

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en :mathématiques
Domaine : mathématiques et informatique
Filière : mathématique
Spécialité : Equations différentielles et modélisation

Thème

Inverse de Drazin et ses applications

Présenté Par : Hanane Slaimi

Devant le jury composé de :

Mr. Toufik Mami

Mr. Ahmed Hammoudi

Mr. Mohamed Hariri

Pr UAT.B.B (Ain Temouchent)

Pr UAT.B.B (Ain Temouchent)

MCB UAT.B.B (Ain Temouchent)

Président

Examineur

Encadreur

Année Universitaire 2022/2023

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier mon encadreur de mémoire, Mohamed Hariri, pour le temps qu'il a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche. Son exigence m'a grandement stimulée.

L'enseignement de qualité dispensé par le Département de Mathématiques et Informatiques de la Faculté des Sciences et de la Technologie, représente une profonde satisfaction intellectuelle, merci donc aux enseignants-chercheurs.

S. Hanane.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents, ma famille et spécialement à mon cher mari et à toute la promotion du Master Analyse mathématique.

S. Hanane.

Résumé

Le mémoire présenté est une contribution à la théorie des matrices carrées et de l'inverse généralisé de Drazin des opérateurs linéaires et son application sur des systèmes différentiels implicites.

Ce mémoire comporte une introduction et quatre chapitres et une liste bibliographique de dix neuf titres.

Mots clés : Espaces de Hilbert, théorie spectrale, système linéaire, inverse de Drazin, système implicite.

Principales notations utilisées

1. $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ désignent des espaces de Hilbert.
2. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ désigne l'espace de Hilbert des opérateurs linéaires bornés.
3. I : L'opérateur Identité.
4. \mathbb{C} : L'ensemble des nombres complexes.
5. A^* : La matrice transposée du conjugué complexe de A et lorsque A est un opérateur, A^* dénote l'adjoint de A .
6. $\sigma(T)$: Le spectre de l'opérateur T .
7. $\sigma(A, B)$: Le spectre du faisceau de l'opérateur $\lambda A - B$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
8. $\sigma_p(A, B)$: Le spectre ponctuel du faisceau de l'opérateur $\lambda A - B$ i.e. l'ensemble des valeurs propres de $\lambda A - B$.
9. $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$: La résolvante de l'opérateur T .
10. $A_k = A|_{D_k}$: La restriction de l'opérateur A au sous-espace D_k .
11. P : Projecteur orthogonal.
12. $J_k(\lambda)$, $k = \overline{1, n}$: Bloc de Jordan.
13. $ind(A)$: Indice de A .
14. $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$: La somme directe de \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .
15. A^D L'inverse de Drazin de A .

Table des matières

Introduction	7
1 Notions préliminaires	10
2 Inverse de Drazin d'une matrice	14
2.1 Inverse de Drazin	14
2.2 Calcul de l'inverse de Drazin d'une matrice	20
2.2.1 Première méthode :	20
2.2.2 Deuxième méthode	23
3 Inverse de Drazin d'un opérateur	25
3.1 Inverse de Drazin d'un opérateur borné	25
3.2 Inverse généralisé d'un opérateur	25
4 Applications aux systèmes différentielles implicites	27
4.1 Cas homogène	27
4.2 Cas non-homogène	28
Bibliographie	35

INTRODUCTION

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'inverse de Drazin d'une matrice carrée et de l'inverse généralisé de Drazin d'un opérateur linéaire, en exposant leurs propriétés avec quelques applications sur les équations différentielles implicites (E.D.I) de type :

$$Ax'(t) = Bx(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{H} \quad (1)$$

Avec la condition initiale :

$$x(0) = x_0$$

où A et B sont des opérateurs linéaires avec A non inversible. Ceci a conduit beaucoup de mathématiciens d'introduire de nouvelles notions consistant à remplacer l'inversibilité par une notion plus faible telle qu'un inverse généralisé, inverse à droite ou inverse à gauche et même d'autres inverses qui portent les noms de leurs fondateurs, par exemple : l'inverse de Duffin, l'inverse de Drazin etc.

Le concept d'inverse généralisé semble avoir été mentionné pour la première fois en 1903 par Fredholm [14], où un inverse généralisé particulier (appelé par lui pseudo inverse) d'une intégrale d'opérateur a été donné. La classe de tous les pseudo-inverses a été caractérisée en 1912 par Hurwitz [16] qui a utilisé la dimensionnalité finie des espaces nuls des opérateurs de Fredholm pour donner une algèbre simple. Les inverses généralisés des opérateurs, déjà implicites dans la discussion de Hilbert en 1904 sur les fonctions de Green généralisées, [15], étaient par conséquent étudiés par de nombreux auteurs, notamment Myller (1906), Westfall (1909), Bounitzky [17] en 1909, Elliott (1928) et Reid (1931). Pour un historique de ce sujet, voir l'excellente étude de Reid [19].

Les inverses généralisés des opérateurs ont donc précédés les inverses généralisés des matrices dont l'existence a été notée pour la première fois par E.H. Moore, qui a défini un inverse unique (appelé par lui la réciproque générale) pour toute matrice finie

(carrée ou rectangulaire).

Depuis 1955, plusieurs articles sur divers aspects des inverses généralisés et leurs applications sont apparus. Compte tenu de l'ampleur de cette littérature, nous n'essaierons pas de retracer l'histoire sur ce sujet seulement que les chapitres suivants incluront des références bien choisies.

