1}$, alors il existe une $\delta\in(0,\varepsilon^*)$, pour tous x, $y\in\mathbb{R}$, on a

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(s,x)-f(s,y)| \le \varepsilon^*, \qquad \text{pour tout } s\in[a,b]. \tag{3.6}$$

Puisque $(x_n)_n$ convergeant vers x dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors, il exsite $n_0\in\mathbb{N}$,

$$n \ge n_0 : \|x_n - x\| < \delta < \varepsilon^*, \tag{3.7}$$

Substitution (3.7) et (3.6) dans (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} |L_{\lambda} x_n(t) - L_{\lambda} x(t)| &\leq \frac{(b-a)}{|\lambda|}\varepsilon^{*} + \sup_{t\in[a,b]} \left({}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} |p(t)| \right) \varepsilon^{*} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui nous convainc de la continuité de L_{λ}.

•**Etape** : 2

Montrons que L_{λ} envoie touts ensembles bornés en ensemble borné dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : \|x\|_{\infty} \leq \varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \|L_{\lambda} x\|_{\infty} \leq \delta.$$

Par l'hypothèse (C_2), pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$|L_{\lambda} x(t)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \int_a^t r(s)\varphi(x(s))\Delta s + \frac{1}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} |p(s)| |x(s)| \Delta s.$$

Ainsi, φ est continue sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$, alors

$$M_{\varepsilon} := \max_{s\in[a,b]} \varphi(x(s)) \leq \max_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi(x) < \infty,$$

Donc

$$\begin{aligned} \|L_{\lambda} x\|_{\infty} &\leq \frac{M_{\varepsilon}}{|\lambda|} \int_a^b r(s)\Delta s + \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \left\| {}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} |p| \right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \left[M_{\varepsilon}(b-a)\|r\|_{\infty} + \varepsilon \left\| {}_{a}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} |p| \right\| \right] = \delta < \infty. \end{aligned}$$

• **Etape** :3

Montrons que l'opérateur L_{λ} envoie tout ensembles bornés en ensemble équicontinue de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $\overline{B}(0,\varepsilon)$ la boule fermée dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left\{ L_{\lambda}(x) : x \in \overline{B}(0,\varepsilon) \right\} \\ &= \left\{ L_{\lambda}(x) : \|x\|_{\infty} \leq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{H}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. En effet

Soient $t_1, t_2 \in [\sigma(a), b]$, tel que $t_1 \leq t_2$ et soit $x \in \overline{B}(0, \varepsilon)$, alors

$$\begin{aligned}
|L_\lambda x(t_2) - L_\lambda x(t_1)| \leq\ & \frac{1}{|\lambda|} \int_{t_1}^{t_2} r(s)\varphi(x(s))\Delta s \\
& + \frac{1}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t_2} (t_2 - s)^{-\alpha} |p(s)| |x(s)| \Delta s \\
& - \frac{1}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t_1} (t_1 - s)^{-\alpha} |p(s)| |x(s)| \Delta s.
\end{aligned}$$

On pose

$$C := \frac{1}{|\lambda|} \max\left\{ \max_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi(x), \frac{\varepsilon \|p\|_\infty}{\Gamma(1-\alpha)} \right\} < \infty,$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
|L_\lambda x(t_2) - L_\lambda x(t_1)| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \max_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi(x) \int_{t_1}^{t_2} r(s)\Delta s + \frac{\varepsilon \|p\|}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{-\alpha} \Delta s \\
&\quad + \frac{\varepsilon \|p\|}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t_1} \left|(t_2 - s)^{-\alpha} - (t_1 - s)^{-\alpha}\right| \Delta s \\
&\leq C \int_{t_1}^{t_2} r(s)\Delta s + C \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{-\alpha} \Delta s \\
&\quad + C \int_a^{t_1} \left|(t_2 - s)^{-\alpha} - (t_1 - s)^{-\alpha}\right| \Delta s.
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$ le membre de droit de l'intégrale tend vers 0.

d'où $\mathcal{H}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

En conséquent des étapes 2 et 3 et le Théorème d'**Arzéla-Ascoli** 1.2.1 on a $L_\lambda(\overline{B}(0, \varepsilon))$ est relativement compact pour tout $\overline{B}(0, \varepsilon)$ borné.

Par conséquent

L_λ est continue et complètement continue.

En conséquent du Théorème du point fixe de **Leray Schauder** 1.2.2, nous concluons que L_λ a un point fixe, ce qui est la solution du problème (3.1), (3.2). □

Remarque 3.2.1. *Il est claire que les points fixes de l'opérateur L_λ sont les solutions de l'équation* (3.1), (3.2).

3.2.2 Théorème d'unicité

Notre deuxième résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.1), (3.2), est basé sur le Théorème de point fixe de Banach 1.2.3.

