République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AIN-TÉMOUCHENT

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations différentielles et modélisation

Présenté par :
Mme. ALI ZAHIRA

CALCUL FRACTIONNAIRE

Encadrant :
M. BENAISSA ABDELKADER

Soutenu en 2020

Devant le jury composé de :

Président :	Melle. BOUKHALFA (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Examinateurs :	Mme. LADRANI Fatima (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	M. BENAISSA ABDELKADER (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.

Dédicace

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux

je dédie ce modeste travail à :
A mon très cher Mari, pour son encouragement, son soutien moral et son respect qu'il m'as offert.
A mon père et ma mère, pour m'encourager dans mes passions.
A ma fille "Lodjaine", je t'aime énormément.
A mes chers soeurs et frères : "Amina", "Lila", "Nasr el Dinne" et "Abd el Nour"
A mes chére amis : "Asmaa", "Imene", "Khadidja", "Wassila".
A tous les membres de ma promotion.
A tous la famille de mon Mari.
Que Dieu vous protège et vous prête bonne santé et longue vie.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.
En second lieu, je voudrais tout d'abord remercier mon encadreur Mr. BENAISSA ABDELKADER pour sa précieuse aide, ses orientations et conseils ainsi le temps qu'il m'a accordé pour mon encadrement.
Je remercie Melle BOUKHALFA FATIMA d'avoir accepté de présider le jury.
Je remercie Mdm Ladrani Fatima d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.
J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon très cher mari, mes chèrs parents.
Enfin, Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire réel ou même complexe.

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps où Leibniz, Gauss, Newton ont développé les fondements de ce type de calcul, mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grâce à son immense application dans différents domaine tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autre sciences qui ont été développé dans la dernière décennie.

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du $17^{\text{ème}}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\dfrac{d^n}{dt^n}$ pour désigner la n-ième dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital, l'Hôpital a répondu : Que signifie $\dfrac{d^n}{dt^n}$ pour $n = \dfrac{1}{2}$?

Cette lettre écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, c'est vraie que la théorie de dérivation fractionnaire a 300 ans d'existence mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les applications des dérivées d'ordre non entier se sont le plus diversifiées.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Le premier chapitre sera consacré aux notions de base et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle, un rappel et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie de calcul fractionnaire.

Le deuxième chapitre contient les définitions et certaines propriétés potentiellement utiles de plusieurs familles différentes d'intégrales fractionnaires et de dérivés fractionnaires.

Le troisième chapitrecontient l'existence fondamentale et les théorèmes d'unicité pour les équations différentielles fractionnaires ordinaires en référence particulière aux problèmes de type Cauchy. Ici au chapitre 3, on considère également les équations différentielles fractionnaires non linéaires et linéaires dans les cas un-dimensionnels et vectoriels.

Chapitre 1

Préliminaire

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie d'analyse fonctionnelle qui représentent un outils indispensable dans notre étude.

1.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.1.1. *[21] Soit $\Omega = [a,b], (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle bornée de $\mathbb{R}$.*

1. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et*
$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty.$$
2. *Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout sur Ω.*

Théorème 1.1.1. *[21] Soit $\Omega = (a,b), (-\infty < a < b < +\infty)$.*

1. *pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \tag{1.1}$$
2. *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*
$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ presque partout sur } \Omega \} \tag{1.2}$$

1.2 Espace des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2.1. *[18] Soit $\Omega = [a,b]$, $(-\infty < a < b < +\infty)$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On note par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω muni de la norme :*
$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in \Omega} \left| f^{(k)}(x) \right|. \tag{1.3}$$

En particulier si $n=0$, $C^0(\Omega)=C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω et on note $\|.\|_{C^0(\Omega)}$ par $\|.\|_\infty$ c'est-à-dire :

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|. \tag{1.4}$$

On introduit également deux sous-espaces $C_a^0(a,b)$ et $C_b^0(a,b)$ de l'espace $C[a,b]$ défini par :

$$C_a^0(a,b)=\left\{f(x)\in C_a^0(a,b), f(a)=0, \|f\|_{C_a}=\|f\|_C\right\} \tag{1.5}$$

et

$$C_b^0(a,b)=\left\{f(x)\in C_b^0(a,b), f(b)=0, \|f\|_{C_b}=\|f\|_C\right\}. \tag{1.6}$$

Lorsque $\Omega=[a,b]$, $(0<a<b<\infty)$ et $\gamma\in\mathbb{C}$, $(0\leq Re(\gamma)<1)$, on introduit l'espace pondéré $C_{\gamma,\log}[a,b]$ des fonctions g données sur $(a,b]$ et tel que $[\log(x/a)]^\gamma g(x)\in C[a,b]$:

$$\|g\|_{C_{\gamma,\log}} = \left\|\left(\log\frac{x}{a}\right)^\gamma f(x)\right\|_C, C_{0,\log}[a,b]=C[a,b]. \tag{1.7}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ on note par $C^n_{\delta,\gamma}[a,b]$ l'espace de Banach des fonctions $g(x)$ qui ont des δ-dérivés continus sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $n-1$ et dérivé $(\delta^n g)(x)$ sur $(a,b]$ d'ordre n tel que $(\delta^n g)(x)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$:

$$C^n_{\delta,\gamma}[a,b]=\left\{g:\|g\|_{C^n_{\delta,\gamma}}=\sum_{k=0}^{n-1}\|\delta^k g\|_C+\|\delta^n g\|_{C_{\gamma,\log}}\right\}, C^0_{\delta,\gamma}[a,b]=C_{\gamma,\log}[a,b]. \tag{1.8}$$

Définition 1.2.2. *[23] Soit $\Omega=[a,b]$, $(-\infty<a<b<+\infty)$. On désigne par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables où :*

$$f\in AC[a,b]\Leftrightarrow \exists\varphi\in L(a,b) \text{ tel que } f(x)=c+\int_a^x\varphi(t)dt. \tag{1.9}$$

Ainsi, toute fonction absolument continue $f(x)$ possède une dérivée sommable $f'(x)=\varphi(x)$ presque partout sur $[a,b]$ et $c=f(a)$.

Définition 1.2.3. *[31] On désigne par $AC^n([a,b])$, $n\in\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $n-1$ tel que $f^{(n-1)}\in AC([a,b])$ où :*

$$AC^n([a,b])=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{C} \text{ et } (D^{n-1}f)\in AC([a,b])\right\} \tag{1.10}$$

En particulier, $AC^1[a,b]=AC[a,b]$.

1.3 Espaces des fonctions intégrables avec poids

Définition 1.3.1. *[21] L'espace $X^p_c(a,b)$, $(c\in\mathbb{R}, 1<p<+\infty)$ est l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs complexes f sur (a,b) tel que $\|f\|_{X^p_c(a,b)}<\infty$ défini par la norme :*

$$\|f\|_{X^p_c}(a,b)=\left(\int_a^b|x^cf(x)|^p\frac{dx}{x}\right)^{1/p}, (1<p<+\infty), \tag{1.11}$$

et pour $p = \infty$
$$\|f\|_{X_c^\infty}(a,b) = ess \sup_{a \le x \le b} [x^c |f(x)|] . \tag{1.12}$$
L'espace $X_c^p(a,b)$ *est appelé l'espace des fonctions intégrables avec poids.*
En particulier, si $c = 1/p$ *l'espace* $X_c^p(a,b)$ *coïncide avec l'espace* $L^p(a,b)$ *et on a* $X_{1/p}^p(a,b) = L^p(a,b)$.

1.4 Espace des fonctions continues avec poids

Définition 1.4.1. *[18] Soient* $\Omega = [a,b]$ *et* $\gamma \in \mathbb{C}$. *On désigne par* $C_\gamma([a,b])$ *l'espace des fonctions* f *définies sur* $]a,b]$ *tel que la fonction* $(x-a)^\gamma f(x) \in C([a,b])$ *c'est à dire :*
$$C_\gamma([a,b]) = \{f :]a,b] \to \mathbb{C}, (x-a)^\gamma f(x) \in C([a,b])\} . \tag{1.13}$$
muni de la norme :
$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x-a)^\gamma f(x)\|_C = \max_{x\in\Omega} |(x_a)^\gamma f(x)| \tag{1.14}$$
L'espace $C_\gamma([a,b])$ *est appelé l'espace des fonctions continues avec poids.*
En particulier, si $\gamma = 0$ *alors* $C_0[a,b] = C[a,b]$.

Définition 1.4.2. *[18] Pour* $n \in \mathbb{N}$ *On désigne par* $C_\gamma^n[a,b]$ *l'espace de Banach de toutes les fonctions continues différentiables à l'ordre* $n-1$ *sur* $[a,b]$ *et ont la dérivée* $f^{(n)}(x)$ *d'ordre* n, *tel que* $f^{(n)} \in C[a,b]$ *où :*
$$C_\gamma^n[a,b] = \left\{ f : \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma} \right\} . \tag{1.15}$$
En particulier, si $n = 0$ *alors* $C_\gamma^0[a,b] = C_\gamma[a,b]$.

1.5 Espaces des fonctions absolument continues avec poids

Définition 1.5.1. *[17] Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$, *on note par* $AC_{\delta,\mu}^n[a,b]$ *l'espace des fonctions absolument continues avec poids défini par :*
$$AC_{\delta,\mu}^n[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}[x^\mu g(x)] \in AC[a,b], \mu \in \mathbb{R}, \delta = x\frac{d}{dx} \right\},$$
avec
$$\delta = xD \ , \ (D = \frac{d}{dx}) \tag{1.16}$$
En particulier, lorsque $\mu = 0$ *l'espace* $AC_\delta^n[a,b] = AC_{\delta,0}^n[a,b]$ *et on a :*
$$AC_\delta^n[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}[g(x)] \in AC[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\} . \tag{1.17}$$
Lorsque $\mu = 0$ *et* $n = 1$, *l'espace* $AC_\delta^1[a,b]$ *coïncide avec* $AC[a,b]$.

1.6 Fonctions spéciales

Dans cette section, on va présenter quelques théories de base qui concernent les fonctions spéciales qui sont utilisées dans les autres chapitres. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-laffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.6.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Elle prolonge la fonction factorielle aux nombres réels et même aux nombres complexes.

Définition 1.6.1. *[15] Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.18}$$

Remarque 1.6.1. *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. ***La relation de récurrence :*** *pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$ on a :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

   et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

   En particulier $\Gamma(1) = 1$.

2. ***La représentation de la fonction Gamma par la limite :***

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{(z+1)\cdots(z+n)}$$

   avec $Re(z) > 0$.

3. ***La dérivée :*** *La fonction Gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ sa dérivée est :*

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z)\Psi(z)$$

   où $\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln[\Gamma(z)]$

4. ***Quelques valeurs particulière de la fonction Gamma :***
   pour $z = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

   pour $z = n + \frac{1}{2}$,$n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

1.6.2 La fonction Bêta

Définition 1.6.2. *[15] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt \tag{1.19}$$

avec $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$

Remarque 1.6.2. *Pour $z, w \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$ la fonction Bêta satisfait les propriétés suivantes :*

1. *La fonction Bêta est reliée avec la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

2. *La fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire :*

$$B(z,w) = B(w,z).$$

3. *La fonction Bêta peut prendre aussi les formes intégrales :*

$$B(z,w) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}(\theta)\cos^{2w-1}(\theta)d\theta$$

$$B(z,w) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt.$$

4. *La dérivée de la fonction Bêta est donnée par :*

$$\frac{\partial}{\partial z}B(z,w) = B(z,w)\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+w)}{\Gamma(z+w)}\right).$$

Définition 1.6.3. *[15] La formule du binôme généralisée $\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \ \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \ (n \in \mathbb{N}) \tag{1.20}$$

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \frac{m!}{n!(m-n)!}, \ (m, n \in \mathbb{N}; m \geq n) \tag{1.21}$$

et

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0, \ (m, n \in \mathbb{N}; 0 \leq m < n) \tag{1.22}$$

Définition 1.6.4. *[15] Cette formule peut être exprimée en terme de la fonction Gamma pour $\alpha \notin \mathbb{Z}_-^*$ comme suit :*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)}, \ (\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \notin \mathbb{Z}_-^*, n \in \mathbb{N}). \tag{1.23}$$

1.6.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler prolonge naturellement l'exponentielle usuelle.

Définition 1.6.5. *[26] Pour $z \in \mathbb{C}$ la fonction de Mittag-laffler à un paramètre $E_\alpha(z)$ est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, (\alpha > 0) \tag{1.24}$$

et la fonction de Mittag-laffler à deux paramètres $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.25}$$

Exemple 1.6.1. *[21] Voici les fonctions de Mittag-Leffler pour quelques valeurs spéciales de α et β :*

1. $$E_{1,1}(z) = e^z$$
2. $$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$
3. $$E_{1,3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$
4. $$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$$
5. $$E_{2,2}(z^2) = \frac{1}{z}\sinh(z).$$

1.7 Transformée de Fourier

Définition 1.7.1. *[33],[34] La transformée de Fourier d'une fonction continue $\varphi(t)$ absolument intégrable dans $(-\infty, \infty)$ dans le cas un-dimentionnel est définie par :*

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \mathcal{F}[\varphi(t)](x) = \hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\varphi(t)dt, \ (x \in \mathbb{R}). \tag{1.26}$$

La transformée de Fourier d'une fonction $\varphi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^n$ dans le cas n-dimentionnel est définie par :

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \mathcal{F}[\varphi(t)](x) = \hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixt}\varphi(t)dt, \ (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1.27}$$

La transformée de Fourier inverse dans le cas un-dimentionnel est donnée par la formule :

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \mathcal{F}^{-1}[g(t)](x) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}g(t)dt, \ (x \in \mathbb{R}). \tag{1.28}$$

et pour le cas n-dimentionnel on a :

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \mathcal{F}^{-1}[g(t)](x) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixt}g(t)dt, \ (x \in \mathbb{R}^n).$$

Définition 1.7.2. *[33] Le produit de convolution de Fourier de deux fonctions h et φ dans le cas un-dmentionnel est défini par l'intégrake suivant :*

$$h * \varphi = (h * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\varphi(t)dt, (x \in \mathbb{R})$$

Le produit de convolution de Fourier de deux fonctions h et φ dans le cas n-dmentionnel est défini par l'intégrake suivant :

$$h * \varphi = (h * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-t)\varphi(t)dt, (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.29}$$

1.8 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace intervient dans la résolution des équations et des systèmes différentiels.

Définition 1.8.1. *[10], [11], [27] La transformée de Laplace d'une fonction f de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, s \in \mathbb{R} \tag{1.30}$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $(\mathcal{L}f)(s)$.
La transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (1.12) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre exponentiel α, c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que :

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ pour } t > T. \tag{1.31}$$

avec M et T sont deux constantes.
Dans ce cas la transformée de Laplace existe pour $Re(s) > \alpha$.
L'originale $f(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse :

$$(\mathcal{L}^{-1}f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}(\mathcal{L}f)(s)ds, \; c = Re(s) > \alpha. \tag{1.32}$$

Exemple 1.8.1. *[27]*

1. $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$.
2. $\mathcal{L}(t)(s) = \dfrac{1}{s^2}$
   on applique intégration par partie :
   $\mathcal{L}(t)(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} te^{-st}dt = 0 + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$.
3. $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$.

Propriété 1.8.1. *[27] La transformée de Laplace est linéaire :*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i f_i(t)\right)(s) = \sum_{i=0}^{n} c_i(\mathcal{L}f_i)(s). \tag{1.33}$$

Définition 1.8.2. *Lorsque le produit $f(x-t)g(t)$ est intégrable sur tout intervalle $[0,x]$ de $\mathbb{R}_+$, le produit de convolution de f et g est définie par :*

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Propriété 1.8.2. *[21] Si les transformées de Laplace de f et g existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$\mathcal{L}(f*g)(s) = (\mathcal{L}f)(s)(\mathcal{L}g)(s).$$

Propriété 1.8.3. *[21] La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(s) &= s^n(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^{n-k-1}f^{(k)}(0^+)\\ &= s^n(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^k f^{(n-k-1)}(0^+).\end{aligned}$$

1.9 La transformée de Mellin

La transformée de Mellin appartient à la famille des transformées intégrales, qui établissent une relation entre une fonction φ et sa transformée $\mathcal{M}\varphi$.

Définition 1.9.1. *[11], [12] La transformée de Mellin d'une fonction $\varphi(t)$ d'une variable réelle $t \in \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$(\mathcal{M}\varphi)(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)dt. \tag{1.34}$$

et la transformée de Mellin inverse est donnée pour $t \in \mathbb{R}^+$ par la formule :

$$(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-s}\varphi(s)ds,\ c = Re(s) > \alpha$$

Exemple 1.9.1. *[1] Soit la fonction f définie par :*

$$\varphi(t) = e^{-t}$$

La transformée de Mellin de la fonction φ est :

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}\varphi)(s) &= \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\\ &= \Gamma(s)\end{aligned}$$

avec $Re(s) > 0$.

Propriété 1.9.1. *[29], [9] La transformée de Mellin est linéaire.*
Soient $\varphi, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettent des transformées de Mellin $(\mathcal{M}\varphi)(s)$, $(\mathcal{M}h)(s)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors :

$$\mathcal{M}[\alpha\varphi + \beta h](s) = \alpha(\mathcal{M}\varphi)(s) + \beta(\mathcal{M}h)(s)$$

Définition 1.9.2. *Le produit de convolution de Mellin de deux fonctions φ et h donnée sur $\mathbb{R}^+$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^+$ par l'intégrale suivant :*

$$(\varphi * h)(x) = \int_0^x \varphi(t) h\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}.$$

Propriété 1.9.2. *[11] La transformée de Mellin du produit de convolution est donnée par :*

$$\mathcal{M}(\varphi * h)(s) = (\mathcal{M}\varphi)(s)(\mathcal{M}h)(s).$$

Propriété 1.9.3. *[11], [12] La transformée de Mellin de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction φ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\varphi^{(m)}](s) = \mathcal{M}[D^m\varphi(t)](s) &= (-1)^m(s-1)\cdots(s-m)(\mathcal{M}\varphi)(s-m) && (1.35)\\ &= \frac{\Gamma(1+m-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}\varphi)(s-m) && (1.36)\\ &= (-1)^m\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-m)}(\mathcal{M}\varphi)(s-m). && (1.37) \end{aligned}$$

Lorsque $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^+)$, la transformation de Mellin $\mathcal{M}[\varphi(t)](s-m)$ et $\mathcal{M}[D^m\varphi(t)](s)$ existent et $\lim_{t\to 0+[t^{s-k-1}\varphi^{(m-k-1)}(t)]}$ et $\lim_{t\to +\infty[t^{s-k-1}\varphi^{(m-k-1)}(t)]}$ sont finis pour $k = 0, 1, \cdots, m-1$, alors les relations (1.37) et (1.37) sont remplacées par :

$$\mathcal{M}[D^m\varphi(t)](s) = \frac{\Gamma(1+m-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}\varphi)(s-m) + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma(1+k-s)}{\Gamma(1-s)}[x^{s-k-1}\varphi^{(m-k-1)}(x)]_0^\infty \tag{1.38}$$

et

$$\mathcal{M}[D^m\varphi(t)](s) = (-1)^m\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-m)}(\mathcal{M}\varphi)(s-m) + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-k)}[x^{s-k-1}\varphi^{(m-k-1)}(x)]_0^\infty, \tag{1.39}$$

avec $m \in \mathbb{N}$.

Deux propriétés simples de la transformée de Mellin sont reliées aux opérateurs élémentaires M_a et N_a défini par :

$$(M_a\varphi)(x) = x^a\varphi(x),\ (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}) \tag{1.40}$$

et

$$(N_a\varphi)(x) = \varphi(x^a),\ (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}). \tag{1.41}$$

Les relations suivantes sont valables pour les fonctions "suffisamment bon" φ :

$$(\mathcal{M}M_a\varphi)(s) = \mathcal{M}_{-a}(s) = \mathcal{M}(s+a),\ (a \in \mathbb{C}) \tag{1.42}$$

et

$$(\mathcal{M}N_a\varphi)(s) = \frac{1}{|a|}\mathcal{M}\left(\frac{s}{a}\right),\ (a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}). \tag{1.43}$$

1.10 Fonctions généralisées

Dans cette section, on présente les définitions et certaines propriétés de certains espaces de test et des fonctions généralisées.

Définition 1.10.1. *[31],[25] Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace Euclidien à n-dimensionnel, soient $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $t = (t_1, \cdots, t_n)$ soit des points dans $\mathbb{R}^n$, $x \cdot t = x_1t_1 + \cdots x_nt_n$ leur produit scalaire et $|t| = (t_1^2 + \cdots + t_n^2)^{1/2}$, $dt = dt_1 \cdots dt_n$. Soient*

$$\mathbb{N}^n = \{k = (k_1, \cdots, k_n), k_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \cdots, n\},$$

$$\mathbb{N}_0^n = \{k = (k_1, \cdots, k_n), k_j \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, \cdots, n\}.$$

Les éléments $k \in \mathbb{N}_0^n$ sont appelés multi-indices. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}_0^n$ on utilisera les notations :

$$x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n},\ |k| = k_1 + \cdots + k_n$$

et

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),\ D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

On considère les fonctions généralisées sur Ω, où Ω est un domaine dans $\mathbb{R}^n$. On choisit les fonctions de test sur Ω comme les fonctions infiniment différentiables aux points intérieurs de Ω avec un comportement prescrit aux points limites de Ω. On note par $\langle f, \varphi\rangle$ la valeur de la fonction généralisée f comme une fonctionnelle sur la fonction de test φ. Une fonction généralisée f est dite régulière si c'est une fonction localement intégrable telle que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ existe pour chaque fonction de test $\varphi(x)$ et

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{1.44}$$

On suppose que la forme bilinéaire $\langle f, \varphi\rangle$ est choisie de telle manière qu'elle coïncide avec (1.44) dans le cas d'une fonction généralisée régulière.

On suppose que l'espace des fonctions de test $X = X(\Omega)$ est un espace topologique et on désigne par $X' = X'(\Omega)$ l'espace de l'espace fonctionnel linéaire continu sur X que l'on appelle le duel topologique de X.
Tout d'abord, on rappelle la notion de fonction généralisée concentrée en un point. Une fonction généralisée $f \in X'$ est dit zéro sur l'ensemble ouvert G, si $\langle f, \varphi\rangle = 0$ pour chaque fonction de test $\varphi \in X$ qui est zéro au-delà de G. L'union $\mathcal{O}_f$ de tous les ensembles ouverts où $f = 0$ est appelée un ensemble nul de la fonction f. Le complément de l'ensemble nul par rapport à Ω est appelé le support de la fonction généralisée et un tel complément est noté *supp*$(f) = \Omega \backslash \mathcal{O}_f$. Les fonction généralisée est dit concentrée au point t_0, si *supp*(f) est ce point t_0.
La fonction classique de Dirac $\delta(t - t_0)$, $t_0 \in \Omega$ définie par :

$$\langle \delta(t - t_0), \varphi\rangle = \varphi(t_0)$$

et ses dérivées définies comme :

$$\langle (D^k\delta)(t - t_0), \varphi\rangle = (-1)^{|k|}(D^k\varphi)(t_0),\ (k \in \mathbb{N}^n),$$

Maintenant on va donner des définitions et certaines propriétés de certains espaces de test et des fonctions généralisées. On présente d'abord l'espace des fonctions de test de Schwartz $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, défini sur tout l'espace ($\Omega = \mathbb{R}^n$) et son dual $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{S}$ est l'espace linéaire de toutes les fonctions lisses à valeurs complexes $\varphi(t)$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\gamma_{m,k} = \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \left[1 + |t|^{2m}\right] |D^k\varphi(t)| < \infty, \tag{1.45}$$

pour tous les entiers non négatifs $m \in \mathbb{N}_0$ et $k \in \mathbb{N}_0^n$. La topologie de $\mathcal{S}$ est générée par la collection dénombrable de semi-normes $\{\gamma_{m,k}\}_{m,|k|=0}^{\infty}$. découle de (1.45) que tout $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ est une fonction de descente rapide et donc $\mathcal{S}$ est appelé l'espace des fonctions lisses de descente rapide.
L'espace de Schwartz des fonctions généralisées $\mathcal{S}'$ est l'espace dual de $\mathcal{S}$. Toute fonction généralisée $f \in \mathcal{S}'$ peut être représentée sous la forme :

$$f(t) = D^m F(t),$$

où $m \in \mathbb{N}_0^n$ et $F(t)$ est une fonction continue de croissance lente comme $|t| \to \infty$. Par conséquent, $\mathcal{S}$ est appelé l'espace de fonctions généralisées de croissance lente ou l'espace des distributions tempérées.
Lorsque $n = 1$ et $\Omega = [0, \infty)$, l'espace $\mathcal{S}_+ \equiv \mathcal{S}_+([0, \infty))$ est défini comme l'espace des fonctions de test constitué de toutes les fonctions lisses $\varphi(t)$ sur $[0, \infty)$ qui sont de descente rapide comme $t \to +\infty$. L'espace correspondant des fonctions généralisées $\mathcal{S}'_+$ est l'espace dual de $\mathcal{S}_+$. On présente d'abord les espaces de Lizorkin Ψ, Φ et Ψ', Φ' des fonctions de test et généralisées sur $\mathbb{R}^n$. L'ancien espace des fonctions de test Ψ est un espace linéaire de toutes les fonctions infiniment différentiables à valeurs complexes $\varphi(t)$ dont les dérivées disparaissent à l'origine :

$$\Psi = \left\{\varphi(t) : \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ (D^k\varphi) = 0 \ (|k| \in \mathbb{N}_0)\right\}. \tag{1.46}$$

Enfin, on introduit l'espace des fonctions de test Φ qui est un sous-espace de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il se compose de ces fonctions schwartziennes $\varphi \in \mathcal{S}$ qui sont orthogonales aux polynômes, c'est-à-dire que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^k\varphi(t)dt = 0 \ (k \in \mathbb{N}_0^n).$$

les espaces des fonctions généralisées Ψ' et Φ' sont les espaces duaux à Ψ et Φ, respectivement.

1.11 Théorèmes de point fixe

Dans cette section on présente diverses théorèmes d'existence et d'unicité basée sur théorèmes classiques qui affirment l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. On utilisera définitions connues et notions d'analyse fonctionnelle.
On présente d'abord le théorème du point fixe de Schauder qui ne donne que l'existence d'un point fixe sans son unicité.

Théorème 1.11.1. *[23] Soit (D, d) un espace métrique complet, soit U un sous-ensemble convexe fermé de D, et soit $T : U \to U$ l'application telle que $Tu : u \in U$ est relativement*

compact dans D.
Alors l'opérateur T a au moins un point fixe $u^* \in U$:

$$Tu^* = u^*. \tag{1.47}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes requises pour que l'ensemble U soit relativement compact dans l'espace des fonctions continues $C[a,b]$ sur un intervalle fermé fini $[a,b]$ de l'axe réel $\mathbb{R}$ sont données par le théorème d'Arzela-Ascoli. Pour formuler ce théorème, on rappelle les définitions des ensembles équicontinus et uniformément bornés. Un ensemble G est dit équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $g \in G$ et tout $x_1, x_2 \in [a,b]$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$, on a $|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon$.

Un ensemble G est dit uniformément borné s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|g\|_\infty \leq M$ pour chaque $g \in G$. Le théorème d'Arzela-Ascoli suivant peut maintenant être rappelé.

Théorème 1.11.2. *[23] Soit G un sous-ensemble de $C[a,b]$ équipé de la norme de Chebyshev.*
Alors G est relativement compact dans $C[a,b]$ si, et seulement si, G est équicontinue et uniformément borné.
Ensuite, on présente le classique théorème du point fixe de Banach dans un espace métrique complet.

Théorème 1.11.3. *[23] Soit (U,d) un espa ce métrique complet non vide, soit $0 \leq \omega < 1$ et soit $T : U \to U$ l'application telle que, pour tout $u, v \in U$, la relation*

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u,v) \ (0 \leq \omega < 1) \tag{1.48}$$

est vérifie. Alors l'opérateur T a un point fixe unique $u^* \in U$.
De plus, si T^k $(k \in \mathbb{N})$ est la suite d'opérateurs définie par :

$$T^1 = T \ \text{ et } T^k = TT^{k-1}, (k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}), \tag{1.49}$$

alors, pour tout $u_0 \in U$, la suite $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$ converge au point fixe ci-dessus u^*.

On note que l'application $T : U \to U$ satisfaisant la condition (1.48) est appelée application contractive ou application contractive.

Théorème 1.11.4. *[23] Soit (U,d) un espace métrique complet non vide, et soit $\omega_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ tel que la série $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge. De plus, soit $T : U \to U$ une application telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $u, v \in U$, la relation*

$$d(T^k u, T^k v) \leq \omega_k d(u,v) \ (k \in \mathbb{N}) \tag{1.50}$$

est vérifie. Alors l'opérateur T a un point fixe unique $u^* \in U$. De plus, pour tout $u_0 \in U$, la suite $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers ce point fixe u^*.

Chapitre 2

INTÉGRATION ET DÉRIVATION FRACTIONNAIRES

Ce chapitre contient des définitions et quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire de différentes type (voire [31]).

2.1 Intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous donnons les définitions des intégrales fractionnaires et des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville sur un intervalle bornée de $\mathbb{R}$ et présentons certaines propriétés dans des espaces des fonctions sommables et continues.

Définition 2.1.1. *[31] Soit $\Omega = [a,b], (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle bornée de $\mathbb{R}$. Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville I^{α}_{a+} et I^{α}_{b-} d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) > 0)$ sont définis par :*

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, (x > a, Re(\alpha) > 0) \tag{2.1}$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, (x < b, Re(\alpha) > 0), \tag{2.2}$$

ici $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma.
Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires à droit et à gauche respectivement. Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (2.1) et (2.2) coïncident avec les $n^{\text{ième}}$ intégrales de la forme :

$$\begin{aligned}(I^{n}_{a+}f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}(I_{b-}^{n}f)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1}f(t)dt, (n \in \mathbb{N})\end{aligned} \tag{2.4}$$

Définition 2.1.2. *[31] Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville D_{a+}^{α} et D_{b-}^{α} d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) \geq 0)$ sont définis par :*

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha}y)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}y(t)dt, (n = [Re(\alpha)]+1, x > a)\end{aligned} \tag{2.5}$$

et

$$\begin{aligned}(D_{b-}^{\alpha}y)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}y(t)dt, (n = [Re(\alpha)]+1, x < b)\end{aligned} \tag{2.6}$$

où $[Re(\alpha)]$ signifie la partie entière de $Re(\alpha)$.
En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alors :

$$(D_{a+}^{0}y)(x) = (D_{b-}^{0}y)(x) = y(x);$$

$$(D_{a+}^{n}y)(x) = y^{(n)}(x), (D_{b-}^{n}y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), (n \in \mathbb{N}) \tag{2.7}$$

où $y^{(n)}(x)$ est la dérivée usuelle d'ordre n de la fonction $y(x)$.
Si $0 < Re(\alpha) < 1$ alors :

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{[Re(\alpha)]-\alpha}y(t)dt, (0 < Re(\alpha) < 1, x > a) \tag{2.8}$$

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b (t-x)^{[Re(\alpha)]-\alpha}y(t)dt, (0 < Re(\alpha) < 1, x < b) \tag{2.9}$$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^+$ alors (2.5) et (2.6) prennent les formes suivantes :

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}y(t)dt, (n = [\alpha]+1, x > a) \tag{2.10}$$

et

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}y(t)dt, (n = [\alpha]+1, x < b)$$

Tandis que (2.8) et (2.9) sont donnés par :

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}y(t)dt, (0 < \alpha < 1, x > a)$$

et

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b (t-x)^{\alpha}y(t)dt, (0 < \alpha < 1, x < b).$$

Remarque 2.1.1. *Si $Re(\alpha) = 0, (\alpha \neq 0)$ alors (2.5) et (2.6) donnent des dérivées fractionnaires d'un ordre imaginaire :*

$$(D_{a+}^{i\theta} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-i\theta} y(t)dt, (\theta \in \mathbb{R}^*, x > a)$$

$$(D_{b-}^{i\theta} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{i\theta} y(t)dt, (\theta \in \ mathbbR^*, x < b)$$

On peut vérifier directement que les opérateurs d'intégration fractionnaire et les opérateurs de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (2.1), (2.5) et (2.2), (2.6) des fonctions puissance $(x-a)^{\beta-1}$ et $(b-x)^{\beta-1}$ donnent des fonctions puissance de la même forme.