Dans le premier chapitre on rappelle quelques outils de base sur la théorie spectrale.

Le deuxième chapitre porte sur les méthodes de calcul de l'inverse de Drazin et ces applications.

Le troisième chapitre, plus important, a pour objet de généraliser l'inverse de Drazin sur les opérateurs linéaires bornés.

Un quatrième chapitre sera consacré aux applications de l'inverse de Drazin sur des systèmes différentiels implicites du type (1).

Exemple de motivation d'un tel concept :[12]

Considérons le circuit R.L.C suivant :

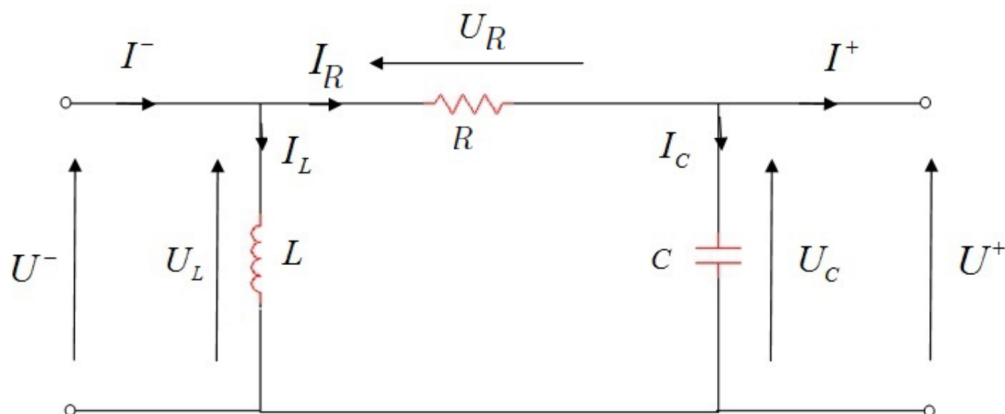


FIGURE 1 – Circuits électriques

A l'instant $t = 0$, on donne $I_R(0), I_L(0)$ et $U_C(0)$. Le problème qui se pose est la recherche de l'intensité I_R du courant passant par la résistance R , l'intensité I_L du courant passant par la bobine I_L , enfin la tension U_C au bord du condensateur C à un instant t quelconque.

Les lois de Kirchoff donnent :

$$\begin{cases} I = I_R + I_L; \\ L \frac{dI_L}{dt} = U; \\ RI_R + U_C = U. \end{cases}$$

Notons par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} I_R \\ I_L \\ U_C \end{pmatrix}.$$

L'état cherché est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} I_R(t) \\ I_L(t) \\ U_C(t) \end{pmatrix},$$

sa dérivée sera :

$$x'(t) = \begin{pmatrix} I'_R(t) \\ I'_L(t) \\ U'_C(t) \end{pmatrix},$$

On peut vérifier aisément que le système (1) est satisfait avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(t) = \begin{pmatrix} I^- \\ U^- \\ U^- \end{pmatrix}.$$

Remarquons que A n'est pas inversible.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

$\mathbb{C}^{n \times n}$, représente l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n .

La théorie des opérateurs joue un rôle important en analyse et surtout en équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Dans ce travail, toute application linéaire d'un espace vectoriel normé \mathcal{H}_1 à valeurs dans un espace vectoriel normé \mathcal{H}_2 est dite **opérateur** [8].

- L'espace vectoriel des opérateurs linéaires de \mathcal{H}_1 dans \mathcal{H}_2 est noté $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
- L'espace vectoriel des opérateurs linéaires de \mathcal{H} dans lui-même est noté $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- L'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de \mathcal{H} est noté $\mathcal{L}_c(\mathcal{H})$.

Définition 1.0.1. [10, 11]. Soit $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. L'opérateur A est dit **inversible** s'il est bijectif et son inverse A^{-1} est continue.

Exemple 1.0.2.

1. L'identité dans un espace vectoriel normé \mathcal{H}

$$\begin{aligned} I &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto I(x) = x \end{aligned}$$

est inversible.

2. Dans $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n \geq 1} : \sum_{n \geq 1} |x_n|^2 < +\infty\}$, l'application :

$$\begin{aligned} A &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto A(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2^2}, \dots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, \dots \right) \end{aligned}$$

est bijective et

$$\begin{aligned} A^{-1} &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto A^{-1}(x) = (x_1, 2x_2, 2^2x_3, \dots, 2^{n-1}x_n, \dots) \end{aligned}$$

n'est pas bornée donc A^{-1} n'est pas continue. Par conséquent, A n'est pas inversible.

Définition 1.0.3. On appelle adjoint de $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ l'application $u^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ (noté u^*) définie par :

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2, \quad \langle u(x), y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, u^*(y) \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

L'application u^* est linéaire.

Proposition 1.0.4. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

1. $(u + v)^* = u^* + v^*$
2. $(\lambda v)^* = \bar{\lambda}v^*$
3. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
4. Si u est inversible, alors u^* l'est aussi, et son inverse est $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$
5. $(u^*)^* = u$
6. $\|u^*\| = \|u\|$.

