الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation
Thème

Equations différentielles perturbées

Présenté Par :
1) Melle. RIAZI Nisrin

Devant le jury composé de :
Mme. Messabihi Aicha M C B UAT.B.B (Ain Temouchent)
Présidente
Mr. Beniani Abderrahmane M C A UAT.B.B (Ain Temouchent)
Examinateur
Mme. Belattar Zoukha M C A UAT.B.B (Ain Temouchent)
Encadrant

Année Universitaire 2022/2023

Table des matières

Dedicace

Je dédie ce modeste mémoire :

A mes chers parents,

A mes soeur,

A toute ma famille,

A mes professeurs,

A tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

Je remercie avant tout Allah de m'avoir donné la force et la volonté nécessaire pour achever ce travail.

Je remercie mes parents , mes soeur ,merci du foud du coeur pour votre pŕsence .votre amour,votre soutien dans les moments oú j'en avais le plus besoin.

Je remercie mon encadrant : Dr.Belattar Zokha pour son aide et ses conseils, en saluant en elle son savoir faire, sa compétence et ses connaissances dont elle m'a profiter.

Je remercie aussi les membres du jury Dr.Messabihi Aicha et Dr. Beniani Abderrahmane de m'avoir fait l'honneur d'en faire partie et d'avoir accepté l'évaluation de ce mémoire.

Enfin, je remercie toute personne de près ou de loin qui m'a aidé à réaliser ce travail d'initiation à la recherche.

Introduction

Dès le début du $XVIII^e$ siécle, la théorie des perturbations a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste : en effet, les équations différentielles décrivant un systéme de N corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour $N \geq 3$. Cet aspect de la théorie des perturbations a été élaborée à la fin du XIX^e siécle dans les ouvrages classiques de Laplace, Tisserand et Poincaré, avant de connaître de nouveaux développements dans la seconde moitié du XX^e siécle avec l'avénement en 1954 de la « théorie KAM », du nom de ses trois concepteurs : Kolmogorov, Arnold et Moser.

La méthode a par ailleurs été énormément utilisée au XX^e siécle pour les besoins de la physique quantique.

Une équation différentielle perturbée est une équation dans laquelle un terme de perturbation est ajouté à l'équation d'origine. Ce terme de perturbation peut être linéaire ou non linéaire . Il représente généralement une influence externe ou une perturbation du systéme étudié.

Les équations différentielles perturbées sont utilisées pour modéliser des phénomènes réels. Elles sont utilisées dans plusieurs domaines scientifiques , tels que la physique, l'ingénierie, l'économie et la biologie . . . , pour étudier les effets des perturbations sur les systèmes dynamiques et analyser leurs comportements.

Les méthodes de perturbation pour les équations différentielles sont expliquées à l'aide de modèles simples d'équations différentielles ordinaires. La motivation pour développer ces méthodes est la nécessité de traiter des équations différentielles ordinaires et partielles plus complexes, souvent non linéaires .

La théorie de perturbation est une mèthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique (E_ε) dépandante d'un paramètre noté ε lorsque la solution de l'équation (E_0), correspondant à valeur $\varepsilon = 0$, est connue exactement. L'équation mathématique (E_ε) peut être une équation algébrique , une équation différentielle , une équation aux valeur propres,. . . .

La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_ε) sous la forme d'un développement en série des puissances du paramétre ε assez petit $(\varepsilon \ll 1)$.

La méthode de Poincaré est une technique utilisée pour étudier les équations différentielles périodiques perturbées. Elle consiste à effectuer une transformation coordonnée pour être ramener à une équation différentielle sans perturbation .

La méthode de Lindstedt-Poincaré a été introduite par le mathématicien Suédois Ernst Lindstedt et développée ultérieurement par Henri Poincaré, c'est une extension de la méthode de Poincaré qui permet de résoudre des équations différentielles périodiques non linéaires perturbées.

Ce travail est organisé en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous examinons le contexte et les définitions des équations différentielles ordinaires , puis nous donnons des préliminaires utilisées dans les autres chapitres.

-Dans le deuxiéme chapitre, nous étudions la méthode de Poincaré et nous allons l'appliquer sur quelques exemples .