Propriété 2.1.1. *Si $Re(\alpha) \geq 0$ et $\beta \in \mathbb{C}, (Re(\beta) > 0)$ alors :*

$$(I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, (Re(\alpha) > 0), \tag{2.11}$$

$$(D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, (Re(\alpha) \geq 0) \tag{2.12}$$

et

$$(I_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}, (Re(\alpha) > 0), \tag{2.13}$$

$$(D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}, (Re(\alpha) \geq 0). \tag{2.14}$$

En particulier, si $\beta = 1$ et $Re(\alpha) \geq 0$, alors les dérivées fractionnelles de Riemann-Liouville d'une constante ne sont pas en général égales à zéro :

$$(D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, (D_{b-}^{\alpha}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, (0 < Re(\alpha) < 1). \tag{2.15}$$

D'autre part, pour $j = 1, 2, \cdots, [Re(\alpha)] + 1$,

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) = 0, (D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\alpha-j})(x) = 0. \tag{2.16}$$

Corollaire 2.1.1. *Soit $Re(\alpha) > 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.*

1. *L'égalité $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = 0$ est vérifie si et seulement si*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

où $c_j \in \mathbb{R}, (j = 1, \cdots, n)$ sont des constantes arbitraires.
En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) \leq 1$, on a la relation $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = 0$ si et seulement si $y(x) = c(x-a)^{\alpha-1}$ avec n'importe quel $c \in \mathbb{R}$.

2. *L'égalité* $(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = 0$ *est vérifie si et seulement si*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j (b-x)^{\alpha-j},$$

où $d_j \in \mathbb{R}, (j = 1, \cdots, n)$ *sont des constantes arbitraires.*
En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) \leq 1$*, on a la relation* $(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = 0$ *si et seulement si* $y(x) = d(b-x)^{\alpha-1}$ *avec n'importe quel* $d \in \mathbb{R}$.

Le premier résultat donne la limite des opérateurs d'intégration fractionnaires $I^{\alpha}_{a+}f$ *et* $I^{\alpha}_{b-}f$ *de l'espace* $L^p(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$ *avec la norme* $\|f\|_p$*, et* $c = \frac{1}{p}$ *définie dans*

Lemme 2.1.1. *(a) Les opérateurs d'intégration fractionnaire* I^{α}_{a+} *et* I^{α}_{b-} *avec* $Re(\alpha) > 0$ *sont bornés dans* $L^p(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$ *:*

$$\|I^{\alpha}_{a+}f\|_p \leq K\|f\|_p, \|I^{\alpha}_{b-}f\|_p \leq K\|f\|_p,$$

avec

$$K = \frac{(b-a)^{Re(\alpha)}}{Re(\alpha)|\Gamma(\alpha)|}.$$

(b) Si $0 < \alpha < 1$ *et* $1 < p < 1/\alpha$*, alors les opérateurs* I^{α}_{a+} *et* I^{α}_{b-} *sont bornés de* $L^p(a,b)$ *dans* $L^q(a,b)$*, où* $q = p/(1-\alpha p)$.

Lemme 2.1.2. *Soit* $Re(\alpha) \geq 0$ *et* $n = [Re(\alpha)] + 1$*. Si* $y \in AC^n[a,b]$*, alors les dérivées fractionnaires* $D^{\alpha}_{a+}y$ *et* $D^{\alpha}_{b-}y$ *existent presque partout sur* $[a,b]$ *et peut être représenté sous les formes :*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t)dt \tag{2.17}$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-n+1} y^{(n)}(t)dt. \tag{2.18}$$

Corollaire 2.1.2. *Si* $0 < Re(\alpha) < 1, (\alpha \neq 0)$ *et* $y \in AC[a,b]$*, alors :*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[(x-a)^{-\alpha} y(a) + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt y'(t) \right] \tag{2.19}$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\frac{y(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{y'(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt \right]. \tag{2.20}$$

Lemme 2.1.3. *Si* $Re(\alpha) > 0$ *et* $Re(\beta) > 0$*, alors les équations suivantes :*

$$(I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a+} f)(x) \text{ et } (I^{\alpha}_{b-} I^{\beta}_{b-} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{b-} f)(x) \tag{2.21}$$

sont satisfaites à presque tous les points $x \in [a,b]$ *pour* $f \in L^p(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$*. Si* $\alpha + \beta > 1$*, alors les relations dans (2.21) sont valables en tout point de* $[a,b]$.
L'affirmation suivante montre que la différenciation fractionnaire est une opération inverse de l'intégration fractionnaire à gauche.

Lemme 2.1.4. *Si $Re(\alpha) > 0$ et $f \in L^p(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$ alors les égalités suivantes :*

$$(D^\alpha_{a+} I^\alpha_{a+} f)(x) = f(x) \text{ et } (D^\alpha_{b-} I^\alpha_{b-} f)(x) = f(x), (Re(\alpha) > 0) \tag{2.22}$$

sont vérifies presque partout sur $[a,b]$.

Propriété 2.1.2. *Si $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$ alors, pour $f \in L^p(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$, la relation :*

$$(D^\beta_{a+} I^\alpha_{a+} f)(x) = I^{\alpha-\beta}_{a+} f(x) \text{ et } (D^\beta_{b-} I^\alpha_{b-} f)(x) = I^{\alpha-\beta}_{b-} f(x) \tag{2.23}$$

est vérifie presque partout sur $[a,b]$.
En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $Re(\alpha) > k$, alors :

$$(D^k I^\alpha_{a+} f)(x) = I^{\alpha-k}_{a+} f(x) \text{ et } (D^k I^\alpha_{b-} f)(x) = (-1)^k I^{\alpha-k}_{b-} f(x). \tag{2.24}$$

Propriété 2.1.3. *Soient $Re(\alpha) \geq 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \dfrac{d}{dx}$.*

1. *Si les dérivées fractionnaires $(D^\alpha_{a+} y)(x)$ et $(D^{\alpha+m}_{a+} y)(x)$ existent, alors :*
$$(D^m D^\alpha_{a+} y)(x) = (D^{\alpha+m}_{a+} y)(x).$$
2. *Si les dérivées fractionnaires $(D^\alpha_{b-} y)(x)$ et $(D^{\alpha+m}_{b-} y)(x)$ existent, alors :*
$$(D^m D^\alpha_{b-} y)(x) = (-1)^m (D^{\alpha+m}_{b-} y)(x).$$

Pour présenter la propriété suivante, on va utiliser les espaces de fonctions $I^\alpha_{a+}(L^p)$ et $I^\alpha_{b-}(L^p)$ définis pour $Re(\alpha) > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$ par :

$$I^\alpha_{a+}(L^p) := \{f : f = I^\alpha_{a+}\varphi, \varphi \in L^p(a,b)\}$$

et

$$I^\alpha_{b-}(L^p) := \{f : f = I^\alpha_{b-}\psi, \psi \in L^p(a,b)\}.$$

La composition de l'opérateur d'intégration fractionnaire I^α_{a+} avec l'opérateur de dérivation fractionnaire D^α_{a+} est donnée par le résultat suivant.

Lemme 2.1.5. *Soit $Re(\alpha) > 0, n = [Re(\alpha)] + 1$ et soit $f_{n-\alpha}(x) = (I^{n-\alpha}_{a+} f)(x)$ l'intégrale fractionnaire (2.1) d'ordre $n - \alpha$.*

(a) Si $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in I^\alpha_{a+}(L^p)$, alors :

$$(I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f)(x) = f(x).$$

(b) Si $f \in L^1(a,b)$ et $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a,b]$, alors l'égalité suivante :

$$(I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(n-j)}_{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j}, \tag{2.25}$$

est définie presque partout sur $[a,b]$.
En particulier, si $0 < Re(\alpha) < 1$, alors :

$$(I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}, \tag{2.26}$$

où $f_{1-\alpha}(x) = (I^{1-\alpha}_{a+} f)(x)$, pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a l'égalité suivante :

$$(I^n_{a+} D^n_{a+} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \tag{2.27}$$

Propriété 2.1.4. *Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que $n-1 < \alpha \leq n, m-1 < \beta \leq m, (n, m \in \mathbb{N})$ et $\alpha + \beta < n$, et soit $f \in L^1(a,b)$ et $f_{m-\alpha} \in AC^m([a,b])$. Alors on a :*

$$(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f)(x) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^{m} (D_{a+}^{\beta-j} f)(a) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}.$$

Lemme 2.1.6. *Soient $Re(\alpha) > 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$, et soit $g_{n-\alpha}(x) = (I_{b-}^{n-\alpha} g)(x)$ est l'intégrale fractionnaire (2.2) d'ordre $n - \alpha$.*

1. *Si $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in I_{b-}^{\alpha}(L^p)$, alors :*

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} g)(x) = g(x).$$

2. *Si $g \in L^1(a,b)$ et $g_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a,b]$ alors la formule suivante*

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j} g_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (b-x)^{\alpha-j}. \tag{2.28}$$

   est vérifie presque partout sur $[a,b]$.

En particulier, Si $0 < Re(\alpha) < 1$ alors :

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} g)(x) = g(x) - \frac{g_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1}, \tag{2.29}$$

où $g_{1-\alpha}(x) = (I_{b-}^{1-\alpha})(x)$, pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(I_{b-}^{n} D_{b-}^{n} g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k g^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k. \tag{2.30}$$

Lemme 2.1.7. *Soient $\alpha > 0, p \geq 1, q \geq 1$, et $(\frac{1}{p}) + (\frac{1}{q}) \leq 1 + \alpha (p \neq 1$ et $q \neq 1$ dans le cas où $(\frac{1}{p}) + (\frac{1}{q}) = 1 + \alpha)$.*

1. *Si $\varphi(x) \in L^p(a,b)$ et $\psi(x) \in L^q(a,b)$ alors :*

$$\int_a^b \varphi(x)(I_{a+}^{\alpha}\psi)(x)dx = \int_a^b \psi(x)(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)dx.$$

2. *Si $f \in I_{b-}^{\alpha}(L^p)$ et $g \in I_{a+}^{\alpha}(L^q)$ alors :*

$$\int_a^b f(x)(D_{a+}^{\alpha} g)(x)dx = \int_a^b g(x)(I_{b-}^{\alpha} f)(x)dx.$$

Maintenant, on va considérer les propriétés de (2.1) et (2.2) et les dérivées fractionnaires (2.5) et (2.6) dans les espaces $C_\gamma[a,b]$ et $C_\gamma^n[a,b]$ définis en (1.14) et (2.1.1), respectivement. L'existence des intégrales fractionnaires $I_{a+}^{\alpha} f$ et $I_{b-}^{\alpha} f$ dans l'espace $C_\gamma[a,b]$ et les dérivées fractionnaires $D_{a+}^{\alpha} y$ et $D_{b-}^{\alpha} y$ dans l'espace $C_\gamma^n[a,b]$ sont donnés par le lemme suivant.

Lemme 2.1.8. *Soit $Re(\alpha) \geq 0$ et $\gamma \in \mathbb{C}$.*

(a) *Soient* $Re(\alpha) > 0$ *et* $0 \leq Re(\gamma) < 1$.
Si $Re(\gamma) > Re(\alpha)$ *alors les opérateurs d'intégration fractionnaire* I^{α}_{a+} *et* I^{α}_{b-} *sont bornées de* $C_{\gamma}[a,b]$ *dans* $C_{\gamma-\alpha}[a,b]$:

$$\|I^{\alpha}_{a+}f\|_{C_{\gamma-\alpha}} \leq k_1\|f\|_{C_\gamma} \text{ et } \|I^{\alpha}_{b-}f\|_{C_{\gamma-\alpha}} \leq k_1\|f\|_{C_\gamma},$$

avec

$$k_1 = \frac{\Gamma[Re(\alpha)]\big|\Gamma(1-Re(\gamma))\big|}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma[1+Re(\alpha-\gamma)]}.$$

En particulier I^{α}_{a+} *et* I^{α}_{b-} *sont bornées sur* $C_{\gamma}[a,b]$.
Si $Re(\gamma) \leq Re(\alpha)$, *alors les opérateurs d'intégration fractionnaire* I^{α}_{a+} *et* I^{α}_{b-} *sont bornées de* $C_{\gamma}[a,b]$ *dans* $C[a,b]$:

$$\|I^{\alpha}_{a+}f\|_{C} \leq k_2\|f\|_{C_\gamma} \text{ et } \|I^{\alpha}_{b-}f\|_{C} \leq k_2\|f\|_{C_\gamma},$$

avec

$$k_2 = (b-a)^{Re(\alpha-\gamma)}\frac{\Gamma[Re(\alpha)]\big|\Gamma(1-Re(\gamma))\big|}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma[1+Re(\alpha-\gamma)]}.$$

En particulier I^{α}_{a+} *et* I^{α}_{b-} *sont bornées sur* $C_{\gamma}[a,b]$.

(b) *Si* $Re(\alpha) \geq 0, n = [Re(\alpha)] + 1$ *et* $y \in C^n_{\gamma}[a,b]$, *alors les dérivées fractionnaires* $D^{\alpha}_{a+}y$ *et* $D^{\alpha}_{b-}y$ *existent dans* $(a,b]$ *et peut être représenté par (2.17) et (2.18). En particulier* $D^{\alpha}_{a+}y$ *et* $D^{\alpha}_{b-}y$ *sont données par (2.19) et (2.20) respectivement, Lorsque* $0 < Re(\alpha) < 1, (\alpha \neq 0)$ *et* $y \in C_{\gamma}[a,b]$.

Lemme 2.1.9. *Soit* $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ *et* $0 \leq Re(\gamma) < 1$ *alors Les affirmations suivantes sont vraies :*

(a) *Si* $f \in C_{\gamma}[a,b]$ *alors les deux relations de (2.21) sont vérifiées en tout point* $x \in (a,b]$ *et* $x \in [a,b)$ *respectivement. Lorsque* $f \in C[a,b]$ *ces relations sont vérifiées en tout point* $x \in [a,b]$.

(b) *Si* $f \in C_{\gamma}[a,b]$ *alors les deux égalités de (2.22) sont vérifiées en tout point* $x \in (a,b]$ *et* $x \in [a,b)$ *respectivement. Lorsque* $f \in C[a,b]$ *ces égalités sont vérifiées en tout point* $x \in [a,b]$.

(c) *Soit* $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$. *Si* $f \in C_{\gamma}[a,b]$ *alors les deux relations de (2.23) sont vérifiées en tout point* $x \in (a,b]$ *et* $x \in [a,b)$ *respectivement. Lorsque* $f \in C[a,b]$ *ces relations sont vérifiées en tout point* $x \in [a,b]$.
En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ *et* $Re(\alpha) > k$ *les relations de (2.24) sont vérifiées dans leurs cas respectifs*

(d) *Soit* $n = [Re(\alpha)] + 1$ *et soit* $f_{n-\alpha}(x) = (I^{n-\alpha}_{a+}f)(x)$ *l'intégrale fractionnaire de (2.1) et* $g_{n-\alpha}(x) = (I^{n-\alpha}_{b-}g)(x)$ *l'intégrale fractionnaire de (2.2) soient d'ordre* $n - \alpha$.
Si $f \in C_{\gamma}[a,b]$ *et* $f_{n-\alpha}(x) \in C^n_{\gamma}[a,b]$ *alors la relation (2.25) est vérifiée en tout point* $x \in (a,b]$.
Lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$ *et* $f_{1-\alpha}(x) \in C^1_{\gamma}[a,b]$ *l'égalité (2.26) est vérifiée*
Si $g \in C_{\gamma}[a,b]$ *et* $g_{n-\alpha}(x) \in C^n_{\gamma}[a,b]$ *alors l'égalité (2.28) est vérifiée en tout point* $x \in [a,b)$.
Lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$ *et* $g_{1-\alpha}(x) \in C^1_{\gamma}[a,b]$*l'égalité (2.29) est vérifiée*

Si $f \in C[a,b]$ et $f_{n-\alpha}(x) \in C^n[a,b]$ alors (2.25) et (2.28) sont vérifiées en tout point $x \in [a,b]$.
En particulier, Si $f \in C^n[a,b]$, les relations (2.27) et (2.30) sont valides en tout point $x \in [a,b)$

Lemme 2.1.10. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$, et soit les fonctions $f(x)$ et $k(x)$ sont définis sur $[a,b]$ telle que :*

$$f \in C[a,b] \text{ et } L(x) = \int_0^x \tau^{-\alpha} k(x-\tau) d\tau \in C^1[a,b].$$

alors $\forall x \in [a,b]$,

$$D^\alpha_{a+}\left[\int_a^t k(t-u)f(u)du\right](x) = \int_a^x D^\alpha_{a+}[k(t-a)](u)f(x+a-u)du + f(x)\lim_{x\to a+} I^{1-\alpha}_{a+}[k(t-a)](x).$$

2.2 Intégrations et dérivations fractionnaires de Riemann-Liouville sur le demi-axe

Dans cette section, on va présenter les définitions et certaines propriétés des intégrales et des dérivées fractionnaires de Riemann Liouville sur le demi-axe $\mathbb{R}^+$ (voire [31]).

Définition 2.2.1. *[31] Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville (2.1) et (2.2) et les dérivées fractionnaires (2.5) et (2.6), définies sur un intervalle fini $[a,b]$ de la droite réelle $\mathbb{R}$, sont naturellement étendu au demi-axe $\mathbb{R}^+$. Les constructions fractionnaires d'intégration, correspondant à celles de (2.1) et (2.2), ont les formes suivantes :*

$$(I^\alpha_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, (x>0, Re(\alpha)>0) \tag{2.31}$$

et

$$(I^\alpha_{-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, (x>0, Re(\alpha)>0). \tag{2.32}$$

tandis que les constructions de dérivation fractionnaire, correspondant à celles de (2.5) et (2.6), sont définis par :

$$(D^\alpha_{0+}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{0+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}y(t)dt \tag{2.33}$$

et

$$(D^\alpha_{-}y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{-}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^\infty (t-x)^{n-\alpha-1}y(t)dt \tag{2.34}$$

avec $n = [Re(\alpha)]+1, Re(\alpha) \geq 0, x>0$.
Les expressions pour $I^\alpha_{0+}f$ et $I^\alpha_{-}f$ dans (2.31) et (2.32), et $D^\alpha_{0+}y$ et $D^\alpha_{-}y$ dans (2.33) et (2.34), sont appelées les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires à droite et à gauche de Riemann-Liouville sur le demi-axe $\mathbb{R}^+$. En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(D^0_{0+}y)(x) = (D^0_{-}y)(x) = y(x);$$

$$(D_{0+}^{n}y)(x) = y^{(n)}(x), (D_{-}^{n}y)(x) = (-1)^{n}y^{(n)}(x), (n \in \mathbb{N}^{*}),$$

où $y^{(n)}(x)$ *est la dérivée usuelle d'ordre* n *de la fonction* $y(x)$.
Si $0 < Re(\alpha) < 1$ *et* $x > 0$, *alors :*

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-[Re(\alpha)]}}dt \tag{2.35}$$

et

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-[Re(\alpha)]}}dt \tag{2.36}$$

Si $Re(\alpha) = 0, (\alpha \neq 0)$, *alors les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville* (2.35) *et* (2.36) *d'un ordre imaginaire ont les formes suivantes :*

$$(D_{0+}^{i\theta}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{y(t)}{(x-t)^{i\theta}}dt, (\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, x > 0)$$

et

$$(D_{-}^{i\theta}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{y(t)}{(t-x)^{i\theta}}dt, (\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, x > 0).$$

Les opérateurs de calcul fractionnaire de Riemann-Liouville I_{0+}^{α} et D_{0+}^{α} satisfont les relations (2.11) et (2.12) avec $a = 0$, tandis que les opérateurs de calcul fractionnaire de Riemann-Liouville I_{-}^{α} et D_{-}^{α} de la fonction de puissance $x^{\beta-1}$ et de la fonction exponentielle $e^{-\lambda x}$ donnent une fonction de puissance de la même forme et de la même fonction exponentielle, à part(plus) un facteur de multiplication constant.

Propriété 2.2.1. *Soit* $Re(\alpha) \geq 0$.

1. *Si* $Re(\beta) > 0$ *alors :*

$$(I_{0+}^{\alpha}t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}x^{\beta+\alpha-1}, (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0),$$

$$(D_{0+}^{\alpha}t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{\beta-\alpha-1}, (Re(\alpha) \geq 0, Re(\beta) > 0).$$

2. *Si* $\beta \in \mathbb{C}$ *alors :*

$$(I_{-}^{\alpha}t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}x^{\beta+\alpha-1}, (Re(\alpha) > 0, Re(\alpha+\beta) < 1),$$

$$(D_{-}^{\alpha}t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}x^{\beta-\alpha-1}, (Re(\alpha) \geq 0, Re(\alpha+\beta-[Re(\alpha)]) < 1).$$

3. *Si* $Re(\lambda) > 0$ *alors :*

$$(I_{-}^{\alpha}e^{-\lambda t})(x) = \lambda^{-\alpha}e^{-\lambda x}, (Re(\alpha) > 0), \tag{2.37}$$

$$(D_{-}^{\alpha}e^{-\lambda t})(x) = \lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}, (Re(\alpha) \geq 0). \tag{2.38}$$

Lorsque $0 < \alpha < 1$ *et* $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$, *les intégrales* $I_{0+}^{\alpha}f$ *et* $I_{-}^{\alpha}f$ *sont définies pour une fonction* $f \in L^{p}(\mathbb{R}^{+})$.

Lemme 2.2.1. *Soient* $1 \leq p < \infty, \mu \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < m + \frac{1}{p}$, $0 \leq m \leq \alpha$ *et*

$$q = \frac{1}{1-(\alpha-m)p}, \nu = \left(\frac{\mu}{p} - m\right)q$$

avec : $m \neq 0$

a) Si $\mu < p-1$, *alors l'opérateur* I^{α}_{0+} *est bornée de* $X^p_{(\mu+1)/p}(\mathbb{R}^+)$ *vers* $X^q_{\nu+1)/q}(\mathbb{R}^+)$:

$$\left(\int_0^{+\infty} x^{\nu}|(I^{\alpha}_{0+}f)(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq k_1\left(\int_0^{+\infty} x^{\mu}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

où la constante $k_1 > 0$ *ne dépende pas de* f.

b) Si $\mu > \alpha p - 1$, *alors l'opérateur* I^{α}_{-} *est bornée de* $X^p_{(\mu+1)/p}(\mathbb{R}^+)$ *vers* $X^q_{(\nu+1)/q}(\mathbb{R}^+)$:

$$\left(\int_0^{+\infty} x^{\nu}|(I^{\alpha}_{-}f)(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq k_2\left(\int_0^{+\infty} x^{\mu}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

où la constante $k_1 > 0$ *ne dépende pas de* f.

Lemme 2.2.2. *Soit* $1 \leq p < \infty$.

a) Si $1 < p < \infty$ *et* $\alpha > 0$, *alors l'opérateur* I^{α}_{0+} *est bornée de* $L^p(\mathbb{R}^+)$ *vers* $X^p_{1/p-\alpha}(\mathbb{R}^+)$:

$$\left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha p}|(I^{\alpha}_{0+}f)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{p})}\left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

b) Si $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ *et* $0 < \alpha < 1$, *alors l'opérateur* I^{α}_{-} *est bornée de* $L^p(\mathbb{R}^+)$ *vers* $X^p_{1/p-\alpha}(\mathbb{R}^+)$:

$$\left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha p}|(I^{\alpha}_{-}f)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{p-\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{p})}\left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Propriété 2.2.2. *Soient* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geq 1$ *et* $\alpha + \beta < \frac{1}{p}$.
Si $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, *alors les propriétés du semi-groupe :*

$$(I^{\alpha}_{0+}(I^{\beta}_{0+}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{0+}f)(x), \text{ et } (I^{\alpha}_{-}(I^{\beta}_{-}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{-}f)(x) \tag{2.39}$$

sont vérifies.Les relations dans (2.39) sont vérifies pour les fonctions "suffisamment bonnes" $f(x)$.
Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville $(D^{\alpha}_{0+}y)(x)$ *et* $(D^{\alpha}_{-}y)(x)$ *existent pour les fonctions "suffisamment bon"* $y(x)$, *par exemple pour les fonctions* $y(x)$ *dans l'espace* $C^{\infty}_0(\mathbb{R}+)$ *de toutes les fonctions infiniment différentiables sur* $\mathbb{R}^+$ *avec un support compact.*

Propriété 2.2.3. *Si* $\alpha > 0$, *alors les relations :*

$$(D^{\alpha}_{0+}(I^{\alpha}_{0+}f)(x) = f(x), \text{ et } (D^{\alpha}_{-}(I^{\alpha}_{-}f)(x) = f(x). \tag{2.40}$$

sont vrais pour les fonctions "suffisamment bon" $f(x)$.
En particulier, les formules (2.40) sont vérifies pour $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Propriété 2.2.4. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors les formules :*

$$(D^{\beta}_{0+}I^{\alpha}_{0+}f)(x) = (I^{\alpha-\beta}_{0+}f)(x) \text{ et } (D^{\beta}_{-}(I^{\alpha}_{-}f)(x) = (I^{\alpha-\beta}_{-}f)(x)$$

sont vérifies pour les fonctions "suffisamment bon" $f(x)$ telles que (par exemple) $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.
En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $Re(\alpha) > k$, alors :

$$(D^k I^{\alpha}_{0+}f)(x) = (I^{\alpha-k}_{0+}f)(x) \text{ et } (D^k I^{\alpha}_{-}f)(x) = (-1)^k(I^{\alpha-k}_{-}f)(x).$$

Propriété 2.2.5. *Soient $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dx}$.*

1. *Si les dérivées fractionnaires $(D^{\alpha}_{0+}y)(x)$ et $(D^{\alpha+m}_{0+}y)(x)$ existent, alors :*

$$(D^m D^{\alpha}_{0+}y)(x) = (D^{\alpha+m}_{0+}y)(x).$$

2. *Si les dérivées fractionnaires $(D^{\alpha}_{-}y)(x)$ et $(D^{\alpha+m}_{-}y)(x)$ existent, alors :*

$$(D^m D^{\alpha}_{-}y)(x) = (-1)^m(D^{\alpha+m}_{-}y)(x). \tag{2.41}$$

les formules d'intégration fractionnaire par parties, analogues à celles dans le lemme (2.1.7), pour les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville (2.31) et (2.32) et les dérivées fractionnaires (2.33) et (2.34) sont donnés par le résultat suivant.

Propriété 2.2.6. *Si $\alpha > 0$, alors les relations :*

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)(I^{\alpha}_{0+}\psi)(x)dx = \int_0^{+\infty} \psi(x)(I^{\alpha}_{-}\varphi)(x)dx \tag{2.42}$$

f

$$\int_0^{+\infty} f(x)(D^{\alpha}_{0+}g)(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)(D^{\alpha}_{-}f)(x)dx \tag{2.43}$$

sont vérifies pour les fonctions "suffisamment bon" φ, ψ et f, g.
En particulier, (2.42) est vérifie pour les fonctions $\varphi(x) \in L^p(\mathbb{R}^+)$ et $\psi(x) \in L^q(\mathbb{R}^+)$, tandis que (2.43) pour $f \in I^{\alpha}_{-}(L^p(\mathbb{R}^+))$ et $g \in I^{\alpha}_{0+}(L^q(\mathbb{R}^+))$, à condition que $p > 1, q > 1, (\frac{1}{p}) + (\frac{1}{q}) = 1 + \alpha$.

Remarque 2.2.1. *Les affirmations suivantes donnent la transformée de Laplace (1.30) des intégrales fractionnaires et des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville $I^{\alpha}_{0+}f$ et $D^{\alpha}_{0+}y$ dans (2.31) et (2.33) respectivement.*

Lemme 2.2.3. *Soient $Re(\alpha) > 0$, $f \in L^1(0, b)$ pour tout $b > 0$ et soit l'estimation :*

$$|f(x)| \leq Ae^{p_0 x}, (x > b > 0)$$

est vérifie pour les constantes $A > 0$ et $p_0 > 0$.

1. *Si $f \in L^1(0, b)$ pour tout $b > 0$, alors la relation :*

$$(\mathcal{L}I^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^{-\alpha}(\mathcal{L}f)(s)$$

est vérifie pour $Re(s) > p_0$.

2. *Si* $n = [Re(\alpha)] + 1$, $y \in AC^n[0, b]$ *pour tout* $b > 0$, *et l'estimation suivante :*

$$|y(x)| \leq Be^{q_0 x}, (x > b > 0) \tag{2.44}$$

est vérifie pour $B > 0$ *et* $q_0 > 0$, *et si* $y^{(k)}(0) = 0, (k = 0, 1, \cdots, n-1)$, *alors la relation :*

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s). \tag{2.45}$$

est vérifie pour $Re(s) > q_0$.

Lemme 2.2.4. *Soient* $Re(\alpha) > 0, s \in \mathbb{C}$ *et* $f \in X^1_{s+\alpha}(\mathbb{R}^+)$.

1. *Si* $Re(s) < 1 - Re(\alpha)$, *alors :*

$$(MI^{\alpha}_{0+}f)(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(Mf)(s+\alpha), (Re(s+\alpha) < 1).$$

2. *Si* $Re(s) > 0$, *alors :*

$$(MI^{\alpha}_{-}f)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}(Mf)(s+\alpha), (Re(s) > 0).$$

Lemme 2.2.5. *Soient* $Re(\alpha) > 0, n = [Re(\alpha)] + 1, s \in \mathbb{C}$ *et* $(x) \in X^1_{s-\alpha}(\mathbb{R}^+)$.

1. *Si* $Re(s) < 1 - Re(\alpha)$ *et les conditions :*

$$\lim_{x \to 0+}[x^{s-k-1}(I^{n-\alpha}_{0+}y)(x)] = 0, (k = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{2.46}$$

et

$$\lim_{x \to \infty}[x^{s-k-1}(I^{n-\alpha}_{0+}y)(x)] = 0, (k = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{2.47}$$

sont vérifies, alors :

$$(MD^{\alpha}_{0+}y)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(My)(s-\alpha), (Re(s-\alpha) < 1). \tag{2.48}$$

2. $Re(\alpha) > 0$ *et les conditions :*

$$\lim_{x \to 0+}[x^{s-k-1}(I^{n-\alpha}_{-}y)(x)] = 0, (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

et

$$\lim_{x \to \infty}[x^{s-k-1}(I^{n-\alpha}_{-}y)(x)] = 0, (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

sont vérifies, alors :

$$(MD^{\alpha}_{-}y)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}(My)(s-\alpha), (Re(s) > 0).$$

2.3 Intégrations et dérivations fractionnaires au sens de Liouville sur l'axe réel

Dans cette section, on va présenter les définitions et certaines propriétés des intégrales fractionnaires et des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville sur tout l'axe $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (voire [31]).

Définition 2.3.1. *Les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires sur $\mathbb{R}$ sont définis de la même manière que ceux sur le demi-axe dans la section (2.2). Les intégrales fractionnaires ont la forme :*

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.49}$$

et

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.50}$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $Re(\alpha) > 0$, tandis que les dérivées fractionnaires correspondent à celles dans (2.33) et (2.34) sont définies par :

$$(D_+^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_+^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} y(t)dt \tag{2.51}$$

et

$$(D_-^\alpha y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_-^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} y(t)dt \tag{2.52}$$

où $n = [Re(\alpha)] + 1, Re(\alpha) \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.
Les expressions pour $I_+^\alpha f$ et $I_-^\alpha f$ dans (2.49) et (2.50) et pour $D_+^\alpha y$ et $D_-^\alpha y$ dans (2.51) et (2.52) sont appelées les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires à droite et à gauche au sens de Riemann-Liouville sur tout l'axe $\mathbb{R}$.
En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(D_+^0 y)(x) = (D_-^0 y)(x) = y(x);$$

$$(D_+^n y)(x) = y^{(n)}(x), (D_-^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), (n \in \mathbb{N}^*)$$

où $y^{(n)}(x)$ est la dérivée usuelle d'ordre n de $y(x)$.