Théorème 3.2.2. *Supposons que*

(c_1) *La fonction* $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(C_2) *Il existe une fonction* $r \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, *tel que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq r(t)|x - y|, \quad \textit{pour tout } x, y \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad t \in [a, b]. \quad (3.8)$$

Avec

$$\left\| {}_a^{\mathbb{T}}I_t^1 |r| + {}_a^{\mathbb{T}} I_t^{1-\alpha} |p| \right\|_\infty < |\lambda|. \quad (3.9)$$

Alors, le problème (3.1), (3.2) *admet une solution unique sur* $[a, b]$.

Démonstration.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur L_λ sont les solutions du problème (3.1), (3.2).

Pour montrer que L_λ admet un point fixe unique, il suffit de prouver que L_λ est une contraction.

En effet, soient $x, y \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a pour tout $t \in [a, b]$, nous avons

$$\begin{aligned}
|L_\lambda x(t) - L_\lambda y(t)| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \int_{\sigma(a)}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \Delta s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} |p(s)| |x(s) - y(s)| \Delta s \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^1 |r(t)| + {}_a^{\mathbb{T}} I_t^{1-\alpha} |p(t)| \right) \|x - y\| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} \left\| {}_a^{\mathbb{T}}I_t^1 |r| + {}_a^{\mathbb{T}} I_t^{1-\alpha} |p| \right\|_\infty \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\|L_\lambda x - L_\lambda y\| \leq k \|x - y\|,$$

avec

$$k = \frac{1}{|\lambda|} \left\| {}_a^{\mathbb{T}}I_t^1 |r| + {}_a^{\mathbb{T}} I_t^{1-\alpha} |p| \right\| < 1.$$

Donc de (3.9) on peut déduire que L_λ est une contraction et d'après le Théorème de Banach 1.2.3 le problème (3.1), (3.2) à une seule solution qui est le point fixe de L_λ. □

Remarque 3.2.2. *Supposons que* $\mathbb{T}$ *est une échelle de temps,* $[a, b]$ *est un intervalle de* $\mathbb{T}$. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *tel que* a *est point dispersé à droite, c'est-à-dire* $\sigma(a) > a$.

Par le Théorème 1.1.7, on a

$$\begin{aligned}\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}h\right)^{\sigma}(a) &= \int_a^{\sigma(a)} \frac{(\sigma(a)-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,\Delta s \\ &= \frac{\mu^{\alpha}(a)\,h(a)}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

Exemple 3.2.1. *Considérons le problem de l'équation différentielle suivant :*

$$\begin{cases} \lambda x^{\Delta}(t) + {}_h^{h\mathbb{Z}}D_t^{\frac{1}{2}}x(t) = t^2 x(t), \quad t \in [h, mh]_{h\mathbb{Z}}, \\ \lambda x(2h) = -\dfrac{\sqrt{h}}{\pi} x(h). \end{cases} \tag{3.10}$$

Avec $h > 1$, $\lambda > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, ici,$\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $a = h$, et $b = mh$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $p(t) = 1$ et $f(t, x) = t^2 x$.

Par la remarque 3.2.2, nous trouvons que le problème (3.10) est l'application du problème (3.1), (3.2) dans l'échelle de temps $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$.

Il est claire que f est continue sur $[h, mh] \times \mathbb{R}$. Si $r(t) = t^2$, l'égalité (3.8) est vérifié.

D'autre part, on a

$$ {}_h^{h\mathbb{Z}}I_t^1 |p(t)| + {}_h^{h\mathbb{Z}}I_t^{\frac{1}{2}} |p(t)| \leq \frac{3m}{2}(h-1).$$

Si $3m(h-1) < 2\lambda$, alors (3.9) est vérifié.

Du Théorème 3.2.2, on déduit alors que le problème (3.10) possède une solution unique dans $\mathcal{C}([h, mh]_{h\mathbb{Z}}, \mathbb{R})$.

3.3 Équations différentielles d'ordres fractionnaire de Types Riemann-Liouville

Dans cette section, nous considérons le problème non linéaire d'équation différentielle fractionnaire d'ordre α sur un intervalle borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme :

$$D_a^{\alpha}[p(t)\,x(t)] = f(t, x(t)), \quad \text{pour } t \in [a, b], \tag{3.11}$$

avec la condition intégrale

$$I_a^{1-\alpha}[p(a)\,x(a)] = 0. \tag{3.12}$$

3.3.1 Existence de solution

Lemme 3.3.1. *Soient $\alpha \in (0,1)$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et f, p des fonctions, tels que $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
Une fonction x dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est une solution du probléme (3.11), (3.12) si et seulement si elle est une solution de l'équation intégrale suivante

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{p(t)} f(s, x(s)) dt. \tag{3.13}$$