-Dans le dernier chapitre, nous étudions la méthode de perturbation de Lindsted-Poincaré qui appliquée aux systémes , puis nous allons étudier l'éxistence de solutions périodiques.

Pour finir, nous allons terminer notre travail par une conclusion et bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Equations différentielles ordinaires

Dans ce chapitre, on donne un rappel succinet de certaines notions fondamentales , sur les équation différentielles ordinaires .

1.1.1 Introduction

En mathématiques, une équation différentielle ordinaire (parfois simplement appelée équation différentielle et abrégée en EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.
Le terme ordinaire est utilisé par opposition au terme équation différentielle partielle (plus communément équation aux dérivées partielles, ou EDP) où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables. Dans la suite de l'article, le terme équation différentielle est utilisé pour signifier équation différentielle ordinaire.

1.1.2 Définition générale

Définition 1.1.1. *[8](***Equation différentielle)** *Une équation dans laquelle apparaît(uniquement) une variable dépendante et ses dérivées par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes* *est appelée équation différentielle.*

Définition 1.1.2. *[9] On appelle ordre d'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles) l'ordre de la dérivée la plus élevée qu'elle contient.*

Définition 1.1.3. *[12](***Equation différentielle ordinaire)**
Une équation différentielle ordinaire,égalment notée EDO,dórdre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, x, x'', \cdots, x^{(n)}) = 0 \quad , \quad , \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R} \tag{1.1}$$

oú F n'est pas indépendante de sa derinére variable $x^{(n)}$. La solution x en générale sera á valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.1.4. *On dit que cette équation est scalaire si F est á valeurs dans $\mathbb{R}$*

Définition 1.1.5. *[11](***Equation différentielle normale)**
On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{('')}, \ldots, x^{(n-1)}).$$

Définition 1.1.6. *[8](***Equation différentielle autonome)**
On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(x, x'', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

Autrement dit,f ne dṕend pas explicitement de t.

Remarque 1.1.7. *Les équations autonomes sont tré importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leurs stabilité .*

Définition 1.1.8. *[8](***Equation différentielle linéaire)**
Une équation différentielle est dite linéaire si elle n'implique que des fonctions linéaires de la variable dépendante et de toutes les dérivées qu'elle contient.

1.1.3 Solutions maximales et globales

Définition 1.1.9. *[4]*(**prolongement)**

Soint (x, I) et $(\tilde{x}, \tilde{I})$ deux solutions d'une même équation différentielle . On dira que $(\tilde{x}, \tilde{I})$ est une prolongement de (x, I) si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x} \mid_I = x$.

Définition 1.1.10. *[6]*(**solution maximale)** *On dit qu'une solution $x : I \to \mathbb{R}^m$ est maximale si x n'admet pas de prolongement $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ avec $I \subsetneqq \tilde{I}$.*

Théorème 1.1.11. *[4] Tout solution x se prolonge en une solution maximale $\tilde{x}$ (pas nécessairment unique).*

Définition 1.1.12. *(***Solution globale)**

Une solution x est dite globale dans $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.

1.1.4 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall est l'un des outils fondamentaux dans la theorie des équations différentielles. Il en existe plusieurs versions mais l'idée est toujours d'obtenir une estimation pour une fonction ν à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait une inegalitè implicite mais linéaire.

Lemme 1.1.13. *[2]*(**(Gronwall)**

Soint a et $c \in C([0, T]; \mathbb{R})$, où $T > 0$. On suppose de plus la fonction a á valeurs positives. Si $\nu \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ vèrifie

$$\nu(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)\nu(s)ds \ \forall t \in [0, T], \tag{1.3}$$

alors

$$\nu(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}ds \ \ \forall t \in [0, T]$$

1.2 Le probléme de Cauchy

Le probléme de Cauchy est un probléme constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vŕifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre

plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire continue.

Définition 1.2.1. *Etant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme suivante :*

$$x^{'}(t) = f(t,(x)) \quad , \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

le probléme de Cauchy correspondant consiste à chercher des solution x ,tell que $x(t_0) = x_0$.
le probléme de Cauchy s'ècrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & x^{'}(t) = f(t,x(t)) \quad , \quad (t,x(t)) \in U \\ & x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Définition 1.2.2. *[12] Une solution du probléme de Cauchy $(1,4)$ sur $I \subset \mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0, x_0) \in U$ est une fonction dérivable $x : U \to \mathbb{R}$ telle que :*
I) pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,
II) pour tout $t \in I, x^{'}(t) = f(t, x(t))$,
III) $x(t_0) = x_0$.