Définition 1.0.5. [10, 8] Soit \mathcal{H} un espace vectoriel normé de dimension finie n et T un opérateur de $\mathcal{L}_c(\mathcal{H})$, un nombre complexe λ est dit **valeur propre** de T si l'équation :

$$(\lambda I_n - T)x = 0$$

admet des solutions non nulles, I_n est la matrice identité d'ordre n . On notera l'ensemble des valeurs propres de T par :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathcal{H} - \{0\} : (\lambda I_n - T)x = 0\}.$$

Proposition 1.0.6. Le scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible.

Définition 1.0.7. (Rang d'une matrice). Le rang d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que l'on note $\text{rang}(A)$, est le nombre maximal de vecteurs lignes ou de colonnes qui sont linéairement indépendants.

Définition 1.0.8. (Indice d'une matrice). Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Le plus petit entier positif, k tel que : $\text{rang}(A^{k+1}) = \text{rang}(A^k)$, s'appelle indice de A . On le note : $\text{ind}(A)$.

Définition 1.0.9. Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est dite inversible s'il existe une matrice unique $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, notée A^{-1} , telle que $AB = BA = I_n$.

N.B. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit inversible et que son déterminant soit non nul.

Définition 1.0.10. [9] (Polynôme caractéristique d'une matrice). Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme de degré n en λ . On l'appelle polynôme caractéristique de A . On montre qu'il vérifie :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

Définition 1.0.11. [5, 7]. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de la matrice A noté E_λ , est le noyau de la matrice $\lambda I_n - A$.

Proposition 1.0.12. La dimension du sous-espace propre E_λ associé à une valeur propre λ d'ordre de multiplicité α est inférieure ou égale à cet ordre.

Proposition 1.0.13. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de A . Alors la somme des sous espaces associés est directe. Soit :

$$\mathbb{C}^n = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$$

Théorème 1.0.14. (Cayley-Hamilton). Soit $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Le polynôme caractéristique de A . On a : $P_A(A) = 0$.

Définition 1.0.15. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On dit que A est nilpotente d'indice de nilpotence p si $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.

Théorème 1.0.16. (Décomposition de Dunford). Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors A admet une décomposition unique : $A = A_1 + A_2$, où A_1 est diagonalisable sur \mathbb{C} , A_2 est nilpotente. De plus : $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

D'après la décomposition de Dunford et la définition de la matrice nilpotente, on a :

Théorème 1.0.17. (Jordan). Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A .

A est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_p \end{pmatrix}$$

où chaque bloc diagonal J_i est de la forme :

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_p \end{pmatrix}$$

n'ayant pas forcément toutes le même ordre. Suivant ce résultat, il existe une matrice régulière P telle que $J = P^{-1}AP$.

Définition 1.0.18. (Exponentielle d'une matrice). Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On définit l'exponentielle de A par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Proposition 1.0.19. Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et soit P une matrice inversible d'ordre n , alors :

1. $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$,
2. Si A et B commutent ($AB = BA$), alors :

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

INVERSE DE DRAZIN D'UNE MATRICE

2.1 Inverse de Drazin

Définition 2.1.1. *Toute matrice régulière A a un inverse unique, noté A^{-1} , tel que :*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \quad (2.1)$$

Parmi les nombreuses propriétés de la matrice inverse, nous en mentionnons quelques-unes. Ainsi :

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A \\ (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \\ (A^*)^{-1} &= (A^{-1})^* \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

où A^T et A^* désignent respectivement la transposée et la transposée conjuguée de A .

Définition 2.1.2. [19]. *Pour une matrice singulière, on appelle inverse généralisé de A toute matrice X satisfaisant :*

$$AXA = A. \quad (2.2)$$

Si A n'est pas singulière, la multiplication par A^{-1} à gauche et à droite donnerait à la fois :

$$X = A^{-1}.$$

Définition 2.1.3. *Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, l'inverse de Drazin de A est une solution des trois équations :*

1. $AX=XA$
2. $XAX=X$

3. $XA^{k+1} = A^k$ tel que $k = \text{ind}(A)$. Elle est notée par A^D .

Théorème 2.1.4. Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ avec $k = \text{ind}(A)$, alors A^D est unique.

Démonstration.

Soient $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ satisfont les trois équations de la définition 2.1.3, alors

$$\begin{aligned}
 A^{k+1}X &= A^k \\
 &= A^{k+1}Y \\
 \Rightarrow A^kAX &= A^kAY \\
 &= A^kYAX \\
 \Rightarrow A^kXAX &= A^kYAX \\
 &= A^kX \\
 &= A^kYAX.
 \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
 A^{k-1}AX &= A^{k-1}AYAX \\
 \Rightarrow A^{k-1}XAX &= A^{k-1}AYAX^2 \\
 &= A^{k-1}X \\
 &= A^{k-1}YAX.
 \end{aligned}$$

Continuant ce processus jusqu'à A^{k-k} , on obtient $X = YAX$, d'une manière analogue on a : $Y = XAY$,

$$\begin{aligned}
 (3) \Rightarrow A^k(AY - I) &= 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donc

$$XA^k(AY - I) = 0,$$

d'où :

$$A^k(XAY - X) = 0,$$

en utilisant (2),

$$A^k(XAY - XAX) = 0,$$

ce qui donne

$$A^k(XA)(Y - X) = 0,$$

ainsi

$$XA^k(XA)(Y - X) = 0,$$

en utilisant (1)

$$A^{k-1}(XAX)A(XAY - X) = 0,$$

donc d'après (2),

$$A^{k-1}(XA)A(Y - X) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} A^{k-1}(XAY - XAX) &= A^{k-1}(XAY - X) = 0 \\ &\Rightarrow XAY - X = 0 \end{aligned}$$

donc,

$$X = XAY = Y.$$

Proposition 2.1.5. [4]. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors :

1. A nilpotente $\Rightarrow A^D = 0$.
2. A est inversible $\Rightarrow A^D = A^{-1}$.
3. AA^D est la projection orthogonale sur le sous espace $R(A^k)$.
4. $(I - AA^D)$ est la projection orthogonale sur le sous espace $N(A^k)$.

