République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

RAOUI FATNA

Fonctions presque périodiques et équations différentielles

Encadrant :

Fatima TCHOUAR

Maître assistant "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le 23/09/2020

Devant le jury composé de :

Président :	M^{me} Bendimered Lamia (MAA)	C.U.B.B.A.T
Examinateur :	Mr Benaissa Abdelkader(MCB)	C.U.B.B.A.T
Encadrant :	M^{me} TCHOUAR Fatima (MAB)	C.U.B.B.A.T

Année Universitaire : 2019 – 2020

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail,

A mon père et ma mère, dont le sacrifice pour moi est sans limite.

A mon cher frère *Bouazza*, pour ses encouragements.

A mes amis(es), à tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie ***ALLAH le tout puissant*** de m'avoir donné le courage, la force, et la volonté d'achever ce travail et je lui rends grâce.

Mes remerciements s'adressent en tout premier lieu à mon encadrant ***Mme Fatima TCHOUAR*** qui a su guider mon travail.

Je remercie ***Mme Lamia BENDIMERED*** d'avoir accepté de présider le jury.
Je remercie ***Mr Abdelkader BENAISSA*** d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Du fond du cœur, je remercie les membres de famille de m'avoir accordée un moment de leur vie afin que je réussisse cette thèse et je pense en particulier à :

Mes parents, vos prières et bénédictions étaient pour moi une fortune et elles le seront toujours. Qu'***Allah*** vous procure la bonne santé et une très longue vie, merci d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Mon adorable frère *Bouazza*, tu m'as soutenu énormément. Que Dieu te bénisse.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département Mathématiques et Informatique.

Enfin je remercie tous mes amis et tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Notations **2**

1 Introduction et préliminaires **3**

1.1 Introduction 3

1.2 Les fonctions périodiques 4

2 Les fonctions presque périodiques **10**

2.1 Définitions et propriétés fondamentales 10

2.2 Fonction presque périodique au sens de Bohr 18

2.3 Analyse de Fourier des fonctions presque périodiques 29

2.3.1 La valeur moyenne d'une fonction presque périodique 29

2.3.2 Série de Fourier associée à une fonction presque périodique . . 38

3 Solution presque périodique d'une équation différentielle non homogène **45**

3.1 C_0 semi-groupe 45

3.2 Fonctions presque périodiques à valeur dans un espace de Banach . . 47

3.3 Solutions presque périodiques 49

Références **59**

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^*$	Ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}^+_*$	Ensemble des nombres réels strictement positifs .
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs.
$\bar{f}$	Le conjugué de f.
$C^1(\mathbb{R}, X)$	Espace des fonctions continûement dérivables de $\mathbb{R}$ dans X.
$\lvert\cdot\rvert$	Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
Imf	$\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$
$\tau_a f$	$f(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$.
$\delta_a f$	$af(x)$, $a \in \mathbb{C}$.
$\check{f}(x)$	$f(-x)$
$\overline{A}$	Adhérence de l'ensemble A.
f'	Dérivée de f.
$\overline{B}(0,r)$	$\{x \in \mathbb{R}, \lvert x\rvert \leq r\}$.

Chapitre 1

Introduction et préliminaires

1.1 Introduction

La théorie des fonctions presque périodiques est une branche des mathématiques lancée par le mathématicien Danois Harald Bohr au début du $20^{ème}$ siècle. Il a écrit une série de documents dans les années $1923 - 1925$ où se trouve les fondements de cette théorie. La presque périodicité, comme propriété structurelle, est une généralisation de la périodicité pure.

Les articles de Bohr ont rapidement attiré l'intérêt d'un certain nombres de chercheurs qui ont apporté de nombreuses contributions importantes au développement de la théorie des fonctions presque périodiques, parmi lesquels V. V. Stepanov, H. Weyl, N. Wiener, A. Besicovitch et J. Von Neumann. En 1933, Bochner définit et étudie les fonctions presque périodique à valeurs dans les espaces de Banach.

Ces dernières années, la théorie des fonctions presque périodiques a été développée en relation avec des problèmes d'équations différentielles, la théorie de la stabilité, les systèmes dynamiques,... etc. Le cercle de la théorie a été sensiblement élargi, et comprend non seulement les équations différentielles ordinaires et les systèmes dynamiques classiques, mais de larges classes d'équations aux dérivées partielles et d'équations dans les espaces de Banach.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est introductif. Il a pour objectif de présenter la notion des fonctions périodiques, ses principales propriétés et de donner certains résultats sur ce type de fonctions. On rappelle, en outre, quelques définitions et théorèmes nécessaires pour le développement de notre travail.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les différents définitions des fonctions presque périodiques et nous prouvons les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions presque périodiques.

Dans le troisième chapitre nous présentons des résultat sur l'existance et l'unicité des solutions presque périodiques de l'équation déffirentielle non homogène

$$u' = Au + f$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe et f est une fonction presque périodiqe.

1.2 Les fonctions périodiques

Définition 1.2.1. *[2] Soit T un nombre réel strictement positif. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite périodique de période T si l'on a*

$$f(x+T) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2.1.

1. *Si f est périodique de période T, alors elle l'est aussi de période nT où $n \in \mathbb{Z}^*$.*
2. *Une fonction de période T est entièrement déterminée par sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+T]$, $a \in \mathbb{R}$.*

Proposition 1.2.1. *[2] Soit f une fonction périodique de période T continue sur $\mathbb{R}$,*

1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(u)du$.*
2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$.*

Preuve.

1. On effectue le changement de variables $u = t + T$ et on trouve

$$\int_{a+T}^{b+T} f(u)du = \int_a^b f(t+T)dt = \int_a^b f(t)dt$$

2. On a

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$$

et d'aprés 1.

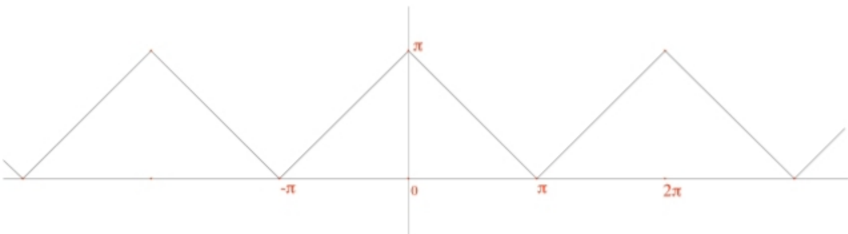
$$\int_a^0 f(t)dt = \int_{a+T}^{T} f(t)dt = -\int_T^{a+T} f(t)dt$$

d'où le résultat.

■

Exemple 1.2.1. • *La fonction* ***créneau****, par exemple de période* 2π*, qui vaut* 1 *sur* $[0, \pi]$ *et* 0 *sur* $]\pi, 2\pi[$.

• *La fonction* ***dent de scie*** f*, paire, périodique de période* 2π*, définie sur* $[0, \pi]$ *par* $f(x) = \pi - x$.



Définition 1.2.2. *[1]*

On appelle polynôme trigonométrique complexe toute fonction de la forme suivante

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

où $C_k \in \mathbb{C}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.2.1. *[1] Si S et T sont deux polynômes trigonométriques, alors pour tous $c \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on a*

i) cT, $\tau_a T$, $\delta_a T$ et $\overline{T}$ sont des polynômes trigonométriques.

ii) T est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

iii) T est borné sur $\mathbb{R}$.

iv) $T + S$ est un polynôme trigonométrique.

v) TS est un polynôme trigonométrique.

Preuve. Soient T et S deux polynômes trigonométriques tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x}$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{m} D_k e^{i\mu_k x}$, avec $C_k, D_k \in \mathbb{C}$ et $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$.

i) (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$cT(x) = \sum_{k=1}^{n} cC_k e^{i\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{n} d_k e^{i\lambda_k x}.$$

Par conséquent, cT est un polynôme trigonométrique.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\tau_a T(x) &= T(x + a) \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k (x+a)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k a} e^{i\lambda_k x}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\tau_a T$ est un polynôme trigonométrique.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\delta_a T &= T(ax) \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k (ax)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i(\lambda_k a) x}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\delta_a T$ est un polynôme trigonométrique.

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\overline{T(x)} &= \overline{\sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{C_k e^{i\lambda_k x}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{C_k} e^{i(-\lambda_k) x}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{T}$ est un polynôme trigonométrique.

ii) Puisque $e^{i\lambda_k x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \Rightarrow \left| e^{i\lambda_k x} - e^{i\lambda_k y} \right| \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $|x - y| \leq \delta$

$$\begin{aligned}|T(x) - T(y)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left| C_k (e^{i\lambda_k x} - e^{i\lambda_k y}) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |C_k| \left| e^{i\lambda_k x} - e^{i\lambda_k y} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |C_k| \, \varepsilon\end{aligned}$$

d'où la continuité uniforme de T.

iii) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|T(x)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left| C_k e^{i\lambda_k x} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |C_k| \left| e^{i\lambda_k x} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |C_k|\end{aligned}$$

d'où T est borné sur $\mathbb{R}$.

iv) Supposons $m \geq n$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(T+S)(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x} + \sum_{k=1}^{m} D_k e^{i\mu_k x} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (C_k e^{i\lambda_k x} + D_k e^{i\mu_k x}) + \sum_{k=n}^{m} D_k e^{i\mu_k x}\end{aligned}$$

Donc $T+S$ est un polynôme trigonométrique.

v) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(TS)(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x} \sum_{j=1}^{m} D_j e^{i\mu_j x} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (C_k D_j) e^{i(\mu_j + \lambda_k)x}\end{aligned}$$

Donc TS est un polynôme trigonométrique.

■

Dans la littérature des séries de Fourier, on retrouve un cas particulier de polynômes trigonométriques qui est défini comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_n)_{-N \leq n \leq N}$ définis par $e_n : x \mapsto e^{inx}$.

Proposition 1.2.2. *[2] Si f est un polynôme trigonométrique défini par $f(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{inwx}$, $x \in \mathbb{R}$, on a alors*

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-inwx} dx, \ n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{R}.$$

Si f est T-périodique, on définit la pulsation associée à T par le nombre $w = \frac{2\pi}{T}$.

Proposition 1.2.3. *[2] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T, continue. On définit **les coefficients de Fourier** de f par le formule suivante*

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-inwt} dt, \ n \in \mathbb{Z}.$$

On associe à f, la série de Fourier définie par $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inwx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.4. ***(Inégalité de Bessel)****[2]*
Si f est T-périodique et continue, on a alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$.

Théorème 1.2.2. ***(Formule de Parseval)****[2]*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, de période T et c_n ses coefficients de Fourier. On a

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 .$$

Corollaire 1.2.1. *[2] Soit f une fonction périodique de période T, si f est continue, et de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Rappelons le théorème d'approximation de **Weierstrass**.

Théorème 1.2.3. *[1] Si f est une fonction à valeur réelle continue sur M un sous ensemble fermé borné de $\mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P_ε tel que*

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in M.$$

Rappelons aussi un cas particulier de ce théorème pour les fonctions périodiques.

Théorème 1.2.4. *[1]Si f est une fonction continue et périodique de période T, alors pour tout $\varepsilon > o$, il existe un polynôme trigonométrique*

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{iw_k x}$$

avec $w_k = \dfrac{2k\pi}{T}$ et $C_k \in \mathbb{C}$, tel que :

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 2

Les fonctions presque périodiques

2.1 Définitions et propriétés fondamentales

Définition 2.1.1. *[1] On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique T_ε défini par $T_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} C_{k,\varepsilon} e^{i\lambda_{k,\varepsilon} x}$, $x \in \mathbb{R}$ tel que*

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

i.e.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

On note par C_{pp} l'espace des fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.1.1.