Démonstration.
D'abord nous prouvons la condition nécessaire :
En appliquant l'opérateur I_a^α sur les deux membres de (3.11),

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \circ D_a^\alpha [p(t) x(t)] &= I_a^\alpha f(t, x(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) dt. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Comme,

$$D_a^\alpha (t-a)^{\alpha-1} = 0, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

Alors

$$D_a^\alpha [p(t) x(t)] = D_a^\alpha [p(t) x(t)] + \lambda D_a^\alpha (t-a)^{\alpha-1},$$

donc

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha \circ D_a^\alpha) [p(t) x(t)] &= (I_a^\alpha \circ D_a^\alpha) [p(t) x(t)] + \lambda (I_a^\alpha \circ D_a^\alpha) (t-a)^{\alpha-1} \\ &= (I_a^\alpha \circ D_a^\alpha) [p(t) x(t)] + \lambda (t-a)^{\alpha-1} \\ &= p(t) x(t) + \lambda (t-a)^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De l'équation (3.14) et (3.15), nous obtenons :

$$p(t) x(t) = -\lambda (t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) dt.$$

D'autre part, on a $I_a^{1-\alpha} [p(a) x(a)] = 0$, alors $\lambda = 0$, donc

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{p(t)} f(s, x(s)) dt.$$

Avec, $0 < \alpha < 1$, d'où la condition nécessaire est satisfaite.

$\Leftarrow$ Maintenant nous montrons la condition suffisante :

Nous appliquons l'opérateur D_a^{α} aux deux membres de l'équation (3.13), nous trouvons :

$$D_a^{\alpha}\left[x\left(t\right)p\left(t\right)\right] = \left(D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right)f(t, x(t)).$$

D'après la Proposition 2.1.2, on obtient

$$\left(D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right)f(t, x(t)) = I^{\alpha-\alpha}f(t, x(t)) = f(t, y(t)).$$

Par conséquent

$$D_a^{\alpha}\left[x\left(t\right)p\left(t\right)\right] = f\left(t, x\left(t\right)\right), \qquad \text{pour tout } t \in \left[a, b\right],$$

donc nous arrivons à l'équation (3.11).

Montrons que x vérifie (3.12) :

Nous appliquons l'opérateur $I_a^{1-\alpha}$ aux deux membres de (3.11) , c'est-à-dire

$$I_a^{1-\alpha}\left[x\left(t\right)p\left(t\right)\right] = \left[I_a^{1-\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right]f(t, y(t)). \tag{3.16}$$

La proposition 2.1.2, nous donnons

$$\left(I_a^{1-\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right)f(t, y(t)) = I_a^{1-\alpha+\alpha}f(t, x(t)) = I_a^{1}f(t, x(t)). \tag{3.17}$$

D'où (3.16) et (3.17), nous arrivons

$$I_a^{1-\alpha}\left[x\left(t\right)p\left(t\right)\right] = \int_a^t f(s, x(s))ds.$$

et quand $t \to a$, nous obtenons $I_a^{1-\alpha}\left[x\left(a\right)p\left(a\right)\right] = 0$.

Ainsi la condition suffisante est satisfaite. $\square$

Notre résultat est basé sur le Théorème de point fixe de Schauder 1.2.2.

Théorème 3.3.1. *Supposons que*

(H_1) *La fonction* $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue et il existe deux fonction* $r \in$

$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R},[0,\infty))$, *tel que*

$$|f(t,x)| \leq r(t)\varphi(x), \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad t \in [a,b].$$

(H_2) *La fonction* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue, tel que*

$$|p(t)| > 0, \quad \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

D'où le problème (3.11), (3.12) à une solution sur l'intervalle $[a,b]$.

Démonstration.
Transformons l'équation (3.11), (3.12) en un problème de point fixe.
On considère l'opérateur suivant :

$$T : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$$

défini par

$$T(x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{p(t)} f(s,x(s))dt.$$

La preuve suit le même raisonnement que dans le Théoréme 3.2.1. □

3.3.2 Unicité de solution

Notre résultat est basé sur le Théorème de point fixe de Banach 1.2.3.

Théorème 3.3.2. *Supposons que*

(H_1) *La fonction* $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue et il existe deux fonction* $r \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, *tel que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq r(t)|x-y|, \quad \textit{pour tout } x,y \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad t \in [a,b]. \tag{3.18}$$

(H_2) *La fonction* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue, tel que*

$$|p(t)| > 0, \quad \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

Avec

$$I_a^{\alpha}\left|r\left(t\right)\right| < \left|p\left(t\right)\right|, \quad \textit{pour tout } t \in \left[a,b\right]. \tag{3.19}$$

Alors, le problème $(3.11),(3.12)$ *admet une solution unique sur* $[a,b]$.