Théorème 2.1.6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ avec $\text{ind}(A)=k$ et $\text{rang}(A^k)=r$. Alors, il existe une matrice unique X d'ordre n telle que :

$$A^k X = 0, \quad XA^k = 0, \quad X^2 = X, \quad \text{rang}(X) = n - r. \quad (2.3)$$

pour la matrice X citée ci-dessus, il existe une matrice unique Y d'ordre n telle que,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A & I - X \\ I - X & Y \end{pmatrix} = \text{rang}(A) \quad (2.4)$$

La matrice Y est l'inverse de Drazin A^D de A et $X=I-AA^D$.

Démonstration.

Soit la décomposition de Jordan définie par :

$$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}$$

telle que C, P sont inversibles et $N^k=0$. Alors on a

$$A^k = P \begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

posons :

$$X = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} \quad (2.5)$$

Alors,

$$A^k X = X A^k = 0$$

et

$$X^2 = X, \quad \text{rang}(X) = n - r.$$

C'est-à-dire : X satisfait la condition (2.3).

Montrons maintenant l'unicité de X , on suppose qu'il existe une matrice X_0 d'ordre n qui satisfait la condition (2.3).

Soit $X_1 = P^{-1} X_0 P$, avec

$$X_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Il découle du fait $A^k X_0 = 0$, que $P^{-1} A^k P P^{-1} X_0 P = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = 0.$$

puisque : C^k est une matrice inversible, on a $E = F = 0$.

Ainsi,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Même démarche, $X_0 A^k = 0$ implique que $G = 0$, on obtient

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

puisque : $X_0^2 = X_0$ et $\text{rang}(X_0) = n - r$, donc

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

De (2.5) et (2.6), il découle que $X_0 = X$, c'est-à-dire X est unique.

Soit $M = I - AA^D$, il est clair que,

$$A^k M = 0, \quad MA^k = 0, \quad M^2 = M$$

puisque,

$$N(AA^D) = R(I - AA^D) \quad N(AA^D) = N(A^D)$$

On a $\text{rang}(M) = n - \text{rang}(A^D) = n - r$, donc la matrice M satisfait la condition (2.3), et par unicité, on a

$$X = I - AA^D.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} A & I - X \\ I - X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AA^D \\ AA^D & Y \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

puisque :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^D & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & AA^D \\ AA^D & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^D \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Y - A^D \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donc, (2.4) découle de (2.7) et (2.8) si et seulement si $Y = A^D$.

Théorème 2.1.7. *Si $A \in C^{n \times n}$ avec $\text{ind}(A) = 1$, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^D)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{rang}(A^D) &= \text{rang}(A^D AA^D) \\ &\leq \text{rang}(AA^D) \\ &\leq \text{rang}(A) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) &= \text{rang}(AA^D A) \\ &\leq \text{rang}(A^D A) \\ &\leq \text{rang}(A^D) \\ &\leq \text{rang}(A) \leq \text{rang}(A^D). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.8. Soit $A \in C^{n \times n}$ une matrice symétrique avec $\text{ind}(A)=1$, alors :

$$A^D = (A^D)^T.$$

Démonstration.

Soit A^D l'inverse de Drazin de A avec $\text{ind}(A) = 1$, alors :

$$AA^D = A^D A, \quad A^D AA^D = A^D, \quad AA^D A = A.$$

Puisque A est symétrique, on a :

$$A(A^D)^T = (A^D)^T A, \quad (A^D)^T A(A^D)^T = (A^D)^T, \quad A(A^D)^T A = A.$$

Donc, $(A^D)^T$ est l'inverse de Drazin de A , et par unicité $A^D = (A^D)^T$.

Corollaire 2.1.9. Pour toute matrice $A \in C^{n \times n}$ avec $\text{ind}(A)=1$, $(A^D)^D = A$.

Théorème 2.1.10. Si $\lambda \neq 0 \in C$ est une valeur propre de $A \in C^{n \times n}$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^D .

Démonstration.

Soit $x \in C^n$ le vecteur propre associé à la valeur propre λ , alors :

$$(A - \lambda I)x = 0$$

donc,

$$\begin{aligned} AA^D x &= \lambda A^D x \\ &\Rightarrow AA^D x \\ &= \lambda A^D x \\ &\Rightarrow A^D x \\ &= \lambda A^D A^D x. \end{aligned}$$

Posons $A^D x = y$, il vient, $\frac{1}{\lambda}y = A^D y$. Ainsi $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^D .

Théorème 2.1.11. Soient $A \in C^{n \times n}$, $k = \text{ind}(A)$ et $b \in C^n$, alors $A^D b$ est la solution de l'équation $Ax = b$ si et seulement si $b \in R(A^k)$.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} A(A^D b) &= b \\ \Leftrightarrow b &\in R(A^k) \end{aligned}$$

puisque AA^D est la projection orthogonale sur le sous espace $R(A^k)$.