Théorème 1.2.3. *[5] Soit $f : I \times V \to X$ une application continue, $I \subset \mathbb{R}$ et V un ouvert connexe non vide d'un $\mathbb{R}$ espace de Banach , (t_0, x_0) un point fixe de $\mathbb{R} \times V$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient t_0, alors x est une solution du probléme de Cauchy $(1,5)$ sur I si et seulement si*
✓ *pour tout $t \in I, (t, x(t)) \in I \times V$,*
✓*x est continue sur I ,*
✓ *pour tout $t \in I$*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

1.2.1 Existence et unicité locale

Théorème 1.2.4. *[2](* **Cauchy-Lipschitz)**
Soient $f \in C(I \times U; X)$, où $I \subset \mathbb{R}$ et U un ouvert d'un espace de Banach X. On suppose

de plus qu'il existe un voisinage de $(t_0, \nu_0) \in I \times U$ *et* $K > 0$ *tel que pour tous* (t, x_1) *et* (t, x_2) *dans ce voisinage*

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq K \| x_1 - x_2 \|$$

Existence *: il exister* $\tau > 0$ *et* $\nu \in C([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; U)$ *solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \nu' = f(t, \nu) \\ \nu(t_0) = \nu_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Unicitè *: Si* μ *une autre solution de* $(1, 5)$ *,elle coincide avec* ν *sur un intervalle d'intèrieur non vide inclus dans* $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Règularitè *: Si de plus* f *est de classe* C^r, $r \geq 1$, *alors* ν *est de classe* C^{r+1}

1.2.2 Existence et unicité globale

Théorème 1.2.5. *[4] Soient* x_1 ,x_2 : $I \to \mathbb{R}^n$ *deux solutions de* (E) *, avec* f *localement lipschitzienne en* x *.Si* x_1 *et* x_2 *concident en un point de* I *, alors* $x_1 = x_2$ *sur* I *.*

Corollaire 1.2.6. *[4] Si* f *est localement lipschitizienne en* x *sur* U *, pour tout point* $(t_0, x_0) \in U$ *il passe une solution maximale* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *et une seule .*

1.3 Equation différentielle du second ordre

Définition 1.3.1. *On considére*

$$x''(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x'(t) + b(t) \ , \quad t \in I \tag{H}$$

où $a_0(t)$, $a_1(t)$ *sont des fonctions définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *, l'équation* H *équivalente à un systéme d'ordre* 1 *donnèe par*

$$X'(t) = AX(t) + B$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Proposition 1.3.2. *Soit*

$$F : (I \times U) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(t, X) \to X' = F(t, X) = AX + B$$

oú $A(t) : I \subset \mathbb{R} \to \pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ continue , et $B(t) : I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ continue, alors le probléme de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) & = AX(t) + B \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}$$

admet une solution unique.

Proposition 1.3.3. *Soit X_1 une solution maximale de $X' = AX$ et soit X_2 une solution particulière de $X' = AX + B$, alors $X = X_1 + X_2$ est une solution maximale de l'équation $X' = AX + B$.*

1.4 Dévelopment asymptotique

On considére la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, la fonction $f(t, x, \varepsilon)$ est continue par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et $x \in D \subset \mathbb{R}$, et ε est un petit paramétre. La fonction f est développable à ε , nous avons

$$f(t, x, \varepsilon) = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \ldots + \varepsilon^n f_n(t, x) + \ldots, \tag{1.6}$$

avec les coefficients $f_1, f_2, \ldots$ dépendent de t et x. Les expressions $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n, \ldots$ sont appelées fonctions d'ordre.

Remarque 1.4.1. *En général , nous chercherons un développement de la forme*

$$f(t, x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \delta_n(\varepsilon) f_n(t, \varepsilon) + \ldots,$$

où $\delta_n(\varepsilon)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, sont des fonctions d'ordre.