1. *Les polynômes trigonométriques sont des fonctions presque périodiques, ceci découle de la définition.*
2. *Toute fonction périodique et continue est presque périodique, ceci découle du théorème 1.2.4.*

Théorème 2.1.1. *[1] Il existe des fonctions presque périodiques qui ne sont pas périodiques.*

Preuve. Il suffit de trouver un polynôme trigonométrique qui ne soit pas une fonction périodique. En effet, soit

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\pi x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

et supposons qu'il existe $w \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x+w) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$e^{i\pi(x+w)}e^{i(x+w)} = e^{ix} + e^{i\pi x} \Rightarrow e^{ix}(e^{iw} - 1) + e^{i\pi x}(e^{i\pi w} - 1) = 0.$$

Vérifions que e^{ix} et $e^{i\pi x}$ sont linéairement indépendants, en effet, si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on suppose que

$$\alpha e^{ix} + \beta e^{i\pi x} = 0 \tag{2.1}$$

alors, si on dérive par rapport à x, on obtient

$$i\alpha e^{ix} + i\pi\beta e^{i\pi x} = 0 \Rightarrow \alpha e^{ix} + \pi\beta e^{i\pi x} = 0 \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
(2.1) - (2.2) &\Rightarrow \beta e^{i\pi x} - \pi\beta e^{i\pi x} = 0 \\
&\Rightarrow \beta e^{i\pi x}(1-\pi) = 0 \\
&\Rightarrow \beta = 0.
\end{aligned}$$

On remplace $\beta = 0$ dans (2.1), on trouve

$$\alpha e^{ix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

d'où

$$\alpha e^{ix} + \beta e^{i\pi x} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Ce qui implique que e^{ix} et $e^{i\pi x}$ sont linéairement indépendants. Revenons à nos calculs

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} e^{iw} - 1 &=& 0 \\ e^{i\pi w} - 1 &=& 0 \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{iw} &=& 1 \\ e^{i\pi w} &=& 1 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} w &=& 2h\pi \\ \pi w &=& 2k\pi \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} w &=& 2h\pi \\ w &=& 2k \end{array}\right. \qquad \text{avec } h, k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \pi = \frac{k}{h}
\end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que π soit irrationnel, donc f n'est pas périodique. ■

Théorème 2.1.2. *[1] Une fonction presque périodique est bornée et uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Preuve.

i) La bornitude

Si f est une fonction presque périodique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme trigonométrique T_n tel que :

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{1}{n}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Pour $n = 1$, on sait que T_1 est borné donc, il existe $M > 0$ tel que , $|T_1(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - T_1(x) + T_1(x)| \\ &\leq |f(x) - T_1(x)| + |T_1(x)| \\ &\leq 1 + M \end{aligned}$$

D'où f est bornée sur $\mathbb{R}$.

ii) La continuité uniforme

Si f est une fonction presque périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique T_ε tel que

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Puisque T_ε est uniformément continue, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |T_\varepsilon(x_1) - T_\varepsilon(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5}$$

Or

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - T_\varepsilon(x_1) + T_\varepsilon(x_1) - T_\varepsilon(x_2) + T_\varepsilon(x_2) - f(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - T_\varepsilon(x_1)| + |T_\varepsilon(x_1) - T_\varepsilon(x_2)| + |T_\varepsilon(x_2) - f(x_2)| \end{aligned}$$

d'après (2.4) et (2.5), il s'en suit que pour tout x_1, x_2 tel que $|x_1 - x_2| < \delta$, on aura

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

D'o*ù* la continuité uniforme de f.

■

Théorème 2.1.3. *[1] Si f est une fonction presque périodique, $c \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ alors les fonctions cf, $\tau_a f$, $\delta_a f$ et $\overline{f}$ sont des fonctions presque périodiques.*

Preuve. Si f est presque périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe T_ε un polynôme trigonométrique tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

i) Montrons que $\overline{f}$ est presque périodique. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left|\overline{f}(x) - \overline{T_\varepsilon}(x)\right| &= \left|\overline{f(x) - T_\varepsilon(x)}\right| \\ &= |f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

et puisque $\overline{T_\varepsilon}$ est un polynôme trigonométrique, alors $\overline{f}$ est presque périodique.

ii) Montrons que cf est presque périodique. Prenons $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{|c|}$, ou $\varepsilon' > 0$ on aura alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |cf(x) - cT_{\varepsilon'}(x)| &= |c(f(x) - T_{\varepsilon'}(x))| \\ &= |c|\,|f(x) - T_{\varepsilon'}(x)| \\ &< |c|\,\frac{\varepsilon'}{|c|} \\ &= \varepsilon' \end{aligned}$$

et puisque $cT_{\varepsilon'}$ est un polynôme trigonométrique, alors cf est presque périodique.

iii) Pour $a \in \mathbb{R}$, montrons que $\tau_a f$ est presque périodique. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |\tau_a f(x) - \tau_a T_\varepsilon(x)| &= |f(x+a) - T_\varepsilon(x+a)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

et puisque $\tau_a T_\varepsilon$ est un polynôme trigonométrique, alors $\tau_a f$ est presque périodique.

iv) Pour $a \in \mathbb{R}$, montrons que $\delta_a f$ est presque périodique. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|\delta_a f(x) - \delta_a T_\varepsilon(x)| &= |f(ax) - T_\varepsilon(ax)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_\varepsilon(x)| \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

et puisque $\delta_a T_\varepsilon$ est un polynôme trigonométrique, alors $\delta_a f$ est presque périodique.

■

Théorème 2.1.4. *[1] Si f,g sont des fonctions presque périodiques, alors les fonctions $f+g$ et fg sont presque périodiques aussi.*

Preuve.

i) Montrons que $f+g$ est presque périodique.

Soient f et g deux fonctions presque périodiques, alors pour tout $\varepsilon > 0$, ils existent deux polynômes trigonométriques S_ε et T_ε de f et g respectivement tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - S_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |g(x) - T_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

On sait que $S_\varepsilon + T_\varepsilon$ est un polynôme trigonométrique, donc

$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (S_\varepsilon + T_\varepsilon)(x)| &= |f(x) - S_\varepsilon(x) + g(x) - T_\varepsilon(x)| \\ &< |f(x) - S_\varepsilon(x)| + |g(x) - T_\varepsilon(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

donc $f+g$ est presque périodique.

ii) Montrons que fg est presque périodique.

Puisque f et g sont des fonctions presque périodiques, alors elles sont bornées i.e. $\exists M > 0$, tel que $|f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout

$\varepsilon > 0$, ils existent S_ε et T_ε tels que,

$$|f(x) - S_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ et } |g(x) - T_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2(M + \frac{\varepsilon}{2M})}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|S_\varepsilon(x)| &= |S_\varepsilon(x) - f(x) + f(x)| \\ &< |S_\varepsilon(x) - f(x)| + |f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} + M.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(fg)(x) - (S_\varepsilon T_\varepsilon)(x)| &= |(fg)(x) - g(x)S_\varepsilon(x) + g(x)S_\varepsilon(x) - (S_\varepsilon T_\varepsilon)(x)| \\ &= |g(x)(f(x) - S_\varepsilon(x)) + S_\varepsilon(x)(g(x) - T_\varepsilon(x))| \\ &\leq |g(x)|\,|f(x) - S_\varepsilon(x)| + |S_\varepsilon(x)|\,|g(x) - T_\varepsilon(x)| \\ &\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + (\frac{\varepsilon}{2M} + M)\frac{\varepsilon}{2(M + \frac{\varepsilon}{2M})} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

et puisque $(S_\varepsilon T_\varepsilon)$ est un polynôme trigonométrique, alors fg est presque périodique.

■

Corollaire 2.1.1. *[1] Soient $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme et f une fonction presque périodique, alors $F = P(f)$ est une fonction presque périodique.*

Preuve. Si P est un polynôme, alors $P(f)$ est la somme et le produit de fonctions presque périodiques, donc d'après le théorème précédent F est presque périodique.

■

Théorème 2.1.5. *[1] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque périodique qui converge uniformément vers une fonction f, alors f est presque périodique.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f i.e.

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Or f_N est presque périodique, donc pour $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique T_ε tel que

$$|f_N(x) - T_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(x) - T_\varepsilon(x)| &= |f(x) - f_N(x) - T_\varepsilon(x) + f_N(x)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - T_\varepsilon(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

i.e. f est presque périodique. ∎

Corollaire 2.1.2. *[1] L'espace C_{pp}, muni de la norme du sup est un sous espace de Banach de l'espace C_0 des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Les théorèmes 2.1.4 et 2.1.3 affirment que l'espace C_{pp} des fonctions presque périodiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par rapport aux opérations usuelles d'addition de fonctions et de multiplication par des scalaires. Il reste à montrer que C_{pp} est un espace complet, pour cela on va montrer que l'espace C_{pp} est fermé, alors soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément vers une fonction f, par le théorème précédent $f \in C_{pp}$, i.e. il est fermé dans C_0, et puisque C_0 muni de la norme du sup est complet, alors C_{pp} muni de cette norme est aussi complet, donc c'est un espace de Banach. ∎

Théorème 2.1.6. *[1] Si f est une fonction presque périodique et ϕ est continue sur $\overline{Imf}$, alors $\phi \circ f$ est presque périodique.*

Preuve. Puisque f est bornée, alors l'ensemble $\overline{Imf}$ est borné et fermé, en effet, puisque Imf est borné alors il existe une boule fermée $\overline{B}(0,r)$ tel que $Imf \subset \overline{B}(0,r)$, mais $\overline{Imf}$ est le plus petit fermé contenant Imf, donc $Imf \subset \overline{Imf} \subset \overline{B}(0,r)$ par conséquent $\overline{Imf}$ est borné.

En appliquant le théorème d'approximation de Weierstrass à la fonction ϕ, on aura que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$|\phi(y) - P_n(y)| < \frac{1}{n}, \ \forall y \in \overline{Imf}.$$

En particulier, pour $y = f(x) \in Imf$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ie.

$$|\phi(f(x)) - P_n(f(x))| < \frac{1}{n}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient que $P_n(f)$, qui est une fonction presque périodique par le corollaire 2.1.1, converge uniformément vers $\phi(f)$, donc le théorème 2.1.5, affirme que $\phi(f)$ est presque périodique. ■

Corollaire 2.1.3. *[1] Soient f et g deux fonctions presque périodiques telles que $0 < m \leqslant |g(x)|$, alors $\frac{f}{g}$ est une fonction presque périodique.*

Preuve. On regarde $\frac{f}{g}$ comme le produit de la fonction f par la fonction $\frac{1}{g}$, donc par le théorème 2.1.4, il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ est presque périodique.
En effet, g est bornée, d'après le théorème **??**, donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leqslant |g(x)| \leqslant M$ i.e. $Img \subset \{z \in \mathbb{C}, m \leqslant |z| \leqslant M\}$. D'autre part, on considère la fonction ϕ continue sur l'ensemble $\overline{\{z \in \mathbb{C}, m \leqslant |z| \leqslant M\}}$, alors en utilisant le théorème 2.1.6, on conclue que $\phi(g) = \frac{1}{g}$ est presque périodique. ■

Théorème 2.1.7. *[1] Si f est une fonction presque périodique et f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors f' est presque périodique.*

Preuve. Soit $f = f_1 + if_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions à valeurs réelles. Puisque $f' = f_1' + if_2'$, alors f_1' et f_2' sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
Considérons la fonction ϕ_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi_n(x) = n\left[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right], \ n \in \mathbb{N}^*$$

Or

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= n\left[f_1(x + \frac{1}{n}) + if_2(x + \frac{1}{n}) - f_1(x) - if_2(x)\right] \\ &= n\left[f_1(x + \frac{1}{n}) - f_1(x)\right] + ni\left[f_2(x + \frac{1}{n}) - f_2(x)\right]\end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f_1'(x) + if_2'(x) = f'(x)$$

D'autre part, puisque f est une fonction presque périodique, alors par les théorèmes

2.1.3 et 2.1.4, la fonction ϕ_n est aussi presque périodique. Ce qui implique que f' est presque périodique d'après le théorème 2.1.5.