Si $0 < Re(\alpha) < 1$ et $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$(D_+^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{[Re(\alpha)]-\alpha} y(t)dt \tag{2.53}$$

$$(D_-^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{[Re(\alpha)]-\alpha} y(t)dt. \tag{2.54}$$

Lorsque $Re(\alpha) = 0, (\alpha \neq 0)$, alors les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (2.53)et (2.54) d'un ordre imaginaire ont les formes suivantes :

$$(D_+^{i\theta} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{-i\theta} y(t)dt, (\theta \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R})$$

et

$$(D_-^{i\theta} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{-i\theta} y(t)dt, (\theta \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R})$$

Propriété 2.3.1. *Soit $Re(\lambda) > 0$.*

1. *Si $Re(\alpha) \geq 0$, alors :*
$$(I_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}. \tag{2.55}$$
2. *Si $Re(\alpha) \geq 0$, alors :*
$$(D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x}. \tag{2.56}$$

Lorsque $0 < \alpha < 1$ et $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ les intégrales $I_+^\alpha f$ et $I_-^\alpha f$ sont définies pour une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Lemme 2.3.1. *Soit $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et $\alpha > 0$. Les opérateurs I_+^α et I_-^α sont bornés de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R}^+)$ si et seulement si les conditions dans (2.37) sont satisfaits.*
Soit $\bar{\mathbb{R}}$ l'axe $\mathbb{R}$ complété par un point infini : $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On note par $L_{p,\omega}$ l'espace des fonctions $f(x)$ avec un poids exponentiel $\omega \in \mathbb{R}$ sur $\bar{\mathbb{R}}$ en définissant la norme comme suit :
$$L_{p,\omega}(\bar{\mathbb{R}}) = \left\{ f : \|f\|_{p,\omega} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega t} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$
avec $1 \leq p < +\infty$ et On note par $L_{\infty,\omega} = C_\omega$ l'espace des fonctions $f(x)$ telles que $e^{-\omega x} f(x) \in C(\bar{\mathbb{R}})$ avec la norme :
$$L_{\infty,\omega}(\bar{\mathbb{R}}) = C_\omega(\bar{\mathbb{R}}) = \left\{ f : \|f\|_\omega = \max_{t \in \bar{\mathbb{R}}} e^{-\omega t} |f(t)| < \infty \right\}.$$
Les espaces $L_{p,\omega}(\bar{\mathbb{R}})$ et $L_{\infty,\omega}(\bar{\mathbb{R}})$ sont invariants par rapport à l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville.

Lemme 2.3.2. *Soient $1 \leq p \leq \infty, \alpha > 0$ et $\omega > 0$.*

a) L'opérateur I_+^α est borné dans l'espace $L_{p,\omega}$:
$$\|I_+^\alpha f\|_{p,\omega} \leq k \|f\|_{p,\omega}, k = \left(\frac{p}{\omega}\right)^\alpha, (1 \leq p < +\infty), k = \omega^\alpha, (p = +\infty).$$
b) L'opérateur I_-^α est borné dans l'espace $L_{p,-\omega}$:
$$\|I_-^\alpha f\|_{p,-\omega} \leq k \|f\|_{p,-\omega}, k = \left(\frac{p}{|\omega|}\right)^\alpha, (1 \leq p < +\infty), k = |\omega|^\alpha, (p = +\infty).$$

Lemme 2.3.3. *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $p \geq 1$ tel que $\alpha + \beta < \dfrac{1}{p}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors :*
$$(I_+^\alpha I_+^\beta f)(x) = (I_+^{\alpha+\beta} f)(x) \text{ et } (I_-^\alpha I_-^\beta f)(x) = (I_-^{\alpha+\beta} f)(x).$$
Les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville $(D_+^\alpha y)(x)$ et $(D_-^\alpha y)(x)$ existent pour des fonctions "suffisamment bon" $y(x)$, par exemple pour les fonctions $y(x)$ dans l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$ de toutes les fonctions infiniment différentiables sur $\mathbb{R}$ avec support compact.

Lemme 2.3.4. *Si $\alpha > 0$, alors pour les fonctions "suffisamment bon" $f(x)$, les relations :*
$$(D_+^\alpha I_+^\alpha f)(x) = f(x) \text{ et } (D_-^\alpha I_-^\alpha f)(x) = f(x)$$
sont vraies.
En particulier, ces relations sont vérifies pour $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Propriété 2.3.2. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors les formules :*

$$(D_+^\beta I_+^\alpha f)(x) = (I_+^{\alpha-\beta} f)(x) \text{ et } (D_-^\beta I_-^\alpha f)(x) = (I_-^{\alpha-\beta} f)(x)$$

sont vérifies pour les fonctions "suffisamment bon" $f(x)$. En particulier, ces formules sont vérifies pour $f \in L^1(\mathbb{R})$.
De plus, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $Re(\alpha) > k$, alors :

$$(D^k I_+^\alpha f)(x) = I_+^{\alpha-k} f(x) \text{ et } (D^k I_-^\alpha f)(x) = (-1)^k I_-^{\alpha-k} f(x).$$

Propriété 2.3.3. *Soient $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dx}$.*

1. *Si les dérivées fractionnaires $(D_+^\alpha y)(x)$ et $(D_+^{\alpha+m} y)(x)$ existent, alors :*
$$(D^m D_+^\alpha y)(x) = (D_+^{\alpha+m} y)(x).$$
2. *Si les dérivées fractionnaires $(D_-^\alpha y)(x)$ et $(D_-^{\alpha+m} y)(x)$ existent, alors :*
$$(D^m D_-^\alpha y)(x) = (-1)^m (D_-^{\alpha+m} y)(x).$$

Propriété 2.3.4. *Si $\alpha > 0$, alors les relations :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(I_+^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx \tag{2.57}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(D_+^\alpha g)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)(D_-^\alpha f)(x)dx \tag{2.58}$$

sont vérifies pour les fonctions "suffisamment bon" φ, ψ et f, g.
En particulier, (2.57) est vérifie pour les fonctions $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ et $\psi \in L^q(\mathbb{R})$, et (2.58) est vérifie pour les fonctions $f \in I_+^\alpha\big(L^p(\mathbb{R}^+)\big)$ et $g \in I_-^\alpha\big(L^q(\mathbb{R}^+)\big)$, à condition que $p > 1, q > 1$ et $\left(\dfrac{1}{p}\right) + \left(\dfrac{1}{q}\right) = 1 + \alpha$.

Propriété 2.3.5. *Soient $0 < Re(\alpha) < 1$ et $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors les relations suivantes sont vérifies :*

$$(\mathcal{F} I_+^\alpha f)(x) = (-ix)^{-\alpha} (\mathcal{F} f)(x)$$

et

$$(\mathcal{F} I_-^\alpha f)(x) = (ix)^{-\alpha} (\mathcal{F} f)(x)$$

avec

$$(\mp ix)^\alpha = |x|^\alpha e^{\mp \frac{1}{2}\alpha\pi i sgn(x)}. \tag{2.59}$$

Propriété 2.3.6. *Soient $0 < Re(\alpha) < 1$ et $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors les relations suivantes sont vérifies :*

$$(\mathcal{F} D_+^\alpha f)(x) = (-ix)^\alpha (\mathcal{F} f)(x)$$

et

$$(\mathcal{F} D_-^\alpha f)(x) = (ix)^\alpha (\mathcal{F} f)(x),$$

où $(\mp ix)^\alpha$ est définie dans (2.59)

2.4 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette section, on va présenter les définitions et certaines propriétés des dérivées fractionnaires de Caputo.

Définition 2.4.1. *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de la droite réelle $\mathbb{R}$ et soit $D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ et $D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) \geq 0)$ définies par (2.5) et (2.6) respectivement.*
Les dérivées fractionnaires $({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ et $({}^{c}D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) \geq 0)$ sur $[a, b]$ sont définis par les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ci-dessus :

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x) \tag{2.60}$$

et

$$({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \left(D^{\alpha}_{b-} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k \right] \right)(x), \tag{2.61}$$

où

$$n = [Re(\alpha)] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}; n = \alpha \text{ si } \alpha \in \mathbb{N} \tag{2.62}$$

Ces dérivations sont appelées les dérivées fractionnaires à droite et à gauche au sens de Caputo d'ordre α.
En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$ les relations (2.60) et (2.61) prennent les formes suivantes :

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}[y(t) - y(a)]\right)(x),$$
$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{b-}[y(t) - y(b)]\right)(x).$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $y(x)$ est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo $({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ et $({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) \geq 0)$ ont une relation avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ et $(D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ donnée par :

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, (n = [Re(\alpha)+1])$$

et

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y\right)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}, (n = [Re(\alpha)+1]).$$

En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$ on a :

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y\right)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}.$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo (2.60) et (2.61) coïncide avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (2.5) et (2.6) dans les cas suivants :

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x),$$

si $y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a), (n = [Re(\alpha)] + 1)$,
et

$$\left({}^C D^\alpha_{b-} y\right)(x) = (D^\alpha_{b-} y)(x),$$

si $y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b), (n = [Re(\alpha)] + 1)$.
En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$ on a :

$$\left({}^C D^\alpha_{a+} y\right)(x) = (D^\alpha_{a+} y)(x), \text{ quand } y(a) = 0,$$

$$\left({}^C D^\alpha_{b-} y\right)(x) = (D^\alpha_{b-} y)(x), \text{ quand } y(b) = 0,$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuelle $y^{(n)}(x)$ d'ordre n existe, alors $({}^C D^n_{a+} y)(x)$ coïncide avec $y^{(n)}(x)$, tandis que $({}^C D^\alpha_{b-} y)(x)$ coïncide avec $y^{(n)}(x)$ multiplier par une constante $(-1)^n$:

$$\left({}^C D^\alpha_{a+} y\right)(x) = y^{(n)}(x) \text{ et } \left({}^C D^\alpha_{b-} y\right)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), (n \in \mathbb{N}). \tag{2.63}$$

Les dérivées fractionnaire de Caputo $({}^C D^\alpha_{a+} y)(x)$ et $({}^C D^\alpha_{b-} y)(x)$ sont définies pour les fonctions $y(x)$ appartenant à l'espace $AC^n[a, b]$ qui est l'espace des fonctions absolument continues définies dans (1.10).

Théorème 2.4.1. *Soit $Re(\alpha) \geq 0$ et soit n est donnée par (2.62). Si $y \in AC^n[a, b]$, alors les dérivées fractionnaire de Caputo $({}^C D^\alpha_{a+} y)(x)$ et $({}^C D^\alpha_{b-} y)(x)$ existent presque partout sur $[a, b]$.*

1. *Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $({}^C D^\alpha_{a+} y)(x)$ et $({}^C D^\alpha_{b-} y)(x)$ sont données par :*

$$({}^C D^\alpha_{a+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t) dt = (I^{n-\alpha}_{a+} D^n y)(x) \tag{2.64}$$

et

$$({}^C D^\alpha_{b-} y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t) dt = (-1)^n (I^{n-\alpha}_{b-} D^n y)(x), \tag{2.65}$$

où $D = \frac{d}{dx}$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.
En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$ et $y \in AC[a, b]$,

$$({}^C D^\alpha_{a+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} y'(t) dt = (I^{1-\alpha}_{a+} D y)(x) \tag{2.66}$$

et

$$({}^C D^\alpha_{b-} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} y'(t) dt = -(I^{1-\alpha}_{b-} D y)(x). \tag{2.67}$$

2. *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, alors $({}^C D^n_{a+} y)(x)$ et $({}^C D^n_{b-} y)(x)$ sont données par (2.63).*
En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$({}^C D^0_{a+} y)(x) = ({}^C D^0_{b-} y)(x) = y(x). \tag{2.68}$$

Théorème 2.4.2. *Soient $Re(\alpha) \geq 0$, n donné par (2.62) et soit $y \in C^n[a, b]$.*
Alors les dérivées fractionnaire de Caputo $({}^C D^\alpha_{a+} y)(x)$ et $({}^C D^\alpha_{b-} y)(x)$ sont continues sur $[a, b]$, $({}^C D^\alpha_{a+} y)(x) \in C[a, b]$ et $({}^C D^\alpha_{b-} y)(x) \in C[a, b]$.

1. *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *alors* $({}^C D^\alpha_{a+}y)(x)$ *et* $({}^C D^\alpha_{b-}y)(x)$ *sont données par (2.64) et (2.65) respectivement, de plus*
$$({}^C D^\alpha_{a+}y)(a) = ({}^C D^\alpha_{b-}y)(b) = 0.$$
En particulier, ils ont respectivement les formes (2.66) et (2.67) pour $0 < Re(\alpha) < 1$.
2. *Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors les dérivées fractionnaire de Caputo* $({}^C D^\alpha_{a+}y)(x)$ *et* $({}^C D^\alpha_{b-}y)(x)$ *ont des représentations données dans (2.63). En particulier, les relations dans (2.68) sont vérifies.*

Corollaire 2.4.1. *Soient* $Re(\alpha) \geq 0$ *et soit* n *donné par (2.62).*

1. *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *alors les opérateurs de dérivation fractionnaire de Caputo* ${}^C D^\alpha_{a+}$ *et* ${}^C D^\alpha_{b-}$ *sont bornés dans l'espace* $C^n[a,b]$ *vers l'espace* $C_a[a,b]$ *et* $C_b[a,b]$ *respectivement, définies par (1.5) et (1.6). De plus,*
$$\|{}^C D^\alpha_{a+}y\|_{C_a} \leq k_\alpha \|y\|_{C^n} \text{ et } \|{}^C D^\alpha_{b-}y\|_{C_b} \leq k_\alpha \|y\|_{C^n},$$
avec
$$k_\alpha = \frac{(b-a)^{n-Re(\alpha)}}{|\Gamma(n-\alpha)|[n-Re(\alpha)+1]}.$$
2. *Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors les opérateurs* ${}^C D^n_{a+}$ *et* ${}^C D^n_{b-}$ *sont bornés dans* $C^n[a,b]$ *vers* $C[a,b]$. *De plus,*
$$\|{}^C D^n_{a+}y\|_C = \|y\|_{C^n} \text{ et } \|{}^C D^n_{b-}y\|_C \|y\|_{C^n}.$$

Propriété 2.4.1. *Soient* $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ *et* n *est donnée par (2.62), alors les relation suivantes sont vérifies :*
$$({}^C D^\alpha_{a+}(x-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-1}, (Re(\beta) > n),$$
$$({}^C D^\alpha_{b-}(b-x)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-1}, (Re(\beta) > n)$$
et
$$({}^C D^\alpha_{a+}(x-a)^k)(x) = ({}^C D^\alpha_{b-}(b-x)^k)(x) = 0, (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$
En particulier,
$$({}^C D^\alpha_{a+}1)(x) = ({}^C D^\alpha_{b-}1)(x) = 0.$$

Lemme 2.4.1. *Soient* $Re(\alpha) > 0$ *et* $y \in L^\infty(a,b)$ *ou* $\in C[a,b]$.

1. *Si* $Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ *ou* $\alpha \in \mathbb{N}$, *alors :*
$$({}^C D^\alpha_{a+} I^\alpha_{a+}y)(x) = y(x) \text{ et } ({}^C D^\alpha_{b-} I^\alpha_{b-}y)(x) = y(x).$$
2. *Si* $Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ *et* $Im(\alpha) \neq 0$, *alors :*
$$({}^C D^\alpha_{a+} I^\alpha_{a+}y)(x) = y(x) - \frac{(I^{\alpha+1-n}_{a+}y)(a+)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}$$
et
$$({}^C D^\alpha_{b-} I^\alpha_{b-}y)(x) = y(x) - \frac{(I^{\alpha+1-n}_{b-}y)(b-)}{\Gamma(n-\alpha)}(b-x)^{n-\alpha}.$$

Lemme 2.4.2. *Soient $Re(\alpha) > 0$ et n est donnée par (2.62). Si $y \in AC^n[a,b]$ ou $y \in C^n[a,b]$, alors :*

$$(I_{a+}^{\alpha}\, {}^{C}D_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

et

$$(I_{b-}^{\alpha}\, {}^{C}D_{b-}^{\alpha} y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k$$

En particulier, si $0 < Re(\alpha) \leq 1$ et $y \in AC[a,b]$ ou $y \in C[a,b]$, alors :

$$(I_{a+}^{\alpha}\, {}^{C}D_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) - y(a) \text{ et } (I_{b-}^{\alpha}\, {}^{C}D_{b-}^{\alpha} y)(x) = y(x) - y(b).$$

Propriété 2.4.2. *Si $Re(\alpha) > 0$ et $\lambda > 0$, alors :*

$$\left({}^{C}D_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(x) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x} \text{ et } \left({}^{C}D_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(x) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda x}.$$

La fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha}[\lambda(x-a)^{\alpha}]$ est invariant par rapport à la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}$, mais ce n'est pas le cas pour la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{C}D_{-}^{\alpha}$. En fait, l'affirmation suivante est vraie.

Lemme 2.4.3. *Si $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} E_{\alpha}[\lambda(t-a)^{\alpha}]\right)(x) = \lambda E_{\alpha}[\lambda(x-a)^{\alpha}]$$

et

$$\left({}^{C}D_{-}^{\alpha} t^{\alpha-1} E_{\alpha}(\lambda t^{-\alpha})\right)(x) = \frac{1}{x} E_{\alpha,1-\alpha}(\lambda x^{-\alpha}).$$

En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$,

$$D^n E_n[\lambda(x-a)^n] = E_n[\lambda(x-a)^n]$$

et

$$D^n[t^{n-1} E_n(\lambda t^{-n}))(x) = \frac{1}{x} E_{n,1-n}(\lambda x^{-n}) = \frac{\lambda}{x^{n+1}} E_n(\lambda x^{-n}).$$

Lemme 2.4.4. *Soient $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, $(n \in \mathbb{N})$ tel que $y \in C^n(\mathbb{R}^+)$ et $y^{(n)} \in L^1(0,b)$ pour tout $b > 0$, l'estimation (2.44) est vérifie pour $y^{(n)}(x)$, les transformées de Laplace $(\mathcal{L}y)(p)$, $\mathcal{L}[D^n y(t)]$ existent et $\lim_{x\to+\infty}(D^k y)(x) = 0$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Alors les relations suivantes sont vérifies :*

$$(\mathcal{L}\, {}^{C}D_{0+}^{\alpha} y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}(D^k y)(0).$$

En particulier, si $0 < \alpha \leq 1$, alors :

$$(\mathcal{L}\, {}^{C}D_{0+}^{\alpha} y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1} y(0).$$

Lemme 2.4.5. *Soient $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, $(n \in \mathbb{N})$ tel que $y \in C^n(\mathbb{R}^+)$, $y \in X_{s+n-\alpha}^1(\mathbb{R}^+))$ et qu'il existe $(\mathcal{M}y^{(n)})(s+n-\alpha)$ et $(\mathcal{M}y)(s-\alpha)$.*

1. *Si $Re(s) < 1 - Re(n-\alpha)$, alors :*

$$\left(\mathcal{M}^C D^{\alpha}_{0+}y\right)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1+k+\alpha-n-s)}{\Gamma(1-s)}\left[x^{s+n-\alpha-k-1}y^{(n-k-1)}(x)\right]_0^{\infty}.$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$,

$$\left(\mathcal{M}^C D^{\alpha}_{0+}y\right)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha) + \frac{\Gamma(\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\left[x^{s-\alpha}y(x)\right]_0^{\infty}.$$

2. *Si $Re(s) > 0$, alors :*

$$\left(\mathcal{M}^C D^{\alpha}_{-}y\right)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n-\alpha-k)}\left[x^{s+n-\alpha-k-1}y^{(n-k-1)}(x)\right]_0^{\infty}.$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$,

$$\left(\mathcal{M}^C D^{\alpha}_{-}y\right)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha) + \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1-\alpha)}\left[x^{s-\alpha}y(x)\right]_0^{\infty}.$$

2.5 Intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires d'une fonction par rapport à une autre fonction

Dans cette section, on va présenter les définitions et certaines propriétés des intégrales fractionnaires et des dérivées fractionnaires d'une fonction f par rapport à une autre fonction g (voire [31]).

Définition 2.5.1. *Soit (a,b), $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ un intervalle borné de la droite réelle $\mathbb{R}$ et $Re(\alpha) > 0$ et soit $g(x)$ une fonction monotone croissante et positive sur $(a,b]$, ayant une dérivée continue $g'(x)$ sur (a,b).*
Les intégrales fractionnaires à droite et à gauche d'une fonction f par rapport à une autre fonction g sur $[a,b]$ sont définies par :

$$(I^{\alpha}_{a+,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [g(x)-g(t)]^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x > a, Re(\alpha) > 0) \tag{2.69}$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b [g(t)-g(x)]^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x < b, Re(\alpha) > 0). \tag{2.70}$$

• *Lorsque $a = 0$ et $b = \infty$, on obtient :*

$$(I^{\alpha}_{0+,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x [g(x)-g(t)]^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x > 0, Re(\alpha) > 0), \tag{2.71}$$

$$(I^{\alpha}_{-,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty} [g(t)-g(x)]^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x > 0, Re(\alpha) > 0). \tag{2.72}$$

• *Lorsque* $a = -\infty$ *et* $b = \infty$, *on obtient :*

$$(I^{\alpha}_{+,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}[g(x)-g(t)]^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x \in \mathbb{R}, Re(\alpha) > 0), \tag{2.73}$$

$$(I^{\alpha}_{-,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}[g(t)-g(x)]^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x \in \mathbb{R}, Re(\alpha) > 0). \tag{2.74}$$

Les intégrales (2.69) et (2.70) sont appelées les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville sur un intervalle borné $[a, b]$, *(2.71) et (2.72) les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville sur un demi-axe* $\mathbb{R}^+$ *, tandis que (2.73) et (2.74) sont appelés les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville sur tout l'axe* $\mathbb{R}$. *Si* $g'(x) \neq 0$, $(-\infty \leq a < x < b \leq \infty)$, *alors les opérateurs dans (2.69)-(2.70), (2.71)-(2.72) et (2.73)-(2.74) sont exprimées via les opérateurs de Riemann-Liouville (2.1)-(2.2), les opérateurs de Riemann-Liouville (2.31)-(2.32) et (2.49)-(2.50) par :*

$$(I^{\alpha}_{a+,g}f)(x) = (Q_g I^{\alpha}_{g(a)} + Q_g^{-1}f)(x),\ (I^{\alpha}_{b-,g}f)(x) = (Q_g I^{\alpha}_{g(a)} - Q_g^{-1}f)(x),$$

$$(I^{\alpha}_{0+,g}f)(x) = (Q_g I^{\alpha}_{g(0)} + Q_g^{-1}f)(x),\ (I^{\alpha}_{-,g}f)(x) = (Q_g I^{\alpha}_{g(+\infty)} - Q_g^{-1}f)(x),$$

et

$$(I^{\alpha}_{+,g}f)(x) = (Q_g I^{\alpha}_{g(-\infty)} + Q_g^{-1}f)(x),\ (I^{\alpha}_{-,g}f)(x) = (Q_g I^{\alpha}_{g(+\infty)} - Q_g^{-1}f)(x),$$

où Q_g *est l'opérateur de substitution*

$$(Q_g f)(x) = f[g(x)],$$

et Q_g^{-1} *est son opérateur inverse. Par conséquent, le Les propriétés des intégrales (2.69)-(2.74) découlent des propriétés correspondantes des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et Liouville données dans les sections (2.2)-(2.3). Par exemple, les affirmations suivantes sont valables, généralisant celles dans (2.11), (2.13), (2.55) et (2.37).*

Propriété 2.5.1. *Soient* $Re(\alpha) > 0$ *et* $Re(\beta) > 0$.

1. *Si* $f_+(x) = \Big[g(x) - g(a)\Big]^{\beta-1}$, *alors :*

$$(I^{\alpha}_{a+,g}f_+)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Big[g(x) - g(a)\Big]^{\alpha+\beta-1}. \tag{2.75}$$

2. *Si* $f_-(x) = \Big[g(b) - g(x)\Big]^{\beta-1}$, *alors :*

$$(I^{\alpha}_{b-,g}f_-)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Big[g(b) - g(x)\Big]^{\alpha+\beta-1}.$$

Propriété 2.5.2. *Soient* $Re(\alpha) > 0$ *et* $\lambda > 0$, *alors :*

$$\Big(I^{\alpha}_{+,g}e^{\lambda g(t)}\Big)(x) = \lambda^{-\alpha}e^{\lambda g(x)}$$

et

$$\Big(I^{\alpha}_{-,g}e^{-\lambda g(t)}\Big)(x) = \lambda^{-\alpha}e^{-\lambda g(x)}. \tag{2.76}$$

La propriété de semi-groupe est également vérifie.

Lemme 2.5.1. *Soient $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$, alors les relations :*

$$(I^{\alpha}_{a+,g} I^{\beta}_{a+,g} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a+,g} f)(x),\ \ (I^{\alpha}_{b-,g} I^{\beta}_{b-,g} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{b-,g} f)(x)$$

et

$$(I^{\alpha}_{+,g} I^{\beta}_{+,g} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{+,g} f)(x),\ \ (I^{\alpha}_{-,g} I^{\beta}_{-,g} f)(x) = I^{\alpha+\beta}_{-,g} f)(x)$$

sont vérifies pour les fonctions "suffisamment bon" $f(x)$.

Soient $g'(x) \neq 0$, $(-\infty \leq a < x < b \leq +\infty)$ et $Re(\alpha) \geq 0$, $(\alpha \neq 0)$ et soient $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $D = \frac{d}{dx}$. Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Liouville d'une fonction y par rapport à g d'ordre α, $(Re(\alpha) \geq 0, \alpha \neq 0)$, correspondant aux intégrales de Riemann-Liouville et de Liouville dans (2.69)-(2.71), (2.72)-(2.74) et (2.73)-(2.74), sont définis par :

$$(D^{\alpha}_{a+,g}y)(x) = \Big(\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}(I^{n-\alpha}_{a+,g}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}\int_{a}^{x}[g(x)-g(t)]^{n-\alpha-1}g'(t)y(t)dt, (x > a), \tag{2.77}$$

$$(D^{\alpha}_{b-,g}y)(x) = \Big(-\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}(I^{n-\alpha}_{b-,g}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(-\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}\int_{x}^{b}[g(t)-g(x)]^{n-\alpha-1}g'(t)y(t)dt, (x < b) \tag{2.78}$$

et

$$(D^{\alpha}_{0+,g}y)(x) = \Big(\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}(I^{n-\alpha}_{0+,g}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}\int_{0}^{x}[g(x)-g(t)]^{n-\alpha-1}g'(t)y(t)dt, (x > 0), \tag{2.79}$$

$$(D^{\alpha}_{-,g}y)(x) = \Big(-\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}(I^{n-\alpha}_{-,g}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(-\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}\int_{x}^{+\infty}[g(t)-g(x)]^{n-\alpha-1}g'(t)y(t)dt, (x > 0 \tag{2.80}$$

et

$$(D^{\alpha}_{+,g}y)(x) = \Big(\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}(I^{n-\alpha}_{+,g}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}\int_{-\infty}^{x}[g(x)-g(t)]^{n-\alpha-1}g'(t)y(t)dt, (x \in \mathbb{R}), \tag{2.81}$$

$$(D^{\alpha}_{-,g}y)(x) = \Big(-\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}(I^{n-\alpha}_{-,g}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(-\frac{1}{g'(x)}D\Big)^{n}\int_{x}^{+\infty}[g(t)-g(x)]^{n-\alpha-1}g'(t)y(t)dt, (x \in \mathbb{R} \tag{2.82}$$

Lorsque $g(x) = x$, (2.77) et (2.78) coïncident avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (2.5) et (2.6) :

$$(D^{\alpha}_{a+,x}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x) \ \text{ et } (D^{\alpha}_{b-,x}y)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y)(x),$$

(2.79) et (2.80) coïncident avec les dérivées fractionnaires de Liouville (2.33) et (2.10.1) :

$$(D^{\alpha}_{0+,x}y)(x) = (D^{\alpha}_{0+}y)(x) \ \text{ et } (D^{\alpha}_{-,x}y)(x) = (D^{\alpha}_{-}y)(x)$$

(2.81) et (2.82) coïncident avec les dérivées fractionnaires de Liouville (2.51) et (2.52) :

$$(D^{\alpha}_{+,x}y)(x) = (D^{\alpha}_{+}y)(x) \ \text{ et } (D^{\alpha}_{-,x}y)(x) = (D^{\alpha}_{-}y)(x).$$

Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les dérivés fractionnaires généraux ci-dessus (2.77)-(2.82) ont les formes suivantes :

$$(D^{n}_{a+,g}y)(x) = (D^{n}_{+,g}y)(x) = \Big(\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\Big)^{n}y(x), \tag{2.83}$$

$$(D^n_{b-,g}y)(x) = (D^n_{-,g}y)(x) = \Big(-\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\Big)^n y(x).$$

En particulier, $n = 1$ on obtient :

$$(D^1_{a+,g}y)(x) = (D^1_{+,g}y)(x) = \frac{y'(x)}{g'(x)},$$

$$(D^1_{b-,g}y)(x) = (D^1_{-,g}y)(x) = -\frac{y'(x)}{g'(x)}.$$

Les résultats suivants généralisant ceux des (2.12), (2.14) et (2.38), (2.56), sont analogues à ceux des propriétés 2.5.1 et 2.5.2 :

Propriété 2.5.3. *Soient $Re(\alpha) \geq 0$, $(\alpha \neq 0)$ et $Re(\beta) > 0$.*

1. *Si $y_+(x) = [g(x) - g(a)]^{\beta-1}$, alors :*

$$(D^\alpha_{a+,g}y_+)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}[g(x) - g(a)]^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.84}$$

2. *Si $y_-(x) = [g(b) - g(x)]^{\beta-1}$, alors :*

$$(D^\alpha_{b-,g}y_-)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}[g(b) - g(x)]^{\beta-\alpha-1}.$$

Propriété 2.5.4. *Soient $Re(\alpha) \geq 0$, $(\alpha \neq 0)$ et $\lambda > 0$. Alors :*

$$(D^\alpha_{+,g}e^{\lambda g(t)})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda g(x)}.$$

et

$$(D^\alpha_{-,g}e^{-\lambda g(t)})(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda g(x)}. \tag{2.85}$$

Analogue aux propriétés des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Liouville, présentées dans les sections 2.1-2.3, il existe des propriétés correspondantes à les dérivées fractionnaires généraux dans (2.77)-(2.82).

En conclusion, nous considérons les cas spéciaux suivants des intégrales générales et dérivées (2.71) et (2.72) avec $g(x) = x^\sigma, (\sigma > 0)$:

$$(I^\alpha_{0+,x^\sigma}f)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1}t^{\sigma-1}f(t)dt, (x > 0, Re(\alpha) > 0), \tag{2.86}$$

$$(I^\alpha_{-,x^\sigma}f)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty} (t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-1}t^{\sigma-1}f(t)dt, (x > 0, Re(\alpha) > 0) \tag{2.87}$$

et

$$(D^\alpha_{0+,x^\sigma}y)(x) = \frac{\sigma^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)}(x^{1-\sigma}D)^n\int_0^x (x^\sigma - t^\sigma)^{n-\alpha-1}t^{\sigma-1}y(t)dt, (x > 0),$$

$$(D^\alpha_{-,x^\sigma}y)(x) = \frac{\sigma^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)}(-x^{1-\sigma}D)^n\int_x^{+\infty} (t^\sigma - x^\sigma)^{n-\alpha-1}t^{\sigma-1}y(t)dt, (x > 0),$$

$$(Re(\alpha) \geqslant 0, (\alpha \neq 0), n = [Re(\alpha)] + 1 \text{ et } D = \frac{d}{dx}$$

On note que $I^{\alpha}_{0+,x^{\sigma}}f$ *et* $I^{\alpha}_{-,x^{\sigma}}f$ *sont reliés aux intégrales fractionnaires* $I^{\alpha}_{0+}f$ *et* $I^{\alpha}_{-}f$ *par :*

$$(I^{\alpha}_{0+,x^{\sigma}}f)(x) = \left(I^{\alpha}_{0+}f(t^{\frac{1}{\sigma}})\right)(x^{\sigma}) = (N_{\sigma}I^{\alpha}_{0+}N_{\frac{1}{\sigma}}f)(x), (x > 0) \tag{2.88}$$

et

$$(I^{\alpha}_{-,x^{\sigma}}f)(x) = \left(I^{\alpha}_{-}f(t^{\frac{1}{\sigma}})\right)(x^{\sigma}) = (N_{\sigma}I^{\alpha}_{-}N_{\frac{1}{\sigma}}f)(x), (x > 0), \tag{2.89}$$

où N_{σ} *est un opérateur élémentaire donné par (1.41).*
Comme cas particulier de (2.75), (2.84) et (2.76), (2.85), nous avons les résultats suivants :

Propriété 2.5.5. *Soient* $\sigma > 0$ *et* $Re(\alpha) \geq 0$, $(\alpha \neq 0)$.

1. *Si* $Re(\alpha) > 0$ *et* $Re(\beta) > 0$, *alors :*

$$(I^{\alpha}_{0+,x^{\sigma}}t^{\sigma(\beta-1)})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{\sigma(\alpha+\beta-1)}$$

et

$$(D^{\alpha}_{0+,x^{\sigma(\beta-1)}}t^{\sigma})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{\sigma(\beta-\alpha-1)}.$$

2. *Soient* $Re(\alpha) \geq 0, (\alpha \neq 0)$ *et* $\lambda > 0$, *alors :*

$$(I^{\alpha}_{-,x^{\sigma}}e^{-\lambda t^{\sigma}})(x) = \lambda^{-\alpha}e^{-\lambda x^{\sigma}}$$

et

$$(D^{\alpha}_{-,x^{\sigma}}e^{-\lambda t^{\sigma}})(x) = \lambda^{\alpha}e^{-\lambda x^{\sigma}}.$$

En utilisant les représentations (2.88), (2.89) et la relation (1.43), en prenant compte (2.45), on obtient la transformée de Mellin des intégrales fractionnaires générales (2.86) et (2.87).