Définition 1.4.2. *[5]*

1. $f = O(\phi)$ *quand* $\varepsilon \to \varepsilon_0$*, s'il existe une constante* k_0 *et* ε_1 *telle que*

$$\mid f(\varepsilon) \mid < k_0 \mid \phi(\varepsilon) \mid \;\; pour, \;\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

2. $f = O(\phi)$ *quand* $\varepsilon \to \varepsilon_0$*, signifie que pour tout* δ *positif, il existe un* ε_2 *(indépendant de* ε*) telle que*

$$\mid f(\varepsilon) \mid < \delta \mid \phi(\varepsilon) \mid \;\; pour \; \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_2$$

.

Définition 1.4.3. *La fonction* $\delta(\varepsilon)$ *est continue, positive sur* $(0, \varepsilon_0]$ *, et décroissante de telle sorte que* $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon)$ *existe si elle tend vers zéro ;* $\delta(\varepsilon)$ *est appelée fonction d'ordre.*

Remarque 1.4.4. *Dans le cas où* f *admet un développement de Taylor, les fonctions d'ordre qui ont été utilisées sont les suivantes*

$$\delta(\varepsilon) = \{\varepsilon^n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Exemple 1.4.5. *Les fonctions suivantes*

$$\varepsilon \mid \ln \varepsilon \mid, \;\; \mid \sin \varepsilon \mid, e^{-1/\varepsilon}$$

sont des fonctions d'ordre sur $(0, 1]$.

Théorème 1.4.6. *[13]*

1. *Si*
$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = L \;\;, \quad L \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[. \tag{1.7}$$
alors $f = O(\phi)$ *quand* $\varepsilon \to \varepsilon_0$.

2. *Si*
$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0, \tag{1.8}$$
Alors $f = o(\phi)$ *quand* $\varepsilon \to \varepsilon_0$.

Exemple 1.4.7. *1)* $\varepsilon^4 = o(\varepsilon^2)$ *quand* $\varepsilon \to 0$,

2) $\sin\varepsilon = O(\varepsilon)$ *quand* $\varepsilon \to 0$,

3)$\varepsilon \mid \ln\varepsilon \mid= o(1)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Proposition 1.4.8. *Considérons la fonction* $f(t, x, \varepsilon)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, *et* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *;*

a) $f(t, x, \varepsilon)$ *est* $O(\delta(\varepsilon))$ *s'il existe une constante* k *telle que* $\|f\| \leq k\delta(\varepsilon)$ *quand* $\varepsilon \to 0$ *avec* $\delta(\varepsilon)$ *est une fonction d'ordre .*

b) $f(t, x, \varepsilon)$ *est* $o(\delta(\varepsilon))$ *quand* $\varepsilon \to 0$ *si* $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|f\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$.

Définition 1.4.9. *Considérons la fonction* $f(t, x, \varepsilon)$,$t \geq 0$,$x \in D \subset \mathbb{R}^n$ *,et les fonctions d'ordre* $\delta_1(\varepsilon)$ *et* $\delta_2(\varepsilon)$ *;*

$$f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon)) \quad \textit{quand} \ \ \varepsilon \to 0 \ \ , \quad x \in D$$

sur l'échelle de temps $1/\delta_2(\varepsilon)$, $0 \leq \delta_2(\varepsilon)t \leq C$ *avec* C *est une constante indépendante de* ε.

Exemple 1.4.10. *On considére la fonction*

$$f_1(t, x, \varepsilon) = \varepsilon t \sin x \quad , t \geq 0 \quad , x \in \mathbb{R}$$

alors on a :

1) $f_1(t, x,\varepsilon)$=$O(\varepsilon)$ *sur l'échelle de temps 1,*

2) $f_1(t, x,\varepsilon)$=$O(1)$ *sur l'échelle de temps* $1/\varepsilon$.

Exemple 1.4.11. *On considére la fonction*

$$f_2(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^2 t \sin x \quad , t \geq 0 \ \ , x \in \mathbb{R}$$

alors on a :

1) $f_2(t, x,\varepsilon)$= $O(\varepsilon)$ *sur l'échelle de temps* $1/\varepsilon$,

2) $f_2(t, x,\varepsilon)$=$O(\varepsilon^{1/2})$ *sur l'échelle de temps* $1/\varepsilon^{3/2}$.