■

2.2 Fonction presque périodique au sens de Bohr

Définition 2.2.1. *[3] Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est appelé relativement dense, s'il existe un nombre strictement positif $l > 0$ tel que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur l rencontre E, i.e.*

$$\exists\, l > 0,\ [a, a + l] \cap E \neq \emptyset,\ \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.1. .

1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, en effet, $]a, a + 2[\, \cap\, \mathbb{Z} \neq \emptyset$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*
2. *Pour tout réel T, l'ensemble $\{nT, n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, en effet $\exists\ l = 2T$ tel que, $]a, a + 2T[\, \cap \{nT, n \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Proposition 2.2.1. *Tout ensemble qui contient un ensemble relativement dense est relativement dense.*

Preuve. Soient E_1 et E_2 deux ensembles tels que E_1 est relativement dense et $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$.
E_1 est relativement dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe $l > 0$ tel que

$$[a, a + l] \cap E_1 \neq \emptyset,\ \ \forall a \in \mathbb{R},$$

Comme $E_1 \subset E_2$, alors

$$[a, a + l] \cap E_2 \neq \emptyset,\ \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

i.e. E_2 est relativement dense dans $\mathbb{R}$. ■

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue f définie sur $\mathbb{R}$ à valeur complexe.

Définition 2.2.2. *[3] Un nombre τ est appelé ε-presque période de la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On note par

$$E(f,\varepsilon) := \left\{ \tau \in \mathbb{R}, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon \right\}$$

l'ensemble des ε-presque périodes de f.

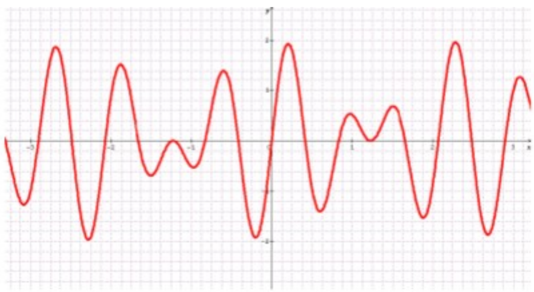
Définition 2.2.3. *[3] Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, est dite presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $E(f,\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, i.e.*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, l_\varepsilon > 0,\ [a, a+l] \cap E(f,\varepsilon) \neq \emptyset,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.2. *Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sin(2\pi x) + \sin(\sqrt{2}\pi x).$$

La fonction f ainsi introduite est presque périodique au sens de Bohr. D'un point de vu géométrique, on observe l'existence de presque périodes à partir de l'allure de sa courbe



Théorème 2.2.1. *[6]*

1. *Si $\varepsilon < \varepsilon'$, alors $E(f,\varepsilon) \subset E(f,\varepsilon')$.*
2. *Si $\tau \in E(f,\varepsilon)$, alors $(-\tau) \in E(f,\varepsilon)$.*
3. *Si $\tau_1 \in E(f,\varepsilon_1)$ et $\tau_2 \in E(f,\varepsilon_2)$, alors $(\tau_1+\tau_2) \in E(f,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.*

Preuve.

1. Soit $\varepsilon < \varepsilon'$ et $\tau \in E(f,\varepsilon)$, on a alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon < \varepsilon'$$

i.e $\tau \in E(f,\varepsilon')$.

2. Si $\tau \in E(f,\varepsilon)$, alors $|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Pour $x = s-\tau$, où $s \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(s-\tau+\tau) - f(s-\tau)| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(s) - f(s-\tau)| \leq \varepsilon$$

donc $-\tau \in E(f,\varepsilon)$.

3. Si

$$\tau_1 \in E(f,\varepsilon_1), \text{alors} |f(x+\tau_1) - f(x)| \leq \varepsilon_1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

et

$$\tau_2 \in E(f,\varepsilon_2), \text{alors} |f(x+\tau_2) - f(x)| \leq \varepsilon_2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|f\left(x+(\tau_1+\tau_2)\right) - f(x)| &= |f(x+(\tau_1+\tau_2)) - f(x+\tau_1) + f(x+\tau_1) - f(x)| \\
&\leq |f((x+\tau_1)+\tau_2) - f(x+\tau_1)| + |f(x+\tau_1) - f(x)| \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y+\tau_2) - f(y)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau_1) - f(x)| \\
&\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2
\end{aligned}$$

Donc $(\tau_1+\tau_2) \in E(f,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.

■

Dans ce qui suit, on va présenter quelques propriétés des fonctions presque périodiques de **Bohr** et qui découlent directement de la définition.

Proposition 2.2.2. *[6] Si f est une fonction presque périodique et $\varepsilon \in \mathbb{R}$, alors*

1. $E(f,\varepsilon) = E(\tau_a f, \varepsilon)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

2. $E(f,\varepsilon) = E(\check{f}, \varepsilon)$.

Preuve.

1. Si $\tau \in E(f,\varepsilon)$, alors $|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc pour $x = a + s$ où $s \in \mathbb{R}$, on obtient

$$|f(a+s+\tau) - f(a+s)| \leq \varepsilon, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

i.e. $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}} |\tau_a f(s+\tau) - \tau_a f(s)| \leq \varepsilon$, d'où $\tau \in E(\tau_a f, \varepsilon)$. A présent si $\tau \in E(\tau_a f, \varepsilon)$, alors $|\tau_a f(x+\tau) - \tau_a f(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prenons $x = s - a$ où $s \in \mathbb{R}$, on aura alors

$$|f(s+\tau) - f(s)| \leq \varepsilon, \forall s \in \mathbb{R}.$$

i.e. $\tau \in E(f,\varepsilon)$. Finalement, $E(f,\varepsilon) = E(\tau_a f, \varepsilon)$.

2. Si $\tau \in E(f,\varepsilon)$, alors $|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\left|\check{f}(x-\tau) - \check{f}(x)\right| = |f(-x+\tau) - f(-x)| \leq \varepsilon.$$

i.e. $(-\tau) \in E(\check{f}, \varepsilon)$ et d'aprés théorème 2.2.1, $\tau \in E(\check{f}, \varepsilon)$. Ainsi

$$E(f,\varepsilon) \subset E(\check{f}, \varepsilon).$$

D'autre part, $\check{\check{f}} = f$ donc

$$E(\check{f},\varepsilon) \subset E(\check{\check{f}}, \varepsilon) = E(f,\varepsilon).$$

Finalement, $E(f,\varepsilon) = E(\check{f}, \varepsilon)$.

■

Théorème 2.2.2. *[6] Si f est une fonction presque périodique, alors f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Commençons par montrer que f est bornée. Si f est une fonction presque périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + l_\varepsilon]$ contient un nombre τ vérifiant $|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Prenons $\varepsilon = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \tau \in [-x, -x + l_1]$, $|f(x+\tau) - f(x)| \leq 1$. Comme f

est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle atteint ses bornes sur tout compact de $\mathbb{R}$. i.e. il existe $M > 0$, tel que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [0, l_1]$. Il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+\tau) \in [0, l_1]$ et donc

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x+\tau) + f(x+\tau)| \\ &\leq |f(x) - f(x+\tau)| + |f(x+\tau)| \\ &\leq 1 + M \end{aligned}$$

i.e. f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Montrons ensuite que f est uniformément continue. Si f est une fonction presque périodique, alors $E(f, \frac{\varepsilon}{3})$ est relativement dense pour tout $\varepsilon > 0$,i.e. il existe $l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur l_ε contient un nombre τ vérifiant

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est uniformément continue sur $[0, 2 + l_\varepsilon]$ i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta$ (sans perdre de généralité, on peut supposer δ<1) tel que

$$\forall x, y \in [0, 2 + l_\varepsilon], |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta$ et prenons $\tau \in [-x+1, -x+1+l_\varepsilon]$, on aura alors

$$0 < 1 \leq x + \tau \leq 1 + l_\varepsilon \leq 2 + l_\varepsilon,$$

ainsi

$$(x + \tau) \in [0, 2 + l_\varepsilon].$$

Ensuite,

$$-x + y + 1 \leq y + \tau \leq -x + y + 1 + l_\varepsilon$$

comme $|x - y| \leq \delta$, on aura alors $-\delta + 1 \leq y + \tau \leq \delta + 1 + l_\varepsilon$. D'autre part $0 < \delta < 1$, d'où $0 < y + \tau < 2 + l_\varepsilon$ ainsi

$$(y + \tau) \in [0, 2 + l_\varepsilon].$$

Finalement,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f(x+\tau)|+|f(x+\tau)-f(y+\tau)|+|f(y)-f(y+\tau)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

i.e. f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. ■

Théorème 2.2.3. *[6] Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est presque périodique.*

Preuve. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, alors

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ |f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{3},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Si $\tau\in E(f_{n_0},\frac{\varepsilon}{3})$, alors $|f_{n_0}(x+\tau)-f_{n_0}(x)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned}|f(x+\tau)-f(x)| &\leq |f(x+\tau)-f_{n_0}(x+\tau)|+|f_{n_0}(x+\tau)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

i.e. $\tau\in E(f,\varepsilon)$ ce qui implique que $E(f_{n_0},\frac{\varepsilon}{3})\subset E(f,\varepsilon)$. Comme $E(f_{n_0},\frac{\varepsilon}{3})$ est relativement dense, par la proposition 2.2.1, $E(f,\varepsilon)$ est relativement dense aussi. i.e. f est presque périodique. ■

Théorème 2.2.4. *[6] Si f est une fonction presque périodique, alors*

1. *αf est presque périodique, pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$.*
2. *$\tau_a f$ est presque périodique, pour tout $a\in\mathbb{R}$.*
3. *$\check{f}$ est presque périodique.*

Preuve.

1. Si $\tau\in E(f,\varepsilon)$, alors $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+\tau)-f(x)|\leq\varepsilon$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}|(\alpha f)(x+\tau)-\alpha f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}(|\alpha|\,|f(x+\tau)-f(x)|) \\ &= |\alpha|\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+\tau)-f(x)|\leq|a|\,\varepsilon.\end{aligned}$$

D'où $\tau\in E(\alpha f,|\alpha|\,\varepsilon)$, i.e. $E(f,\varepsilon)\subset E(\alpha f,|\alpha|\,\varepsilon)$. Or $E(f,\varepsilon)$ est relativement dense, et d'aprés proposition 2.2.1, $E(\alpha f,|\alpha|\,\varepsilon)$ est relativement dense aussi. i.e. αf est presque périodique.

2. Si f est presque périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $E(f, \varepsilon)$ est relativement dense. Par la proposition 2.2.2, $E(\tau_a f, \varepsilon) = E(f, \varepsilon)$ donc $E(\tau_a f, \varepsilon)$ est relativement dense pour tout $\varepsilon > 0$ i.e. $\tau_a f$ est presque périodique.
3. Si f est presque périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $E(f, \varepsilon)$ est relativement dense. Par la proposition 2.2.2, $E(\check{f}, \varepsilon) = E(f, \varepsilon)$ donc $E(\check{f}, \varepsilon)$ est relativement dense pour tout $\varepsilon > 0$ i.e. $\check{f}$ est presque périodique.

■

Proposition 2.2.3. *[6] Si f est une fonction presque périodique, alors*

1. *Si $f \neq 0$ et $\inf_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = m > 0$, alors la fonction $g = \dfrac{1}{f}$ est presque périodique.*
2. *$g = f^2$ est presque périodique.*
3. *$|f|$ est presque périodique.*

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$, si $\tau \in E(f, m^2\varepsilon)$, alors $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq m^2\varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|g(x+\tau) - g(x)| &= \left|\frac{1}{f(x+\tau)} - \frac{1}{f(x)}\right| \\
&= \left|\frac{f(x) - f(x+\tau)}{f(x+\tau)f(x)}\right| \\
&\leq \frac{1}{m^2} |f(x) - f(x+\tau)| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

   Par conséquent $\tau \in E(g, \varepsilon)$, ce qui implique que $E(f, m^2\varepsilon) \subset E(g, \varepsilon)$, par la proposition 2.2.1, $E(g, \varepsilon)$ est relativement dense. i.e. $g = \dfrac{1}{f}$ est presque périodique.