2.2 Calcul de l'inverse de Drazin d'une matrice

2.2.1 Première méthode :

Théorème 2.2.1. Soit $A \in C^{n \times n}$, avec $\text{ind}(A) = k$, $\text{rang}(A^k) = r$. On suppose que la forme normale de Jordan de A est définie par :

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

où J_0 et J_1 sont les parties de J correspondant aux valeurs propres nulles et non nulles. Alors l'inverse de Drazin de A est définie par :

$$A^D = P \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exemple 2.2.2. Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

où

$$P = \begin{bmatrix} 1 & : & -2 & 1 & : & 1 & 0 \\ -1 & : & 0 & 0 & : & 0 & -2 \\ 2 & : & 0 & 0 & : & 2 & 0 \\ 1 & : & 0 & 0 & : & 0 & 1 \\ 2 & : & -2 & 0 & : & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

la forme normale de Jordan de :

$$A = PJP^{-1} = P \begin{bmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_3(3) \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & 0 & 2 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

L'inverse de Drazin de A est définie par :

$$\begin{aligned} A^D &= P \begin{bmatrix} J_1^{-1}(1) & & \\ & J_2^{-1}(2) & \\ & & J_3^{-1}(3) \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \\ & 0 & \frac{1}{2} & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{4} & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 2.2.3. Considérons le système singulier, $Ax = b$ tel que,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ind}(A) = 1 \text{ et } A = P^{-1}JP$$

avec,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{9}{22} & -\frac{3}{11} & -\frac{9}{22} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A^D = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

puisque :

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in R(A),$$

La solution du système est :

$$x = A^D b = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.4. (Décomposition de Wedderburn). Soit A une matrice carrée d'indice k . Ils existent alors, deux matrice A_1 et A_2 telles que :

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0,$$

A_2 est une matrice nilpotente d'indice k , et $\text{ind}(A_1) \leq 1$, dans ce cas on a :

$$A^D = A_1^D.$$

Exemple 2.2.5. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$A = P^{-1} J P$$

avec,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors,

$$A^D = A_1^D = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Deuxième méthode

Dans cette partie, on calcul l'inverse de Drazin si on connaît toutes les valeurs propres de A . On suppose que 0 est une valeur propre de A d'ordre de multiplicité l et les autres valeurs propres de A sont λ_i d'ordre de multiplicités n_i , $i = 1, 2, \dots, r$ alors si $m = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ donc $m + l = n$.

On considère le polynôme de degré $n - l$:

$$p(\lambda) = \lambda^l(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1}). \quad (2.9)$$

Déterminons les coefficients de $p(\lambda)$ par la résolution de m équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i} &= p(\lambda_i) \\ \frac{-1}{\lambda_i^2} &= p'(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \dots, r. \\ \frac{(-1)^{n_i-1}(n_i - 1)!}{\lambda_i^{n_i}} &= p^{(n_i-1)}(\lambda_i) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Proposition 2.2.6. *Si $p(\lambda)$ est défini par (2.9) et (2.10) alors : $p(A) = A^D$.*

Démonstration.

On peut écrire A sous la forme :

$$A = P \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}$$

tel que J est une matrice de Jordan non singulière d'ordre $m \times m$ et N est une matrice nilpotente d'ordre $l \times l$.

Alors,

$$p(A) = P \begin{pmatrix} p(J) & 0 \\ 0 & p(N) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} p(J) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a $p(N) = 0$, $p(J) = J^{-1}$, alors,

$$p(A) = A^D.$$

Exemple 2.2.7. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\{0, 0, 1, 1\}$ alors on a $p(\lambda) = \lambda^2(\alpha_0 I + \alpha_1 \lambda)$, α_0 et α_1 sont solution de :

$$\begin{cases} 1 = p(1) \\ -1 = p'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_0 + \alpha_1 \\ -1 = 2\alpha_0 + 3\alpha_1 \end{cases}$$

donc, $\alpha_0 = 4$ et $\alpha_1 = -3$.

D'après le théorème précédent :

$$A^D = A^2(\alpha_0 I + \alpha_1 A)$$

$$A^D = A^2(4I - 3A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

INVERSE DE DRAZIN D'UN OPÉRATEUR

3.1 Inverse de Drazin d'un opérateur borné

Définition 3.1.1. *L'inverse de Drazin de $A \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ (borné), noté A^D satisfait par définition les équations suivantes :*

$$AA^D = A^D A, \quad A^D AA^D = A^D, \quad AA^D A^k = A^k$$

Avec k est le plus petit entier positif tel que $R(A^k) = R(A^{k+1})$, appelé indice de Drazin et noté $\text{ind}(A) = k$.

Remarque 3.1.1. *Soit $A \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$, et $k = \text{ind}(A)$, alors l'opérateur :*

$$A|_{D_0}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

est inversible et $A^D = A_0^{-1} = A|_{D_0}$, $D_0 \subset \mathcal{H}$.

La proposition suivante nous indique exactement sous qu'elles conditions un opérateur A dans \mathcal{H} , possède un inverse de Drazin avec indice $k > 0$.