Proposition 1.4.12. *Considérons les fonctions* $f(t,x,\varepsilon), g(t,x,\varepsilon)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ *; $g(t,x,\varepsilon)$ est une approximation asymptotique de $f(t,x,\varepsilon)$ sur l'échelle de temps* $1/\delta(\varepsilon)$*si*

$$f(t,x,\varepsilon) - g(t,x,\varepsilon) = o(1) \quad , \textit{quand} \quad \varepsilon \to 0 \textit{ sur l'échelle de temp} \quad 1/\delta(\varepsilon).$$

Remarque 1.4.13. *L'approximation des fonctions prendra la forme d'expansions asymptotiques telles que*

$$f(t,x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \delta_n(\varepsilon) f_n(t,x,\varepsilon) + o(\delta_N(\varepsilon))$$

avec δ_n des fonctions d'ordre vérifient :

$$\delta_{n+1} = o(\delta_n(\varepsilon)) \ , \quad n = 0, \ldots, N-1$$

et

$$f_n(t,x,\varepsilon) = O(1), \quad \textit{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

Chapitre 2

Méthode de perturbation de Poincaré

2.1 Introduction

La méthode de perturbation de Poincaré permet de simplifier la résolution de systémes d'équations différentielles non linéaires complexes en utilisant des approximations basées sur des systémes linéaires connus. Elle est couramment utilisée dans divers domaines scientifiques et techniques .

2.2 Perturbations régulières

En générale, la théorie des perturbations régulières est une variante du théorème de Taylor, dans le sens que nous recherchons une solution en série de puissance ε.

Définition 2.2.1. (E_ε) *est un problème régulier (ou problème de perturbation régulière) si sa solution* $x(t,\varepsilon)$ *admet une série asymptotique de puissance de* ε *au voisinage de* $\varepsilon = 0$ *et si de plus* $\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = x_0$ *où* x_0 *est la solution du problème réduit* $E_\varepsilon = 0$.

Réslutat de Poincaré *:*

On considére l'équation (E_ε) *avec un petit paramétre* $0 \leq \varepsilon \ll 1$*, alors La solution de* (E_ε) *est une fonction analytique de paramétre* ε *qui prend cette forme*

$$x(t,\varepsilon) \sim x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots, \, quand \ \varepsilon \to 0 \tag{E}$$

Ainsi , si $\varepsilon \ll 1$ *la série est convergente . Les fonctions* $x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)$*. sont trouvées par substitution de l'équation* (E) *dans l'équation* (E_ε).

La procédure pour appliquer la méthode de perturbation régulière consiste à :

1) En remplaçant la série des puissances (E) *dans* (E_ε) *,*

2) En développant toutes les quantités en séries de puissances en ε *,*

3) En rassemblant les termes ayant les mêmes puissances de ε *et en les mettant égal à zéro,*

4) la résolution se fait séquentiellement , c-á-d si $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ *sont connus, alors* x_k *est déterminé par une équation de la forme*

$$Lx_k = f_k(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}),$$

Où L est l'opérateur linéaire du problème réduit et évalué á la solution connue x_0.

Théorème 2.2.2. *[13]* **(Théoréme des fonctions implicites)**
Considérons une équation implicite

$$f(x, \varepsilon) = 0,$$

s'il existe $x = x_0$ *tel que*

$$f(x_0, \varepsilon) = 0.$$

et si $f'_x(x_0, 0)$ *est une application linéaire inversible, alors il existe une solution unique de l'équation donnée dans le voisinage de* $\varepsilon = 0$ *donnée par*

$$x = g(\varepsilon).$$

Proposition 2.2.3. *Le probléme* (E_ε) *admet une solution local si L est inversible en appliquant le théorem* (2.2.2).

2.2.1 Méthode de perturbation régulière appliquèe aux Equations algébriques

Les principaux concepts des méthodes de perturbation peuvent être abordés dans le contexte plus simple de l'équation algébrique, avant d'aborder les équations différentielles.