2. Soit $\varepsilon > 0$, si $\tau \in E(f, \dfrac{\varepsilon}{2M})$, alors $|f(x+\tau) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned}
g(x+\tau) - g(x) &= f^2(x+\tau) - f^2(x) \\
&= (f(x+\tau) - f(x))\,(f(x+\tau) + f(x))
\end{aligned}$$

   Puisque f est presque périodique, alors elle est bornée, i.e. $\exists M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc

$$|g(x+\tau) - g(x)| \leq 2M\,|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi $\tau \in E(g, \varepsilon)$ i.e. $E(f, \frac{\varepsilon}{2M}) \subset E(g, \varepsilon)$.
Or $E(f, \frac{\varepsilon}{2M})$ est relativement dense, alors d'aprés proposition 2.2.1, $E(g, \varepsilon)$ est relativement dense. i.e $g = f^2$ est presque périodique.

3. Si f est presque périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $\tau \in E(f, \varepsilon)$, on a

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant une inégalité avec valeur absolue, on obtient

$$||f(x+\tau)| - |f(x)|| \leq |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

i.e. $\tau \in E(|f|, \varepsilon)$ et $E(f, \varepsilon) \subset E(|f|, \varepsilon)$. Par la proposition 2.2.1 $x \longmapsto |f(x)|$ est presque périodique.

■

Théorème 2.2.5. *[3] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction presque périodique, et g une fonction continue sur $\overline{Imf}$ à valeur dans $\mathbb{C}$, alors $g \circ f$ est presque périodique.*

Preuve. Puisque f est bornée, alors on avait déja montré dans le théorème 2.1.6 que $\overline{Imf}$ est bornée, donc g est uniformément continue sur le compact $\overline{Imf}$, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall y, z \in \overline{Imf}, \ |y - z| \leq \delta \Rightarrow |g(y) - g(z)| \leq \varepsilon,$$

Puisque f est presque périodique, alors pour tout $\tau \in E(f, \delta)$, on a

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq \delta, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(f(x+\tau)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$$

Ce qui implique que

$$E(f, \delta) \subset E(g, \varepsilon)$$

Et d'après proposition 2.2.1, $E(g, \varepsilon)$ est relativement dense. i.e. $g \circ f$ est presque périodique. ■

Théorème 2.2.6. *[6] Soit f une fonction presque périodique et dérivable, si la dérivée f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est presque périodique.*

Preuve. Si f' est uniformément continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit la suite de fonctions $(\phi_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_n(x) = n\left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $g = \tau_a f - f$ est presque périodique. En effet, puisque f est presque périodique on sait que $\forall \varepsilon > 0$, $E(\tau_a f, \varepsilon) = E(f, \varepsilon)$ est relativement dense. Prenons $\tau \in E(f, \frac{\varepsilon}{2})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
|g(x + \tau) - g(x)| &= |f(a + x + \tau) - f(x + \tau) - f(a + x) + f(x)| \\
&\leq |f(a + x + \tau) - f(a + x)| + |f(x + \tau) - f(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $E(f, \frac{\varepsilon}{2}) \subset E(g, \varepsilon)$, par la proposition 2.2.1, $E(g, \varepsilon)$ est relativement dense. i.e. $g = \tau_a f - f$ est presque périodique. Par le théorème 2.2.4, la fonction $\frac{1}{a}[\tau_a f - f]$ est presque périodique. Ainsi, si on prend $n \geq \frac{1}{\delta}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
|\phi_n(x) - f'(x)| &= \left| n \int_0^{\frac{1}{n}} f'(x + s) ds - f'(x) \right| \\
&= \left| n \int_0^{\frac{1}{n}} [f'(x + s) - f'(x)]\, ds \right| \\
&\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} |f'(x + s) - f'(x)|\, ds \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

i.e. $(\phi_n)_n$ converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$. Par le théorème 2.2.3, on conclut que f' est presque périodique. ■

Théorème 2.2.7. *[1] Soit f une fonction presque périodique et F une primitive de f. F est presque périodique si et seulement si elle est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Si F est une primitive presque périodique de f, alors F est bornée d'après le théorème **??**.

Inversement, soit f une fonction presque périodique et F est une primitive bornée de f, montrons que F est presque périodique.

Notons qu'on peut restreindre la preuve au cas où f est à valeurs réelles car si $f = f_1 + if_2$ où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x f_1(t)dt + i\int_0^x f_2(t)dt \\ &= F_1(x) + iF_2(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, F est bornée si et seulement si F_1 et F_2 sont bornées sur $\mathbb{R}$. Si F est bornée, alors il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$m \leq F(x) \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels x_1 et x_2 tels que

$$F(x_1) < m + \frac{\varepsilon}{6} \text{ et } F(x_2) > M - \frac{\varepsilon}{6}.$$

Posons $d = |x_1 - x_2|$. Par la presque périodicité de f, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists l_1 > 0$ tel que tout intervalle de longueur l_1 contient un $\frac{\varepsilon}{6d}$-presque période pour f. Pour montrer que F est presque périodique, on montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $E(f, \frac{\varepsilon}{2l}) \subset E(F, \varepsilon)$ où $l = l_1 + d$.
Tout d'abord, on montre que tout intervalle de longueur l de $\mathbb{R}$ contient deux réels z_1, z_2 tels que $F(z_1) < m + \frac{\varepsilon}{2}$ et $F(z_2) > M - \frac{\varepsilon}{2}$.
En effet, soient $\xi = min\{x_1, x_2\}$ et $\tau \in T(f, \frac{\varepsilon}{6d}) \cap [\beta - \xi, \beta - \xi + l_1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Puisque $\xi \leq x_1$, $\xi \leq x_2$ et $\beta - \xi \leq \tau \leq \beta - \xi + l_1$, alors

$$\beta \leq x_1 + \tau \ , \ \beta \leq x_2 + \tau$$

et

$$\tau + x_1 \leq \beta + l_1 + x_1 - \xi, \ \tau + x_2 \leq \beta + l_1 + x_2 - \xi$$

Or il est facile de voir que $-\xi + x_1 \leq d$ et $-\xi + x_2 \leq d$
Ainsi, si on pose $z_1 = x_1 + \tau$ et $z_2 = x_2 + \tau$, alors $z_1 \in [\beta, \beta + l]$ et $z_2 \in [\beta, \beta + l]$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
F(z_2)-F(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f(t)dt + F(x_2)-F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (f(t+\tau)-f(t))dt + F(x_2)-F(x_1) \\
&\geq -\frac{\varepsilon}{6d}(x_2-x_1) + F(x_2)-F(x_1) \\
&\geq -\frac{\varepsilon}{6d}d + M - \frac{\varepsilon}{6} - m - \frac{\varepsilon}{6} \\
&\geq M - m - \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Comme

$$F(z_2)-M \leq 0 \text{ et } F(z_1)-m \geq 0$$

alors

$$F(z_2) \geq M - \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } F(z_1) \leq m + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.8}$$

Ensuite considérons $\tau \in E(f, \frac{\varepsilon}{2l})$, $x \in \mathbb{R}$ et $z_1, z_2 \in [x, x+l]$ tel que (2.8) soit vérifiées.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
F(x+\tau)-F(x) &= \int_0^{x+\tau} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \\
&= F(z_1+\tau) + \int_{z_1+\tau}^{x+\tau} f(t)dt - F(z_1) - \int_{z_1}^{x} f(t)dt \\
&= F(z_1+\tau) - F(z_1) + \int_x^{z_1} f(t)dt - \int_x^{z_1} f(t+\tau)dt \\
&= F(z_1+\tau) - F(z_1) + \int_x^{z_1} (f(t)-f(t+\tau))dt \\
&\geq m - (m + \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2l}(z_1 - x) \\
&> -\frac{\varepsilon}{2} - l\frac{\varepsilon}{2l} = -\varepsilon
\end{aligned}$$

De même pour z_2, on obtient

$$\begin{aligned}
F(x+\tau)-F(x) &= F(z_2+\tau) - F(z_2) + \int_x^{z_2} (f(t)-f(t+\tau))dt \\
&\leq M - (M - \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2l}(z_2 - x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + l\frac{\varepsilon}{2l} = \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où

$$|F(x+\tau)-F(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

i.e.

$$E(f, \frac{\varepsilon}{2l}) \subset E(F, \varepsilon), \ \forall \varepsilon > 0.$$

Finalement, par la proposition 2.2.1, $E(F, \varepsilon)$ est relativement dense $\forall \varepsilon > 0$, i.e. F est presque périodique. ■

Définition 2.2.4. ***(Bochner)****[6]*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction ***continue****. f est dite* ***normale*** *ou presque périodique au sens de* ***Bochner*** *si et seulement si, pour toute suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous suite $(\alpha_{n_k})_k$ telle que la suite $(f(x + \alpha_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

L'un des résultats importants de cette théorie des fonctions presque périodique est l'équivalence des trois définitions citées plus haut, donc on peut utiliser celle qui nous arrange et travailler avec. Ceci est présenté dans le théorème suivant, pour la preuve voir [1].

Théorème 2.2.8. *[1] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *f est presque périodique au sens de* ***Bohr****.*
2. *f est limite uniforme d'un polynôme trigonométrique.*
3. *f est presque périodique au sens de* ***Bochner****.*

2.3 Analyse de Fourier des fonctions presque périodiques

2.3.1 La valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Pour introduire la série de Fourier d'une fonction presque périodique, il est nécessaire de définir la valeur moyenne de cette fonction.

Théorème 2.3.1. ***(Théorème de la valeur moyenne)****[1]*
Si f est une fonction presque périodique, alors

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)dx = M\{f\}$$

existe uniformément par rapport à a. $M\{f\}$ est indépendante de a et s'appelle la valeur moyenne de la fonction presque périodique f.