Lemme 2.5.2. *Soient* $Re(\alpha) > 0$, $\sigma > 0$ *et* $f \in X^{1}_{s+\sigma\alpha}(R^{+})$.

1. *Si* $Re(s) < \sigma[1 - Re(\alpha)]$, *alors :*

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{0+,x^{\sigma}}f)(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha-s/\sigma)}{\Gamma(1-s/\sigma)}(\mathcal{M}f)(s+\sigma\alpha).$$

2. *Si* $Re(s) > 0$, *alors :*

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{-,x^{\sigma}}f)(s) = \frac{\Gamma(s/\sigma)}{\Gamma(\alpha+s/\sigma)}(\mathcal{M}f)(s+\sigma\alpha).$$

2.6 Intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires de type Erdélyi-Kober

Dans cette section on va présenter les définitions et certaines propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires de type Erdélyi-Kober et leurs cas particuliers (voire [31], [20] et [25]).

Définition 2.6.1. *Soit (a,b), $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ est un intervalle borné du demi-axe $\mathbb{R}^+$ et soit $Re(\alpha) > 0, \sigma > 0$ et $\eta \in \mathbb{C}$. On considère les intégrales à gauche et à droit d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) > 0)$ définie par :*

$$(I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}f)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(\eta+1)-1} f(t)dt, (0 \leq a < x < b \leq \infty) \quad (2.90)$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}f)(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t)dt, (0 \leq a < x < b \leq \infty). \quad (2.91)$$

• *Lorsque $a = -\infty$ et $b = \infty$, on va utiliser les notations suivantes :*

$$(I^{\alpha}_{+,\sigma,\eta}f)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(\eta+1)-1} f(t)dt, (x > 0) \quad (2.92)$$

et

$$(I^{\alpha}_{-,\sigma,\eta}f)(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t)dt, (x > 0) \quad (2.93)$$

Les intégrales (2.90) et (2.91), ainsi que (2.92) et (2.93), sont appelés les intégrales fractionnaires de type Erdelyi-Kober.

• *Si $\sigma = 2$, $a = 0$ et $b = \infty$, alors les intégrales (2.90) et (2.93) sont donnés par :*

$$(I_{\eta,\alpha}f)(x) = (I^{\alpha}_{0+,2,\eta}f)(x) = \frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} f(t)dt, (x > 0) \quad (2.94)$$

et

$$(K_{\eta,\alpha}f)(x) = (I^{\alpha}_{-,2,\eta}f)(x) = \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{\alpha-1} t^{1-2(\alpha+\eta)} f(t)dt, (x > 0). \quad (2.95)$$

Ces opérateurs sont appelés les opérateurs Erdélyi-Kober.

• *Si $\sigma = 1$, $a = 0$ et $b = +\infty$, les intégrales dans (2.90) et (2.93) prennent les formes suivants :*

$$(I^{+}_{\eta,\alpha}f)(x) = (I^{\alpha}_{0+,1,\eta}f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\eta f(t)dt, (x > 0)$$

et

$$(K^{-}_{\eta,\alpha}f)(x) = (I^{\alpha}_{-,1,\eta}f)(x) = \frac{x^\eta}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} t^{-\alpha-\eta} f(t)dt, (x > 0).$$

Ces opérateurs sont appelés les opérateurs de Kober ou les opérateurs de Kober-Erdélyi.
En utilisant les opérateurs M_a et N_a définis dans (1.40) et (1.41), on peut réécrire (2.90) et (2.91) en termes d'intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville (2.1) et (2.2) sous la forme suivante :

$$(I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}f)(x) = (N_\sigma M_{-\alpha-\eta} I^{\alpha}_{a^\sigma+} M_\eta N_{\frac{1}{\sigma}} f)(x), (0 \leq a < x < b \leq +\infty)$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}f)(x) = (N_\sigma M_\eta I^{\alpha}_{b^\sigma-} M_{-\alpha-\eta} N_{\frac{1}{\sigma}} f)(x), (0 \leq a < x < b \leq +\infty).$$

De même, (2.92) et (2.93) ont les représentations suivantes en termes d'intégrales fractionnaires de Liouville (2.49) et (2.50) :

$$(I^{\alpha}_{+,\sigma,\eta}f)(x) = (N_{\sigma}M_{-\alpha-\eta}I^{\alpha}_{+}M_{\eta}N_{\frac{1}{\sigma}}f)(x), (x>0),$$
$$(I^{\alpha}_{-,\sigma,\eta}f)(x) = (N_{\sigma}M_{\eta}I^{\alpha}_{-}M_{-\alpha-\eta}N_{\frac{1}{\sigma}}f)(x), (x>0).$$

En particulier, les intégrales dans (2.94) et (2.95) sont représentés par les intégrales fractionnaires de Liouville (2.31) et (2.32) de manière suivante :

$$(I_{\eta,\alpha}f)(x) = (N_{2}M_{-\alpha-\eta}I^{\alpha}_{0+}M_{\eta}N_{\frac{1}{2}}f)(x), (x>0),$$
$$(K_{\eta,\alpha}f)(x) = (N_{2}M_{\eta}I^{\alpha}_{-}M_{-\alpha-\eta}N_{\frac{1}{2}}f)(x), (x>0),$$

tandis que (2.49) et (2.50) prennent les formes suivantes :

$$(I^{+}_{\eta,\alpha}f)(x) = (M_{-\alpha-\eta}I^{\alpha}_{0+}M_{\eta}f)(x), (x>0),$$
$$(K^{-}_{\eta,\alpha}f)(x) = M_{\eta}I^{\alpha}_{-}M_{-\alpha-\eta}f)(x), (x>0).$$

Lemme 2.6.1. *Soient $Re(\alpha) > 0$ et $1 \leq p < \infty$.*

1. *Si $0 < a < b < \infty$, alors les opérateurs $I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}$ et $I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}$ sont bornés dans $L^p(a,b)$.*
2. *Si $a = 0$, $b = +\infty$ et $Re(\eta) > -1 + \dfrac{1}{(p\sigma)}$, alors l' opérateur $I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^+)$. En particulier, les opérateurs $I_{\eta,\alpha}$ et $I^{+}_{\eta,\alpha}$ sont bornés dans $L^p(\mathbb{R}^+)$ à condition que $Re(\eta) > -1 + \dfrac{1}{(2p)}$ et $Re(\eta) > -1 + \dfrac{1}{p}$, respectivement.*
3. *Si $a = 0$, $b = +\infty$ et $Re(\eta) > -\dfrac{1}{(p\sigma)}$, alors l' opérateur $I^{\alpha}_{-,\sigma,\eta}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^+)$. En particulier, les opérateurs $K_{\eta,\alpha}$ et $K^{-}_{\eta,\alpha}$ sont bornés dans $L^p(\mathbb{R}^+)$ à condition que $Re(\eta) > -\dfrac{1}{(2p)}$ et $Re(\eta) > -\dfrac{1}{p}$, respectivement.*

La propriété de semi-groupe est également vérifie

Lemme 2.6.2. *Soient $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ et $1 \leq p < \infty$.*

a) Si $0 < a < b < \infty$ et $f \in L^p(a,b)$, alors :

$$(I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}I^{\beta}_{a+,\sigma,\eta+\alpha}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a+,\sigma,\eta}f)(x)$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}I^{\beta}_{b-,\sigma,\eta+\alpha}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{b-,\sigma,\eta}f)(x).$$

b) Si $a = 0$, $b = +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ et $Re(\eta) > -1 + \dfrac{1}{(p\sigma)}$, alors :

$$(I^{\alpha}_{0+,\sigma,\eta}I^{\beta}_{0+,\sigma,\eta+\alpha}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{0+,\sigma,\eta}f(x).$$

En particulier :

- *Si $Re(\eta) > -1 + \dfrac{1}{(2p)}$, alors :*

$$(I_{\eta,\alpha}I_{\eta+\alpha,\beta}f)(x) = (I_{\eta,\alpha+\beta}f)(x),$$

- *Si $Re(\eta) > -1 + \dfrac{1}{p}$, alors :*

$$(I^{+}_{\eta,\alpha}I^{+}_{\eta+\alpha,\beta}f)(x) = (I^{+}_{\eta,\alpha+\beta}f)(x).$$

c) Si $a = 0$, $b = +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ *et* $Re(\eta) > -\dfrac{1}{(p\sigma)}$, *alors :*

$$(I^{\alpha}_{-,\sigma,\eta} I^{\beta}_{-,\sigma,\eta+\alpha} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{-,\sigma,\eta} f(x).$$

En particulier :

- *Si* $Re(\eta) > -\dfrac{1}{(2p)}$, *alors :*

$$(K_{\eta,\alpha} K_{\eta+\alpha,\beta} f)(x) = (K_{\eta,\alpha+\beta} f)(x),$$

- *Si* $Re(\eta) > -\dfrac{1}{p}$, *alors :*

$$(K^{-}_{\eta,\alpha} K^{-}_{\eta+\alpha,\beta} f)(x) = (K^{-}_{\eta,\alpha+\beta} f)(x).$$

Lemme 2.6.3. *Soient* $Re(\alpha) > 0$ *et* $0 \leq a < b \leq \infty$, *alors les relations suivantes sont vérifies pour les fonctions "suffisamment bon"* $f(x)$ *et* $g(x)$ *:*

$$\int_a^b x^{\sigma-1} f(x)(I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta} g)(x)dx = \int_a^b x^{\sigma-1} g(x)(I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta} f(x)dx.$$

Si $a = 0$ *et* $b = +\infty$, *alors :*

$$\int_0^{+\infty} x^{\sigma-1} f(x)(I^{\alpha}_{0+,\sigma,\eta} g)(x)dx = \int_0^{+\infty} x^{\sigma-1} g(x)(I^{\alpha}_{-,\sigma,\eta} f)(x)dx.$$

En particulier,

$$\int_0^{+\infty} x f(x)(I_{\eta,\alpha} g)(x)dx = \int_0^{+\infty} x g(x)(K_{\eta,\alpha} f)(x)dx$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)(I^{+}_{\eta,\alpha} g)(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)(K^{+}_{\eta,\alpha} f)(x)dx.$$

Soient $Re(\alpha) \geq 0$, $(\alpha \neq 0)$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $\sigma > 0$ *et* $\eta \in \mathbb{C}$.*Les dérivées fractionnaires de type Erdelyi-Kober, correspondant aux intégrales fractionnaires de type Erdelyi-Kober (2.90) et (2.91) sont définies par :*

- *Si* $0 \leq a < x < b \leq \infty$ *alors :*

$$(D^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta} y)(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} (I^{n-\alpha}_{a+,\sigma,\eta+\alpha} y)(x) \tag{2.96}$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta} y)(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)} \left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} (I^{n-\alpha}_{b-,\sigma,\eta+\alpha-n} y)(x), \tag{2.97}$$

avec $D = \dfrac{d}{dx}$.

- *Lorsque* $a = -\infty$ *et* $b = +\infty$, *ces définitions sont données par :*

$$(D^{\alpha}_{+,\sigma,\eta} y)(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} (I^{n-\alpha}_{+,\sigma,\eta+\alpha} y)(x),$$

$$(D^{\alpha}_{-,\sigma,\eta}y)(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)}\left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}D\right)^n x^{\sigma(n-\eta-\alpha)}(I^{n-\alpha}_{-,\sigma,\eta+\alpha-n}y)(x). \tag{2.98}$$

• *Lorsque $\sigma = 2$, les relations (2.96)(avec $a = 0$) et* (2.98) *sont données par :*

$$(D^{+}_{\eta,\alpha}y)(x) = (D^{\alpha}_{0+,2,\alpha}y)(x) = x^{-2\eta}\left(\frac{1}{2x}D\right)^n x^{2(n+\eta)}(I_{\eta+\alpha,n-\alpha}y)(x),$$

$$(D^{-}_{\eta,\alpha}y)(x) = (D^{\alpha}_{-,2,\alpha}y)(x) = x^{2(\eta+n)}\left(-\frac{1}{2x}D\right)^n x^{2(n-\eta-\alpha)}(K_{\eta+\alpha-n,n-\alpha}y)(x),$$

• *Lorsque $\sigma = 1$ les relations (2.96)(avec $a = 0$) et (2.98) sont données par :*

$$(\tilde{D}^{+}_{\eta,\alpha}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+,1,\eta}y)(x) = x^{-\eta}D^n x^{n+\eta}(I_{\eta+\alpha,n-\alpha}y)(x),$$

$$(\tilde{D}^{-}_{\eta,\alpha}y)(x) = (D^{\alpha}_{-,1,\eta}y)(x) = x^{\eta+\alpha}(-D^n)x^{n-\eta-\alpha}(K_{\eta+\alpha-n,n-\alpha}y)(x).$$

Si on suppose que $\alpha = n \in \mathbb{N}$ dans (2.96) et (2.97), alors on obtient :

$$(D^{n}_{a+,\sigma,\eta}y)(x) = (D^{n}_{+,\sigma,\eta}y)(x) = x^{-\sigma\eta}\left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}D\right)^n x^{\sigma(n+\eta)}y(x),$$

$$(D^{n}_{b-,\sigma,\eta}y)(x) = (D^{n}_{-,\sigma,\eta}y)(x) = x^{\sigma(\eta+n)}\left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}D\right)^n x^{-\sigma\eta}y(x).$$

En particulier, lorsque $\sigma = 2$, $a = 0$ et $b = +\infty$ on a :

$$(D^{+}_{\eta,n}y)(x) = x^{-2\eta}\left(\frac{1}{2x}D\right)^n x^{2(n+\eta)}y(x),$$

$$(D^{-}_{\eta,\alpha}y)(x) = x^{2(\eta+n)}\left(-\frac{1}{2x}D\right)^n x^{-2\eta}y(x)$$

et lorsque $\sigma = 1$, $a = 0$ et $b = +\infty$ on a :

$$(\tilde{D}^{+}_{\eta,n}y)(x) = x^{-\eta}D^n x^{n+\eta}y(x),$$

$$(\tilde{D}^{-}_{\eta,n}y)(x) = x^{\eta+n}(-D)^n x^{-\eta}y(x).$$

Les opérateurs de dérivations fractionnaires de type Erdelyi-Kober dans (2.96) et (2.97) fournissent des opérations inverses aux opérateurs de type Erdelyi-Kober (2.90) et (2.91) à gauche.

Propriété 2.6.1. *Si $Re(\alpha) > 0$ et $0 \leq a < b \leq \infty$, alors pour les fonctions "suffisamment bon" $f(x)$, les formules :*

$$(D^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}f)(x) = f(x) \text{ et } (D^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}f)(x) = f(x),$$

$$(D^{\alpha}_{0+,\sigma,\eta}I^{\alpha}_{0+,\sigma,\eta}f)(x) = f(x) \text{ et } (D^{\alpha}_{-,\sigma,\eta}I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}f)(x) = f(x)$$

sont vérifies.
En particulier :
• *Si $\sigma = 2$, alors :*

$$(D^{+}_{\eta,\alpha}I_{\eta,\alpha}f)(x) = f(x) \text{ et } (D^{-}_{\eta,\alpha}K_{\eta,\alpha}f)(x) = f(x),$$

• *Si* $\sigma = 1$, *alors :*

$$\tilde{D}^{+}_{\eta,\alpha} I^{+}_{\eta,\alpha} f)(x) = f(x) \text{ et } (\tilde{D}^{-}_{\eta,\alpha} K^{-}_{\eta,\alpha} f)(x) = f(x).$$

La transformation de Mellin (1.34) des intégrales fractionnaires de type Erdelyi-Kober $I^{\alpha}_{0+,\sigma,\eta} f$ *et* $I^{\alpha}_{-,\sigma,\eta} f$ *sur le demi-axe* $\mathbb{R}^+$ *sont données par le lemme suivant.*

Lemme 2.6.4. *Soient* $Re(\alpha) > 0$, $\sigma > 0$, $\eta \in \mathbb{C}$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ *avec* $1 \leq p \leq 2$, *on suppose que* $s = (\frac{1}{p}) + i\theta$, $(\theta \in \mathbb{R})$.

1. *Si* $Re(\eta - s/\sigma) > -1$, *alors :*

$$(\mathcal{M} I^{\alpha}_{0+,\sigma,\eta} f)(s) = \frac{\Gamma(1 + \eta - s/\sigma)}{\Gamma(1 + \eta + \alpha - s/\sigma)} (\mathcal{M} f)(s).$$

En particulier :
• *Si* $Re(\eta - s/2) > -1$, *alors :*

$$(\mathcal{M} I_{\eta,\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(1 + \eta - s/2)}{\Gamma(1 + \eta + \alpha - s/2)} (\mathcal{M} f)(s).$$

• *Si* $Re(\eta - s) > -1$, *alors :*

$$(\mathcal{M} I^{+}_{\eta,\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(1 + \eta - s)}{\Gamma(1 + \eta + \alpha - s)} (\mathcal{M} f)(s).$$

2. *Si* $Re(\eta + s/\sigma) > 0$, *alors :*

$$(\mathcal{M} I^{\alpha}_{-,\sigma,\eta} f)(s) = \frac{\Gamma(\eta + s/\sigma)}{\Gamma(\eta + \alpha + s/\sigma)} (\mathcal{M} f)(s).$$

En particulier :
• *Si* $Re(\eta + s/2) > 0$, *alors :*

$$(\mathcal{M} K_{\eta,\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(\eta + s/2)}{\Gamma(\eta + \alpha + s/2)} (\mathcal{M} f)(s),$$

• *Si* $Re(\eta + s) > 0$, *alors :*

$$(\mathcal{M} K^{-}_{\eta,\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(\eta + s)}{\Gamma(\eta + \alpha + s)} (\mathcal{M} f)(s).$$

2.7 Intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires de type Hadamard

Dans cette section, on va présenter les définitions et certaines propriétés des intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires de type Hadamard (voire [31], [3], [4], [5], [17] et [19]).

Définition 2.7.1. *Soit (a, b), $(0 \leq a < b \leq \infty)$ un intervalle borné du demi-axe $\mathbb{R}^+$ et soit $Re(\alpha) > 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$. On va considéré les intégrales fractionnaires à droit et à gauche d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ définis par :*

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} t^{-1} f(t)dt, (a < x < b) \tag{2.99}$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^{-1} f(t)dt, (a < x < b). \tag{2.100}$$

Lorsque $a = 0$ et $b = +\infty$, ces relations sont donnés par :

$$(I^{\alpha}_{0+,\mu}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} t^{-1} f(t)dt, (x > 0) \tag{2.101}$$

et

$$(I^{\alpha}_{-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} \left(\log \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^{-1} f(t)dt, (x > 0), \tag{2.102}$$

Les intégrales fractionnaires, plus générales que celles de (2.101) et (2.102) avec $\mu \in \mathbb{C}$, sont définis par :

$$(I^{\alpha}_{0+,\mu}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} t^{-1} f(t)dt, (x > 0) \tag{2.103}$$

et

$$(I^{\alpha}_{-,\mu}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^{\mu} \left(\log \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^{-1} f(t)dt, (x > 0). \tag{2.104}$$

L'intégrale dans (2.101) a été introduite par Hadamard. Par conséquent, les intégrales (2.99), (2.100) et (2.101), (2.102) sont appelés les intégrales fractionnaires d'Hadamard d'ordre α.Les intégrales générales (2.103) et (2.104), introduites par Butzer et al, sont appelés les intégrales fractionnaires de type Hadamard d'ordre α.
Soit $\delta = xD$, $(D = \frac{d}{dx})$ être la δ-dérivée (1.16). Les dérivées fractionnaires de Hadamard d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) \geq 0)$ à droite et à gauche sur (a, b) sont définis par :

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \delta^n (I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha+1} t^{-1} y(t)dt, (a < x < b) \tag{2.105}$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (-\delta^n)(I^{n-\alpha}_{b-}y)(x) = \left(-x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha+1} t^{-1} y(t)dt, (a < x < b), \tag{2.106}$$

où $n = [Re(\alpha)] + 1$.

Lorsque $a = 0$ et $b = +\infty$, on obtient :

$$(D^{\alpha}_{0+}y)(x) = \delta^n (I^{n-\alpha}_{0+}y)(x), \left(x > 0, \delta = x\frac{d}{dx}\right), \tag{2.107}$$

$$(D^{\alpha}_{-}y)(x) = (-\delta^n)(I^{n-\alpha}_{-}y)(x), \left(x > 0, \delta = x\frac{d}{dx}\right). \tag{2.108}$$

Les dérivées fractionnaires de type Hadamard d'ordre α, plus générales que celles dans (2.107) et (2.108) avec $\mu \in \mathbb{C}$, sont définis pour $Re(\alpha) \geq 0$ par :

$$(D^{\alpha}_{0+,\mu}y)(x) = x^{\mu}\delta^{n}x^{-\mu}(I^{n-\alpha}_{0+,\mu}y)(x), \tag{2.109}$$

$$(D^{\alpha}_{-,\mu}y)(x) = x^{\mu}(-\delta^{n})x^{-\mu}(I^{n-\alpha}_{-,\mu}y)(x), \tag{2.110}$$

où $x > 0$, $\delta = x\dfrac{d}{dx}$, $Re(\alpha) \geq 0$ et $I^{n-\alpha}_{+,\mu}y, I^{n-\alpha}_{-,\mu}y$ sont les intégrales fractionnaires de type Hadamard (2.103) et (2.104) d'ordre $n-\alpha$, ($n = [Re(\alpha)]+1$).

Lorsque $\alpha = m \in \mathbb{N}$, alors :

$$(D^{m}_{a+}y)(x) = (\delta^{m}y)(x) \text{ et } (D^{m}_{b-}y)(x) = (-1)^{m}(\delta^{m}y)(x)$$

avec $0 \leq a < x < b \leq \infty$ et

$$(D^{m}_{0+,\mu}y)(x) = x^{\mu}\delta^{m}x^{-\mu}(y)(x) \text{ et } (D^{m}_{-,\mu}y)(x) = x^{\mu}(-\delta^{m})x^{-\mu}(y)(x)$$

avec $x > 0$.

On peut vérifier directement que les intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires d'Hadamard (2.99), (2.105) et (2.100), (2.106) des fonctions logarithmiques $[\log(x/a)]^{\beta-1}$ et $[\log(b/x)]^{\beta-1}$ donnent des fonctions logarithmiques de la même forme.

Propriété 2.7.1. *Si $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ et $0 < a < b < +\infty$, alors :*

$$\left(I^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1},$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}$$

et

$$\left(I^{\alpha}_{b-}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta+\alpha-1},$$

$$\left(D^{\alpha}_{b-}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

En particulier :

• *Lorsque $\beta = 1$ et $Re(\alpha) \geq 0$, alors les dérivées fractionnaires d'Hadamard d'une constante, en général ne sont pas égaux à zéro :*

$$(D^{\alpha}_{a+}1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \text{ et } (D^{\alpha}_{b-}1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{-\alpha},$$

• *Lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$, alors :*

$$\left(D^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) = 0 \text{ et } \left(D^{\alpha}_{b-}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{\alpha-j}\right)(x) = 0,$$

avec $j = [Re(\alpha)+1]$.

Lemme 2.7.1. *Soient $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $0 < a < b < +\infty$.*

1. *L'égalité $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = 0$ est vérifie si et seulement si,*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - j},$$

   où $c_j \in \mathbb{R}, (j = 1, \cdots, n)$ sont des constantes arbitraires.
   En particulier, Lorsque $0 < Re(\alpha) \leq 1$, la relation $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = 0$ est vérifie si et seulement si $y(x) = c\left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}$ pour toute $c \in \mathbb{R}$.

2. *L'égalité $(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = 0$ est vérifie si et seulement si,*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j \left(\log \frac{b}{x}\right)^{\alpha - j},$$

   où $d_j \in, (j = 1, \cdots, n)$ sont des constantes arbitraires.
   En particulier, Lorsque $0 < Re(\alpha) \leq 1$, la relation $(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = 0$ est vérifie si et seulement si $y(x) = d\left(\log \frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}$ pour toute $d \in \mathbb{R}$.
   Il peut également être directement vérifié que les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires de type Hadamard (2.101)-(2.104) et (2.107)-(2.110) de la fonction puissance x^{β} donne la même fonction, à part un facteur de multiplication constant.

Propriété 2.7.2. *soient $Re(\alpha) > 0, \beta \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$.*

1. *Si $Re(\beta + \mu) > 0$, alors :*

$$(I^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta})(x) = (\mu + \beta)^{-\alpha}x^{\beta} \text{ et } (D^{\alpha}_{0+,\mu}t^{\beta})(x) = (\mu + \beta)^{\alpha}x^{\beta}.$$

   En particulier, si $Re(\beta) > 0$, alors :

$$(I^{\alpha}_{0+}t^{\beta})(x) = \beta^{-\alpha}x^{\beta} \text{ et } (D^{\alpha}_{0+}t^{\beta})(x) = \beta^{\alpha}x^{\beta}.$$

2. *Si $Re(\beta - \mu) < 0$, alors :*

$$(I^{\alpha}_{-,\mu}t^{\beta})(x) = (\mu - \beta)^{-\alpha}x^{\beta} \text{ et } (D^{\alpha}_{-,\mu}t^{\beta})(x) = (\mu - \beta)^{\alpha}x^{\beta}.$$

   En particulier, si $Re(\beta) < 0$, alors :

$$(I^{\alpha}_{-}t^{\beta})(x) = (-\beta)^{-\alpha}x^{\beta} \text{ et } (D^{\alpha}_{-}t^{\beta})(x) = (-\beta)^{\alpha}x^{\beta}.$$

Les intégrales fractionnaires d'Hadamard (2.99)-(2.100) avec $0 < a < b < \infty$ sont définis sur $L^p(a, b)$ les intégrales fractionnaires de type Hadamard (2.101)-(2.104) sont définis sur $X^p_c(\mathbb{R}^+)$.

Lemme 2.7.2. *Soient $Re(\alpha) > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ et $0 < a < b < \infty$, alors les opérateurs I^{α}_{a+} et I^{α}_{b-} sont bornés dans $L^p(a, b)$ comme suit :*

$$\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_p \leq K_1 \left\|f\right\|_p \text{ et } \left\|I^{\alpha}_{b-}f\right\|_p \leq K_2 \left\|f\right\|_p,$$

où

$$K_1 = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int_0^{\log(\frac{b}{a})} t^{Re(\alpha)-1}e^{\frac{t}{p}}dt \;\; et \;\; K_2 = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int_0^{\log(\frac{b}{a})} t^{Re(\alpha)-1}e^{-\frac{t}{p}}dt.$$

En particulier,

$$\left\|I_{a+}^{\alpha}f\right\|_{\infty} \leq K\left\|f\right\|_{\infty} \;\; et \;\; \left\|I_{b-}^{\alpha}f\right\|_{\infty} \leq K\left\|f\right\|_{\infty},$$

où

$$K = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{Re(\alpha)}.$$

Lemme 2.7.3. *Soient $Re(\alpha) > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $c \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{C}$.*

1. *Si $Re(\mu) > c$, alors l'opérateur $I_{0+,\mu}^{\alpha}$ est borné dans $X_c^p(\mathbb{R}^+)$ comme suit :*

$$\left\|I_{0+,\mu}^{\alpha}f\right\|_{X_c^p} \leq K_2^+\left\|f\right\|_{X_c^p}, \left(K_2^+ = [Re(\mu)-c]^{-Re(\alpha)}\right).$$

   En particulier, si $c < 0$ l'opérateur I_{0+}^{α} est borné dans $X_c^p(\mathbb{R}^+)$ on a :

$$\left\|I_{0+}^{\alpha}f\right\|_{X_c^p} \leq K_2^+\left\|f\right\|_{X_c^p}, \left(K_2^+ = [-c]^{-Re(\alpha)}\right)$$

2. *Si $Re(\mu) > -c$, alors l'opérateur $I_{-,\mu}^{\alpha}$ est borné dans $X_c^p(\mathbb{R}^+)$ comme suit :*

$$\left\|I_{-,\mu}^{\alpha}f\right\|_{X_c^p} \leq K_2^-\left\|f\right\|_{X_c^p}, \left(K_2^- = [Re(\mu)+c]^{-Re(\alpha)}\right).$$

   En particulier,si $c > 0$ l'opérateur I_{-}^{α} est borné dans $X_c^p(\mathbb{R}^+)$ on a :

$$\left\|I_{-}^{\alpha}f\right\|_{X_c^p} \leq K_2^-\left\|f\right\|_{X_c^p}, \left(K_2^- = c^{-Re(\alpha)}\right).$$

Propriété 2.7.3. *Soient $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$.*

1. *Si $0 < a < b < \infty$, alors pour $L^p(a,b)$ on a :*

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f = I_{a+}^{\alpha+\beta}f, (c \leq 0) \;\; et \;\; I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}f = I_{b-}^{\alpha+\beta}f, (c \geq 0). \tag{2.111}$$

2. *Si $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$ et $b = +\infty$, alors pour $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$ on a :*

$$I_{0+,\mu}^{\alpha}I_{0+,\mu}^{\beta}f = I_{0+,\mu}^{\alpha+\beta}f, (Re(\mu) > c) \;\; et \;\; I_{-,\mu}^{\alpha}I_{-,\mu}^{\beta}f = I_{-,\mu}^{\alpha+\beta}f, (Re(\mu) > -c). \tag{2.112}$$

   En particulier, lorsque $\mu = 0$,

$$I_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\beta}f = I_{0+}^{\alpha+\beta}f, (c < 0) \;\; et \;\; I_{-}^{\alpha}I_{-}^{\beta}f = I_{-}^{\alpha+\beta}f, (c > 0).$$

Les conditions d'existence des dérivées fractionnaires d'Hadamard (2.105) et (2.106) sont données par l'affirmation suivante.

Lemme 2.7.4. *Soient $Re(\alpha) \geq 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$. Si $y \in AC_{\delta}^n(a,b)$, $(0 < a < b < \infty)$, alors les dérivées fractionnaires d'Hadamard $D_{a+}^{\alpha}y$ et $D_{b-}^{\alpha}y$ existent presque partout sur $[a,b]$ et peuvent être représentées sous les formes suivantes :*

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\delta^k y)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^n y)(t)dt \tag{2.113}$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k(\delta^k y)(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \left(\log \frac{b}{x}\right)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} (\delta^n y)(t)dt, \tag{2.114}$$

En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$, *alors pour* $y \in AC$ *on a :*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} y'(t)\frac{dt}{t} \tag{2.115}$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{b}{x}\right)^{-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{-\alpha} y'(t)\frac{dt}{t} \tag{2.116}$$

Les compositions entre les opérateurs de dérivation fractionnaire (2.105)-(2.110) et d'intégration fractionnaire (2.99)-(2.104) sont données par la propriété suivante.

Propriété 2.7.4. *Soient* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et* $\beta \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$.

1. *Si* $0 < a < b < \infty$ *et* $1 \leq p \leq \infty$, *alors pour* $f \in L^p(a,b)$ *on a :*

$$D^{\beta}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f = I^{\alpha-\beta}_{a+}f \text{ et } D^{\beta}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f = I^{\alpha-\beta}_{b-}f. \tag{2.117}$$

En particulier, si $\beta = m \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$D^{m}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f = I^{\alpha-m}_{a+}f \text{ et } D^{m}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f = I^{\alpha-m}_{b-}f. \tag{2.118}$$

2. *Si* $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$ *et* $b = +\infty$, *alors pour* $f \in X^p_c(\mathbb{R}^+)$ *on a :*

$$D^{\beta}_{0+,\mu}I^{\alpha}_{0+,\mu}f = I^{\alpha-\beta}_{0+,\mu}f(Re(\mu) > c) \text{ et } D^{\beta}_{-,\mu}I^{\alpha}_{-,\mu}f = I^{\alpha-\beta}_{-,\mu}f(Re(\mu) > -c).$$

En particulier,

- *Si* $\beta = m \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$D^{m}_{0+,\mu}I^{\alpha}_{0+,\mu}f = I^{\alpha-m}_{0+,\mu}f(Re(\mu) > c) \text{ et } D^{m}_{-,\mu}I^{\alpha}_{-,\mu}f = I^{\alpha-m}_{-,\mu}f(Re(\mu) > -c).$$

- *Si* $\mu = 0$ *et* $m \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$D^{\beta}_{0+}I^{\alpha}_{0+}f = I^{\alpha-\beta}_{0+}f, (c < 0) \text{ et } D^{\beta}_{-}I^{\alpha}_{-}f = I^{\alpha-\beta}_{-}f, (c > 0).$$

$$D^{m}_{0+}I^{\alpha}_{0+}f = I^{\alpha-m}_{0+}f, (c < 0) \text{ et } D^{m}_{-}I^{\alpha}_{-}f = I^{\alpha-m}_{-}f, (c > 0).$$

Les dérivées fractionnaires de type Hadamard (2.105), (2.106) et (2.109), (2.110) sont des opérateurs inverses des intégrales fractionnaires correspondantes (2.99), (2.100) et (2.103), (2.104)

Propriété 2.7.5. *Soit* $Re(\alpha) > 0$.