Démonstration.

Pour montrer que T admet un point fixe unique, il suffit de prouver que T est une contraction.

En effet, soient $x,y \in \mathcal{C}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\right)$, on a pour tout $t \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|Tx\left(t\right)-Ty\left(t\right)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\left|p\left(t\right)\right|}\left|f(s,x(s))-f\left(s,y\left(s\right)\right)\right|dt \\
&\leq \frac{\|x-y\|}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\left|p\left(t\right)\right|}r\left(s\right)dt \\
&= \frac{I_a^{\alpha}\left|r\left(t\right)\right|}{\left|p\left(t\right)\right|}\|x-y\| \\
&\leq k\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Avec

$$k = \sup\left\{\frac{I_a^{\alpha}\left|r\left(t\right)\right|}{\left|p\left(t\right)\right|} : t \in [a,b]\right\} < 1.$$

Donc T est une contraction et d'après le Théorème de Banach 1.2.3 le problème $(3.11),(3.12)$ à une seule solution qui est le point fixe de T. □

Exemple 3.3.1. *Considérons le problem de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D_0^{\alpha}\left[(t+1)\,x(t)\right] = \lambda t x\left(t\right), & t \in [0,1], \\ \left(\left[I^{1-\alpha}tx\right](0) = 0.\right. \end{cases} \tag{3.20}$$

Avec λ *une constante,* $\alpha \in (0,1)$.

Ici, $a=0,\ b=1,\ p\left(t\right)=t+1$ *et* $f\left(t,x\right)=\lambda x$.

Il est claire que f *continue sur* $[0,1]\times\mathbb{R}$, *si* $r\left(t\right)=\lambda$, *l'égalité* (3.18) *est vérifié.*

Du Théorème 3.3.1, on déduit alors que le problème (3.20) *possède une solution sur* $[0,1]$.

D'autre part, on a

$$I_a^{\alpha}\left|r\left(t\right)\right| = I_a^{\alpha}\left|\lambda\right| = \frac{\left|\lambda\right|}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}t^{\alpha}, \textit{ pour tout } t \in [0,1],$$

donc

$$\frac{I_a^{\alpha}\left|r\left(t\right)\right|}{\left|p\left(t\right)\right|}<\frac{\left|\lambda\right|}{\Gamma\left(\alpha+1\right)},\quad \textit{pour tout } t\in\left[0,1\right].$$

Si $\left|\lambda\right|<\Gamma\left(\alpha+1\right)$, *alors* (3.19) *est vérifié.*

Du Théorème 3.3.2, on déduit alors que le problème (3.20) *possède une solution unique sur* $[0,1]$.

Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire est de présenter plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équation différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville sur l'échelle de temps ,ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de Schauder et Banach.
Nous espérons, dans l'avenir l'étudie qualitative de ces problème et développer d'autres méthode de résolution les dérivé d'ordre fractionnaire sur une échelle de temps $\mathbb{T}$.

Bibliographie

[1] A. Granas, and J. Dugundji, Fixed point theory. Springer Science & Business Media, (2013).

[2] N.Benkhettou, A. Hammoudi, D. F.M. Torres, Existence and uniqueness of solution for a fractional Riemann–Liouville initial value problem on time scales, Journal of King Saud University–Science (2016) 28, 87–92.

[3] M. Bohner, A.C.Peterson, Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[4] M. Bohner, A.C. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[5] A. Cabada, D. Vivero, Expression of the Lebesgue $\Delta-$integral on time scales as a usual Lebesgue integral ; application to the calculus of $\Delta-$antiderivatives. Mathematical and Computer Modelling 43(2006), 194-207.

[6] S. Hilger, Ein Ma„kettenakalk*ü*l mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. Thesis, Universität Würzburg, 1988 (in German).

[7] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.

[8] M. Benchohra,S Hamani,S. K Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order. Surveys in Mathematics & its Applications, 2008

[9] J. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, collection grenoble sciences, presses universitaires de grenoble,1996.

[10] K. Diethelm, The analysis of fractional differential equations, An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer, 2010.

[11] H. Gilbert, Existence Theorems for First-Order Equations on Time Scales with $\Delta-$Carathéodory Functions, Adv. Diff. Equ, 2010.

[12] S. Lang, Analyse réelle. Cours. Mathématiques. Inter-Editions, 1977.

[13] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications, Masson, Paris, 1996.

[14] A. Benaissa cherif, A. Hammoudi, F. Z. Ladrani, Density problems in $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ space ; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 1(2) July 2013, pp. 178-187.

[15] K. Mekhalfi, D. F. M. Torres, Generalized Fractional Operators on Time Scales with Application to Dynamic Equations, Eur. Phys. J. Special Topics 226, 3489, (2018).