Preuve. On démontre d'abord que cette limite existe si f est un polynôme trigonométrique, en effet, si

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x},\ x \in \mathbb{R}.$$

avec $\lambda_k \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a alors pour $T > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} (c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x})dx \\
&= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} c_0 dx + \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^{a+T} e^{i\lambda_k x}dx \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{e^{i\lambda_k(a+T)} - e^{i\lambda_k a}}{i\lambda_k T}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx - c_0\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left| c_k \frac{e^{i\lambda_k(a+T)} - e^{i\lambda_k a}}{i\lambda_k T}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|c_k|\left|e^{i\lambda_k a}\right|\left|e^{i\lambda_k T} - 1\right|}{|i\lambda_k T|} \\
&\leq \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{c_k}{\lambda_k}\right|
\end{aligned}$$

Passons à la limite quand T tend vers l'infini, on trouve

$$\lim_{T\to\infty} \left|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx - c_0\right| \leq \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{c_k}{\lambda_k}\right| = 0$$

donc $M\{f\} = c_0$ existe et elle est indépendante de a.
Maintenant, si f est une fonction presque périodique quelconque, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe S_ε un polynôme trigonométrique tel que

$$|f(x) - S_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Puisque la valeur moyenne de S_ε existe, i.e. $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} S_\varepsilon(x)dx$ existe, alors la fonction $T \mapsto \frac{1}{T}\int_a^{a+T} S_\varepsilon(x)dx$ vérifie le critère de Cauchy, i.e

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon),\ \forall T_1, T_2 \geq A(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} S_\varepsilon(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} S_\varepsilon(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.10}$$

or

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} f(x)dx\right| \leq \frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} \left|f(x) - S_\varepsilon(x)\right| dx + \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} \left|S_\varepsilon(x) - f(x)\right| dx \\ + \left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} S_\varepsilon(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} S_\varepsilon(x)dx\right|\end{aligned}$$

et d'aprés (2.9) et (2.10) on trouve pour tout $T_1, T_2 \geq A(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} f(x)dx\right| &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

i.e. que la fonction $T \mapsto \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx$ vérifie le critère de Cauchy ce qui implique que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx$ existe.
Il reste à montrer que la limite est indépendante de a, c'est-à-dire

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T} f(x)dx$$

1) Supposons que $a > 0$ et $T > a$

Comme f est presque périodique, alors elle est bornée, i.e. il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\left|\int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx\right| &= \frac{1}{T}\left|\int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx - \int_0^T f(x)dx\right| \\ &= \frac{1}{T}\left|\int_T^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx\right| \\ &\leq \frac{1}{T}\left(\int_T^{a+T} |f(x)|\, dx + \int_0^a |f(x)|\, dx\right) \\ &\leq \frac{1}{T}\left(\int_T^{a+T} M dx + \int_0^a M dx\right) \\ &\leq \frac{2Ma}{T}\end{aligned}$$

2) Supposons que $a < 0$, $T > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\left|\int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx\right| &= \frac{1}{T}\left|\int_0^{a+T} f(x)dx + \int_a^0 f(x)dx - \int_0^T f(x)dx\right| \\
&= \frac{1}{T}\left|-\int_{a+T}^T f(x)dx + \int_a^0 f(x)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{T}\left(\int_{a+T}^T |f(x)|\,dx + \int_a^0 |f(x)|\,dx\right) \\
&\leq \frac{-2Ma}{T}
\end{aligned}$$

Passons à la limite quand $T \to \infty$, on trouve alors

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|\int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx\right| \leq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

i.e.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

Par conséquent, la valeur moyenne existe pour n'importe quelle fonction presque périodique et cette valeur est indépendante de a.

■

Proposition 2.3.1. *[1] La valeur moyenne d'une fonction presque périodique coincide avec la moyenne usuelle d'une fonction périodique.*

Preuve. Si f est une fonction périodique de période w alors pour tout $T \in \mathbb{R}$, on peut écrire $T = nw + \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que $0 \leq \alpha_n < w$ et $n \in \mathbb{Z}$, en effet, prenons la partie entière n de $\frac{T}{w}$, $T \in \mathbb{R}$, on aura alors

$$n \leq \frac{T}{w} < n+1 \tag{2.11}$$

donc $0 \leq T - nw < w$, posons $\alpha_n = T - nw$, alors on peut ecrire $T = nw + \alpha_n$ où $0 \leq \alpha_n < w$.

et par l'inégalité (2.11), si $T \to \infty \Leftrightarrow n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
M\{f\} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nw+\alpha_n}\int_0^{nw+\alpha_n} f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nw+\alpha_n}\left[\int_0^{nw} f(x)dx + \int_{nw}^{nw+\alpha_n} f(x)dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nw+\alpha_n}\left[\int_0^{nw} f(x)dx + \int_0^{\alpha_n} f(y+nw)dy\right]
\end{aligned}$$

or f est une fonction périodique, donc $f(y+nw) = f(y)$ et

$$M\{f\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nw+\alpha_n}\left[\int_0^{nw} f(x)dx + \int_0^{\alpha_n} f(x)dx\right].$$

On va montrer maintenant que

$$\int_0^{nw} f(x)dx = n\int_0^{w} f(x)dx. \tag{2.12}$$

Faisons cela par récurrence, pour $n = 1$, l'égalité est vraie.

Supposons ensuite que (2.12) est vrai pour n et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{(n+1)w} f(x)dx &= \int_0^{nw+w} f(x)dx \\
&= \int_0^{nw} f(x)dx + \int_{nw}^{nw+w} f(x)dx \\
&= \int_0^{nw} f(x)dx + \int_0^{w} f(y+nw)dy \\
&= \int_0^{nw} f(x)dx + \int_0^{w} f(y)dy \\
&= n\int_0^{w} f(x)dx + \int_0^{w} f(x)dx \\
&= (n+1)\int_0^{w} f(x)dx
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
M\{f\} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nw+\alpha_n}\left[\int_0^{nw} f(x)dx + \int_0^{\alpha_n} f(x)dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nw+\alpha_n}\int_0^{w} f(x)dx + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nw+\alpha_n}\int_0^{\alpha_n} f(x)dx \\
&= \frac{1}{w}\int_0^{w} f(x)dx
\end{aligned}$$

■ Voici quelques propriétés dont bénéficie la valeur moyenne.

Théorème 2.3.2. ***(Les propriétés de la valeur moyenne)****[1]*

Soient f et g deux fonctions presque périodiques et $c \in \mathbb{C}$ on a :

1. $M\left\{\overline{f}\right\} = \overline{M\{f\}}$.
2. $M\{cf\} = cM\{f\}$.
3. $M\{f\} \geq 0$ *si* $f \geq 0$.
4. $M\{f+g\} = M\{f\} + M\{g\}$.
5. *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément vers* f*, alors*
$$\lim_{n\to\infty} M\{f_n\} = M\{f\}.$$

Preuve.

1. Soit $f \in C_{pp}$, alors $f = f_1 + if_2$, où f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs réelles. On a

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx} &= \overline{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [f_1(x) + if_2(x)]\,dx} \\
&= \overline{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_1(x)dx + i\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_2(x)dx} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_1(x)dx - i\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_2(x)dx \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [f_1(x) - if_2(x)]\,dx \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f}(x)dx
\end{aligned}$$

donc
$$\overline{M\{f\}} = M\left\{\overline{f}\right\}.$$

2.

$$\begin{aligned}
M\{cf\} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T cf(x)dx \\
&= c\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \\
&= cM\{f\}
\end{aligned}$$

3. Si $f \in C_{pp}$, telle que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_0^T f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \geq 0$$

ce qui implique que

$$M\{f\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \geq 0.$$

4. Si f et $g \in C_{pp}$, alors on a

$$\begin{aligned} M\{f+g\} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [f(x)+g(x)]\,dx \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \\ &= M\{f\} + M\{g\} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} |M\{f_n\} - M\{f\}| &= \left| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_n(x)dx - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \right| \\ &= \left| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \\ &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} M\{f_n\} = M\{f\}.$$

■

Soient f une fonction presque périodique et $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait que $fe^{-i\lambda\cdot}$ est une fonction presque périodique, alors d'après le théorème 2.1.4 , $M\left\{fe^{-i\lambda\cdot}\right\}$ existe.
On note $a(\lambda) = M\left\{fe^{-i\lambda\cdot}\right\}$ et ϕ la fonction définie par $\phi(c_1,\cdots,c_n) = M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\mu_k\cdot}\right|^2\right\}$ où $\mu_1,\cdots,\mu_n \in \mathbb{R}$ et $c_1,\cdots,c_n \in \mathbb{C}$.

Lemme 2.3.1. *[1]*

$$M\left\{e^{i\mu_k\cdot}e^{-i\mu_h\cdot}\right\} = \begin{cases} 1 & si \quad h = k \\ 0 & si \quad h \neq k \end{cases} \tag{2.13}$$

Preuve. Si $k = h$, alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{i\mu_k x}e^{-i\mu_k x} = 1$, donc

$$M\{1\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dx = 1$$

et si $k \neq h$, alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{i\mu_k x}e^{-i\mu_h x} = e^{-i(\mu_h-\mu_k)x}$, donc

$$\begin{aligned} M\left\{e^{-i(\mu_h-\mu_k)\cdot}\right\} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i(\mu_h-\mu_k)x}dx \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-i(\mu_h-\mu_k)x}}{-i(\mu_h-\mu_k)}\right]_0^T \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-i(\mu_h-\mu_k)T}}{-i(\mu_h-\mu_k)T} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{i(\mu_h-\mu_k)T} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.3. ***(Inégalité de Bessel)****[1]*

La fonction ϕ atteint son minimum aux points $(a(\mu_1), ..., a(\mu_k))$, et

$$\sum_{k=1}^{n} |a(\mu_k)|^2 \leq M\left\{|f|^2\right\} \tag{2.14}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \phi(c_1, ..., c_n) &= M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\mu_k\cdot}\right|^2\right\} \\ &= M\left\{f\overline{f} + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\mu_k\cdot}\sum_{k=1}^{n}\bar{c_k}e^{-i\mu_k\cdot} - f\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k e^{-i\mu_k\cdot} - \overline{f}\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\mu_k\cdot}\right\} \\ &= M\left\{|f|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} c_k\bar{c_h}(e^{i\mu_k\cdot}e^{-i\mu_h\cdot}) - \sum_{k=1}^{n}\bar{c_k}fe^{-i\mu_k\cdot} - \sum_{k=1}^{n} c_k\overline{f}e^{i\mu_k\cdot}\right\} \end{aligned}$$

d'après 2 et 4 du théorème 2.3.2 et (2.13), on trouve

$$\begin{aligned}
\phi(c_1,...,c_n) &= M\left\{|f|^2\right\} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} c_k\bar{c_h}M\left\{e^{i\mu_k\cdot}e^{-i\mu_h\cdot}\right\} - \sum_{k=1}^{n}\overline{c_k}M\left\{fe^{-i\mu_k\cdot}\right\} \\
&- \sum_{k=1}^{n} c_k M\left\{\overline{f}e^{i\mu_k\cdot}\right\} \\
&= M\left\{|f|^2\right\} + \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n}\overline{c_k}a(\mu_k) - \sum_{k=1}^{n}c_k\overline{a}(\mu_k) \\
&= M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}c_k\bar{a}(\mu_k) - \sum_{k=1}^{n}\bar{c_k}a(\mu_k) + \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2 \\
&- \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2 \\
&= M\left\{|f|^2\right\} + \sum_{k=1}^{n}|c_k - a(\mu_k)|^2 - \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2 .
\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k=1}^{n}|c_k - a(\mu_k)|^2 \geq 0$, $\forall c_k \in \mathbb{C}$, alors

$$M\left\{|f|^2\right\} + \sum_{k=1}^{n}|c_k - a(\mu_k)|^2 - \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)| \geq M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2$$

et par suite

$$\phi(c_1,...,c_n) \geq M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2 , \ \forall c_k \in \mathbb{C}.$$

i.e. $M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2$ est un minimum pour la fonction ϕ qui est atteint au points $c_k = a(\mu_k)$, $k = 1\cdots n$. Donc pour $(c_1,...,c_n) = (a(\mu_1),...,a(\mu_n))$, on obtient

$$M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{n}a(\mu_k)e^{i\mu_k\cdot}\right|^2\right\} = M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2 . \tag{2.15}$$

et par le théorème 2.3.2-(3), on a $M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{n}a(\mu_k)e^{i\mu_k\cdot}\right|^2\right\} \geq 0$, i.e

$$M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|a(\mu_k)|^2 \leq M\left\{|f|^2\right\}.$$

■

2.3.2 Série de Fourier associée à une fonction presque périodique

Théorème 2.3.4. *[6] Il existe un ensemble fini où dénombrable de λ pour lesquels $a(\lambda) \neq 0$.*

Preuve. Par (2.14), on trouve que, pour tout $\rho > 0$, l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}, |a(\lambda)| > \rho\}$ est fini. Ainsi si $A_n = \left\{\lambda \in \mathbb{R}, |a(\lambda)| > \dfrac{1}{n}\right\}$, alors A_n est fini. De plus $\{\lambda \in \mathbb{R}, |a(\lambda)| > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, et par conséquent il est au plus dénombrable. ■

Définition 2.3.1. *[1] On définit le spectre de la fonction f comme l'ensemble*

$$\sigma(f) := \{\lambda \in \mathbb{R}, a(\lambda) \neq 0\}$$

qui est au plus dénombrable.