1. *Si* $0 < a < b < \infty$ *et* $1 \leq p \leq \infty$, *alors pour* $f \in L^p(a,b)$ *on a :*

$$D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f = f, (c \leq 0) \text{ et } D^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f = f, (c \geq 0).$$

2. *Si* $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = +\infty$, *alors pour* $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$ *on a :*

$$D_{0+,\mu}^{\alpha} I_{0+,\mu}^{\alpha} f = f, (Re(\mu) > c) \text{ et } D_{-,\mu}^{\alpha} I_{-,\mu}^{\alpha} f = f, (Re(\mu) > -c).$$

En particulier, si $\mu = 0$, *alors :*

$$D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f = f, (c < 0) \text{ et } D_{-}^{\alpha} I_{-}^{\alpha} f = f, (c > 0).$$

Le résultat suivant donne la formule de la composition de l'opérateur d'intégration fractionnaire I_{a+}^{α} *avec l'opérateur de dérivation fractionnaire* D_{a+}^{α}.

Théorème 2.7.1. *Soient* $Re(\alpha) > 0$, $n = -[-Re(\alpha)]$ *et* $0 < a < b < \infty$. *Soit aussi* $(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x)$ *est l'intégrale fractionnaire de type Hadamard de la forme (2.99).*
Si $y \in L(a, b)$ *et* $(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \in AC_{\delta}^{n}[a, b]$, *alors :*

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\delta^{n-k}(I_{a+}^{n-\alpha} y))(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha - k}. \tag{2.119}$$

En particulier, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *et* $y \in AC_{\delta}^{n}[a, b]$, *alors :*

$$(I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} y)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\delta^{k} y)(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{k}. \tag{2.120}$$

Lemme 2.7.5. *Soit* $Re(\alpha) > 0$.

1. *Si* $0 < a < b < \infty$, *alors :*

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x), (y \in I_{a+}^{\alpha}(L^p))$$

et

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} y)(x) = y(x), (y \in I_{b-}^{\alpha}(L^p)).$$

2. *Si* $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$ *et* $b = +\infty$, *alors :*

$$(I_{0+,\mu}^{\alpha} D_{0+,\mu}^{\alpha} y)(x) = y(x), (y \in I_{0+,\mu}^{\alpha}(X_c^p), Re(\mu) > c)$$

et

$$(I_{-,\mu}^{\alpha} D_{-,\mu}^{\alpha} y)(x) = y(x), (y \in I_{-,\mu}^{\alpha}(X_c^p), Re(\mu) > -c).$$

En particulier, lorsque $\mu = 0$ *on a :*

$$(I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} y)(x) = y(x), (y \in I_{0+}^{\alpha}(X_c^p), c < 0)$$

et

$$(I_{-}^{\alpha} D_{-}^{\alpha} y)(x) = y(x), (y \in I_{-}^{\alpha}(X_c^p), c > 0).$$

Maintenant nous considérons les propriétés des intégrales fractionnaires d'Hadamard (2.99), (2.100) et des dérivées fractionnaires d'Hadamard (2.105), (2.106) dans les espaces $C_{\gamma,\log}[a, b]$ et $C_{\delta,\gamma}^{n}[a, b]$ définis respectivement en (1.7) et (1.8). L'existence des intégrales fractionnaires $I_{a+}^{\alpha} f$, $I_{b-}^{\alpha} f$ dans l'espace $C_{\gamma,\log}[a, b]$ et des dérivées fractionnaires $D_{a+}^{\alpha} y$, $D_{b-}^{\alpha} y$ dans l'espace $C_{\delta,\gamma}^{n}[a, b]$ sont données par l'assertion suivante.

Lemme 2.7.6. *Soient* $0 < a < b < \infty$, *Re*$(\alpha) \geq 0$ *et* $0 \leq$ *Re*$(\gamma) < 1$.

a) Si *Re*$(\gamma) >$ *Re*$(\alpha) > 0$, *alors les opérateurs d'intégration fractionnaires* I_{a+}^{α} *et* I_{b-}^{α} *sont bornés dans* $C_{\gamma,\log}[a,b]$ *vers* $C_{\gamma-\alpha,\log}[a,b]$:

$$\left\|I_{a+}^{\alpha} f\right\|_{C_{\gamma-\alpha,\log}} \leq k_1 \left\|f\right\|_{C_{\gamma,\log}} \quad et \quad \left\|I_{b-}^{\alpha} f\right\|_{C_{\gamma-\alpha,\log}} \leq k_1 \left\|f\right\|_{C_{\gamma,\log}},$$

où

$$k_1 = \left(\log \frac{b}{a}\right)^{Re(\alpha)} \frac{\Gamma\big(Re(\alpha)\big)\left|\Gamma\big(1-Re(\gamma)\big)\right|}{|\Gamma(\alpha)|\,\Gamma\big(1+Re(\alpha-\gamma)\big)}.$$

En particulier, I_{a+}^{α} *et* I_{b-}^{α} *sont bornés dans* $C_{\gamma,\log}[a,b]$.
Si *Re*$(\gamma) \leq$ *Re*(α), *les opérateurs d'intégration fractionnaires* I_{a+}^{α} *et* I_{b-}^{α} *sont bornés de* $C_{\gamma,\log}[a,b]$ *vers* $C_{\gamma-\alpha,\log}[a,b]$:

$$\left\|I_{a+}^{\alpha} f\right\|_{C} \leq k_2 \left\|f\right\|_{C_{\gamma,\log}} \quad et \quad \left\|I_{b-}^{\alpha} f\right\|_{C} \leq k_2 \left\|f\right\|_{C_{\gamma,\log}},$$

où

$$k_2 = \left(\log \frac{b}{a}\right)^{Re(\alpha-\gamma)} \frac{\Gamma\big(Re(\alpha)\big)\left|\Gamma\big(1-Re(\gamma)\big)\right|}{|\Gamma(\alpha)|\,\Gamma\big(1+Re(\alpha-\gamma)\big)}.$$

b) Si *Re*$(\alpha) \geq 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ *et* $y \in C_{\gamma,\log}^{n}[a,b]$, *alors les dérivées fractionnaires* $D_{a+}^{\alpha} y$ *et* $D_{b-}^{\alpha} y$ *existe sur* $(a,b]$ *et peut être représentée respectivement par (2.113) et (2.114).*
En particulier, lorsque $0 \leq$ *Re*$(\alpha) < 1$, $(\alpha \neq 0)$ *et* $y \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, *alors* $D_{a+}^{\alpha} y$ *et* $D_{b-}^{\alpha} y$ *sont données par (2.115) et (2.116).*

Lemme 2.7.7. *Soient* *Re*$(\alpha) > 0$, *Re*$(\beta) > 0$ *et* $0 \leq$ *Re*$(\gamma) < 1$, *alors les affirmations suivantes sont vraies :*

1. *Si* $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, *alors la première et la seconde relations dans (2.111) sont vérifies en tout point* $x \in (a,b]$ *et* $x \in [a,b)$ *respectivement. Lorsque* $f \in C[a,b]$, *ces relations sont vérifies en tout point* $x \in [a,b]$.
2. *Si* $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, *alors la première et la seconde égalités dans (2.112) sont vérifies en tout point* $x \in (a,b]$ *et* $x \in [a,b)$ *respectivement. Lorsque* $f \in C[a,b]$, *ces égalités sont vérifies en tout point* $x \in [a,b]$.
3. *Soit* *Re*$(\alpha) > 0$, *Re*$(\beta) > 0$. *Si* $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, *alors la première et la seconde relations dans (2.117) sont vérifies en tout point* $x \in (a,b]$ *et* $x \in [a,b)$ *respectivement. Lorsque* $f \in C[a,b]$, *ces relations sont vérifies en tout point* $x \in [a,b]$. *En particulier, lorsque* $\beta = k \in \mathbb{N}$ *et* $Re(\alpha > k)$, *les relations dans (2.118) sont vérifies dans leurs cas respectifs.*
4. *Soient* $n = [Re(\alpha)] + 1$. *Soient aussi* $f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)$ *et* $g_{n-\alpha}(x) = (I_{b-}^{n-\alpha} g)(x)$ *les intégrales fractionnaires (2.99) et (2.100) d'ordre* $n - \alpha$.
Si $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$ *et* $f_{n-\alpha}(x) \in C_{\delta,\gamma}^{n}[a,b]$, *alors la relation (2.119) est vérifie en tout point* $x \in (a,b]$.
En particulier, lorsque $0 <$ *Re*$(\alpha) < 1$ *et* $f_{1-\alpha}(x) \in C_{\delta,\gamma}^{1}[a,b]$, *alors :*

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = (x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}.$$

Si $f \in C[a,b]$ *et* $f_{n-\alpha}(x) \in C_{\delta}^{n}[a,b]$, *alors (2.119) est vérifie en tout point* $x \in [a,b]$.
En particulier, si$f \in C_{\delta}^{n}[a,b]$, *la relation (2.120) est vérifie en tout point* $x \in [a,b]$.

Pour conclure cette section, on va donner des relations pour la transformée de Mellin (1.34) des intégrales fractionnaires de type Hadamard $(I^{\alpha}_{0+,\mu}f)(x)$ et $(I^{\alpha}_{-,\mu}f)(x)$ définies en (2.103), (2.104) et pour les dérivées fractionnaires de type Hadamard correspondantes $(D^{\alpha}_{0+,\mu}f)(x)$ et $(D^{\alpha}_{-,\mu}f)(x)$ donnés dans (2.109), (2.110). on considère d'abord les transformées de Mellin des intégrales fractionnaires de type Hadamard.

Lemme 2.7.8. *Soient $Re(\alpha) > 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Soit aussi la fonction $f(x)$ tel que sa transformée de Mellin $(\mathcal{M}f)(s)$ existe pour $s \in \mathbb{C}$.*

a) Si $Re(\mu - s) > 0$, alors :

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{0+,\mu}f)(s) = (\mu - s)^{-\alpha}(\mathcal{M}f)(s).$$

En particulier, lorsque $Re(s) < 0$, alors :

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{0+}f)(s) = (-s)^{-\alpha}(\mathcal{M}f)(s).$$

b) Si $Re(\mu + s) > 0$, alors :

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{-,\mu}f)(s) = (\mu + s)^{-\alpha}(\mathcal{M}f)(s).$$

En particulier, lorsque $Re(s) > 0$, alors :

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{-}f)(s) = s^{-\alpha}(\mathcal{M}f)(s).$$

Lemme 2.7.9. *Soient $Re(\alpha) > 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Soit aussi la fonction $y(x)$ tel que sa transformée de Mellin $(\mathcal{M}y)(s)$ existe pour $s \in \mathbb{C}$.*

1. *Si $Re(\mu - s) > 0$ et $(\mathcal{M}D^{\alpha}_{0+,\mu}y)(s)$ existe, alors :*

$$(\mathcal{M}D^{\alpha}_{0+,\mu}y)(s) = (\mu - s)^{\alpha}(\mathcal{M}y)(s).$$

En particulier, lorsque $Re(s) < 0$, alors :

$$(\mathcal{M}D^{\alpha}_{0+}y)(s) = (-s)^{\alpha}(\mathcal{M}y)(s).$$

2. *Si $Re(\mu + s) > 0$ et $(\mathcal{M}D^{\alpha}_{-,\mu}y)(s)$ existe, alors :*

$$(\mathcal{M}D^{\alpha}_{-,\mu}y)(s) = (\mu + s)^{\alpha}(\mathcal{M}y)(s).$$

En particulier, lorsque $Re(s) > 0$, alors :

$$(\mathcal{M}D^{\alpha}_{-}y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{M}y)(s).$$

2.8 Dérivations fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov

Dans cette section, on va donner la définition des dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov et on va donner certaines de leurs propriétés (voire [31]).

L'opération de dérivation fractionnaire ci-dessus est basée sur une généralisation de la dérivation usuelle d'une fonction $y(x)$ d'ordre $n \in \mathbb{C}$ de la forme :

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta^n y)(x)}{h^n}. \tag{2.121}$$

Ici $(\Delta^n y)(x)$ est une dérivée finie d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ d'une fonction $y(x)$ avec un pas $h \in \mathbb{R}$ et centrée au point $x \in \mathbb{R}$ défini en (2.123).
La définition (2.121) est utilisée pour définir une dérivée fractionnaire en remplaçant directement $n \in \mathbb{N}$ dans (2.121) par $\alpha > 0$. Pour cela, h^n est remplacé par h^α, tandis que la dérivée finie $(\Delta_h^n y)(x)$ est remplacé par la dérivée $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ d'un ordre fractionnaire $\alpha \in \mathbb{R}$ définie par la série infinie suivante :

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} y(x-kh), (x, h \in \mathbb{R}, \alpha > 0), \tag{2.122}$$

où $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}$ sont les coefficients binomiaux (1.20). Lorsque $h > 0$, la dérivée (2.122) est appelée la dérivée à droite, tandis que pour $h < 0$ elle est appelée dérivée à gauche.

La série dans (2.122) converge absolument et uniformément pour chaque $\alpha > 0$ et pour chaque fonction bornée $y(x)$. La dérivée fractionnaire $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ a les propriétés suivantes.

Propriété 2.8.1. *Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors la propriété semi-groupe*

$$(\Delta_h^\alpha \Delta_h^\beta y)(x) = (\Delta_h^{\alpha+\beta} y)(x)$$

est vérifie pour toute fonction bornée $f(x)$.

Propriété 2.8.2. *Si $\alpha > 0$ et $y \in L^1(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier* (1.26) *de Δ_h^α est donnée par :*

$$(\mathcal{F}\Delta_h^\alpha y)(x) = (1 - e^{ixh})^\alpha (\mathcal{F}y)(x).$$

En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors conformément à (1.21) et (1.22), (2.122) coïncide avec (2.123) :

$$(\Delta_h^n y)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} y(x-kh), (x, h \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}). \tag{2.123}$$

Par (1.20) et (1.21), on peut définir la dérivée $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ dans (2.122) pour $\alpha = 0$ par :

$$(\Delta_h^0 f)(x) = f(x).$$

En suivant (2.121), les dérivées à droite et à gauche de Grünwald-Letnikov $y_+^{(\alpha)}(x)$ et $y_-^{(\alpha)}(x)$ sont définis par :

$$y_+^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to +0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, (\alpha > 0) \tag{2.124}$$

et

$$y_-^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to +0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, (\alpha > 0), \tag{2.125}$$

Ces constructions coïncident avec les dérivées fractionnaires de Marchaud pour $y \in L^p(\mathbb{R})$, $(1 \leq p < \infty)$.
La définition (2.122) de la dérivée fractionnaire $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ suppose que la fonction $y(x)$ est donnée au moins sur le demi-axe. Pour la fonction $y(x)$ donnée sur un intervalle borné $[ab]$, la dérivée peut être définie comme suit par une continuation de $y(x)$ comme une fonction de disparition au-delà de $[a, b]$:

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = (\Delta_h^\alpha y^*)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) y^*(x - kh), (x, h \in \mathbb{R}, \alpha > 0), \qquad (2.126)$$

où

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x), & si\ x \in [a, b] \\ 0, & si\ x \notin [a, b] \end{cases}$$

Il est acceptable de réécrire la dérivée fractionnaire (2.126) en termes de la fonction $y(x)$ elle-même, en évitant sa continuation comme fonction de disparition, sous les formes :

$$(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^k \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) y(x - kh), (x \in \mathbb{R}, h > 0, \alpha > 0),$$

et

$$(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]} (-1)^k \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) y(x + kh), (x \in \mathbb{R}, h > 0, \alpha > 0)$$

Puis, par analogie avec (2.124) et (2.125), les dérivées fractionnaires à droite et à gauche de Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha > 0$ sur un intervalle borné $[a, b]$ sont définis par :

$$y_{a+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}$$

et

$$y_{b-}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}$$

De telles dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov coïncident avec les dérivées fractionnaires de Marchaud et peuvent être représentées sous la forme suivante :

$$y_{a+}^{(\alpha)}(x) = \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(x) - y(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, (0 < \alpha < 1) \qquad (2.127)$$

et

$$y_{b-}^{(\alpha)}(x) = \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y(t) - y(x)}{(t-x)^{1+\alpha}} dt, (0 < \alpha < 1) \qquad (2.128)$$

Ici les égalités sont comprises dans le sens d'une convergence spéciale dans la norme de $L^p(a, b)$.
De (2.127)-(2.128), on obtient les formules suivantes de la forme (2.15) :

$$1_{a+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^k \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}, (0 < \alpha < 1)$$

et

$$1_{b-}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to+0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]}(-1)^k\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}, (0<\alpha<1).$$

2.9 Intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires partielles et mixtes

Dans cette section, on va donner les définitions et certaines propriétés des intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires partielles et mixtes multidimensionnelles (voire [31]).

De telles opérations d'intégration fractionnaire et de dérivation fractionnaire dans l'espace Euclidien n-dimensionnel $\mathbb{R}^n (n\in\mathbb{N})$ sont des généralisations naturelles des intégrales fractionnaires un-dimensionnel et des dérivées fractionnaires correspondantes, prises en fonction d'une ou de plusieurs variables.

Définition 2.9.1. *Pour $X=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $(n\in\mathbb{N}\backslash\{1\})$ et $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$, $(n\in\mathbb{N}\backslash\{1\})$ on utilise les notations suivantes :*

$$X^\alpha=(x_1^{\alpha_1},\cdots,x_n^{\alpha_n}), \Gamma(\alpha)=\big(\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)\big), \frac{\partial}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=[a_1,b_1]\times\cdots[a_n,b_n], \mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n, \mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n,$$

et par $X>\mathbf{a}$ c'est à dire $x_1>a_1,\cdots,x_n>a_n$.
Sur la base de (2.1) et (2.2), les intégrales fractionnaires partielles de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha_k\in\mathbb{C}$, $(Re(\alpha_k)>0)$ par rapport à la $k^{ième}$ variable x_k sont définis par :

$$(I_{a_k+}^{\alpha_k}f)(X)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{a_k}^{x_k}\frac{f(x_1,\cdots,x_{k-1},t_k,x_{k+1},\cdots,x_n)}{(x_k-t_k)^{1-\alpha_k}}dt_k, (x_k>a_k) \quad (2.129)$$

et

$$(I_{b_k-}^{\alpha_k}f)(X)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{x_k}^{b_k}\frac{f(x_1,\cdots,x_{k-1},t_k,x_{k+1},\cdots,x_n)}{(t_k-x_k)^{1-\alpha_k}}dt_k, (x_k<b_k). \quad (2.130)$$

Ces définitions sont vérifies pour les fonctions $f(X)=f(x_1,\cdots x_n)$ définies pour $x_k>a_k$ et $x_k<b_k$, respectivement. Par analogie avec le cas un-dimensionnel, les intégrales fractionnaires (2.129) et (2.130) sont appelés les intégrales fractionnaires partielles de Riemann-Liouville à droite et à gauche.
On définit ensuite les intégrales fractionnaires mixtes de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha\in\mathbb{C}^n$, $(Re(\alpha)>0)$ par :

$$(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}f)(X)=(I_{a_1+}^{\alpha}\cdots I_{a_n+}^{\alpha}f)(X)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_1}^{x_1}\cdots\int_{a_n}^{x_n}(X-t)^{\alpha-1}f(t)dt, (X>\mathbf{a}) \quad (2.131)$$

et

$$(I_{\mathbf{b}-}^{\alpha}f)(X)=(I_{b_1-}^{\alpha}\cdots I_{b_n-}^{\alpha}f)(X)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{b_1}\cdots\int_{x_n}^{b_n}(t-X)^{\alpha-1}f(t)dt, (X<\mathbf{b}). \quad (2.132)$$

Les intégrales fractionnaires mixtes peuvent être appliquées par rapport à une partie des variables, c'est à dire $\alpha_k = 0$ *pour certains* $k = 1, \cdots, n$. *Dans ce cas on pose* $\alpha_k = 0$ *pour* $k = m+1, \cdots, n$ *et* $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha_k) > 0)$ *pour* $k = 1, \cdots, m$. *En utilisant les notations suivantes :*
$X' = (x_1, \cdots, x_m)$, $X'' = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$, $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $(X')^{\alpha'} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$

Les intégrales fractionnaires mixtes de Riemann-Liouville d'ordre complexe α' *sont définis par :*

$$(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha'} f)(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_m}^{x_m} (X' - t')^{\alpha' - 1} f(t', X'') dt', (X > \mathbf{a}) \tag{2.133}$$

et

$$(I_{\mathbf{b}-}^{\alpha'} f)(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_{x_1}^{b_1} \cdots \int_{x_n}^{b_n} (t' - X')^{\alpha' - 1} f(t) dt', (X < \mathbf{b}). \tag{2.134}$$

Analogue à (2.129) et (2.130), les intégrales fractionnaires (2.131), (2.133) et (2.132), (2.134) sont appelés les intégrales fractionnaires mixtes de Riemann-Liouville à droite et à gauche.
Les dérivées fractionnaires partielles de Riemann-Liouville à droite et à gauche d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha_k) \geq 0)$ *par rapport à la* $k^{ième}$ *variable* x_k *sont définies par :*

$$\begin{aligned}(D_{a_k+}^{\alpha_k} y)(X) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{L_k} \left(I_{a_k+}^{L_k - \alpha_k} y\right)(X) \\ &= \frac{1}{\Gamma(L_k - \alpha_k)} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{L_k} \int_{a_k}^{x_k} \frac{y(x_1, \cdots, x_{k-1}, t_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)}{(x_k - t_k)^{\alpha_k - L_k + 1}} dt_k, (x_k > a_k)\end{aligned} \tag{2.135}$$

et

$$\begin{aligned}(D_{b_k-}^{\alpha_k} y)(X) &= \left(-\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{L_k} \left(I_{b_k-}^{L_k - \alpha_k} y\right)(X) \\ &= \frac{1}{\Gamma(L_k - \alpha_k)} \left(-\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{L_k} \int_{x_k}^{b_k} \frac{y(x_1, \cdots, x_{k-1}, t_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)}{(x_k - t_k)^{\alpha_k - L_k + 1}} dt_k, (x_k < b_k)\end{aligned} \tag{2.136}$$

où $L_k = [Re(\alpha_k)] + 1$.
En particulier, lorsque $0 < \alpha_k < 1$, *les relations (2.135) et (2.136) prennent les formes suivantes :*

$$\begin{aligned}(D_{a_k+}^{\alpha_k} y)(X) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(I_{a_k+}^{1-\alpha_k} y\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{a_k}^{x_k} \frac{y(x_1, \cdots, x_{k-1}, t_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)}{(x_k - t_k)^{\alpha_k}} dt_k, (x_k > a_k)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(D_{b_k-}^{\alpha_k} y)(X) &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(I_{b_k-}^{1-\alpha_k} y\right)(x) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{x_k}^{b_k} \frac{y(x_1, \cdots, x_{k-1}, t_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)}{(x_k - t_k)^{\alpha_k}} dt_k, (x_k < b_k)\end{aligned} \tag{2.137}$$

Si $\alpha_k = L_k \in \mathbb{N}^*$, *(2.9) et (2.10) donnent les dérivées partielle comme suite :*

$$\left(D^{L_k}_{a_k+}y\right)(X) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{L_k} y(X) \ et \ \left(D^{L_k}_{b_k-}y\right)(X) = (-1)^{L_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{L_k} y(X)$$

Les dérivées fractionnaires mixtes et de Riemann-Liouville à droite et à gauche d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha_k) \geq 0)$, *correspondant à la les intégrales fractionnaires mixtes (2.131) et (2.132), sont définies comme*

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{\mathbf{a}+}y)(X) &= (D^{\alpha}_{a_1+}\cdots D^{\alpha}_{a_n+}y)(X)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{L_n}\frac{1}{\Gamma(L-\alpha)}\int_{a_1}^{x_1}\cdots\int_{a_n}^{x_n}\frac{y(t)}{(X-t)^{\alpha-L+1}}dt, (X > \mathbf{a})\end{aligned} \quad (2.138)$$

et

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{\mathbf{b}-}y)(X) &= (D^{\alpha}_{b_1-}\cdots D^{\alpha}_{b_n-}y)(X)\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{L_n}\frac{1}{\Gamma(L-\alpha)}\int_{x_1}^{b_1}\cdots\int_{x_n}^{b_n}\frac{y(t)}{(t-X)^{\alpha-L+1}}dt, (X < \mathbf{b})\end{aligned} \quad (2.139)$$

où $L = (L_1, \cdots, L_n)$ *et* $L_k = [Re(\alpha_k)] + 1$, $(k = 1, \cdots, n)$.
En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ *les relations (2.138) et (2.139) devient :*

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{\mathbf{a}+}y)(X) &= (D^{\alpha}_{a_1+}\cdots D^{\alpha}_{a_n+}y)(X)\\ &= \frac{\partial}{\partial X}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a_1}^{x_1}\cdots\int_{a_n}^{x_n}\frac{y(t)}{(X-t)^{\alpha}}dt, (X > \mathbf{a})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{\mathbf{b}-}y)(X) &= (D^{\alpha}_{b_1-}\cdots D^{\alpha}_{b_n-}y)(X)\\ &= (-1)^n\frac{\partial}{\partial X}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x_1}^{b_1}\cdots\int_{x_n}^{b_n}\frac{y(t)}{(t-X)^{\alpha}}dt, (X < \mathbf{b}).\end{aligned} \quad (2.140)$$

Si $\alpha = L \in (\mathbb{N}^*)^n = \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ *(n fois), alors les relations (2.138) et (2.139) devient :*

$$(D^{L}_{\mathbf{a}+}y)(X) = \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{L} y(X) \ et \ (D^{L}_{\mathbf{b}-}y)(X) = (-1)^{|m|}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{L} y(X).$$

Les dérivées fractionnaires mixtes de Riemann-Liouville à droite et à gauche d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha_k) \geq 0)$, *correspondant au les intégrales fractionnaires mixtes (2.133) et (2.134) sont données par :*

$$\begin{aligned}(D^{\alpha'}_{\mathbf{a}+}y)(X) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{L_m}\left(I^{L_1-\alpha_1}_{a_1+}\cdots I^{L_m-\alpha_m}_{a_m+}y\right)(X)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{L_m}\frac{1}{\Pi_{k=1}^{m}\Gamma(L_k-\alpha_k)}\int_{a_1}^{x_1}\cdots\int_{a_m}^{x_m}\frac{y(t',X'')}{(X'-t')^{\alpha'-L'+1}}dt',\end{aligned} \quad (2.141)$$

où $(X' > \mathbf{a}')$ *et*

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha'}_{\mathbf{b}-}y)(X) &= \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{L_m}\big(I^{L_1-\alpha_1}_{b_1-}\cdots I^{L_m-\alpha_m}_{b_m-}y\big)(X)\\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{L_m}\frac{1}{\Pi_{k=1}^{m}\Gamma(L_k-\alpha_k)}\int_{x_1}^{b_1}\cdots\int_{x_m}^{b_m}\frac{y(t',X'')}{(t'-X')^{\alpha'-L'+1}}dt'
\end{aligned}
\tag{2.142}
$$

où $(X' < \mathbf{b}')$, $L' = (L_1, \cdots, L_m)$ *et* $L_k = [Re(\alpha_k)] + 1$, $(k = 1, \cdots, m)$.
En particulier, lorsque $0 < \alpha' < 1$ *les formules* (2.141) *et* (2.142) *devient :*

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha'}_{\mathbf{a}+}y)(X) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_m}\big(I^{1-\alpha_1}_{a_1+}\cdots I^{1-\alpha_m}_{a_m+}y\big)(X)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\cdots\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{a_1}^{x_1}\cdots\int_{a_m}^{x_m}\frac{y(t',X'')}{(X'-t')^{\alpha'}}dt', (X' > \mathbf{a}')
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha'}_{\mathbf{b}-}y)(X) &= (-1)^n\frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_m}\big(I^{1-\alpha_1}_{b_1-}\cdots I^{1-\alpha_m}_{b_m-}y\big)(X)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\cdots\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{x_1}^{b_1}\cdots\int_{x_m}^{b_m}\frac{y(t',X'')}{(t'-X')^{\alpha'}}dt', (X' < \mathbf{b}')
\end{aligned}
\tag{2.143}
$$

Si $\alpha' = L' \in (\mathbb{N}^*)^n$, *alors (2.141) et (2.142) devient :*

$$
(D^{L'}_{\mathbf{a}+}y)(X) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{L_m}y(X)
$$

et

$$
(D^{L'}_{\mathbf{b}-}y)(X) = (-1)^{L_1+\cdots+L_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{L_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{L_m}y(X).
$$

On définit les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires partiels et mixtes de Riemann-Liouville ci dessus sur le domaine bornée

$$
[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].
$$

Les dérivées fractionnaires partiels et mixtes de Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ *sur l'octant* $\mathbb{R}^n_{+\cdots+} = \{t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1 \geq 0, \cdots, t_n \geq 0\}$ *sont définis de façon similaire. Pour cela il faut laisser* $a_k = 0$ *et* $b_k = +\infty$ *dans les formules (2.129)-(2.134), (2.135)-(2.137), (2.138)-(2.140) et (2.141)-(2.143). En ayant un* $a_k = -\infty$ *et* $b_k = +\infty$ *dans ces relations, on définit des dérivées fractionnaires partielles et mixtes de Liouville d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *sur tout l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$. *La plupart des propriétés des intégrales fractionnaires un-dimensionnelles de Riemann-Liouville et de Liouville et des dérivées fractionnaires, présentées dans les sections 2.1-2.3, peuvent être étendues à ces cas multidimensionnels.*

2.10 Intégrations et dérivations fractionnaires de Riesz

Dans cette section, on va donner les définitions et certaines propriétés des intégrales fractionnaires des dérivées fractionnaires multidimensionnelles de Riesz (voire [31]).

tels opérateurs des intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires sur l'espace Euclidien n-dimensionnelle $\mathbb{R}^n$, $(n \in \mathbb{N})$ sont des fonctions puissances $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ de l'opérateur de Laplace. pour $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ les fonctions "suffisamment bon" $f(X) = f(x_1, \cdots, x_n)$, tels opérateurs fractionnaires sont définis en termes de la transformation de Fourier (1.27) par :

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = \mathcal{F}^{-1}|X|^{-\alpha}\mathcal{F}f = \begin{cases} I^\alpha f, & Re(\alpha) > 0, \\ D^{-\alpha} f, & Re(\alpha) < 0. \end{cases} \tag{2.144}$$

Les opérateurs I^α et D^α définissent dans (2.144) pour $Re(\alpha) > 0$ sont appelés intégration fractionnaire et dérivation fractionnaire de Riesz, respectivement.

L'intégration fractionnaire de Riesz I^α est vérifie sous la forme du potentiel de Riesz défini comme la convolution de Fourier (1.29) de la forme suivantes :

$$(I^\alpha f)(X) = \int_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(X - t) f(t) dt, (Re(\alpha) > 0). \tag{2.145}$$

Ici la fonction $k_\alpha(X)$ appelée la noyau de Riesz, est donnée par :

$$k_\alpha(X) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |X|^{\alpha - n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \cdots, \\ |X|^{\alpha-n} \log\left(\frac{1}{|X|}\right), & \alpha - n = 0, 2, 4, \cdots \end{cases}$$

et la constante $\gamma_n(\alpha)$ a la forme suivante :

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^\alpha \Pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{(n-\alpha)}{2}\right)\right]^{-1}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \cdots, \\ (-1)^{\frac{(n-\alpha)}{2}} 2^{\alpha-1} \Pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[1 + \Gamma\left(\frac{(n-\alpha)}{2}\right)\right]^{-1}, & \alpha - n = 0, 2, 4, \cdots. \end{cases}$$

Propriété 2.10.1. *Si $Re(\alpha) > 0$, alors la transformation de Fourier du potentiel de Riesz (2.145) est donnée par :*

$$(\mathcal{F} I^\alpha f)(X) = \frac{1}{|x|^\alpha} (\mathcal{F} f)(X).$$

Cette formule est vraie pour une fonction f appartenant à l'espace Lizorkin Φ de défini dans la section (1.10).

Corollaire 2.10.1. *Si $Re(\alpha) > 2$, alors la formule suivante est vérifie :*

$$\Delta I^\alpha f = -I^{\alpha-2} f, (Re(\alpha) > 2, f \in \Phi).$$

Pour les fonctions f de l'espace Lizorkin Φ présentées dans (1.46), la propriété de semi-groupe est également vérifie.