Proposition 3.1.2. *Soit $A \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ et soit k un entier positif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A possède un inverse de Drazin et $\text{ind}(A)=k$.*
2. *$a(A)=d(A)=k$.*
3. *0 est un pôle d'ordre k de la résolvante $R_A(\lambda)$,*
4. *$A = A_1 \oplus A_2$ tel que A_1 est nilpotent et A_2 est inversible.*

3.2 Inverse généralisé d'un opérateur

Soit A un opérateur non borné dans \mathcal{H} , alors si on prend pour restriction de A un opérateur A_0 tel que son domaine est $(\text{Ker } A)^\perp$. Nous obtenons un opérateur inversible tel que : $D(A_0) \subset D(A)$.

Remarque 3.2.1. [13] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$

où :

$$\mathcal{H}_1 = \text{Ker} A \text{ et } \mathcal{H}_2 = (\text{Ker} A)^\perp,$$

alors l'opérateur :

$$A_0 : \mathcal{H}_2 \mapsto \text{Im} A \text{ est inversible et } A_0^{-1} : \text{Im} A \mapsto \mathcal{H}_2 \text{ et } A^D = A_0^{-1}.$$

Considérons la projection orthogonale P sur $\text{Im} A$:

$$P : \mathcal{H} \mapsto \text{Im} A$$

et définissons l'opérateur $A^D = A_0^{-1}P : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_2$ qui est l'extension de l'opérateur A^D sur \mathcal{H} .

Définition 3.2.1. [13] On appelle inverse généralisé de l'opérateur A , l'opérateur noté $A^D = A_0^{-1}P$, où $A_0 = A|_{\mathcal{H}_2}$ et P est le projecteur orthogonal sur $\text{Im} A$.

APPLICATIONS AUX SYSTÈMES DIFFÉRENTIELLES IMPLICITES

Considérons le système différentielle implicite :

$$\begin{cases} Ax'(t) = Bx(t) + f(t) & , \quad t \geq 0, x \in \mathcal{H} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec A et B deux opérateurs linéaires bornés de \mathcal{H} à valeurs dans \mathcal{H} (espace de Hilbert) où A est non inversible.

Nous allons examiner la solution de (4.1) en utilisant l'inverse généralisé de l'opérateur A . Pour cela, énonçons les deux théorèmes suivants.

Définition 4.0.2. [1]. Un système de la forme (4.1) est dit solvable s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $(\lambda A - B)^{-1}$ existe. i.e. $\det(\lambda A - B) \neq 0$.

4.1 Cas homogène

Théorème 4.1.1. [1]. Supposons $ImA \subset ImB$, alors l'équation (4.1) avec $f(t) = 0$ possède une solution unique de la forme :

$$x(t) = e^{-A^D B t} x_0, \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

Remarque 4.1.1. Si A est inversible, alors $ImA = \mathcal{H}$ et la condition $ImA \subset ImB$ est trivialement satisfaite. De plus la solution de (4.1) sera :

$$x(t) = e^{-A^D B t} x_0.$$

4.2 Cas non-homogène

Théorème 4.2.1. *Supposons que :*

1. $ImB \subset ImA$
2. $AA^D f = f$

où f est continue. Alors, il existe une solution unique de la forme :

$$x(t) = e^{-A^D B t} x_0 + e^{-A^D B t} \int_0^t A^D e^{-A^D B s} f(s) ds.$$

Démonstration.

$x(t)$ vérifie (4.1) en effet :

$$\begin{aligned} Ax'(t) &= -AA^D B e^{-A^D B t} x_0 - AA^D B e^{-A^D B t} \int_0^t A^D e^{-A^D B s} f(s) ds + AA^D f(t) \\ &= -AA^D B (e^{-A^D B t} x_0 + e^{-A^D B t} \int_0^t A^D e^{-A^D B s} f(s) ds) + AA^D f(t) \\ &= -AA^D B x(t) + AA^D f(t) \\ &= -Bx(t) + f(t) \end{aligned}$$

Théorème 4.2.2. [3, 6]

1. *Supposons que le système (4.1) est consistant (solvable) ;*
2. *La fonction f k -fois continuellement différentiable.*

Alors le système (4.1) possède une solution générale de la forme :

$$x(t) = e^{\tilde{A}^D \tilde{B} t} \tilde{A} \tilde{A}^D x_0 + \tilde{A}^D e^{\tilde{A}^D t} \int_0^t e^{\tilde{A}^D \tilde{B} s} \tilde{f}(s) ds + (I - \tilde{A} \tilde{A}^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (\tilde{A} \tilde{B}^D)^n \tilde{f}^n, \text{ où}$$

$$\tilde{A} = (\lambda A - B)^{-1} A, \quad \tilde{B} = (\lambda A - B)^{-1} B, \quad \text{et} \quad \tilde{f}(t) = (\lambda A - B)^{-1} f(t),$$

avec :

$$\det(\lambda A - B) \neq 0; \quad t \geq 0.$$

Exemple 4.2.3. *Considérons le système (4.1) homogène ($f(t) \equiv 0$) avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 27 & 22 & 17 \\ -18 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ici, $AB \neq BA$, $\det A = 0$, $\det B = 0$.

Prenons $\lambda = 1$, puisque : $\det(\lambda A - B) = -45 \neq 0$.