Définition 2.3.2. *[1] Soit f une fonction presque périodique. Les nombres λ_k, $k \in \mathbb{N}$ tels que $a(\lambda_k) \neq 0$ sont appelés les exposants de Fourier de f et les nombres $A_k = a(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$, sont appelés les coefficients de Fourier de f.*

Définition 2.3.3. *[1] Si f est une fonction presque périodique, alors la série formelle $\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, $x \in \mathbb{R}$ est appelée la série de Fourier associée à f et on note*

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}.$$

Théorème 2.3.5. *[1] Si f est une fonction presque périodique telle que $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, alors pour $a, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, on a*

a) $\bar{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k e^{-i\lambda_k x}$

b) $\tau_a f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k a} e^{i\lambda_k x}$

c) $e^{i\lambda_0 x} f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(\lambda_k + \lambda_0)x}$

Preuve.

a) $\bar{f}e^{-i\lambda_k \cdot}$ est presque périodique d'aprés les théorèmes 2.1.3 et 2.1.4, donc

$$\begin{aligned} M\left\{\bar{f}e^{i\lambda_k \cdot}\right\} &= M\left\{\overline{fe^{-i\lambda_k \cdot}}\right\} \\ &= \overline{M\left\{fe^{-i\lambda_k \cdot}\right\}} \\ &= \bar{A}_k \end{aligned}$$

i.e. A_k est le coefficient de Fourier de $\bar{f}$ associé à $(-\lambda_k)$

b) $\tau_a fe^{-i\lambda_k \cdot}$ est presque périodique d'aprés les théorèmes 2.1.3 et 2.1.4, donc

$$M\left\{\tau_a fe^{-i\lambda_k \cdot}\right\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x+a)e^{-i\lambda_k x}dx,$$

posons $u = x + a$, alors

$$\begin{aligned} M\left\{\tau_a fe^{-i\lambda_k \cdot}\right\} &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(u)e^{-i\lambda_k (u-a)}du \\ &= e^{i\lambda_k a}\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(u)e^{-i\lambda_k u}du \\ &= e^{i\lambda_k a} M\left\{fe^{-i\lambda_k \cdot}\right\} \\ &= e^{i\lambda_k a} A_k \end{aligned}$$

i.e. $\tau_a f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k a}e^{i\lambda_k x}$.

c) On va chercher les coefficients et les exposants de Fourier de la fonction $x \longmapsto e^{i\lambda_0 x}f(x)$. Par le théorème 2.1.4, cette fonction est presque périodique et $M\left\{e^{i\lambda_0 \cdot}fe^{-i\lambda \cdot}\right\}$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $M\left\{e^{i\lambda_0 \cdot}fe^{-i\lambda \cdot}\right\} \neq 0$.

$$M\left\{e^{i\lambda_0 \cdot}fe^{-i\lambda \cdot}\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i(\lambda-\lambda_0)}dx \neq 0$$

seulement si $(\lambda - \lambda_0) \in \sigma(f)$ i.e. $\lambda \in \sigma(f) + \lambda_0$. Aussi, si $\lambda = \lambda_k + \lambda_0$ où $\lambda_k \in \sigma(f)$, alors

$$M\left\{e^{i\lambda_0 \cdot}fe^{-i\lambda \cdot}\right\} = M\left\{fe^{-i\lambda_k \cdot}\right\} = A_k \neq 0$$

Finalement, $M\left\{e^{i\lambda_0 \cdot}fe^{-i\lambda \cdot}\right\} = A_k \neq 0$ si et seulement si $\lambda = \lambda_k + \lambda_0$ où

$\lambda_k \in \sigma(f)$. i.e.
$$e^{i\lambda_0 x} f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(\lambda_k+\lambda_0)x}.$$

■

Théorème 2.3.6. *[1] Si la dérivée (primitive) d'une fonction presque périodique est presque périodique, alors sa série de Fourier peut être obtenue par différenciation formelle (intégration).*

Preuve. Considérons une fonction presque périodique f avec une dérivée presque périodique, alors la valeur moyenne $M\left\{f'e^{-i\lambda\cdot}\right\}$ existe et on a

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{T}\left[f(x)e^{-i\lambda x}\right]_a^{a+T} + i\lambda\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

passons à la limite lorsque $T \to \infty$, on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f'(x)e^{-i\lambda x} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[f(a+T)e^{-i\lambda(a+T)} - f(a)e^{-i\lambda a}\right] + i\lambda\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)e^{-i\lambda x}dx \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{f(a+T)e^{-i\lambda(a+T)}}{T} - \lim_{T\to\infty}\frac{f(a)e^{-i\lambda a}}{T} + i\lambda\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)e^{-i\lambda x}dx.\end{aligned}$$

Comme f est une fonction presque périodique, alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$, et puis

$$\left|\frac{f(a+T)e^{-i\lambda(a+T)}}{T}\right| \leq \frac{M}{T}.$$

Par passage à la limite lorsque $T \to \infty$, on trouve

$$\lim_{T\to\infty}\frac{f(a+T)e^{-i\lambda(a+T)}}{T} = 0.$$

Par conséquent
$$M\left\{f'e^{-i\lambda\cdot}\right\} = i\lambda M\left\{fe^{-i\lambda\cdot}\right\}. \tag{2.16}$$

Il s'ensuit que f' a les mêmes exposants de Fourier que f, sauf pour $\lambda = 0$, s'il apparaît parmi les exposants de Fourier de f.
C'est -à-dire
$$\sigma(f') = \sigma(f) \setminus \{0\}. \tag{2.17}$$

Si on note A'_k les coefficients de Fourier de f', nous obtenons de (2.16) que

$$A'_k = i\lambda_k A_k. \tag{2.18}$$

et

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} i\lambda_k A_k e^{i\lambda_k x}.$$

Maintenant, si F est une primitive presque périodique de f, i.e. $F' = f$, par (2.17) on devrait avoir que

$$\sigma(f) = \sigma(F) \setminus \{0\}$$

et si on note A_k, $\tilde{A}_k$ les coefficients de Fourier de f et F respectivement, alors

$$A_k = i\lambda_k \tilde{A}_k.$$

et puisque $\lambda_k \neq 0$, alors $A_k = \dfrac{A'_k}{i\lambda_k}$.
Toutefois 0 peut appartenir à $\sigma(F)$, et $a(0) = M\{F\}$

d'où

$$F(x) \sim M\{F\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{i\lambda_k} e^{i\lambda_k x}.$$

■

Si P est un polynôme trigonométrique défini par $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$, alors d'aprés proposition 1.2.2, les exposants de Fourier de P sont les $(\lambda_k)_{k\leq n}$ et les coefficients de Fourier sont les $(a_k)_{k\leq n}$.
Le théorème suivant affirme qu'une fonction presque périodique peut être approchée par un polynôme trigonométrique construit à partir de sa série de Fourier, pour la preuve voir [1].

Théorème 2.3.7. *[1] Soit f une fonction presque périodique, on lui associe sa série de Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, alors il existe une suite de polynôme trigonométrique $(T_n)_n$ définie par*

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{m} r_{k,n} A_k e^{i\lambda_k x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f . Les nombres $r_{k,n}$ dépendent de λ_k et n et non pas de A_k, $k \in \mathbb{N}$ et m dépend de n.

Théorème 2.3.8. ***(Egalité de Parseval)**[1]*
Soit f une fonction presque périodique tel que $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 = M\left\{|f|^2\right\}.$$

Preuve. Par l'inégalité de Bessel on a

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k|^2 \leq M\left\{|f|^2\right\}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 \leq M\left\{|f|^2\right\}$$

Il reste à montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 \geq M\left\{|f|^2\right\}$$

Puisque f est presque périodique, alors d'après le théorème 2.3.7, il existe un polynôme trigonométrique $(T_n)_n$ défini par $T_n(x) = \sum_{k=1}^{m} r_k A_k e^{i\lambda_k x}$, $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$|f(x) - T_n(x)|^2 \leq \frac{1}{n}.$$

et

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x) - T_n(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{n}$$

Par passage à la limite quand $T \to \infty$, on trouve

$$M\left\{|f - T_n|^2\right\} \leq \frac{1}{n}.$$

Considérons à présent la fonction ϕ, définie par

$$\phi(b_1, b_2, \cdots, b_m) = M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{m} b_k e^{i\lambda_k \cdot}\right|^2\right\},$$

où $b_k = r_k A_k$ alors par le théorème 2.3.3, on obtient

$$\phi(A_1, A_2, \cdots, A_m) \leq \phi(b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

i.e

$$M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{m} A_k e^{i\lambda_k \cdot}\right|^2\right\} \leq M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{m} r_k A_k e^{i\lambda_k \cdot}\right|^2\right\} \leq \frac{1}{n}$$

En combinant cela avec l'équation (2.15), on obtient que

$$M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{m} |A_k|^2 \leq \frac{1}{n}$$

On tend $m \to \infty$ pour obtenir

$$M\left\{|f|^2\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 + \frac{1}{n}$$

et enfin, on fait tendre n vers l'infini

$$M\left\{|f|^2\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 . \tag{2.19}$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 = M\left\{|f|^2\right\} .$$

■

Lemme 2.3.2. *[6] Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction presque périodique et $M\{f\} = 0$, alors $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Théorème 2.3.9. ***(Théorème d'unicité)****[1]*
Soient f et g deux fonctions presque périodiques, si $f(x) \sim \sum_{k\geq 1} A_k e^{i\lambda_k x}$ et $g(x) \sim \sum_{k\geq 1} A_k e^{i\lambda_k x}$, alors $f \equiv g$.

Preuve. Posons

$$\phi(x) = f(x) - g(x), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

ϕ est presque périodique, donc $M\left\{\phi e^{-i\lambda_k \cdot}\right\}$ existe et vaut

$$\begin{aligned} M\left\{\phi e^{-i\lambda_k \cdot}\right\} &= M\left\{(f-g)e^{-i\lambda_k \cdot}\right\} \\ &= M\left\{f e^{-i\lambda_k \cdot}\right\} - M\left\{g e^{-i\lambda_k \cdot}\right\} = 0 \end{aligned}$$

Par l'égalité de Parseval

$$M\left\{|\phi|^2\right\} = \sum_{k\geq 1} M\left\{\phi e^{-i\lambda_k \cdot}\right\}$$

i.e.

$$M\left\{|\phi|^2\right\} = 0,$$

et par le lemme 2.3.2 $\phi(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. i.e.

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Théorème 2.3.10. *[1] Soit f une fonction presque périodique, si la série de Fourier associée à cette fonction converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors elle converge vers f.*

Preuve. Soit $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, si on pose

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x} \ \text{ et } \ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\lambda_k x},$$

alors $(S_n)_n$ est une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers S. Le théorème 2.3.2 affirme que

$$\lim_{n\to+\infty} M\{S_n\} = M\{S\}$$

Donc pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M\left\{Se^{-i\lambda \cdot}\right\} &= \lim_{n\to+\infty} M\left\{S_n e^{-i\lambda \cdot}\right\} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k M\left\{e^{-i\lambda \cdot} e^{i\lambda_k \cdot}\right\} \end{aligned}$$

et on obtient

$$M\left\{Se^{-i\lambda \cdot}\right\} = \begin{cases} A_k & \text{si} \quad \lambda = \lambda_k \\ 0 & \text{si} \quad \lambda \neq \lambda_k \end{cases}$$

Ainsi f et S ont la même série de Fourier, d'après le théorème d'unicité, on a $f = S$.

■

Chapitre 3

Solution presque périodique d'une équation différentielle non homogène

3.1 C_0 semi-groupe

Tout au long de cette section X sera un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.