Propriété 2.10.2. *L'espace Lizorkin Φ est invariant par rapport au potentiel de Riesz I^α. De plus, $I^\alpha(\Phi) = \Phi$ et*

$$I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f, (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0, f \in \Phi).$$

Lorsque $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \cdots$, le potentiel de Riesz (2.145) prend la forme suivante :

$$(I^\alpha f)(X) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)}{|X - t|^{n-\alpha}} dt, (Re(\alpha) > 0, \alpha - n \neq 0, 2, 4, \cdots). \tag{2.146}$$

Lorsque $\alpha > 0$, alors l'assertion suivante est vraie.

Propriété 2.10.3. *Si* $0 < \alpha < n$ *et* $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$*, alors le potentiel de Riesz* $(I^\alpha f)(X)$ *est définie pour* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Théorème 2.10.1. *Soient* $\alpha > 0$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$*. L'opérateur* I^α *est borné dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *vers* $L^q(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si,*

$$0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha} \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

L'affirmation suivante est une généralisation du théorème 2.10.1 dans l'espace pondéré L^p *avec un poids de puissance dépendant de* $|X|$ *:*

$$L^p(\mathbb{R}^n, |X|^\gamma) = \left\{ f : \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |X|^\gamma |f(X)|^p dX \right)^{1/p}, (1 \leq p < \infty) \right\}.$$

Théorème 2.10.2. *Soient* $\alpha > 0$*,* $1 < p < \infty$*,* $1 < r < \infty$ *et* $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\alpha p - n < \gamma < n(p-1), \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} \text{ et } \frac{\mu + n}{r} = \frac{\gamma + n}{p} - \alpha.$$

Alors l'opérateur I^α *est borné dans* $L^p(\mathbb{R}^n, |X|^\gamma)$ *vers* $L^q(\mathbb{R}^n, |X|^\mu)$ *comme suite :*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |X|^\gamma |I^\alpha f(X)|^r dX \right)^{1/r} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |X|^\gamma |f(X)|^p dX \right)^{1/p},$$

où la constante $c > 0$ *dépend de* α, n, p, r, γ *et* μ*.*

Soit $\bar{\mathbb{R}^n}$ *une compactification de* $\mathbb{R}^n$ *par un point infini , c'est-à-dire* $\bar{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *et soit* $\rho(X)$ *une fonction non négative sur* $\bar{\mathbb{R}^n}$*. Si* $0 < \alpha < 1$*, alors le potentiel de Riesz (2.146) est défini pour* $f(X)$ *appartenant à un espace pondéré des fonctions Holderian* $H^\lambda\left(\bar{\mathbb{R}^n}, \rho\right)$ *:*

$$H^\lambda(\mathbb{R}^n, \rho) = \left\{ f(X) : \rho(X) f(X) \in H^\lambda\left(\bar{\mathbb{R}^n}\right), (0 < \lambda < 1) \right\},$$

où

$$H^\lambda\left(\bar{\mathbb{R}^n}\right) = \left\{ f(X) : f(X) \in C\left(\bar{\mathbb{R}^n}\right), |f(X+h) - f(X)| \leq \frac{c|h|^\lambda}{(1+|X|)^\lambda (1+|X+h|)^\lambda} \right\},$$

avec $c > 0$*.*

Théorème 2.10.3. *Soient* $0 < \alpha < 1$*,* $0 < \lambda < 1$ *et* $\alpha + \lambda < 1$*, alors l'opérateur* I^α *est isomorphe dans* $H^\lambda\left(\bar{\mathbb{R}^n}, (1+|X|^2)^{\frac{(n+\alpha)}{2}}\right)$ *vers* $H^{\lambda+\alpha}\left(\bar{\mathbb{R}^n}, (1+|X|^2)^{\frac{(n-\alpha)}{2}}\right)$*.*

Lorsque $0 < \alpha < n$ *et* $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$*, le potentiel de Riesz* (2.146) *est lié aux Poisson et la transformation de Gauss-Weierstrass définies par :*

$$(P_t f)(X) = \int_{\mathbb{R}^n} P(Y,t) f(X-Y) dY, (t > 0)$$

et

$$(W_t f)(X) = \int_{\mathbb{R}^n} W(Y,t) f(X-Y) dY, (t > 0).$$

Ici $P(Y,t)$ *est le noyau de Poisson :*

$$P(Y,t) = \frac{d_n t}{(|X|^2 + t^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \text{ avec } d_n = \pi^{-\frac{(n+1)}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

et $W(Y,t)$ *est est le noyau de Gauss-Weierstrass :*

$$W(Y,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|X|^2}{4t}}.$$

Théorème 2.10.4. *Si* $0 < \alpha < n$ *et* $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, *alors le potentiel de Riesz* $(I^\alpha f)(X)$ *avec* $f(X) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *a les représentations suivantes :*

$$(I^\alpha f)(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (P_t f)(X) dt$$

et

$$(I^\alpha f)(X) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{(\frac{\alpha}{2})-1} (W_t f)(X) dt.$$

De plus, les relations de composition des transformations de Poisson et de Gauss-Weierstrass avec le potentiel de Riesz sont exprimées en termes d'opérateur d'intégration fractionnaire de Liouville (2.50) comme suit :

$$(P_t I^\alpha f)(X) = \left(I_-^\alpha (P_\tau f)(X)\right)(t)$$

et

$$(W_t I^\alpha f)(X) = \left(I_-^{\frac{\alpha}{2}} (W_\tau f)(X)\right)(t),$$

où les opérateurs I_-^α *et* $I_-^{\frac{\alpha}{2}}$ *sont appliqués par rapport à* $\tau > 0$.
Pour $\alpha > 0$, *la dérivée fractionnelle de Riesz* D^α *dans (2.144) est définie par :*

$$(D^\alpha y)(X) = \frac{1}{d_n(l,\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_t^l y)(X)}{|t|^{n+\alpha}} dt, (l > \alpha). \tag{2.147}$$

Ici $(\Delta_t^l y)(X)$ *est une différence finie d'ordre* l *d'une fonction* $y(X)$ *avec un pas vectoriel* $t \in \mathbb{R}^n$ *et centrée au point* $X \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$(\Delta_t^l y)(X) = (E - \tau_t)^l f(X) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} y(X - kt)$$

et $d_n(l,\alpha)$ *est une constante définie par :*

$$d_n(l,\alpha) = \frac{2^{-\alpha} \pi^{1+\frac{n}{2}} A_l(\alpha)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)},$$

où

$$A_l(\alpha) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} k^\alpha.$$

On note que l'intégrale hypersingulaire $(D^\alpha y)(X)$ ne dépend pas du choix de $l > \alpha$. Une telle construction est aussi appelée dérivée fractionnaire de Riesz d'ordre $\alpha > 0$ dans le sens où

$$(\mathcal{F}D^\alpha y)(X) = |x|^\alpha (\mathcal{F}y)(X), (\alpha > 0) \tag{2.148}$$

pour les fonctions "suffisamment bon" $y(X)$. En particulier, cette relation est vérifie pour f appartenant à l'espace Lizorkin Φ. L'égalité (2.148) est également vérifie pour les fonctions différentiables $y(X)$.

Propriété 2.10.4. *Si $y(X)$ appartient à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ des fonctions infiniment différentiables $y(X)$ sur $\mathbb{R}^n$ avec un support compact, alors la transformation de Fourier de $(D^\alpha y)(X)$ est donnée par :*

$$(\mathcal{F}D^\alpha y)(X) = |x|^\alpha (\mathcal{F}y)(X), (\alpha > 0).$$

Lemme 2.10.1. *Soient $\alpha > 0$ et $[\alpha]$ la partie entière de α. Soit aussi une fonction $y(X)$ bornée avec ses dérivées $(D^k y)(X)$, $(|k| = [\alpha] + 1)$.*
L'intégrale hypersingulaire $(D^\alpha f)(X)$ dans (2.147) est alors absolument convergente. Si $l > 2[\frac{\alpha}{2}]$, alors cette intégrale n'est que conditionnellement convergente.
La dérivation fractionnaire de Riesz (2.147) donne un opérateur inverse au potentille de Riesz (2.145).

Propriété 2.10.5. *La formule suivante :*

$$D^\alpha I^\alpha f = f, (\alpha > 0) \tag{2.149}$$

vaut pour les fonctions "suffisamment bon" f, en particulier, pour f appartenant à l'espace de Lizorkin Φ.

De plus, l'inversion (2.149) est également vérifie pour le potentiel de Riesz (2.145) dans le cadre des espaces L^p : $f(X) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$. Ici la dérivée fractionnaire de Riesz D^α est considérée comme convergente conditionnellement dans le sens où

$$D^\alpha y = \lim_{\varepsilon \to 0+} D^\alpha_\varepsilon y, \tag{2.150}$$

où $D^\alpha_\varepsilon y$ est l'intégrale hypersingulaire tronquée définie par :

$$(D^\alpha_\varepsilon y)(X) = \frac{1}{d_n(l,\alpha)} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{(\Delta^l_t y)(X)}{|t|^{n+\alpha}} dt, (l > \alpha, \alpha > 0, \varepsilon > 0)$$

et la limite est prise dans la norme de l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.10.5. *Soient $0 < \alpha < n$ et $y = I^\alpha f$ avec $f(X) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \frac{n}{\alpha})$, alors :*

$$f(X) = (D^\alpha y)(X),$$

où $(D^\alpha y)(X)$ est compris dans le sens de (2.150), avec la limite étant prise dans la norme de l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2.10.2. *Si $0 < \alpha < n$ et $f(X) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \dfrac{n}{\alpha})$, alors :*

$$f(X) = (D^\alpha I^\alpha f)(X),$$

où $(D^\alpha I^\alpha f)(X)$ s'entend au sens de (2.150) et

$$(D^\alpha I^\alpha f)(X) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (D^\alpha_\varepsilon I^\alpha f)(X),$$

avec la limite étant prise dans la norme de l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIES ORDINAIRES. THÉORÈMES D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Ce chapitre est consacré à prouver l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes de type Cauchy pour des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire sur un intervalle borné de l'axe réel dans des espaces des fonctions sommables et des fonctions continues. Les équations différentielles fractionnaires non linéaires et linéaires dans les cas un-dimensionnels et vectoriels sont considérées. Les résultats correspondants pour le problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires sont présentés.

3.1 Introduction et un bref aperçu des résultats

Dans cette section, on va donner un bref aperçu des résultats des théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire sur un intervalle borné de l'axe réel.

La plupart des recherches dans ce domaine impliquent l'existence et l'unicité des solutions aux équations différentielles fractionnaires avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ définie pour $(Re(\alpha) > 0)$ par (2.5). L'équation différentielle non linéaire "modèle" d'ordre fractionnaire α, $(Re(\alpha) > 0)$ sur un intervalle borné $[a, b]$ de l'axe réel $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ à la forme suivante :

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f\left(x, y(x)\right), (Re(\alpha) > 0, x > a), \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales

$$(D^{\alpha-k}_{a+})(a+) = b_k \text{ avec } b_k \in \mathbb{C}, (k = 1, \cdots, n), \tag{3.2}$$

où $n = Re(\alpha) + 1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$. La notation $(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+)$ signifie que la limite est prise à presque tous les points du voisinage droit $(a, a + \varepsilon)(\varepsilon > 0)$ de a comme suit :

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = \lim_{x \to a+} (D^{\alpha-k}_{a+}y)(x), (1 \leq k \leq n-1) \tag{3.3}$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(a+) = \lim_{x\to a+}(D_{a+}^{\alpha-n}y)(x), (\alpha \neq n), \tag{3.4}$$

si $\alpha = n$, alors :

$$(D_{a+}^{0}y)(a+) = y(a),$$

où I_{a+}^{α} est l'opérateur d'intégration d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville défini par (2.1).
En particulier, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors conformément à (2.7) et (3.4), le problème (3.1)-(3.2) est réduit au problème de Cauchy usuel pour l'équation différentielle ordinaire à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x)\right) \text{ et } y^{(n-k)}(a) = b_k \text{ avec } b_k \in \mathbb{C}, (k = 1, \cdots, n). \tag{3.5}$$

Le problème (3.1)-(3.2) est donc appelé un problème de type Cauchy.
Lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$, le problème (3.1)-(3.2) prend la forme :

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f\left(x, y(x)\right) \text{ et } (I_{a+}^{1-\alpha}y)(a+) = b, (b \in \mathbb{C}) \tag{3.6}$$

et ce problème peut être réécrit sous la forme d'un problème de type Cauchy pondéré

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f\left(x, y(x)\right) \text{ et } \lim_{x\to a+}(x-a)^{1-\alpha}y(x) = c, (c \in \mathbb{C}). \tag{3.7}$$

On discute sur les problèmes ci-dessus en suivant leur chronologie historique, ils étaient basés sur la réduction du problème (3.1)-(3.2) à l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante du deuxième type :

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left(t, y(t)\right)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, (x > a). \tag{3.8}$$

Pitcher et Sewell [?] en 1938, ont d'abord considéré l'équation différentielle fractionnaire non linéaire (3.1) avec $0 < \alpha < 1$, à condition $f(x, y)$ qu'elle soit limitée dans une région spéciale G située dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

où la constante $M > 0$ ne dépend pas de x. Ils ont prouvé l'existence de la solution continue $y(x)$ pour l'équation intégrale non linéaire correspondante de la forme (3.8) avec $0 < \alpha < 1$, $n = 1$ et $b_1 = 0$.

3.2 Équations avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville dans l'espace des fonctions sommables

Dans cette section, on va donner les conditions d'existance d'une solution globale unique au problème de type Cauchy (3.1)-(3.2) dans l'espace $\mathbf{L}^{\alpha}(a, b)$ défini pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ par :

$$\mathbf{L}^{\alpha}(a, b) = \left\{y \in L(a, b) : D_{a+}^{\alpha}y \in L(a, b)\right\}. \tag{3.9}$$

Ici $L(a, b) = L_1(a, b)$ est l'espace des fonctions sommables dans un intervalle borné $[a, b]$ de l'axe réel $\mathbb{R}$ défini par (1.1) avec $p = 1$. on généralise le résultat obtenu au problème de type Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires plus générales que (3.1) et au problème de type Cauchy (3.1)-(3.2). Nos recherches sont basées sur la réduction des problèmes considérés aux équations intégrales de Volterra du deuxième type et sur l'utilisation du théorème de point fixe de Banach.

3.2.1 Équivalence du problème de type Cauchy et de l'équation intégrale de Volterra

Dans cette sous-section, on prouve que le problème de type Cauchy (3.1)-(3.2) et l'équation intégrale non linéaire de Volterra (3.8) sont équivalents dans le sens que si $y(x) \in L(a,b)$ satisfait l'une de ces relations, il satisfait également l'autre. On prouve un tel résultat en supposant qu'une fonction $f(x,y)$ appartient à $L(a,b)$ pour tout $y \in G \subset \mathbb{C}$. Pour cela on a besoin de l'assertion auxiliaire du lemme 2.1.1(a).

Lemme 3.2.1. *L'opérateur d'intégration fractionnelle I^{α}_{a+} avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ est borné dans $L(a,b)$:*

$$\|I^{\alpha}_{a+}g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{Re(\alpha)}}{Re(\alpha)|\Gamma(\alpha)|}\|g\|_1. \tag{3.10}$$

En particulier, pour $\alpha > 0$, l'estimation (3.10) prend la forme :

$$\|I^{\alpha}_{a+}g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|g\|_1. \tag{3.11}$$

Ici et ailleurs dans ce chapitre, on comprend tout relations à tenir presque partout sur $[a,b]$. On considère d'abord le problème de type Cauchy (3.1)-(3.2) avec un réel $\alpha > 0$ $(n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N})$:

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f\left(x, y(x)\right), (\alpha > 0), \tag{3.12}$$

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k \text{ avec } b_k \in \mathbb{R}, (k = 1, \cdots, n = -[-\alpha]). \tag{3.13}$$

Théorème 3.2.1. *Soient $\alpha > 0$ et $n = -[-\alpha]$. Soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et soit $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$.*
Si $y(x) \in L(a,b)$ alors $y(x)$ vérifie presque partout les relations (3.12) et (3.13) si et seulement si $y(x)$ satisfait presque partout l'équation intégrale (3.8).

preuve 3.2.1. *On prouve d'abord la nécessité. Soit $y(x) \in L(a,b)$ satisfont presque partout les relations (3.12) et (3.13). Puisque $f(x,y) \in L(a,b)$, (3.12) signifie qu'il existe presque partout sur $[a,b]$ la dérivée fractionnaire $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \in L(a,b)$, d'après (2.7) et (2.10),*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}y)(x), n = -[-\alpha], \tag{3.14}$$

si $\alpha = 0$, alors :

$$(I^{0}_{a+}y)(x) = y(x)$$

et donc, $(I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) \in AC^n[a,b]$. On peut donc appliquer le lemme 2.1.5 (b), $\Big($avec $f(x)$ remplacé par $y(x)\Big)$ et conformément à (2.25), on obtient :

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{y^{(n-j)}_{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \tag{3.15}$$

avec

$$y_{n-\alpha}(x) = (I^{n-\alpha}_{a+}y)(x).$$

Par (2.8), on obtient :

$$y_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \left(I_{a+}^{(n-j)-(\alpha-j)} y\right)(x) = (D_{a+}^{\alpha-j} y)(x).$$

En utilisant cette relation et (3.13), on réécrit (3.15) sous la forme :

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) &= y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(D_{a+}^{\alpha-j} y)(a+)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} \\ &= y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j}. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Avec le Lemme 3.2.1, l'intégrale $\left(I_{a+}^{\alpha} f(t, y(t))\right)(x) \in L(a,b)$ *existe presque partout sur* $[a,b]$. *En appliquant l'opérateur* I_{a+}^{α} *aux deux côtés de (3.12) et en utilisant (3.16) et (2.1), on obtient l'équation (3.8) et donc la nécessité est prouvée.*
Maintenant, on prouve la suffisance. Soit $y(x)$ *satisfaire presque partout l'équation (3.8). En appliquant l'opérateur aux deux côtés de (3.8), on obtient :*

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) + \left[D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f\left(t, y(t)\right)\right](x). \qquad (3.17)$$

A partir d'ici, conformément à la formule (2.16) et le lemme 2.1.4 $\Big($*avec* $f(x)$ *remplacé par* $f(x, y(x))$, *on arrive à l'équation (3.12)*$\Big)$.
Maintenant, on montre que les relations dans (3.13) tiennent également. Pour cela, on applique les opérateurs $D_{a+}^{\alpha-k}$, $(k = 1, \cdots, n)$ *aux deux côtés dans (3.8). Si* $1 \leq k \leq n-1$, *alors conformément à (2.12) et (2.16) et la propriété 2.1.2* $\Big($*avec* $f(x)$ *remplacé par* $f(x, y(x))\Big)$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha-k} y)(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(D_{a+}^{\alpha-k}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x) + \left[D_{a+}^{\alpha-k} I_{a+}^{\alpha} f\left(t, y(t)\right)\right](x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)} (x-a)^{k-j} + I_{a+}^{k} f\left(t, y(t)\right)(x).\end{aligned}$$

donc

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{(k-j)!} (x-a)^{k-j} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t)) dt. \qquad (3.18)$$

Si $k = n$, *alors conformément à (3.4) et (2.11), de la même manière à (3.18), on obtient :*

$$(D_{a+}^{\alpha-n} y)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(n-j)!} (x-a)^{n-j} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t)) dt. \qquad (3.19)$$

En prenant dans (3.18) et (3.19) une limite $x \to a+$ *presque partout, on obtient les relations dans (3.13). Ainsi la suffisance est prouvée, ce qui complète la preuve du Théorème 3.2.1.*

Corollaire 3.2.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$.*

Si $y(x) \in L(a,b)$, alors $y(x)$ satisfait presque partout les relations (3.5) avec $b_k \in \mathbb{R}$, $(k = 1, \cdots, n)$ si et seulement si $y(x)$ satisfait presque partout l'équation intégrale

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(n-j)!}(x-a)^{n-j} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t))dt. \tag{3.20}$$

Théorème 3.2.2. *Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n - 1 < Re(\alpha) < n(n \in \mathbb{N})$. Soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ et soit $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(x,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$.*
Si $y(x) \in L(a,b)$, alors $y(x)$ satisfait presque partout les relations (3.1) et (3.2) si et seulement si $y(x)$ satisfait presque partout l'équation (3.8).
En particulier, si $0 < Re(\alpha) < 1$, alors $y(x)$ satisfait presque partout les relations dans (3.6) si et seulement si $y(x)$ satisfait presque partout l'équation (3.8).

3.2.2 Existence et unicité de la solution au problème de type Cauchy

Dans cette sous-section, on établit l'existence d'une solution unique au problème de type Cauchy (3.1)-(3.2) dans l'espace $\mathbf{L}^\alpha(a,b)$ défini dans (3.9) dans les conditions des théorèmes 3.2.1 et 3.2.2, avec une condition supplémentaire de type Lipschitzien sur $f(x,y)$ par rapport à la deuxième variable pour tout $x \in (a,b]$ et pour tout $y_1, y_2 \in G \subset \mathbb{C}$,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, (M > 0), \tag{3.21}$$

où $M > 0$ ne dépend pas de $x \in [a,b]$. D'abord, on dérive une solution unique au problème de Cauchy (3.1)-(3.2) avec un réel $\alpha > 0$.

Théorème 3.2.3. *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$. Soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ et soit $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$ et la condition* (3.21) *est satisfaite.*
Il existe alors une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.4)-(3.5) dans l'espace $\mathbf{L}^\alpha(a,b)$.

preuve 3.2.2. *Tout d'abord, nous prouvons l'existence d'une solution unique $y(x) \in L(a,b)$. Selon le théorème 3.2.1, il suffit de prouver l'existence d'une solution unique $y(x) \in L(a,b)$ à l'équation intégrale non linéaire de Volterra (3.8). Pour cela, on applique la méthode connue, pour les équations intégrales de Volterra non linéaires, de prouver d'abord le résultat sur une partie de l'intervalle $[a,b]$.*

L'équation (3.8) a du sens dans n'importe quel intervalle $[a,x_1] \subset [a,b]$, $(a < x_1 < b)$. Choisissez x_1 de telle sorte que l'inégalité

$$M\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.22}$$

soit vérifiée, puis prouvez l'existence d'une solution unique $y(x) \in L(a,x_1)$ à l'équation (3.8) sur l'intervalle $[a,x_1]$. Pour cela, on utilise le théorème de point fixe de Banach donné *comme Théorème 1.11.3 dans la section 1.13 pour l'espace $L(a,x_1)$, qui est clairement un espace métrique complet avec la distance :*

$$d(y_1,y_2)=\|y_1-y_2\|_1=\int_a^{x_1}|y_1(x)-y_2(x)|dx.$$

On réécrive l'équation intégrale (3.8) sous la forme $y(x)=(Ty)(x)$, où

$$(Ty)(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \tag{3.23}$$

avec

$$y_0(x)=\sum_{j=1}^n\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}. \tag{3.24}$$

Pour appliquer le Théorème 1.11.3, on doit prouver ce qui suit :
- *Si $y(x)\in L(a,x_1)$, alors $(Ty)(x)\in L(a,x_1)$;*
- *Pour tout $y_1,y_2\in L(a,x_1)$, l'estimation suivante est vérifie :*

$$\|Ty_1-Ty_2\|_1\le\omega\|y_1-y_2\|_1,\ \text{avec } \omega=M\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.25}$$

Il résulte de (3.24) *que $y_0(x)\in L(a,x_1)$. Puisque $f(x,y)\in L(a,b)$, par le lemme 3.2.1 (avec $b=x_1$ et $g(t)=f(t,y(t))$), l'intégrale à droit dans* (3.23) *appartient également à $L(a,x_1)$ et donc $(Ty)(x)\in L(a,x_1)$. Maintenant, on prouve l'estimation (3.25).*
Par (3.23)-(3.24) et (3.9), en utilisant la condition Lipschitzienne (3.21) et en appliquant la relation (3.11) (avec $b=x_1$ et $g(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))$), nous avons :

$$\begin{aligned}\|Ty_1-Ty_2\|_{L(a,x_1)} &\le \left\|I_{a+}^\alpha\left[\left|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\right|\right]\right\|_{L(a,x_1)}\\ &\le \left\|I_{a+}^\alpha\left[\left|y_1(t)-y_2(t)\right|\right]\right\|_{L(a,x_1)}\\ &\le M\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|y_1(x)-y_2(x)\right\|_{L(a,x_1)},\end{aligned}$$

qui donne (3.25). Conformément à (3.22), $0<\omega<1$, et donc (par le théorème 1.11.3) il existe une solution unique $y^*(x)\in L(a,x_1)$ à l'équation (3.8) sur l'intervalle $[a,x_1]$.
Selon le théorème 1.11.3, la solution y^* est obtenue comme limite d'une suite convergente $(T^my_0^*)(x)$:

$$\lim_{m\to+\infty}\|T^my_0^*-y^*\|_{L(a,x_1)}=0, \tag{3.26}$$

où $y_0^*(x)$ est toute fonction dans $L(a,b)$. Si au moins un $b_k\neq0$ dans la condition initiale (3.13)*, on peut prendre $y_0^*(x)=y_0(x)$ avec $y_0(x)$ défini par (3.24).*
Par (3.23), la suite $(T^my_0^*)(x)$ est définie par les formules de récursion

$$(T^my_0^*)(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f\big(t,(T^{m-1}y_0^*)(t)\big)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,(m=1,2,\cdots).$$

Si on note $y_m(x)=(T^my_0^*)(x)$, alors la dernière relation prend la forme :

$$y_m(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f\big(t,y_{m-1}(t)\big)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,(m\in\mathbb{N})$$

et (3.26) *peut être réécrite comme suit :*

$$\lim_{m\to+\infty}\|y_m - y^*\|_{L(a,x_1)} = 0.$$

Cela signifie que nous avons effectivement appliqué la méthode d'approximations successive pour trouver une solution unique $y^*(x)$ à l'équation intégrale (3.8) sur $[a, x_1]$. On considère ensuite l'intervalle $[x_1, x_2]$, où $x_2 = x_1 + h_1$ et $h_1 > 0$ sont tels que $x_2 < b$. Réécrivez l'équation (3.8) sous la forme :

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x}\frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt + \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x_1}\frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Puisque la fonction $y(t)$ est définie de manière unique sur l'intervalle $[a, x_1]$, la dernière intégrale peut être considérée comme la fonction connue, et on réécrit la dernière équation comme :

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x}\frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \tag{3.27}$$

où $y_{01}(x)$ est définie par :

$$y_{01}(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x_1}\frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \tag{3.28}$$

En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, nous déduisons qu'il existe une solution unique $y^*(x) \in L(x_1, x_2)$ à l'équation (3.8) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. En prenant l'intervalle suivant $[x_2, x_3]$, où $x_3 = x_2 + h_2$ et $h_2 > 0$ sont tels que $x_3 < b$ et en répétant ce processus, on conclut qu'il existe une solution unique $y^*(x) \in L(a, b)$ pour l'équation (3.8) *sur l'intervalle $[a, b]$.*
Ainsi, il existe une solution unique $y(x) = y^*(x) \in L(a, b)$ à l'équation intégrale de Volterra (3.8) et donc au problème de type Cauchy (3.12)-(3.13).

Pour compléter la démonstration du théorème 3.2.3, on doit montrer qu'une telle solution unique $y(x) \in L(a, b)$ appartient à l'espace $\mathbf{L}^\alpha(a, b)$. Conformément à (3.9), il suffit de prouver que $(D^\alpha_{a+}y)(x) \in L(a, b)$. Par la preuve ci-dessus, la solution $y(x) \in L(a, b)$ est une limite de la suite $y_m(x) \in L(a, b)$:

$$\lim_{m\to+\infty}\|y_m - y\|_1 = 0, \tag{3.29}$$

avec le choix de certains y_m sur chacun $[a, x_1], \cdots, [x_{L-1}, b]$. Par (3.12) et (3.21) on a :

$$\left\|D^\alpha_{a+}y_m - D^\alpha_{a+}y\right\|_1 = \|f(x, y_m) - f(x, y)\|_1 \le M\|y_m - y\|_1.$$

Ainsi, par (3.29)*, on obtient :*

$$\lim_{m\to+\infty}\left\|D^\alpha_{a+}y_m - D^\alpha_{a+}y\right\|_1 = 0$$

et donc $(D^\alpha_{a+}y)(x) \in L(a, b)$. Ceci complète la preuve du Théorème 3.2.3.

Corollaire 3.2.2. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$, soit $f : [a, b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(x, y) \in L(a, b)$ pour tout $y \in G$ et (3.21) est vérifie.*
Alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de Cauchy (3.5) dans l'espace $\mathbf{L}^n(a, b)$:

$$\mathbf{L}^n(a, b) = \left\{y \in L(a, b) : y^{(n)} \in L(a, b)\right\}.$$

Le théorème 3.2.3 est étendu d'un réel $\alpha > 0$ à un complexe $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$.

Théorème 3.2.4. *Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $n - 1 < Re(\alpha) < n$, $(n \in \mathbb{N})$ et G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$, soit $f : (a, b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(x, y) \in L(a, b)$ pour tout $y \in G$ et la condition (3.21) soit vérifiée.*
Alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.1)-(3.2) dans l'espace $\mathbf{L}^\alpha(a, b)$ défini dans (3.9).
En particulier, si $0 < Re(\alpha) < 1$, alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.6).

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) = f(x, y(x)),\ (I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = b \in \mathbb{C}, (0 < Re(\alpha) < 1) \tag{3.30}$$

dans l'espace $\mathbf{L}^\alpha(a, b)$.

preuve 3.2.3. *La preuve du théorème 3.2.4 est similaire à la preuve du théorème 3.2.3, si on utilise l'inégalité*

$$M\frac{(x_1 - a)^{Re(\alpha)}}{Re(\alpha)|\Gamma(\alpha)|} < 1$$

au lieu de celle dans (3.22).

3.2.3 Le problème de type Cauchy pondéré

Lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$, le résultat du théorème 3.2.4 reste vrai pour le problème de type Cauchy pondéré (3.7), avec $c \in \mathbb{C}$

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) = f(x, y(x)),\ \lim_{x\to a+}\left[(x - a)^{1-\alpha}y(x)\right] = c.(0 < Re(\alpha) < 1) \tag{3.31}$$

Sa preuve est basée sur l'assertion préliminaire suivante.

Lemme 3.2.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $(0 < Re(\alpha) < 1)$ et soit $y(x)$ une fonction mesurable de Lebesgue sur $[a, b]$.*

a) S'il existe presque partout une limite

$$\lim_{x\to a+}\left[(x - a)^{1-\alpha}y(x)\right] = c \in \mathbb{C}, \tag{3.32}$$

alors il existe aussi presque partout une limite

$$(I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = \lim_{x\to a+}(I^{1-\alpha}_{a+}y)(x) = c\Gamma(\alpha).$$

b) S'il existe presque partout une limite

$$\lim_{x\to a+}(I^{1-\alpha}_{a+}y)(x) = b \in \mathbb{C}, \tag{3.33}$$

et s'il existe la limite $\lim_{x\to a+}\left[(x - a)^{1-\alpha}y(x)\right]$, alors :

$$\lim_{x\to a+}\left[(x - a)^{1-\alpha}y(x)\right] = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}. \tag{3.34}$$

preuve 3.2.4. *Choisissez un* $\epsilon > 0$ *arbitraire. Par (3.32) il existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tel que :*

$$|(t-a)^{1-\alpha}y(t) - c| < \epsilon \frac{|\Gamma(1-\alpha)|}{\Gamma\left(Re(\alpha)\right)\Gamma\left(1-Re(\alpha)\right)}$$

pour $a < t < a+\delta$. *D'après* (2.11),

$$\Gamma(\alpha) = (I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-1})(x), (0 < Re(\alpha) < 1).$$

Utiliser cette égalité et prendre (2.1) *en compte, on obtient :*

$$\begin{aligned}
|(I^{1-\alpha}_{a+}y)(x) - c\Gamma(\alpha)| &= |(I^{1-\alpha}_{a+}y)(x) - c(I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-1})(x)| \\
&\leq \frac{1}{|\Gamma(1-\alpha)|}\int_a^x (x-t)^{-Re(\alpha)}\left|y(t) - c(t-a)^{\alpha-1}\right| dt \\
&\leq \frac{1}{|\Gamma(1-\alpha)|}\int_a^x (x-t)^{-Re(\alpha)}(t-a)^{Re(\alpha)-1}\left|(t-a)^{\alpha-1}y(t) - c\right| dt.
\end{aligned}$$

Si on choisit $a < x < a+\delta$, *alors* $a < t < x < a+\delta$ *et on peut appliquer l'estimation (3.28) et la formule (2.11) pour obtenir :*

$$\left|(I^{1-\alpha}_{a+}y)(x) - c\Gamma(\alpha)\right| \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(Re(\alpha))}\left(I^{1-Re(\alpha)}_{a+}(t-a)^{Re(\alpha)-1}\right)(x) = \epsilon,$$

ce qui prouve l'assertion (a) du lemme 3.2.2.
On suppose que la limite dans (3.34) *soit égale à c :*

$$\lim_{x \to a+}\left[(x-a)^{1-\alpha}y(x)\right] = c.$$

Ensuite, par le Lemme 3.2.2 (a), on a :

$$(I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = \lim_{x\to a+}(I^{1-\alpha}_{a+}y)(x) = c\Gamma(\alpha),$$

et donc, conformément à (3.33), $c = \dfrac{b}{\Gamma(\alpha)}$, *ce qui prouve (3.34).*
A partir du Théorème 3.2.4 et du Lemme 3.2.2, on obtient le résultat d'existence et d'unicité pour le problème de type Cauchy pondéré (3.31).