Le système (4.1) est donc solvable et équivalent à :

$$\tilde{A}x'(t) - \tilde{B}x(t) = 0, \quad (4.3)$$

où

$$\tilde{A} = (A - B)^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 6 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = (A - B)^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Une solution unique existera si et seulement si le vecteur initial $x(0)$ satisfait :

$$(I - \tilde{A}\tilde{A}^D)x(0) = 0. \quad (4.4)$$

L'ensemble des valeurs propres (i.e le spectre ponctuel) de \tilde{A} et \tilde{B} sont $\{0, 1, 3\}$ et $\{0, 1, -2\}$ respectivement, d'où :

$$\tilde{A}^D = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 27 & -41 & -28 \\ 54 & 77 & 46 \\ -27 & -34 & -14 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B}^D = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 24 & 19 & 14 \\ -24 & -16 & -8 \\ 12 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

La condition (4.4) peut être remplacée par :

$$9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) = 0.$$

Les valeurs propres de $\tilde{A}^D\tilde{B}$ sont $0, 0, \frac{2}{3}$, d'après le théorème (4.2.2) le système (4.3) homogène possède la solution unique suivante :

$$x(t) = e^{\tilde{A}^D\tilde{B}t}\tilde{A}\tilde{A}^Dx_0 = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 & 1 - e^{\frac{2}{3}t} & 2(1 - e^{\frac{2}{3}t}) \\ 0 & 26 - 8e^{\frac{2}{3}t} & 16(1 - e^{\frac{2}{3}t}) \\ 0 & 13(e^{\frac{2}{3}t} - 1) & 26e^{\frac{2}{3}t} - 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}.$$

Propriété 4.2.4.

1. Si A est inversible, alors : $A^D = A^{-1}$.
2. A^D vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} AXA &= A; & XAX &= X; \\ AX &= X^*A^*; & XA &= A^*X^* \end{aligned}$$
3. L'opérateur A^D est unique. En effet,

$$\begin{aligned} X &= XAX = XX^*A^* = XX^*(AYA)^* \\ &= XX^*((AY)^*A)^* \\ &= XX^*A^*AY \\ &= XAY = XAA^*Y^*Y \\ &= A^*Y^*Y = Y \end{aligned}$$

4. $AA^D = P$;
 $A^D A = Q$, où Q l'ortho-projecteur sur H_2 .
 $A^D P = QA^D = A^D$
5. Si un opérateur B est inversible et si le sous espace $\text{Im}A$ est invariant par B^*B , alors,

$$(BA)^D = A^D B^D.$$

6. Si un opérateur B est inversible et si le sous espace $\text{Ker}A$ est invariant par BB^* , alors,

$$(AB)^D = B^D . A^D.$$

$$7. (A^D)^D = A$$

$$8. (A^*)^D = (A^D)^*$$

$$9. (A^*A)^D = A^D (A^D)^*$$

$$10. \text{Im}A^D = (\text{Ker}A)^\perp \quad ; \quad \text{ker}A^D = (\text{Im}A)^\perp$$

Remarque 4.2.1. Les propriétés (4,...,9) sont des conséquences directes de la propriété (P.2).

Lemme 4.2.5. Si A est normale ($AA^* = A^*A$), alors, ($A^D A = AA^D$). Ce résultat est une conséquence directe de la propriété (P.2).

Démonstration.

Les propriétés (P.9) et (P.2) nous permettent d'en conclure. En effet,

$$\begin{aligned}
A^D A &= A^D (AA^D A) = A^D (AA^D)^* A \\
&= A^D (A^D)^* A^* A \\
&= (A^* A)^D A^* A \quad (P.9) \\
&= (AA^*)^D AA^* \quad (A \text{ normale}) \\
&= A^{*(D)} A^D AA^* \\
&= A^{*(D)} (A(A^D A)^*)^* \\
&= A^{*(D)} (A(A^D A))^* \\
&= A^{*(D)} A^* \\
&= (AA^D)^* \\
&= AA^D
\end{aligned}$$

Remarque 4.2.2. *Si la matrice A est auto-adjointe, alors :*

$$\begin{aligned}
A^D A &= (A^D A)^* \\
&= A^* (A^*)^D \\
&= AA^D
\end{aligned}$$

de plus on a, d'après la propriété (P.2), $AA^D A = A^D A^2 = A$; Donc A^{-1} vérifie les trois équations vérifiant A^D , inverse de Drazin d'une matrice carrée, pour $I(A) = 1$. Dans ce cas $A^{-1} = A^D$. On a de même, si A est une matrice normale.

L'application de l'inverse généralisé d'un opérateur aux équations différentielles implicites est aussi valable pour le cas des espaces de dimension finie (A et B sont deux matrices).

Exemple 4.2.6. *Soit la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \mathbb{R}^2$$

et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $x = (x_1, x_2)$. Alors,

$$A_0 : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \text{Im}A$$

$$x \longrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ \text{Ker}A = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$P : H \supset H_2 \longmapsto \text{Im}A$$

Donc,

$$A^D = A_0^D P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A^D vérifie toute les propriétés citées au Propriété (4.2.4).

Il peut être défini comme unique solution des quatres équations suivantes :

$$AXA = A. \quad XAX = X;$$

$$AX = X^*A^* \quad XA = AX.$$

Une autre méthode pratique de calcul de l'inverse généralisé consiste à utiliser la propriété (P.9), qui nous permet de donner A^D à partir de $(A^*A)^D$, inverse généralisé de la matrice (A^*A) , qui est une matrice hermitienne et peut être réduite par une transformation unitaire en une forme diagonale :

$$(A^*A) = P \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \cdot & \\ & & a_n \end{pmatrix} P^*,$$

où P est unitaire. Donc,

$$(A^*A)^D = P \begin{pmatrix} a_1^{(D)} & & \\ & \cdot & \\ & & a_n^{(D)} \end{pmatrix} P^*,$$

où $a_i^{(D)}$ signifie a_i^D si $a_i \neq 0$ et donc, $A^{(D)} = (A^*A)^D A^*$.