Définition 3.1.1. *[4] Une famille $(T(t))_{t\geq 0}$, d'opérateurs linéaires bornés de X à X est dite un semi-groupe sur X si :*

1. *$T(0) = I$.*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s), \ \forall t, s \geq 0$.*

Définition 3.1.2. *[4] Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$, est uniformément continue si*

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Définition 3.1.3. *[4] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe sur X. L'opérateur linéaire A défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \textit{existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(A).$$

est le générateur infinitésimal du semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, $D(A)$ est le domaine de A.

Définition 3.1.4. *[4] Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, des opérateurs linéaires bornés sur X est un semi-groupe fortement continu si*

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x, \ \textit{pour tout } x \in X.$$

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un C_0 semi-groupe.

Théorème 3.1.1. *[4] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe, alors ils existent deux constantes $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

Corollaire 3.1.1. *[4] Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe, alors pour tout $x \in X$, $t \longmapsto T(t)x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans X.*

Théorème 3.1.2. *[4] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in X$,*
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$
2. *Pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et*
$$A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x.$$
3. *Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, et*
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(t)x &= AT(t)x \\ &= T(t)Ax. \end{aligned}$$
4. *Pour tout $x \in D(A)$ et $t > s \geq 0$*
$$\begin{aligned} T(t)x - T(s)x &= \int_s^t T(\tau)Axd\tau \\ &= \int_s^t AT(\tau)xd\tau \end{aligned}$$

Définition 3.1.5. *[4] Un opérateur A est fermé, si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$$

et

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in X$$

On a alors

$$x \in D(A) \ \text{et} \ \ Ax = y$$

Corollaire 3.1.2. *[4] Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, alors*

- *Le domaine $D(A)$ est dense dans X.*
- *A est un opérateur linéaire fermé.*

3.2 Fonctions presque périodiques à valeur dans un espace de Banach

Dans cette section, on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans l'espace de Banach X.

Si nous voulons définir des fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach, alors trois possibilités sont à portée de main, puisque les trois propriétés mentionnées dans le chapitre 2 pour les fonctions à valeur complexes (définition de Bohr, définition de Bochner, définition d'approximation par polynôme trigonométrique) peuvent être formulées en termes d'espaces de Banach. Et peu importe laquelle de ces propriétés est choisie comme définition, car, ces propriétés sont également équivalentes dans les espaces de Banach.

Définition 3.2.1. *[1] Une fonction continue f est dite presque périodique, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient un nombre τ vérifiant :*

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon, \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Remarque 3.2.1. *Un nombre τ pour lequel l'inégalité (3.1) est vraie est appelé ε-presque période de la fonction f. La définition ci-dessus dit que pour chaque $\varepsilon > 0$,* *la fonction f a un ensemble de ε-presque période qui est relativement dense dans $\mathbb{R}$.*

Définition 3.2.2. *[1] Une fonction continue f est dite normale où presque périodique au sens de Bochner si pour toute suite de nombres réels $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite $(h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(f(x+h_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente.*

Définition 3.2.3. *[1] On appelle polynôme trigonométrique à valeur dans X toute fonction de la forme suivante*

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x}, \; x \in \mathbb{R}.$$

où $C_k \in X$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Définition 3.2.4. *[1] Une fonction f est appelée une fonction presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut déterminer un polynôme trigonométrique T_ε à valeurs dans X, tel que*

$$\|f(t) - T_\varepsilon(t)\| < \varepsilon, \; t \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions presque périodiques à valeur dans un espace de Banach ont presque les mêmes propriétés que les fonctions à valeurs scalaires, on va citer quelques une. Pour les preuves, voir [1].

Définition 3.2.5. *[1] Un ensemble $A \subset X$ est dit relativement compact si son adhérence est compact dans X.*

Théorème 3.2.1. *[1]*

1. *Une fonction presque périodique à valeur dans X est bornée sur X.*
2. *Une fonction presque périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque périodiques à valeur dans l'espace de Banach X qui converge uniformément vers une fonction f, alors f est presque périodique.*
4. *L'ensemble des valeurs d'une fonction presque périodique à valeur dans X est relativement compact en X.*

3.3 Solutions presque périodiques

Dans cette section nous expliquerons certains résultats concernant les solutions presque périodiques de l'équation différentielle non homogène : $u' = Au + f$.
A étant un opérateur linéaire non borné dans un espace de Banach tandis que f est une fonction presque périodique.

Définition 3.3.1. *[4] Une fonction $u : \mathbb{R} \longmapsto X$ est appelée une solution classique de l'équation*

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \ t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

si u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'équation (3.2) est vérifiée.

Avant de donner le théorème principal de cette section, on donne un résultat qui concerne les solutions de l'équation homogène $u'(t) = Au(t)$ qui sont définies sur $\mathbb{R}$. Mais avant, on va présenter un lemme qui sera utile pour la preuve du théorème principal.

Lemme 3.3.1. *[5] Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Supposons que $u : \mathbb{R} \to D(A)$ est une solution de l'équation*

$$u' = Au \tag{3.3}$$

alors, pour tout nombre réel fixé α et pour tous $t \geq \alpha$ on a :

$$u(t) = S(t-\alpha)u(\alpha).$$

Théorème 3.3.1. *[5] Soit X un espace de Banach et $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe vérifiant l'inégalité $\|S(t)\|_{L(X,X)} \leq Me^{\beta t}$, pour tout $t \geq 0$, où $M > 0$ et $\beta < 0$.*
Soit A le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t\geq 0}$, et $u : \mathbb{R} \to D(A)$ une solution de l'équation $u'(t) = Au(t), \ t \in \mathbb{R}$. Si on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|U(\sigma)\|^2 \, d\sigma < \infty$$

il en résulte que

$$u(t) = 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.3.1. *Si $f : \mathbb{R} \to X$, telle que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < +\infty$, alors $\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f(x)\|^2 \, dx < +\infty$.*

En effet, si $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < +\infty$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f(t)\| \leq C \Rightarrow \|f(t)\|^2 \leq C^2$$

donc

$$\int_x^{x+1} \|f(t)\|^2 \, dt \leq \int_x^{x+1} C^2 dt \leq C^2$$

d'où

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f(x)\|^2 \, dx < +\infty.$$

A présent considérons, $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur X qui vérifie l'estimation $\|S(t)\| \leq Me^{\beta t}, t \geq 0, \beta < 0$, et soit A son générateur infinitésimal. Avant d'énoncer le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *[5] Si la fonction continue $h : \mathbb{R}^+ \to X$, admet une dérivée droite continue $h'_+(t) = k(t)$, alors elle est dérivable et $h'(t) = k(t)$, $t \in \mathbb{R}^+_*$.*

Théorème 3.3.2. *[5] Soit $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction presque périodique, telle que $f \in C^1(\mathbb{R}, X)$ et $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f'(t)\| < \infty$, alors il existe une solution unique presque périodique u de l'équation :*

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Preuve.

1. **Unicité**

   Supposons qu'ils existent deux solutions presque périodiques u_1 et u_1 de l'équation (3.4) telles que $u_1 \neq u_2$ et

$$u_1' = Au_1 + f \text{ et } u_2' = Au_2 + f.$$

On a

$$\begin{aligned}(u_1-u_2)' &= u_1'-u_2'\\ &= Au_1+f-Au_2-f\\ &= Au_1-Au_2\\ &= A(u_1-u_2).\end{aligned}$$

Par conséquent (u_1-u_2) vérifie l'équation homogène $u'=Au$. D'autre part u_1 et u_2 sont presque périodiques, alors $V=(u_1-u_2)$ est aussi presque périodique d'après le théorème 2.1.4, d'où V est bornée d'après le théorème **??**.
En utilisant le théorème 3.3.1, on déduit que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $V(t)=0$ donc

$$u_1(t)-u_2(t)=0 \Rightarrow u_1(t)=u_2(t),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

2. **Existence**

   Considérons la fonction u définie par l'intégrale suivante :

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma=\lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma,\ t\in\mathbb{R}.$$

   Commençons par montrer que u est bien définie, pour cela, montrons d'abord que $S(t-\cdot)f(\cdot)$ est continue sur $[R,t]$. Soit $(\sigma_n)_n\subset[R,t]$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma_0$. Comme f est une fonction continue, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sigma_n)=f(\sigma_0)$, et comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe, alors $\lim\limits_{n\to\infty} S(t-\sigma_n)f(\sigma_0)=S(t-\sigma_0)f(\sigma_0)$.
   D'autre part,

$$\begin{aligned}\|S(t-\sigma_n)f(\sigma_n)-S(t-\sigma_0)f(\sigma_0)\| &\leq \|S(t-\sigma_n)f(\sigma_n)-S(t-\sigma_n)f(\sigma_0)\|\\ &+\|S(t-\sigma_n)f(\sigma_0)-S(t-\sigma_0)f(\sigma_0)\|\\ &\leq \|S(t-\sigma_n)\|\,\|f(\sigma_n)-f(\sigma_0)\|\\ &+\|S(t-\sigma_n)f(\sigma_0)-S(t-\sigma_0)f(\sigma_0)\|\\ &\leq Me^{\beta(t-\sigma_n)}\,\|f(\sigma_n)-f(\sigma_0)\|\\ &+\|S(t-\sigma_n)f(\sigma_0)-S(t-\sigma_0)f(\sigma_0)\|\\ &\leq Me^{\beta(t-R)}\,\|f(\sigma_n)-f(\sigma_0)\|\\ &+\|S(t-\sigma_n)f(\sigma_0)-S(t-\sigma_0)f(\sigma_0)\|\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ on trouve

$$\lim_{n\to\infty} S(t-\sigma_n)f(\sigma_n) = S(t-\sigma_0)f(\sigma_0)$$

i.e. $S(t-\cdot)f(\cdot)$ est continue sur $[R,t]$, et par conséquent elle est intégrable au sens de Riemann.

Montrons ensuite que $\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ converge, pour cela, montrons qu'elle est absolument convergente,

$$\begin{aligned}\|S(t-\sigma)f(\sigma)\| &\leq \|S(t-\sigma)\| \, \|f(\sigma)\| \\ &\leq Me^{\beta(t-\sigma)} \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \|f(\sigma)\|\end{aligned}$$

et puisque $\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta\sigma}d\sigma = \frac{-1}{\beta}e^{-\beta t}$ est convergente, alors $\int_{-\infty}^{t} \|S(t-\sigma)f(\sigma)\| \, d\sigma$ est convergente, i.e. $\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ est absolument convergent. Par conséquent $\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ converge. De plus $\left\|\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma\right\| \leq \frac{M}{|\beta|} \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \|f(\sigma)\|$.

A présent montrons que u est presque périodique. Puisque f est une fonction presque périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l = l(\frac{-\varepsilon\beta}{M})$, tel que tout intervalle de longueur l contient un nombre τ vérifiant

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \frac{-\varepsilon\beta}{M}.$$

Alors, on peut écrire

$$u(t+\tau) - u(t) = \int_{-\infty}^{t+\tau} S(t+\tau-\sigma)f(\sigma)d\sigma - \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

En utilisant le changement de variables $\xi = \sigma - \tau$, on obtient

$$\begin{aligned}u(t+\tau) - u(t) &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\xi)f(\xi+\tau)d\xi - \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\xi)\left[f(\xi+\tau) - f(\xi)\right] d\xi\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\|u(t+\tau)-u(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-\xi)\| \, \|f(\xi+\tau)-f(\xi)\| \, d\xi \\
&\leq \frac{-\varepsilon\beta}{M}\int_{-\infty}^{t} Me^{\beta(t-\xi)}d\xi \\
&\leq \frac{-\varepsilon\beta}{M}Me^{\beta t}\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta\xi}d\xi \\
&\leq \frac{-\varepsilon\beta}{M}Me^{\beta t}\frac{e^{-\beta t}}{-\beta} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

i.e. u est presque périodique au sens de Bohr.