Théorème 3.2.5. *Soient* $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < Re(\alpha) < 1$ *et* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{C}$ *et soit* $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ *une fonction telle que* $f(x,y) \in L(a,b)$ *pour tout* $y \in G$ *et (3.21) soit vérifie.*

Alors il existe une solution unique $y(x)$ *au problème de type Cauchy pondéré (3.31) dans l'espace* $\mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$ *défini dans (3.9).*

preuve 3.2.5. *Si* $y(x)$ *satisfait aux conditions (3.31), alors selon le Lemme 3.2.2 (a),* $y(x)$ *satisfait aussi aux conditions (3.30) avec* $b = c\Gamma(\alpha)$ *:*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f(x,y(x)),\ (I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = c\Gamma(\alpha) \in \mathbb{C}, (0 < Re(\alpha) < 1).$$

Selon le Théorème 3.2.4, il existe une solution unique $y(x) \in \mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$ *à ce problème. D'après le Lemme 3.2.2 (b),* $y(x)$ *est également une solution au problème de Cauchy pondéré (3.31). Ce* $y(x)$ *sera une solution unique de (3.31). En effet, si on suppose que le problème pondéré* (3.31) *a deux solutions différentes dans* $\mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$, *alors par le Lemme 3.2.2 (a), il y aura aussi deux solutions différentes au problème de type Cauchy* (3.30) *dans* $\mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$, *ce qui contredit l'unicité de la solution.*

3.2.4 Problèmes de type Cauchy généralisés

Les résultats obtenus dans les sous-sections 3.2.1-3.2.3 s'étendent aux problèmes de type Cauchy plus généraux que (3.1)-(3.2) aux conditions initiales (3.1) :

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f\left[x, y(x), (D_{a+}^{\alpha_1}y)(x), \cdots, (D_{a+}^{\alpha_l}y)(x)\right], \tag{3.35}$$

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = b_k,\ b_k \in \mathbb{C}\ (k = 1, \cdots, n). \tag{3.36}$$

Théorème 3.2.6. *Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ $(n-1 < Re(\alpha) < n)$; $n \in \mathbb{N})$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$.*

Soient $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, l)$ telle que :

$$0 = \alpha_0 < Re(\alpha_1) < \cdots < Re(\alpha_l) < Re(\alpha).$$

Soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}^{l+1}$ et soit $f : (a, b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f[x, y, y_1, \cdots, y_l] \in L(a, b)$ pour tout $(y, y_1, \cdots, y_l) \in G$.

Si $y(x) \in L(a, b)$, alors $y(x)$ satisfait p.p les relations (3.35) et (3.36) si et seulement si $y(x)$ satisfait p.p l'équation intégrale

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1}y)(t), \cdots, (D_{a+}^{\alpha_l}y)(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a). \end{aligned}$$

En particulier, si $0 < Re(\alpha) < 1$, $x > a$ et $b_0 \in \mathbb{C}$, alors $y(x)$ satisfait p.p les relations :

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f\left[x, y(x), (D_{a+}^{\alpha_1}y)(x), \cdots, (D_{a+}^{\alpha_l}y)(x)\right],\ (I_{a+}^{1-\alpha}y)(a+) = b_0 \tag{3.37}$$

si et seulement si $y(x)$ satisfait p.p l'équation intégrale

$$y(x) = \frac{b_0(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1}y)(t), \cdots, (D_{a+}^{\alpha_l}y)(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Théorème 3.2.7. *soit les conditions du théorème 3.2.6 sont valides, soit $f[x, y, y_1, \cdots, y_l]$ satisfaire la condition Lipschitzien :*

$$\left| f\Big[x, y(x), y_1(x), \cdots, y_l(x)\Big] - f\Big[x, Y, Y_1, \cdots, Y_l\Big] \right| \leq A_l \left[\sum_{j=0}^{l} \left|y_j - Y_j\right|\right], \tag{3.38}$$

pour tout $x \in (a, b]$ et $(y, y_1, \cdots, y_l)$, $(Y, Y_1, \cdots, Y_l) \in G$ et où $A_l > 0$ ne dépend pas de $x \in [a, b]$ et soit $(D_{a+}^{\alpha_j - k_j}y)(a+) = b_{k_j} \in \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, n_j)$ être des nombres fixes, où $n_j = [Re(\alpha_j)] + 1$ pour $\alpha_j \notin \mathbb{N}$ et $n_j = \alpha_j$ pour $\alpha_j \in \mathbb{N}$.

Alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.35) − (3.36) dans l'espace $\mathbf{L}^{\alpha}(a, b)$.
En particulier, si $0 < Re(\alpha) < 1$ et $(I_{a+}^{1-\alpha_j}y)(a+) = b_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, l)$ sont des nombres fixes , alors il existe une solution unique $y(x) \in \mathbf{L}^{\alpha}(a, b)$ au problème de type Cauchy (3.37) et le problème de type de Cauchy pondéré

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f\left[x, y(x), (D_{a+}^{\alpha_1}y)(x), \cdots, (D_{a+}^{\alpha_l}y)(x)\right],$$

$$\lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha}y(x)\right] = c \in \mathbb{C}.$$

Théorème 3.2.8. *Soient $k = 1, \cdots, m$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $n_k - 1 < Re(\alpha_k) < n_k$ $(n_k \in \mathbb{N})$ ou $\alpha_k \in \mathbb{N}$. Soit G un ouvert dans $\mathbb{C}^m$ et soit $f_k : (a, b] \times G \to \mathbb{C}$ être des fonctions telles que $f_k[x, y_1, \cdots, y_m] \in L(a, b)$ pour tout $(y_1, \cdots, y_m) \in G$.*

Si $y_k(x) \in L(a, b)$, alors $y_k(x)$ satisfait p.p le système des relations :

$$(D^{\alpha_r}_{a+} y_r)(x) = f_k\left[x, y_1(x), \cdots, y_m(x)\right] \;\; (r = 1, \cdots, m), \tag{3.39}$$

$$(D^{\alpha_k - j_k}_{a+} y_k)(a+) = b_{j_k} \in \mathbb{C} \;\; (k = 1, \cdots, m; j_k = 1, \cdots, n_k) \tag{3.40}$$

si et seulement si $y_k(x)$ satisfait p.p le système d'équations intégrales

$$\begin{aligned} y_k(x) &= \sum_{j_k=1}^{n_k} \frac{b_{j_k}}{\Gamma(\alpha_k - j_k + 1)} (x-a)^{\alpha_i - j_k} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_a^x \frac{f_k\left[t, y_1(t), \cdots, y_m(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha_k}} \;\; (k = 1, \cdots, m). \end{aligned}$$

En particulier, si $0 < Re(\alpha_k) < 1$ et $k = 1, \cdots, m$, alors $y_k(x)$ satisfait p.p les relations

$$(D^{\alpha_k}_{a+} y_k)(x) = f_k\left[x, y_1(x), \cdots, y_m(x)\right], \tag{3.41}$$

$$(I^{1-\alpha_k}_{a+} y_k)(a+) = b_k, \; b_k \in \mathbb{C}, \tag{3.42}$$

si et seulement si $y_k(x)$ satisfait p.p le système d'équations intégrales

$$y_k(x) = \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - 1)} (x-a)^{\alpha - 1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_a^x \frac{f_k\left[t, y_1(t), \cdots, y_m(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha_k}},$$

pour tout $k = 1, \cdots, m$

Théorème 3.2.9. *Soit les conditions du théorème 3.2.8 sont valides et satisfaisons les conditions de Lipschitz*

$$\Big| f_k(x, y_1, \cdots, y_m) - f_k(x, Y_1, \cdots, Y_m) \Big| \leq \sum_{k=1}^{m} A_k |y_k - Y_k|, \; (A_k > 0; k = 1, \cdots, m),$$

pour tout $x \in (a, b]$ et pour tout $(y_1, \cdots, y_m), (Y_1, \cdots, Y_m) \in G$ et où $A_k > 0$ ne dépend pas de $x \in [a, b]$.

Alors il existe une solution unique $(y_1, \cdots, y_m)$ au problème de type Cauchy $(3.39) - (3.40)$ dans l'espace $\mathbf{L}^{|\alpha|}[(a, b)^m]$.

En particulier, si $0 < Re(\alpha_k) < 1$, alors il existe une solution unique au problème de type Cauchy $(3.41) - (3.42)$ et au problème de type Cauchy pondéré

$$(D^{\alpha_k}_{a+} y_k)(x) = f_k\left[x, y_1(x), \cdots, y_m(x)\right], \; (k = 1, \cdots, m),$$

$$\lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha_k} y_k(x)\right] = b_k \in \mathbb{C}, \; (k = 1, \cdots, m).$$

3.2.5 Problèmes de type Cauchy pour les équations linéaires

À partir des Théorèmes 3.2.4 et 3.2.5, on dérive les résultats correspondants pour les problèmes de type Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$.

Corollaire 3.2.3. *Soit* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *ou* $\alpha \in \mathbb{C}$, *tel que* $n - 1 < Re(\alpha) < n$, $(n \in \mathbb{N})$ *et soit* $g(x) \in L(a, b)$.
Si $a(x) \in L^\infty(a, b)$ *ou si* $a(x)$ *est borné sur* $[a, b]$, *alors le problème de type Cauchy pour l'équation différentielle linéaire suivante d'ordre* α *et* $b_k \in \mathbb{C}$, $(k = 1, \cdots, n)$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = a(x)y(x) + g(x),\ (D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k$$

a une solution unique $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^\alpha(a, b)$.
En particulier, il existe une solution unique $y(x) \in \mathbf{L}^\alpha(a, b)$ *au problème :*

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \lambda(x - a)^{\beta} y(x) + g(x),\ (D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k$$

où $\lambda, \beta \in \mathbb{C}, (Re(\beta) \geq 0)$.

Corollaire 3.2.4. *Soit* $\alpha = 1$ *ou* $\alpha \in \mathbb{C}$, $(0 < Re(\alpha) < 1)$. *Soient* $c, b_0 \in \mathbb{C}$ *et* $g(x) \in L(a, b)$.

Si $a(x) \in L^\infty(a, b)$ *ou si* $a(x)$ *est borné sur* $[a, b]$, *alors le problème de type Cauchy*

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = a(x)y(x) + g(x),\ (I_{a+}^{1-\alpha} y)(a+) = b_0$$

et le problème de type Cauchy pondéré

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = a(x)y(x) + g(x),\ \lim_{x \to a+} \left[(x - a)^{1-\alpha} y(x)\right] = c$$

ont une solution unique $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^\alpha(a, b)$.
En particulier, l'un des problèmes de type Cauchy suivants,

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \lambda(x - a)^{\beta} y(x) + g(x),\ (I_{a+}^{1-\alpha} y)(a+) = b_0$$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \lambda(x - a)^{\beta} y(x) + g(x),\ \lim_{x \to a+} \left[(x - a)^{1-\alpha} y(x)\right] = c$$

a une solution unique $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^\alpha(a, b)$ *avec* $\lambda, \beta \in \mathbb{C}, (Re(\beta) \geq 0)$.
Les résultats donnés dans les Corollaires 3.2.3 et 3.2.4 peuvent être étendus à des équations différentielles fractionnaires plus générales.

Corollaire 3.2.5. *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$, $(n - 1 < Re(\alpha) < n, n \in \mathbb{N})$ *et soit* $n = [Re(\alpha)] + 1$ *pour* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *et* $n = \alpha$ *pour* $\alpha \in \mathbb{N}$. *Soient* $l \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha_j \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots, l)$ *tel que :*

$$0 = \alpha_0 < Re(\alpha_1) < \cdots < Re(\alpha_l) < Re(\alpha) \tag{3.43}$$

soit $g(x) \in L(a, b)$. *Si* $a_j(x) \in L^\infty(a, b)$ *ou si* $a_j(x)(j = 0, 1, \cdots, l)$ *sont bornés sur* $[a, b]$, *alors le problème de type Cauchy suivant pour l'équation différentiel linéaire d'ordre* α, *avec* $b_k \in \mathbb{C}$ *et* $k = 1, \cdots, n$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) + \sum_{j=0}^{l} a_j(x)(D_{a+}^{\alpha_j} y)(x) = g(x),\ (D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k$$

a une solution unique $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$.

En particulier, il existe une solution unique $y(x) \in \mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$ *au problème de type Cauchy pour l'équation*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) + \sum_{j=0}^{l} \lambda_j (x-a)^{\beta_j} (D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) = g(x),\ (D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k$$

où $\lambda_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $(Re(\beta_j) \geq 0)$, $(j = 0, 1, \cdots, l)$.

Corollaire 3.2.6. *Soit* $\alpha = 1$ *ou* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < Re(\alpha) < 1$. *Soient* $l \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $(j = 1, \cdots, l)$ *tel que les conditions dans (3.43) sont satisfaits et soit* $g(x) \in L(a,b)$.
Si $a_j(x) \in L^{\infty}(a,b)$ *ou si* $a_j(x) (j = 0, 1, \cdots, l)$ *sont bornés sur* $[a,b]$ *et* $c, b_0 \in \mathbb{C}$, *alors le problème de type Cauchy*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) + \sum_{j=0}^{l} a_j(x) (D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) = g(x),\ (I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = b_0$$

et le problème de type Cauchy pondéré

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) + \sum_{j=0}^{l} a_j(x) (D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) = g(x),\ \lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha} y(x)\right] = c$$

ont une solution unique $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$.
En particulier, avec l'un des problèmes de type Cauchy suivants :

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) + \sum_{j=0}^{l} \lambda_j (x-a)^{\beta_j} (D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) = g(x),\ (I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = b_0$$

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) + \sum_{j=0}^{l} \lambda_j (x-a)^{\beta_j} (D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) = g(x),\ \lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha} y(x)\right] = c$$

où $\lambda_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $(Re(\beta_j) \geq 0)$, $(j = 0, 1, \cdots, l)$ *a une solution unique* $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^{\alpha}(a,b)$.

Corollaire 3.2.7. *Soient* $j = 1, \cdots, m$ *et* $\alpha_j = n_j \in \mathbb{N}$ *ou* $\alpha_j \in \mathbb{C}$ *tel que* $n_j - 1 < Re(\alpha_j) < n_j$, $(n_j \in \mathbb{N})$ *et soit* $g_j(x) \in L(a,b)$.

Si $a_j(x) \in L^{\infty}(a,b)$ *ou si* $a_j(x)$ *sont bornés sur* $[a,b]$, *alors le système du problème de type Cauchy*

$$\begin{aligned} (D^{\alpha_j}_{a+}y_j)(x) &= a_j(x) y_j(x) + g_j(x) \\ (D^{\alpha_j - k_j}_{a+}y)(a+) &= b_{k_j} \in \mathbb{C}, (k_j = 1, \cdots, n_j \text{ avec } j = 1, \cdots, m) \end{aligned} \tag{3.44}$$

a une solution unique $(y_1, \cdots, y_m)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^{|\alpha|}[(a,b)^m]$.
En particulier, le système de type Cauchy problème

$$(D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) = \lambda_j (x-a)^{\beta_j} y_j(x) + g_j(x)$$

où $\lambda_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $Re(\beta_j) \geq 0$, $(j = 1, \cdots, m)$ $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbf{L}^{|\alpha|}[(a,b)^m]$ *et aux conditions initiales (3.44) a une solution unique* $(y_1, \cdots, y_m)$ *dans l'espace* $\mathbf{L}^{|\alpha|}[(a,b)^m]$.

Corollaire 3.2.8. *Soient $j = 1, \cdots, m$ et $\alpha_j = 1$ ou $\alpha_j \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(\alpha_j) < 1$ et soit $g_j(x) \in L(a,b)$.*
Si $a_j(x) \in L^\infty(a,b)$ ou si $a_j(x)$ sont bornés sur $[a,b]$, alors le système des problèmes de type Cauchy

$$(D_{a+}^{\alpha_j} y_j)(x) = a_j(x) y_j(x) + g_j(x),\ (I_{a+}^{1-\alpha} y)(a+) = b_j$$

avec $b_j, c_j \in \mathbb{C}$ et $j = 1, \cdots, m$ et le système des problèmes de type Cauchy pondérés

$$(D_{a+}^{\alpha_j} y_j)(x) = a_j(x) y_j(x) + g_j(x),\ \lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha_j} y_j(x) \right] = c_j$$

ont une solution unique $(y_1, \cdots, y_m)$ dans l'espace $\mathbf{L}^{|\alpha|}[(a,b)^m]$.
En particulier, l'un ou l'autre système des problèmes de type Cauchy suivants :

$$(D_{a+}^{\alpha_j} y_j)(x) = \lambda_j (x-a)^{\beta_j} y_j(x) + g_j(x),\ (I_{a+}^{1-\alpha_j} y_j)(a+) = b_j$$

$$(D_{a+}^{\alpha_j} y_j)(x) = \lambda_j (x-a)^{\beta_j} y_j(x) + g_j(x),\ \lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha_j} y_j(x) \right] = c_j$$

avec $j = 1, \cdots, m$ et $\lambda_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $(Re(\beta_j) \geq 0)$ à $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbf{L}^{|\alpha|}[(a,b)^m]$ comme une solution unique.

3.3 Équations avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville dans l'espace des fonctions continues. Solution globale

Dans cette section, on donne les conditions d'une solution unique $y(x)$ au un problème de type Cauchy (3.1)-(3.2) dans l'espace $\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]$ défini pour $n-1 < \alpha \leq n$, $(n \in \mathbb{N})$ par :

$$\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b] = \left\{ y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b] : (D_{a+}^{\alpha} y)(x) \in C_{n-\alpha}[a,b] \right\}. \tag{3.45}$$

ici $C_{n-\alpha}[a,b]$ est un espace pondéré des fonctions continues de la forme (1.14) :

$$C_{n-\alpha}[a,b] = \left\{ g(x) : (x-a)^{n-\alpha} g(x) \in C[a,b],\ \|g\|_{C_{n-\alpha}} = \|(x-a)^{n-\alpha} g(x)\|_C \right\}. \tag{3.46}$$

En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{C}_0^n[a,b]$ coïncide avec l'espace $C^n[a,b]$.
On donne les conditions d'existence d'une solution globale continue $y(x)$ à ce problème de Cauchy sur $[a,b]$. Comme dans la section 3.2, notre approche est basée sur la réduction de ce problème à une équation intégrale de Volterra du deuxième type de la forme (3.8) et sur l'utilisation du théorème de point fixe de Banach. Les arguments ici sont fondamentalement les mêmes que ceux utilisés dans la section précédente, en utilisant les propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville dans les espaces pondérés $C_{n-\alpha}[a,b]$ au lieu de celles de $L(a,b)$. Par conséquent, nous donnerons des preuves schématiques pour l'essentiel, à l'exception de la preuve de l'unicité dans la section 3.3.2 où la technique de travail avec des fonctions dans les espaces $C_{n-\alpha}[a,b]$ est démontrée.

3.3.1 Équivalence du problème de type Cauchy et de l'équation intégrale de Volterra

Dans cette sous-section, on prouve l'équivalence du problème de type Cauchy (3.12)-(3.13) et de l'équation intégrale non linéaire de Volterra (3.8) dans le sens que si $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ satisfait l'une de ces équations, alors il satisfait également l'autre. Pour établir un tel résultat, nous supposons qu'une fonction $f(x,y)$ appartient à $C_{n-\alpha}[a,b]$ pour tout $y \in G \subset \mathbb{R}$. Pour cela, on a besoin de l'assertion auxiliaire qui découle du lemme 2.1.8 (a).

Lemme 3.3.1. *Si $\gamma \in \mathbb{R}$, $(0 \leq \gamma < 1)$, alors l'opérateur d'intégration fractionnaire I^{α}_{a+} avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ est borné dans $C_\gamma[a,b]$:*

$$\|I^{\alpha}_{a+}g\|_{C_\gamma} \leq (b-a)^{\alpha}\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\|g\|_{C_\gamma}. \tag{3.47}$$

On établit d'abord l'équivalence du problème de type Cauchy (3.12)-(3.13) et l'équation intégrale (3.8) dans l'espace (3.46).

Théorème 3.3.1. *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ pour tout $y \in G$.*

Si $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$, alors $y(x)$ satisfait les relations (3.12) et (3.13) si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra (3.8).

preuve 3.3.1. *On prouve d'abord la nécessité. Soit $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ satisfait (3.12)-(3.13).*
Puisque $f(x,y) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ et (3.12) signifie qu'il existe sur $[a,b]$ la dérivée fractionnaire $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$. Selon (2.7) et (2.10) la dérivée $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ a la forme (3.14) *et donc par le Lemme 3.3.1, $(I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) \in C^{n}_{n-\alpha}[a,b]$.*
Par conséquent, on peut appliquer le Lemme 2.1.9 (d), (avec $f(x) = y(x)$ et $\gamma = n-\alpha$) et conformément à (2.25) la relation (3.15) est vraie. En utilisant (3.13) et en prenant les mêmes arguments que dans la démonstration du Théorème 3.2.1, on représente (3.15) sous la forme (3.16) :

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}. \tag{3.48}$$

Par le lemme 3.3.1, l'intégrale $\left(I^{\alpha}_{a+}f(t,y(t))\right)(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$. En appliquant l'opérateur I^{α}_{a+} aux deux côtés de (3.12) et en utilisant (3.48) et (2.1), on obtient l'équation (3.8) et donc la nécessité est prouvée.
Maintenant, on prouve la suffisance. Soit $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ satisfaire l'équation (3.8). En appliquant l'opérateur D^{α}_{a+} aux deux côtés de (3.8), on a :

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\Big(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j}\Big)(x) + \Big(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f(t,y(t))\Big)(x).$$

De là, conformément à la formule (2.16) et au Lemme 2.1.9 (b) (avec $f(x)$ remplacé par $f(x,y(x))$, on arrive à l'équation (3.12).

En appliquant les opérateurs $D_{a+}^{\alpha-k}$, $(k = 1, \cdots, n)$ des deux côtés de (3.8) et en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du Théorème 3.2.1, on obtient des relations des formes (3.18) et (3.19) :

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t))dt \tag{3.49}$$

et

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(n-j)!}(x-a)^{n-j} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t))dt. \tag{3.50}$$

Application de la limite quand $x \to a+$ dans (3.49) et (3.50), on obtient les relations dans (3.13). Ainsi la suffisance est aussi prouvée, ce qui complète la preuve du Théorème 3.3.1.

Corollaire 3.3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C[a, b]$ pour tout $y \in G$.*
Si $y(x) \in C[a, b]$, alors $y(x)$ satisfait les relations dans (3.5) si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale (3.20).

3.3.2 L'existence et l'unicité de la solution globale au problème de type Cauchy

Dans cette sous-section, on établit l'existence d'une solution unique au problème de type Cauchy (3.12)-(3.13) dans l'espace $\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a, b]$ défini dans (3.45) dans les conditions du Théorème 3.3.1 et une condition Lipschitzienne supplémentaire (3.21).
On a besoin de l'affirmation préliminaire suivante.

Lemme 3.3.2. *Soient $\gamma \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $g \in C_\gamma[a, c]$ et $g \in C_\gamma[c, b]$, alors $g \in C_\gamma[a, b]$ et*

$$\|g\|_{C_\gamma[a,b]} \leq \max\left(\|g\|_{C_\gamma[a,c]}, \|g\|_{C_\gamma[c,b]}\right).$$

Il y a le résultat suivant.

Théorème 3.3.2. *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ pour tout $y \in G$ et la condition (3.21) soit vérifiée.*

Il existe alors une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.12)-(3.13) dans l'espace $\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a, b]$.

preuve 3.3.2. *Tout d'abord, on prouve l'existence d'une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$. Selon le théorème 3.3.1, il suffit de prouver l'existence d'une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ à l'équation intégrale non linéaire de Volterra (3.8). Pour cela, comme dans la démonstration du théorème 3.2.3, on applique la méthode connue pour les équations intégrales de Volterra non linéaires.*
L'équation (3.8) a du sens dans n'importe quel intervalle $[a, x_1] \in [a, b]$, $(a < x_1 < b)$.
Choisissez x_1 telle que l'inégalité :

$$M(x_1 - a)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)} < 1 \tag{3.51}$$

est vérifie, puis prouvez l'existence d'une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$ à l'équation (3.8) *sur l'intervalle $[a, x_1]$. Pour cela, on utilise le théorème du point fixe de Banach pour l'espace $C_{n-\alpha}[a, b]$, qui est l'espace métrique complet avec la distance donnée par :*

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} = \max_{x\in[a,x_1]} \left|(x-a)^{n-\alpha}\Big(y_1(x) - y_2(x)\Big)\right|.$$

On réécrive l'équation intégrale (3.8) sous la forme :

$$y(x) = (Ty)(x),$$

où T est l'opérateur défini dans (3.23) avec $y_0(x)$ donné par (3.24). Pour appliquer le théorème 1.11.3, on doit prouver ce qui suit :

- *Si $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$, alors $(Ty)(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$*

et

- *Pour tout $y_1, y_2 \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$, l'estimation suivante est vérifie :*

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \leq \omega\|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \tag{3.52}$$

avec

$$\omega = M_{n-\alpha}(x_1 - a)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)}.$$

Il résulte d'après (3.24) que $y_0(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$. Puisque $f(x, y(x)) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$, alors par le lemme 3.3.1 (avec $\gamma = n - \alpha$, $b = x_1$ et $g(t) = f(t, y(t))$) l'intégrale à droit de (3.23) appartient aussi à $C_{n-\alpha}[a, x_1]$ et donc $(Ty)(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$.
Maintenant, on prouve l'estimation dans (3.52). Par (3.23)-(3.24) et (2.1), en utilisant la condition Lipschitzienne (3.21) et en appliquant la relation (3.47) qui donne l'estimation (3.52) (avec $\gamma = n - \alpha$, $b = x_1$ et $g(t) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} &\leq \left\|I^{\alpha}_{a+}\Big(\,|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\,\Big)\right\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \\
&\leq M\left\|I^{\alpha}_{a+}\Big(\,|y_1(t) - y_2(t)|\,\Big)\right\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \\
&\leq M(x_1 - a)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)}\|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]},
\end{aligned}$$

qui donne l'estimation (3.52). Conformément à (3.51), $0 < \omega < 1$ et donc par le théorème 1.11.3, il existe une solution unique $y^*(x) = y^*_0(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$ de l'équation (3.8) sur l'intervalle $[a, x_1]$.

D'après le théorème 1.11.3, cette solution $y^*(x)$ est une limite d'une suite convergente $(T^m y^*_0)(x)$:

$$\lim_{m\to+\infty} \|T^m y^*_0 - y^*\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} = 0,$$

où $y^*_0(x)$ est n'importe quelle fonction dans $C_{n-\alpha}[a, b]$. Si au moins un $b_k \neq 0$ dans la condition initiale (3.13), on peut prendre $y^*_0(x) = y_0(x)$ avec $y_0(x)$ défini par (3.24). La dernière relation peut être réécrite sous la forme :

$$\lim_{m\to+\infty} \|y_m - y\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} = 0,$$

où

$$y_m(x) = (T^m y_0^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\Big(t, (T^{m-1}y_0^*)(t)\Big)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, (m \in \mathbb{N}).$$

Ensuite, on considère l'intervalle $[x_1, x_2]$*, où* $x_2 = x_1 + h_1$ *et* $h_1 > 0$ *sont tels que* $x_2 < b$*. Réécrivez l'équation* (3.8) *sous la forme* (3.27)*, où* $y_{01}(x)$ *définie par* (3.28) *est la fonction connue. En utilisant les mêmes arguments ci-dessus, on déduit qu'il existe une solution unique* $y_1^*(x) \in C_{n-\alpha}[x_1, x_2]$ *à l'équation* (3.8) *sur l'intervalle* $[x_1, x_2]$*. En prenant l'intervalle suivant* $[x_2, x_3]$*, où* $x_3 = x_2 + h_2$ *et* $h_2 > 0$ *sont tels que* $x_3 < b$ *et en répétant ce processus, on trouve qu'il existe une solution unique* $y(x)$ *à l'équation* (3.8) *telle que* $y(x) = y_k^*(x)$ *et* $y_k^*(x) \in C_{n-\alpha}[x_{k-1}, x_k](k = 1, \cdots, L)$ *où* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_L = b$*.*
Ensuite, par le lemme 3.3.2, il existe une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ *sur tout l'intervalle* $[a, b]$*.*
Donc il existe une solution unique $y(x) = y^*(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ *à l'équation intégrale de Volterra (3.8) et donc au problème de type Cauchy (3.12)-(3.13).*
Pour compléter la preuve du théorème 3.3.2, on doit montrer qu'une telle solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ *appartient à l'espace* $\mathbf{C}^\alpha_{n-\alpha}[a, b]$*. Conformément à la définition* (3.45) *il suffit de prouver que* $(D^\alpha_{a+}y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$*. Par la preuve ci-dessus, la solution* $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ *est une limite de la suite* $y_m(x)$ *où* $y_m(x) = (T^m y_0^*)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ *:*

$$\lim_{m \to +\infty} \|y_m - y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} = 0, \tag{3.53}$$

avec le choix de certains y_m *sur chacun* $[a, x_1], \cdots, [x_{L-1}, b]$*. Par (3.12) et (3.21), on a :*

$$\|D^\alpha_{a+}y_m - D^\alpha_{a+}y\|_{C_{n-\alpha}} = \|f(x, y_m) - f(x, y)\|_{C_{n-\alpha}} \leq M_{n-\alpha}\|y_m - y\|_{C_{n-\alpha}}.$$

donc par (3.53)*,*

$$\lim_{m \to +\infty} \|D^\alpha_{a+}y_m - D^\alpha_{a+}y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} = 0,$$

et donc $(D^\alpha_{a+}y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$*. Ceci complète la preuve du théorème 3.3.2.*

Corollaire 3.3.2. *Soient* $0 < \alpha < 1$*,* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}$ *et* $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x, y) \in C_{1-\alpha}[a, b]$ *pour tout* $y \in G$ *et (3.21) soit vérifie.*

Alors il existe une solution unique $y(x)$ *au problème de type Cauchy.*

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) = f(x, y(x)) \ (0 < \alpha \leq 1).$$

$$(I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = b \ (b \in \mathbb{R}).$$

dans l'espace $\mathbf{C}^\alpha_{1-\alpha}[a, b]$*.*

Corollaire 3.3.3. *Soient* $n \in \mathbb{N}$*,* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \times G \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x, y) \in C_{1-\alpha}[a, b]$ *pour tout* $y \in G$ *et (3.21) soit vérifie.*
Alors il existe une solution unique $y(x)$ *au problème de Cauchy (3.5) dans l'espace* $C^n[a, b]$*.*

3.3.3 Le problème de type Cauchy pondéré

Lorsque $0 < \alpha < 1$, le résultat du corollaire 3.3.2 reste vrai pour le problème de type Cauchy pondéré (3.7) avec $c \in \mathbb{C}$:

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) = f(x, y(x)), \ \lim_{x \to a+} \Big((x-a)^{1-\alpha}y(x)\Big) = c, (0 < Re(\alpha) < 1). \tag{3.54}$$

Sa preuve est basée sur l'assertion préliminaire suivante :

Lemme 3.3.3. *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $y(x) \in C_{1-\alpha}[a,b]$.

1. *Si*
$$\lim_{x \to a+} \Big((x-a)^{1-\alpha} y(x) \Big) = c, (c \in \mathbb{R}),$$
alors :
$$(I_{a+}^{1-\alpha} y)(a+) = \lim_{x \to a+} (I_{a+}^{1-\alpha} y)(x) = c\Gamma(\alpha).$$

2. *Si*
$$\lim_{x \to a+} (I_{a+}^{1-\alpha} y)(x) = b, (b \in \mathbb{R}),$$
et s'il existe la limite $\lim_{x \to a+} \Big((x-a)^{1-\alpha} y(x) \Big)$, *alors :*
$$\lim_{x \to a+} \Big((x-a)^{1-\alpha} y(x) \Big) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)},$$

Théorème 3.3.3. *Soient* $0 < \alpha < 1$, *G un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}$ *et* $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x,y) \in C_{1-\alpha}[a,b]$ *pour tout* $y \in G$ *et (3.21) soit vérifie.*

Alors il existe une solution unique $y(x)$ *au problème de type Cauchy pondéré (3.54) dans l'espace* $\mathbf{C}_{1-\alpha}^{\alpha}[a,b]$.