Considérons maintenant l'équation implicite homogène (1) où A et B sont deux matrices rectangulaires de même ordre $m \times n$. On énonce alors le théorème suivant :

Théorème 4.2.7. *Supposons vérifiées les hypothèses suivantes :*

1. $Bx_0 \in \text{Im}A$;
2. A est une matrice normale ;
3. $AB = BA$.

Alors, il existe une solution unique de (4.3), de la forme :

$$x(t) = e^{-A^D B t} x_0$$

Démonstration.

$x(t) = e^{-A^D B t} x_0$ est bien une solution de (4.3), en effet :

$$\begin{aligned} Ax'(t) &= AA^D B e^{-A^D B t} x_0 \\ &= AA^D B \sum_{i \geq 0} (-1)^i (A^D B)^i \frac{t^i}{i!} x_0 \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \frac{t^i}{i!} A^D A B (A^D B)^i x_0 \\ \text{or, } AA^D B (A^D B)^i x_0 &= AA^D B (A^D)^i B^{(i+D)} B x_0 \\ &= AA^D B (A^D)^i B^{(i+D)} A y \quad (\text{d'après 1}) \\ &= AA^D B (A^D)^i A B^{(i+D)} y \quad (\text{d'après 3}) \\ &= AA^D B A (A^D)^i B^{(i+D)} y \quad (A \text{ normale}) \\ &= AA^D A B (A^D)^i B^{(i+D)} y \\ &= AB (A^D)^i B^{(i+D)} y \quad (P.2) \\ &= BA (A^D)^i B^{(i+D)} y \\ &= B (A^D)^i B^{(i)} X_0. \\ \text{donc, } Ax'(t) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \frac{t^i}{i!} B (A^D)^i B^{(i)} X_0; \\ &= Bx(t). \end{aligned}$$

Conclusion et Perspectives

Ce travail consiste à donner une idée succincte sur l'inversibilité des matrices carrées qui n'admettent d'inverse au sens classique mais seulement dans un sens bien déterminé. L'inverse de Drazin est une des possibilités parmi d'autres proposées par les mathématiciens permettant d'inverser une matrice carrée quelconque. Ceci mène encore à élargir l'idée aux opérateurs linéaires bornés puis, non borné.

La portée de ce concept a permis de résoudre certains types d'équations différentielles parmi lesquels des systèmes implicites.

En perspective, on peut étudier des systèmes implicites pour les équations abstraites de second ordre en utilisant les inverses généralisés dans des espaces de Banach.

Bibliographie

- [1] S.L. Campbell, Singular systems of differential equations, II- 234 pages. Pitman (1980).
- [2] S.L. Campbell and Carl D.Meyer. Jr, Continuity properties of the Drazin pseudo-inverse, Linear algebra and its applications, vol 10, pp 77-83, (1975).
- [3] S.L.Campbell, C. D. Meyer and J.Rose.N. Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J Appl Math, Vol 31 no 1, nov (1976), pp 411-425.
- [4] X. Liu, S. Wu, and Y. Yu, On the Drazin inverse of the sum of two matrices, Appl. Math, 13 pages (2011).
- [5] A. Pazy, Semigroup of Linear Operators and Applications to PDE, Springer, Berlin, (1983).
- [6] L. Zhang, A characterization of Drazin inverse, Linear Algebra and its applications, n=355, vol 5, pp 183-188, (2001).
- [7] H.Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Dunod, Paris, (1999).
- [8] P. Lévy-Bruhl. Introduction à la théorie spectrale, Dunod, Paris, (2003).
- [9] F.R.Gantmacher. The theory of matrices, Chelsea Publishing Company Vol 1 and 2., New York, (1960).
- [10] M.Hazi. Topologie au delà des travaux dirigés. Visite guidée dans les espaces normés. OPU. Tome 3, (2009).
- [11] F. Riesz, B. Nagy. Leçons d'Analyse fonctionnelle. Paris,(1968).
- [12] A.G. Rutkas. Cauchy problem for the equation $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$, Differ. Uravn., 11, No.11,(1975), pp 1996-2010.
- [13] A.G. Rutkas , Spectral methods for studying degenerate differential-operator equations. Springer Science No 144, (2007) ;pp 4246-4263.
- [14] I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta Math. 27 (1903), pp 365-390.

-
- [15] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, (1912), (Reprint of six articles which appeared originally in the Göttingen Nachrichten (1904), pp 49-51.
- [16] W. A. Hurwitz, On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation, Trans. Amer. Math. Soc.13 (1912), pp 405-418.
- [17] E. Bounitzky, Sur la fonction de Green des équations différentielles linéaires ordinaires, J. Math. Pures Appl.5(1909),no. 6, pp 65-125.
- [18] E. H. Moore On the reciprocal of the general algebraic matrix, Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920), pp394-395.
- [19] W. T. Reid, Generalized inverses of differential and integral operators, In Boullion and Odell **120**, (1931), pp 1-25.