Pour finir montrons que u est une solution classique sur $\mathbb{R}$ i.e. $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$ et que u vérifie l'équation (3.4). On peut écrire $u(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)$ où

$$u_n(t) = \int_{-n}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma, \ t > -n.$$

Etabilissons la dérivabilité de u_n. Si $t-\sigma = s$, alors $u_n(t) = \int_0^{t+n} S(s)f(t-s)ds$ et si on pose $t+n = x$ et $g_n(x) = f(x-n) \in C^1(\mathbb{R}, X)$, alors

$$u_n(t) = \int_0^{x} S(s)g_n(x-s)ds = v_n(x).$$

On peut affirmer que la dérivée à droite de v_n, $v_n^+(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[v_n(x+h) - v_n(x)]$ existe pour tout $x > 0$.

En effet,

$$\begin{aligned}
v_n(x+h) &= \int_0^{x+h} S(s)g_n(x+h-s)ds \\
&= \int_0^{x} S(s)g_n(x+h-s)ds + \int_x^{x+h} S(s)g_n(x+h-s)ds,
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{h}[v_n(x+h) - v_n(x)] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} S(s)g_n(x+h-s)ds + \frac{1}{h}\left[\int_0^{x} S(s)(g_n(x+h-s) - g_n(x-s))ds\right]$$

D'une part, posons

$$I = \int_0^{x} S(s)\frac{g_n(x+h-s)-g_n(x-s)}{h}ds - \int_0^{x} S(s)g_n'(x-s)ds$$

alors

$$\begin{aligned}
\|I\| &\leq \int_0^x \left\| S(s) \left[\frac{g_n(x+h-s) - g_n(x-s)}{h} - g_n'(x-s) \right] \right\| ds \\
&\leq \int_0^x \|S(s)\| \left\| \frac{g_n(x+h-s) - g_n(x-s)}{h} - g_n'(x-s) \right\| ds \\
&\leq M \int_0^x e^{\beta s} ds \sup_{s\in[0,x]} \left\| \frac{g_n(x+h-s) - g_n(x-s)}{h} - g_n'(x-s) \right\|
\end{aligned}$$

D'autre part, Posons $s = h\theta + x$, alors

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} S(s) g_n(x+h-s) ds = \int_0^1 S(h\theta + x) g_n((1-\theta)h) d\theta.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 S(h\theta+x) g_n((1-\theta)h) d\theta - S(x) g_n(0) \right\| &= \left\| \int_0^1 S(h\theta+x) g_n((1-\theta)h) d\theta - \int_0^1 S(x) g_n(0) d\theta \right\| \\
&\leq \int_0^1 \| S(h\theta+x) \left[g_n((1-\theta)h) - g_n(0) \right] \| d\theta \\
&+ \int_0^1 \| \left[S(h\theta+x) - S(x) \right] g_n(0) \| d\theta \\
&\leq \int_0^1 M e^{\beta(h\theta+x)} \| g_n((1-\theta)h) - g_n(0) \| d\theta \\
&+ \int_0^1 \| \left[S(h\theta+x) - S(x) \right] g_n(0) \| d\theta \\
&\leq M \sup_{\theta\in[0,1]} \| g_n((1-\theta)h) - g_n(0) \| \int_0^1 e^{\beta(h\theta+x)} d\theta \\
&+ \int_0^1 \| \left[S(h\theta+x) - S(x) \right] g_n(0) \| d\theta \\
&\leq M e^{\beta x} \sup_{\theta\in[0,1]} \| g_n((1-\theta)h) - g_n(0) \| \frac{1}{\beta} (\frac{e^{\beta h} - 1}{h}) \\
&+ \int_0^1 \| \left[S(h\theta+x) - S(s) \right] g_n(0) \| d\theta
\end{aligned}$$

i.e. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} S(s) g_n(x+h-s) ds = S(x) g_n(0)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \int_0^x S(s) \frac{g_n(x+h-s) - g_n(x-s)}{h} ds = \int_0^x s(s) g_n'(x-s) ds$

Finalement, la dérivée à droite de v_n existe, et

$$v_n^+(x) = S(x) g_n(0) + \int_0^x s(s) g_n'(x-s) ds, \ x > 0.$$

et puisque $S(x) \in L(X)$ et g_n' est continue alors v_n^+ est continue. D'aprés le

lemme 3.3.2, la dérivée v_n' existe sur $]0,+\infty[$ et $v_n^+(x) = v_n'(x)$, $x > 0$.
De plus, $v_n(x) = \int_0^x S(x-s)g_n(s)ds$ et pour tout $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left[v_n(x+h) - v_n(x)\right] &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{x+h} S(x+h-s)g_n(s)ds - \int_0^x S(x-s)g_n(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x S(h)S(x-s)g_n(s)ds + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} S(x+h-s)g_n(s)ds \\
&- \frac{1}{h}\int_0^x S(x-s)g_n(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} S(x+h-s)g_n(s)ds + \frac{S(h)-I}{h}\int_0^x S(x-s)g_n(s)ds
\end{aligned}$$

On pose $s = h\theta + x$, alors

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} S(x+h-s)g_n(s)ds = \int_0^1 S((1-\theta)h)g_n(h\theta+x)d\theta.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^1 S((1-\theta)h)g_n(h\theta+x)d\theta - g_n(x)d\theta\right\| &= \left\|\int_0^1 S((1-\theta)h)g_n(h\theta+x)d\theta - \int_0^1 g_n(x)d\theta\right\| \\
&\leq \int_0^1 \|S((1-\theta)h)\| \, \|g_n(h\theta+x) - g_n(x)\| \, d\theta \\
&+ \int_0^1 \|(S((1-\theta)h) - I)g_n(x)\| \, d\theta \\
&\leq M \sup_{\theta\in[0,1]} \|g_n(h\theta+x) - g_n(x)\| \int_0^1 e^{\beta(h\theta+x)}d\theta \\
&+ \int_0^1 \|(S((1-\theta)h) - I)g_n(x)\| \, d\theta \\
&\leq M \sup_{\theta\in[0,1]} \|g_n(h\theta+x) - g_n(x)\| \, e^{\beta x}\frac{1}{\beta}\frac{e^{\beta h}-1}{h} \\
&+ \int_0^1 \|(S((1-\theta)h) - I)g_n(x)\| \, d\theta
\end{aligned}$$

i.e.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} S(x+h-s)g_n(s)ds = g_n(x).$$

Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(h)-I}{h}\int_0^x S(x-s)g_n(s)ds = v_n' - g_n(x)$$

Par le théorème 3.1.2 $v_n(x) = \int_0^x S(x-s)g_n(s)ds \in D(A)$, et par la définition du générateur infinitésimal de S, on obtient que

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(h)-I}{h}\int_0^x S(x-s)g_n(s)ds = A(\int_0^x S(x-s)g_n(s)ds) = v_n' - g_n(x).$$

i.e.

$$v_n'(x) = Av_n(x) + g_n(x),\ x > 0.$$

Revenons à $u_n(t) = v_n(x)$ où $x = t + n$, on aura alors

$$u_n'(t) = \frac{du_n(t)}{dt} = \frac{dv_n(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = v_n'(t+n)$$

et

$$u_n'(t) = Au_n(t) + f(t),\ t > -n. \tag{3.5}$$

D'autre part,

$$u_n'(t) = v_n'(t+n) = S(t+n)f(-n) + \int_0^{t+n} S(s)f'(t-s)ds.$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|u_n'(t) - \int_0^{+\infty} S(s)f'(t-s)ds\right\| &\leq \left\|\int_0^{t+n} S(s)f'(t-s)ds - \int_0^{+\infty} S(s)f'(t-s)ds\right\| \\
&\quad + \|S(t+n)f(-n)\| \\
&\leq \int_{t+n}^{+\infty} \|S(s)f'(t-s)\|\, ds + \|S(t+n)f(-n)\| \\
&\leq M\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\|f'(\xi)\|\int_{t+n}^{+\infty} e^{\beta s}ds + M\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|\, e^{\beta t}e^{\beta n} \\
&\leq (-M\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\|f'(\xi)\|\,\frac{e^{\beta t}}{\beta})e^{\beta n} + M\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|\, e^{\beta t}e^{\beta n} \\
&\leq Ce^{\beta n}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(t) = \int_0^{+\infty} S(s)f'(t-s)ds,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Prenons maintenant $a \in \mathbb{R}$ et choisissons n tel que $-n < a$. Puisque u_n' existe alors on peut écrire

$$u_n(t) = u_n(a) + \int_a^t u_n'(s)ds,\ t > a. \tag{3.6}$$

et on peut même montrer que u_n' converge vers $v(t) = \int_0^{+\infty} S(s)f'(t-s)ds$ uniformément sur $[a,+\infty[$, en effet,

$$\begin{aligned}
\|u_n'(t)-v(t)\| &= \left\| \int_0^{t+n} S(s)f'(t-s)ds + S(t+n)f(-n) - \int_0^{+\infty} S(s)f'(t-s)ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t+n} S(s)f'(t-s)ds - \int_0^{+\infty} S(s)f'(t-s)ds \right\| + \|S(t+n)f(-n)\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t+n} S(s)f'(t-s)ds - \int_0^{t+n} S(s)f'(t-s)ds - \int_{t+n}^{+\infty} S(s)f'(t-s)ds \right\| \\
&+ \|S(t+n)f(-n)\| \\
&\leq \int_{t+n}^{+\infty} \|S(s)f'(t-s)\| \, ds + \|S(t+n)f(-n)\| \\
&\leq M \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|f'(\xi)\| \int_{t+n}^{+\infty} e^{\beta s} ds + M \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| \, e^{\beta a} e^{\beta n} \\
&\leq (-M \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|f'(\xi)\| \, \frac{e^{\beta a}}{\beta})e^{\beta n} + M \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| \, e^{\beta a} e^{\beta n} \\
&\leq Ce^{\beta n}
\end{aligned}$$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$ on trouve que

$$\|u_n'(t) - v(t)\| \leq 0$$

Donc $u_n'(t)$ converge uniformément vers $v(t)$ sur $[a,+\infty[$.

Notons aussi que u_n' est continue, et puisque la convergence de u_n' vers v est uniforme sur $[a,+\infty[$, alors v est continue sur $[a,+\infty[$ et par passage à la limite dans (3.6) on obtient

$$u(t) = u(a) + \int_a^t v(s)ds, \ t > a.$$

De cette écriture, on déduit que

$$v(t) = u'(t), \ t > a. \tag{3.7}$$

où a est quelconque i.e. $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$. Revenons à (3.5), $Au_n(t) = u_n'(t) - f(t), \ t > -n$, et par passage à la limite,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} Au_n(t) &= v(t) - f(t), \ t \in \mathbb{R} \\
&= u'(t) - f(t)
\end{aligned}$$

De plus on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(t) = u(t)$$

Puisque A est un operateur fermé alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) \in D(A)$$

et

$$Au(t) = u'(t) - f(t)$$

D'où u vérifie (3.4).

■

Corollaire 3.3.1. *[5] Sous l'hypothèse du théorème précédent, toute solution bornée sur $\mathbb{R}$ d'équation $u' = Au + f$ est presque périodique.*

Preuve. Nous avons prouvé que cette équation a exactement une solution, donc elle doit coincider avec $\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ et elle est presque périodique. ■

Références

[1] Corduneau C., Almost periodic functions. Interscience Publishers, (1968).

[2] El Amrani M., suites et séries numériques suites et séries de fonctions, Ellipses, (2011).

[3] Levitan B.M., Zhikov V.V., Almost Periodic Functions and Differential Equations Press. Cambridge, (1982).

[4] Pazy A., Semi groups of linear Operators and applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, (1983).

[5] Zaidman S., Abstract Differential Equations. Pitman Publishing Limited, Scan-Franciso-London-Melbourne, (1979).

[6] Zaidman S., Almost-Periodic Functions in Abstract Spaces, Research Notes in Mathematics 126, Pitman advanced Publishing Program, Boston. London. Melbourne, (1985).