3.4 Équations avec la dérivée de Caputo dans l'espace des fonctions continument différentiables

Dans la section 3.3, on a donné les conditions pour l'existence des solutions uniques globales, continues pour les problèmes de type Cauchy (3.12)-(3.13) lorsque les conditions initiales sont données au point final a d'un intervalle bornée $[a,b]$ et en tout point $x_0 \in (a,b)$, respectivement. On considère ici des problèmes similaires pour les équations différentielles non linéaires avec la dérivée de Caputo $\left({}^cD_{a+}^{\alpha} y\right)(x)$ définie dans (2.60).
On utilisera les mêmes méthodes qui ont été développées dans la section 3.3 basées sur la réduction des problèmes considérés aux équations intégrales de Volterra et en utilisant le théorème du point fixe de Banach.
Les résultats seront différents pour les cas $x_0 = a$ et $x_0 > a$. On commence par le cas le plus simple.

3.4.1 Le problème de Cauchy avec les conditions initiales au point final de l'intervalle. Solution globale

Dans cette sous-section, on considére l'équation différentielle non linéaire d'ordre $\alpha > 0$:
$$({}^cD_{a+}^{\alpha} y)(x) = f(x, y(x)), (\alpha > 0, a \le x \le b), \tag{3.55}$$
impliquant la dérivée fractionnaire de Caputo $\left({}^cD_{a+}^{\alpha} y\right)(x)$ définie dans (2.60) sur l'intervalle borné $[a,b]$ de l'axe réel $\mathbb{R}$, avec les conditions initiales
$$y^{(k)}(a) = b_k \in \mathbb{R}, (k = 0, 1, \cdots, n-1\,;\, n = -[-\alpha]). \tag{3.56}$$

On donne les conditions d'une solution unique $y(x)$ à ce problème dans l'espace $\mathbf{C}_\gamma^r[a,b]$ défini pour $\alpha > 0$, $r \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, $(0 \leq \gamma < 1)$ par :

$$\mathbf{C}_\gamma^{\alpha,r}[a,b] = \left\{ y(x) \in C^r[a,b] : {}^cD_{a+}^\alpha y \in C_\gamma[a,b] \right\}, \mathbf{C}_\gamma^{r,r} = C_\gamma^r[a,b]. \tag{3.57}$$

Comme dans les Sections 3.2-3.3, nos méthodes sont basées sur la réduction du problème considéré à l'équation intégrale de Volterra :

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, (a \leq x \leq b). \tag{3.58}$$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, alors conformément à (2.63), $\left({}^cD_{a+}^\alpha y\right)(x) = y^{(n)}(x)$ pour une fonction appropriée $y(x)$ et donc (3.55)-(3.56) est le problème de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$y^{(n)}(x) = f(x,y(x)), (a \leq x \leq b) \text{ et } y^{(k)}(a) = b_k \in \mathbb{R}, (k = 0,1,\cdots,n-1). \tag{3.59}$$

L'équation intégrale correspondante (3.57) prend la forme :

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t,y(t)) dt, (a \leq x \leq b). \tag{3.60}$$

On établit d'abord une équivalence entre le problème (3.55)-(3.56) et l'équation intégrale (3.58) dans l'espace $C^r[a,b]$ des fonctions continument différentiables.

Théorème 3.4.1. *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C_\gamma[a,b]$ avec $0 \leq \gamma < 1$ et $\gamma \leq \alpha$, pour tout $y \in G$. Soit $r = n$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $r = n-1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$.*

Si $y(x) \in C^r[a,b]$, alors $y(x)$ satisfait les relations (3.55) et (3.56) si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra (3.58).

preuve 3.4.1. *On prouve d'abord la nécessité. Soit $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et $y(x) \in C^n[a,b]$ la solution au problème de Cauchy (3.59). En appliquant l'opérateur I_{a+}^n à la première relation dans (3.59) et en prenant en compte (2.27) et la deuxième relation dans (3.59), on arrive à l'équation intégrale (3.60). Inversement, si $y(x) \in C^n[a,b]$ satisfait (3.60), alors par dérivation terme à terme de (3.60), on a :*

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} + \frac{1}{(n-k)!} \int_a^x (x-t)^{n-k-1} f(t,y(t)) dt. \tag{3.61}$$

pour $k = 1,\cdots,n-1$. En prenant la limite $x \to a$ et en prenant compte de la continuité des intégrantes dans (3.60) et (3.61), on obtient $y^{(k)}(a) = b_k$ pour $k = 0,1,\cdots,n-1$. En dérivant l'équation (3.60) n fois, on obtient $y^{(n)}(x) = f(x,y(x))$. Ainsi le théorème 3.4.1 est prouvé pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Soit maintenant $n-1 < \alpha < n$ et $y(x) \in C^{n-1}[a,b]$. Selon (2.60) et (2.5),

$$({}^cD_{a+}^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a+}^{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j \right] \right)(x).$$

Par les hypothèses du théorème 3.4.1, $f(x,y) \in C_\gamma[a,b]$ et il résulte de (3.55) que $\left({}^cD^\alpha_{a+}y\right)(x) \in C_\gamma[a,b]$ et donc,

$$\left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j\right]\right)(x) \in C^n_\gamma[a,b].$$

En appliquant le lemme 2.1.9 (d) à $g(t) = y(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j$, on obtient :

$$\begin{aligned}(I^\alpha_{a+}{}^cD^\alpha_{a+}y)(x) &= \left(I^\alpha_{a+}{}^cD^\alpha_{a+}\left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j\right]\right)(x)\\ &= y(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j - \sum_{k=1}^{n}\frac{y^{(n-k)}_{n-\alpha}(a+)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a)^{\alpha-k}, \quad (3.62)\end{aligned}$$

où

$$y_{n-\alpha}(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j\right]\right)(x). \tag{3.63}$$

En intégrant (3.63) par parties, en dérivant l'expression obtenue et en utilisant la première formule dans (2.24) avec $k=1$, on a :

$$\begin{aligned}y'_{n-\alpha}(x) &= \frac{d}{dx}\left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^{j-1}\right]\right)(x)\\ &= \left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y'(t) - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j\right]\right)(x).\end{aligned}$$

En répétant ce processus $n-k$ fois $(k=1,\cdots,n)$ on arrive à la relation suivante :

$$y^{(n-k)}_{n-\alpha}(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y^{n-k}(t) - \sum_{j=n-k}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^{j-n+k}\right]\right)(x).$$

En faisant le changement de variable $t = a + s(x-a)$, on obtient pour $k = 1,\cdots,n$

$$y^{(n-k)}_{n-\alpha}(x) = \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}\left[y^{(n-k)}\Big(s+a(x-a)\Big) - \sum_{j=n-k}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(s(x-a))^{j-n+k}\right].$$

Puisque $\alpha < n$ et $y^{(n-k)}(x) \in C[a,b]$ pour $k = 1,\cdots,n$, alors les dernières relations donnent $y^{(n-k)}(a+) = 0$, $(k=1,\cdots,n)$ et donc (3.62) prend la forme :

$$(I^\alpha_{a+}{}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j. \tag{3.64}$$

Comme $f(x,y) \in C_\gamma[a,b]$ et $\gamma \leq \alpha$, par le lemme 2.1.8(b), $I^\alpha_{a+}(t,y(t))(x) \in C[a,b]$.
En appliquant l'opérateur I^α_{a+} aux deux côtés de (3.55) et en utilisant (3.64) et les conditions initiales (3.56), on trouve que $y(x) \in C^{n-1}[a,b]$ est la solution de l'équation intégrale (3.58) et donc la nécessité est prouvée.

Soit maintenant $y(x) \in C^{n-1}[a,b]$ la solution de l'équation intégrale (3.58). Montrons d'abord que $y(x)$ satisfait aux conditions initiales (3.56). En dérivant les deux côtés de (3.58) et en prenant en compte (2.24), pour tout $k = 1, \cdots, n-1$, on a :

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_a^x \frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha+k}}dt. \tag{3.65}$$

Faire le changement de variable $t = a + s(x-a)$ dans les intégrales dans (3.58) et (3.65) pour tout $k = 1, \cdots, n-1$, on trouve que :

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k} + \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^1 \frac{f\Big(a+s(x-a), y(a+s(x-a))\Big)}{(x-t)^{1-\alpha+k}}dt.$$

Puisque $\alpha > n-1$ et $f(x,y(x))$ est continu, les intégrants dans ces relations sont continus et en prenant la limite $x \to a+$, on obtient la relation (3.56).

Maintenant on a montré que $y(x)$ satisfait l'équation (3.55). En appliquant l'opérateur D^{α}_{a+} à (3.58), en prenant compte (3.56) et (2.61) et en utilisant la première relation dans (2.22), on arrive à l'équation (3.55). Ainsi le théorème 3.4.1 est prouvé pour $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Corollaire 3.4.1. *soient $n \in \mathbb{N}$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C_\gamma[a,b]$ avec $0 \leq \gamma < 1$, pour tout $y \in G$.*
Si $y(x) \in C^n[a,b]$, alors $y(x)$ satisfait la relation (3.59) si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra (3.60).

Corollaire 3.4.2. *Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C_\gamma[a,b]$, pour tout $y \in G$.*
Si $y(x) \in C[a,b]$, alors $y(x)$ satisfait les relations

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}y)(x) = f(x,y(x)),\ y(a) = b_0 \in \mathbb{C}, \tag{3.66}$$

si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra

$$y(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, (a \leq x \leq b).$$

Maintenant, on établit l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy (3.55)-(3.56) dans l'espace $\mathbf{C}^{\alpha,n-1}_{\gamma}[a,b]$ dans les conditions du théorème 3.4.1 et une condition Lipschitzienne supplémentaire (3.21). Pour cela, on a besoin de l'assertion préliminaire similaire au lemme 3.3.2.

Lemme 3.4.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < c < b$, $g \in C^n[a,c]$ et $g \in C^n[c,b]$, alors $g \in C^n[a,b]$ et*

$$\|g\|_{C^n[a,b]} \leq \max\Big(\|g\|_{C^n[a,c]}, \|g\|_{C^n[c,b]}\Big).$$

Théorème 3.4.2. *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, $0 \leq \gamma < 1$, $\gamma \leq \alpha$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C_\gamma[a,b]$, pour tout $y \in G$ et la condition de Lipschitz (3.21) soit vérifie.*

1. *Si $n-1 < \alpha < n$, $(n \in \mathbb{N})$, alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de Cauchy (3.55)-(3.56) dans l'espace $\mathbf{C}^{\alpha,n-1}_{\gamma}[a,b]$.*

2. *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de Cauchy (3.59) dans l'espace $C_\gamma^n[a,b]$.*
3. *En particulier, lorsque $\gamma = 0$ et $f(x,y) \in C[a,b]$, il existe des solutions uniques au problème de Cauchy (3.55)-(3.56) dans l'espace $\mathbf{C}^{\alpha,n-1}[a,b]$:*

$$\mathbf{C}^{\alpha,n-1}[a,b] = \mathbf{C}_0^{\alpha,n-1}[a,b] = \left\{ y(x) \in C^{n-1}[a,b] : {}^cD_{a+}^\alpha y \in C[a,b] \right\},$$

et au problème de Cauchy (3.58) dans l'espace $C^n[a,b]$.

Corollaire 3.4.3. *Soient $n \in \mathbb{N}$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C[a,b]$ pour tout $y \in G$ et la condition (3.21) soit vérifie. Alors il existe une solution unique $y(x) \in C^n[a,b]$ au problème de Cauchy (3.58).*

Corollaire 3.4.4. *Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ soit une fonction telle que $f(x,y) \in C_\gamma[a,b]$ pour tout $y \in G$ et la relation (3.21) soit vérifie.*
Il existe alors une solution unique $y(x)$ au problème de Cauchy (3.66) dans l'espace $\mathbf{C}_\gamma^\alpha[a,b]$:

$$\mathbf{C}_\gamma^\alpha[a,b] = \mathbf{C}_\gamma^{\alpha,0}[a,b] = \left\{ y(x) \in C[a,b] : {}^cD_{a+}^\alpha y \in C_\gamma[a,b] \right\}.$$

Corollaire 3.4.5. *Soient $n-1 < \alpha \leq n$, $(n \in \mathbb{N})$, $0 \leq \gamma < 1$ tel que $\gamma \leq \alpha$ et $g(x) \in C_\gamma[a,b]$.*
Si $a(x) \in C[a,b]$, alors le problème de Cauchy :

$$({}^cD_{a+}^\alpha y) = a(x)y(x) + g(x),\ y^{(k)}(a) = b_k,$$

avec $k = 0, 1, \cdots, n-1$ et $b_k \in \mathbb{R}$ a une solution unique $y(x)$ dans l'espace $\mathbf{C}^{\alpha,n-1}[a,b]$ lorsque $\alpha \notin \mathbb{N}$ et dans l'espace $C_\gamma^n[a,b]$ lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

En particulier, le problème de Cauchy :

$$({}^cD_{a+}^\alpha y) = \lambda(x-a)^\beta y(x) + g(x),\ y^{(k)}(a) = b_k,$$

avec $k = 0, 1, \cdots, n-1$, $b_k \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\beta \geq 0$ à une solution unique $y(x)$ dans l'espace $\mathbf{C}^{\alpha,n-1}[a,b]$ lorsque $\alpha \notin \mathbb{N}$, tandis que dans $C_\gamma^n[a,b]$ lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

3.5 Équations avec les dérivées Fractionnaires d'Hadamard dans l'espace des fonctions continus

Dans cette section, on donne les conditions d'existence d'une solution unique globale continue au problème de type Cauchy dans l'espace $\mathbf{C}_{\delta,n-\alpha,\gamma}^\alpha[a,b]$ défini pour $n-1 < \alpha \leq n$, $(n \in \mathbb{N})$ et $0 \leq \gamma < 1$ par :

$$\mathbf{C}_{\delta,n-\alpha,\gamma}^\alpha[a,b] = \left\{ y(x) \in C_{n-\alpha,\log}[a,b] : (D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_{\gamma,\log}[a,b] \right\},$$

ici $D_{a+}^\alpha y$ est la dérivée fractionnaire d'Hadamard (2.105) et $C_{\gamma,\log}[a,b]$ est l'espace pondéré des fonctions continues (1.7) :

$$C_{\gamma,\log}[a,b] = \left\{ g(x) : \left(\log \frac{x}{a}\right)^\gamma g(x) \in C[a,b],\ \|y\|_{C_{\gamma,\log}} = \left\| \left(\log \frac{x}{a}\right)^\gamma g(x) \right\|_C \right\}.$$

On considère le problème de type Cauchy suivant

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f(x, y(x)),\ (x > a, \alpha > 0), \tag{3.67}$$

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = b_k,\ b_k \in \mathbb{R},\ (k = 1, \cdots, n \text{ avec } n = -[-\alpha]). \tag{3.68}$$

La notation $(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)$ veut dire que la limite est prise à tous points du voisinage à droit $(a, a+\epsilon)$, $(\epsilon > 0)$ de a

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = \lim_{x\to a+}(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x),\ (k = 1, \cdots, n-1),$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(a+) = \lim_{x\to a+}(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x), (\alpha \neq n),\ (D_{a+}^{0}y)(a+) = y(a), (\alpha = n),$$

où $I_{a+}^{n-\alpha}$ est l'opérateur fractionnaire d'Hadamard d'ordre $n - \alpha$.

En utilisant les propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation d'Hadamard données en (2.44) et (2.45) et en appliquant les mêmes arguments que dans les preuves des théorèmes 3.2.1 et 3.3.1, on prouve l'équivalence du problème (3.67)-(3.68) et d'équation intégrale de Volterra.

Théorème 3.5.1. *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, $0 \leq \gamma < 1$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ pour tout $y \in G$.*
Si $y(x) \in C_{n-\alpha,\log}[a, b]$, alors $y(x)$ satisfait les relations (3.67) et (3.68) si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra.

En particulier, si $0 < \alpha \leq 1$ et $y(x) \in C_{1-\alpha,\log}[a, b]$, alors $y(x)$ satisfait les relations :

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f(x, y(x)),\ (I_{a+}^{1-\alpha}y)(a+) = b \in \mathbb{R} \tag{3.69}$$

si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale suivante :

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t, y(t))\frac{dt}{t}, (x > a) \tag{3.70}$$

Pour prouver un résultat d'unicité pour (3.67)-(3.68), on a besoin d'une assertion préliminaire.

Lemme 3.5.1. *Soient $\gamma \in \mathbb{C}$, $a < c < b$, $g \in C_{\gamma,\log}[a, c]$ et $g \in C_{\gamma,\log}[c, b]$, alors $g \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ et*

$$\|g\|_{C_{\gamma,\log}[a,b]} \leq \max\left[\|g\|_{C_{\gamma,\log}[a,c]}, \|g\|_{C_{\gamma,\log}[c,b]}\right]$$

Théorème 3.5.2. *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, $0 \leq \gamma < 1$ tel que $\gamma \geq n-\alpha$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ et $f : (a, b] \times G \to \mathbb{C}$ soit une fonction telle que $f(x, y) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ pour tout $y \in G$ et la condition de Lipschitz* (3.21) *soit vérifie.*

Alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.67)-(3.68) dans l'espace $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a, b]$.
En particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $\gamma \geq 1 - \alpha$, alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy (3.69) dans l'espace $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,1-\alpha,\gamma}[a, b]$.

Corollaire 3.5.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \gamma < 1$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ pour tout $y \in G$ et la relation*

(3.21) *soit vérifie.*
Alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de Cauchy

$$(\delta^n y)(x) = f(x, y(x)),\ (\delta^{n-k} y)(a) = b_k \in \mathbb{R}, (k = 1, \cdots, n)$$

dans l'espace $C^n_\delta[a, b] = \{y \in C[a, b] : \delta^n y \in C[a, b]\}$.
Les espaces de la solution $y(x)$ du problème de type Cauchy (3.67)-(3.68) sont caractérisés plus précisément lorsque $b_n = 0$ et les résultats sera différent pour $0 < \alpha \leq 1$ et pour $\alpha > 1$. Considérons d'abord le premier cas :

$$(D^\alpha_{a+} y)(x) = f(x, y(x)), (0 < \alpha \leq 1),\ (I^{1-\alpha}_{a+} y)(a+) = 0. \tag{3.71}$$

L'équation intégrale (3.70) correspondant au problème (3.71) prend la forme suivante :

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t}, (x > a).$$

Par le lemme 2.7.6 (a), si $f(x, y(x)) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$, $(0 \leq \gamma < 1)$, alors la solution $y(x)$ appartiennent à $C_{\gamma-\alpha}[a, b]$ pour $\gamma > \alpha$ et à $C[a, b]$ pour $\gamma \leq \alpha$. De là, on conclure le résultat.

Théorème 3.5.3. *Soient $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \gamma < 1$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ et $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ pour tout $y \in G$ et la condition de Lipschitz (3.21) soit satisfaite.*

1. *Si $\gamma > \alpha$, alors le problème de type Cauchy (3.71) à une solution unique $y(x) \in \mathbf{C}^\alpha_{\delta,\gamma-\alpha,\gamma}[a, b]$.*

2. *Si $\gamma \leq \alpha$, alors le problème de type Cauchy (3.71) à une solution unique $y(x) \in \mathbf{C}^\alpha_{\delta,0,\gamma}[a, b]$.*

De même, on peut prouver le résultat pour le problème (3.67)-(3.68) avec $\alpha > 1$:

$$(D^\alpha_{a+} y)(x) = f(x, y(x)), (\alpha > 1), \tag{3.72}$$

$$(D^{\alpha-k}_{a+} y)(a+) = b_k \in \mathbb{R}\left(k = 1, \cdots, n-1 \text{ avec } n = -[-\alpha]\right), b_n = 0. \tag{3.73}$$

Théorème 3.5.4. *Soient $\alpha > 1$, $n = -[-\alpha]$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ pour tout $y \in G$ et la condition de Lipschitz (3.21) est satisfaite.*
Alors le problème de type Cauchy (3.72)-(3.73) à une solution unique $y(x) \in \mathbf{C}^\alpha_\delta[a, b]$.
En particulier, si $f(x, y) \in C[a, b]$ pour tout $y \in G$, alors le problème de type Cauchy (3.72)-(3.73) à une solution unique $y(x) \in \mathbf{C}^\alpha_\delta[a, b]$.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, les résultats du théorème 3.5.2 reste vrai pour le problème suivant :

$$(D^\alpha_{a+} y)(x) = f(x, y(x)), (0 < \alpha < 1),\ \lim_{x \to a} \left[\left(\log \frac{x}{a}\right)^{1-\alpha} y(x)\right] = c \in \mathbb{R}. \tag{3.74}$$

Théorème 3.5.5. *soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1$ telle que $\gamma \geq 1 - \alpha$, G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ pour tout $y \in G$ et la condition de Lipschitz* (3.21) *soit satisfaite.*
Alors il existe une solution unique $y(x)$ au problème de type Cauchy pondéré (3.74) dans

l'espace $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,1-\alpha,\gamma}[a,b]$*. Le théorème 3.5.3 donne le résultat pour le problème pondéré (3.74) avec* $c=0$ *:*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f(x,y(x))(0<\alpha<1),\ \lim_{x\to a}\left[\left(\log\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}y(x)\right]=0. \tag{3.75}$$

Théorème 3.5.6. *Soient* $0<\alpha<1$*,* $0\le\gamma<1$*,* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}$ *et* $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x,y)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$ *pour tout* $y\in G$ *et la condition de Lipschitz (3.21) est satisfaite.*

1. *Si* $\gamma>\alpha$*, alors le problème de type Cauchy pondéré (3.75) a une solution unique* $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,\gamma-\alpha,\gamma}[a,b]$*.*
2. *Si* $\gamma\le\alpha$*, alors le problème de type Cauchy pondéré (3.75) a une solution unique* $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,0,\gamma}[a,b]$*.*
3. *En particulier, si pour tout* $y\in G$ *et* $f(x,y)\in C[a,b]$*, alors le problème de type Cauchy pondéré (3.75) a une solution unique* $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta}[a,b]$*.*

Les résultats ci-dessus peuvent être étendus à l'équation suivante, qui est plus générale que (3.67) :

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f\left(x,y(x),(D^{\alpha_1}_{a+}y)(x),\cdots,(D^{\alpha_l}_{a+}y)(x)\right). \tag{3.76}$$

Théorème 3.5.7. *Soient* $\alpha>0$*,* $n=-[-\alpha]$ *et* $0\le\gamma<1$ *tel que* $\gamma\ge n-\alpha$*. Soient* $l\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ *et* $\alpha_j>0$*,* $(j=1,\cdots,l)$ *tel que* $0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_l<\alpha$*. Soient* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}^{l+1}$ *et* $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x,y,y_1,\cdots,y_l)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$ *pour tout* $(y,y_1,\cdots,y_l)\in G$ *et la condition de Lipschitz (3.38) soit satisfaite.*

Alors il existe une solution unique $y(x)$ *au problème de type Cauchy (3.76)-(3.68) dans l'espace* $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a,b]$*.*

En particulier, si $0<\alpha<1$ *et* $\gamma\ge1-\alpha$*, alors il existe une solution unique* $y(x)\in\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,1-\alpha,\gamma}[a,b]$ *au problème de type Cauchy pour l'équation (3.76) avec les conditions initiales* $(I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+)=b\in\mathbb{R}$ *et* $\lim_{x\to a}\left[\left(\log\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}y(x)\right]=c\in\mathbb{R}$*.*

Théorème 3.5.8. *Soient* $\alpha>0$*,* $0\le\gamma<1$*,* $l\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ *et* $\alpha_j>0$*,* $(j=1,\cdots,l)$ *telle que* $0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_l<\alpha$*. Soient* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}^{l+1}$ *et* $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x,y,y_1,\cdots,y_l)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$ *pour tout* $(y,y_1,\cdots,y_l)\in G$ *et la condition de Lipschitz (3.38) soit satisfaite.*

1. *Si* $0<\alpha\le1$ *et* $\gamma>\alpha$*, alors il existe un unique solution* $y(x)\in\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,\gamma-\alpha,\gamma}[a,b]$ *au problème de type Cauchy pour l'équation (3.76) avec les conditions initiales* $(I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to a}\left[\left(\log\dfrac{x}{a}\right)^{1-\alpha}y(x)\right]=0$*.*
2. *Si* $0<\alpha\le1$ *et* $\gamma\le\alpha$*, alors il existe une solution unique* $y(x)\in\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,0,\gamma}[a,b]$ *au problème de type Cauchy pour l'équation (3.76) avec les conditions initiales* $(I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+)=0$ *et* $\lim_{x\to a}\left[\left(\log\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}y(x)\right]=0$*.*
3. *Si* $\alpha>1$ *et* $n=-[-\alpha]$*, alors le problème de type Cauchy pour l'équation (3.76) avec les conditions initiales :*

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+)=b_k\in\mathbb{C},(k=1,2,\cdots,n-1),\ b_n=0.$$

a une solution unique $y(x)\in\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta}[a,b]$*.*

4. *En particulier, si pour tout* $(y, y_1, \cdots, y_l) \in G$ *et* $f(x, y, y_1, \cdots, y_l) \in C_{0,\log}[a, b]$, *alors les problèmes de type Cauchy dans (1)-(3) ont une solution unique* $y(x) \in \mathbf{C}^{\alpha}_{\delta}[a, b]$.

Corollaire 3.5.2. *Soient* $n, l \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha_j > 0$, $(\alpha_j < n, j = 1, \cdots, l)$ *tels que* $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_l < \alpha$ *avec* $\alpha = n$ *soient satisfaites. Soient* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}^{l+1}$ *et* $f : (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x, y, y_1, \cdots, y_l) \in C_{0,\log}[a, b]$ *pour tout* $(y, y_1, \cdots, y_l) \in G$ *et la condition de Lipschitz (3.38) est satisfaite.*
Alors il existe une solution unique $y(x) \in \mathbf{C}^{n}_{\delta,0,\gamma}[a, b]$ *pour le problème de Cauchy*

$$(\delta^n y)(x) = f\left(x, y(x), (D^{\alpha_1}_{a+}y)(x), \cdots, (D^{\alpha_l}_{a+}y)(x)\right), \left(x > a, \delta = x\frac{d}{dx}\right),$$

$$(\delta^{n-k}y)(a) = b_k \in \mathbb{R}, (k = 1, \cdots, n).$$

Corollaire 3.5.3. *Soient* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *et* $0 \leq \gamma < 1$ *tel que* $\gamma \geq n - \alpha$. *Soient* $l \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ *et* $\alpha_j > 0$, $(j = 1, \cdots, l)$ *tel que* $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_l < \alpha$. *Soient* $\alpha_j(x) \in C[a, b]$, $(j = 1, \cdots, l)$ *et* $g(x) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$.
Alors le problème de type Cauchy pour l'équation différentielle linéaire suivante d'ordre α,

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) + \sum_{j=1}^{l} a_j(x)(D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) + a_0(x)y(x) = g(x), (x > a)$$

avec les conditions initiales (3.68) à une solution unique $y(x)$ *dans l'espace* $\mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a, b]$.

En particulier, il existe une solution unique $y(x) \in \mathbf{C}^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a, b]$ *au problème de type Cauchy pour l'équation avec* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *et* $\beta_j \geq 0$, $(j = 0, 1, \cdots, l)$:

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j(x-a)^{\beta_j}(D^{\alpha_j}_{a+}y)(x) + \lambda_j(x-a)^{\beta_j}y(x) = g(x), (x > a).$$

Bibliographie

[1] Bertrand.J, Bertrand.P, Ovarpez.J : *The Mellin Transform : The Transforms and Applications Handbook*, Second Edition-Alexander.Ed, Poularikas. D, 2000.

[2] BONILLA, B., KILBAS, A. A., and TRUJILLO, J. J., *Systems of nonlinear fractional differential equations in the space of summable functions*, Tr. Inst. Mat. Minsk, 6, (2000) 38-46.

[3] BUTZER, P. L., KILBAS, A. A., and TRUJILLO, J. J., *Compositions of Hadamardtype fractional integration operators and the semigroup property*, J. Math. Anal. Appl, 269(2), (2002) 387-400.

[4] BUTZER, P. L., KILBAS, A. A., and TRUJILLO, J. J., *Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals*, J. Math. Anal. Appl., 269(1), (2002) 1-27.

[5] BUTZER, P. L., KILBAS, A. A., and TRUJILLO, J. J., *Mellin transform and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals*, J. Math. Anal. Appl., 270(1), (2002) 1-15.

[6] BUTZER, P. L., KILBAS, A. A., and TRUJILLO, J. J., *Generalized Stirling functions of second kind and representations of fractional order differences via derivatives*, J. Diff. Equat. Appl, 9(5), (2003) 503-533.

[7] BRYCHKOV, Y. A., GLAESKE, H.-J., PRUDNIKOV, A. P., and TUAN, V. K., *Multidimensional Integral Transformations*, Gordon and Breach, Philadelphia, 1992.

[8] BRYCHKOV, Y. A. and PRUDNIKOV, A. P., *Integral Transforms of Generalized Functions*, Gordon and Breach, New York, 1989.

[9] Debnath. Lokenath, and Bhatta.Dambaru : *Integral Transforms and Their Applications*, Third Edition, Boca Raton : CRC Press LLC, 2015.

[10] DITKIN, V. A. and PRUDNIKOV, A. P., *Integral Transforms and Operational Calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1965.

[11] DOBTSCH, G., *Handbuch der Laplace-Transformation*, Birkhauser-Verlag, Basel and Stuttgart, 1955.

[12] DOETSCH, G., *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[13] DZHERBASHYAN, M. M., *Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Domain*, Nauka, Moskow, 1966.

[14] DZHERBASHYAN, M. M., *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain*, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhauser-Verlag, Berlin, 1993.

[15] ERDELYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., and TRICOMI, F., *Higher Transcendental Functions*, vol. I-III, Krieger Pub., Melbourne, Florida, 1981.

[16] GELF́AND, I. M. and SHILOV, G. E., *Generalized Functions, vol. 1, Academic Press*, London, 1964.

[17] KILBAS, A. A., Hadamard-type fractional calculus, *J. Korean Math. Soc*, 38(6), (2001) 1191-1204.

[18] KILBAS, A. A., BONILLA, B., and TRUJILLO, J. J., Fractional integrals and derivatives, and diferential equations of fractional order in weighted spaces of continuous functions (Russian), *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 44(6), (2000) 18-22.

[19] KILBAS, A. A. and TITJURA, A. A., *Hadamard-type fractional integrals and derivatives*, Trudy Inst. Mat. Minsk, 11, (2002) 79-87.

[20] KIRYAKOVA, V. S., *Generalized Fractional Calculus and Applications*, vol. 301 of Pitman Res. Notes in Math., Wiley and Sons, New York, 1994.

[21] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006.

[22] KOLMOGOROV, A. N. and FOMIN, S. V., *Fundamentals of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1968.

[23] KOLMOGOROV, A. N. and FOMIN, S. V., *Fundamentals of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1968.

[24] KOLMOGOROV, A. N. and FOMIN, S. V., *Elements of Theory of Functions and Functional Analysis*, Bibfismat, Dover, New York, 1984.

[25] McBRIDE, A. C., *Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions*, vol. 31 of Research Notes in Math., Pitman, London, 1979.

[26] MITTAG-LEFFLER, G. M., *Sur la nouvelle function Ea, C.R. Acad. Sci. Paris*, 137, (1903) 554-558.

[27] M.Wellbeer, *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, Analytical Bockground*, D. Univ Braunschweig, (2010).

[28] NIKOLŚKII, S. M., *Course of Mathematical Analysis (Russian)*, vol. 1-2, Nauka, Moscow, 1983.

[29] Paris.R.B, Kaminski.D. :*Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals , Encyclopedia Of Mathematics And Its Applications*, 85.

[30] PITCHER, E. and SEWELL, W. E., *Existence theorems for solutions of differential equations of non-integral order*, Bull. Amer. Math. Soc, 44(2), (1938) 100-107.

[31] SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., and MARICHEV, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[32] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer, New York, 2012.

[33] SNEDDON, I. N., *Fourier Transforms*, Dover Publications, New York, 1995.

[34] TITCHMARSH, E. C, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Chelsea Publishing Company, New York, 1986 (First Edition : Oxford University Press, Oxford, 1937).

[35] VLADIMIROV, V. S., *Generalized Functions in Mathematical Physics, Mir Publishing*, Moscow, 1979.

[36] ZEMANIAN, A. H., *Generalized Integral Transformations*, vol. 18 of Pure Appl. Math., Wiley and Sons, New York, 1968.