Exemple 2.2.4. *Considérons l'équation algébrique suivante*

$$x^2 - 2x + \varepsilon = 0 \ , \varepsilon << 1. \tag{2.1}$$

cette équation a deux racines données par

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{1-\varepsilon} \\ x_2 = 1 + \sqrt{1-\varepsilon} \end{cases}$$

Nous développons $\sqrt{1-\varepsilon}$ *sous forme de série de Taylor*

$$\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \cdots$$

On obtient

$$\begin{cases} x_1 & \sim \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \cdots \\ x_2 & \sim 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \cdots \end{cases}$$

nous utilisons le développement asymptotique relative à ε *au voisinage de 0.*

$$x(\varepsilon) \sim x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots + \varepsilon^n x_n + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) \tag{2.2}$$

En remplaçant dans l'équation (2.1), *nous obtenons*

$$\left[x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots+\varepsilon^n x_n+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)\right]^2 - 2\left[x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots+\varepsilon^n x_n+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)\right]+\varepsilon = 0$$

d'où

$$\left[x_0^2 + \varepsilon 2x_0x_1 + \varepsilon^2(x_1^2 + 2x_0^2) + O(\varepsilon^3)\right] - 2\left[x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3)\right] + \varepsilon = 0 \tag{2.3}$$

$$(2,3) \Longleftrightarrow (a_0^2 - 2a_0) + \varepsilon(2a_0a_1 - 2a_1 + 1) + \varepsilon^2(a_1^2 + 2a_0a_2 - 2a_2) + O\left(\varepsilon^3\right) = 0$$

En mettant à zéro les coefficients de chaque puissance de ε, *on obtient :*

$$\begin{cases} O(1) : x_0^2 - 2x_0 & = 0 \\ O(\varepsilon) : 2x_0x_1 - 2x_1 + 1 & = 0 \\ O(\varepsilon^2) : x_1^2 + 2x_0x_2 - 2x_2 & = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Puisque, $x_0^2 - 2x_0 = 0$ *alors :*

$$x_0 = 0 \quad ou \quad x_0 = 2$$

Pour $x_0 = 0$*, les coefficient* $x_1, x_2, \ldots.$ *se determinant par récurrence, on obtient :*

$$x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_2 = \frac{1}{8}, \;\; etc$$

Ainsi

$$(2.2) \Rightarrow x_1 \sim \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \cdots$$

Pour $x_0 = 2$*, on obtient*

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \;\; x_2 = -\frac{1}{8}, \;\; \ldots.$$

Donc

$$(2.2) \Rightarrow x_2 \sim 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \cdots$$

Exemple 2.2.5. *Considérons l'équation algébrique (Nayfeh, 1981)*

$$(x-1)(x-\tau) = -\varepsilon x$$

Pour $\varepsilon = 0$*, cette équation devient :*

$$(x-1)(x-\tau) = 0 \tag{2.4}$$

On recherche le développemet assymptotique relative à ε *au voisinage de 0,*

$$x(\varepsilon) \sim x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^n x_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big) \tag{2.5}$$

En remplaçant l'équation (2.5) *dans* (2.4) *, on obtient*

$$(x_0-1)(x_0-\tau) + \varepsilon[(2x_0-1-\tau)x_1 + x_0] + \varepsilon^2[(2x_0-1-\tau)x_2 + x_1^2 + x_1] + \ldots + O\big(\varepsilon^3\big)] = 0.$$

En mettant à zéro les coefficients de chaque puissance de ε*, on obtient :*

$$\begin{cases} O(1) : (x_0-1)(x_0-\tau) & = 0 \\ O(\varepsilon) : (2x_0-1-\tau)x_1 + x_0 & = 0 \\ O(\varepsilon^2) : (2x_0-1-\tau)x_2 + x_1^2 + x_1 & = 0 \\ \vdots \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 & = 1 \\ x_1 & = -\frac{1}{1-\tau} \\ x_2 & = -\frac{\tau}{(1-\tau)^3} \end{cases} \quad Ou \quad \begin{cases} x_0 & = \tau \\ x_1 & = \frac{\tau}{1-\tau} \\ x_2 & = \frac{\tau}{(1-\tau)^3} \end{cases}$$

Ainsi, l'équation (2.4) *admet deux racines*

$$\begin{cases} x & \sim 1 - \frac{\varepsilon}{1-\tau} - \frac{\varepsilon^2 \tau}{(1-\tau)^3} + \dots \\ x & \sim \tau + \frac{\varepsilon \tau}{1-\tau} + \frac{\varepsilon^2 \tau}{(1-\tau)^3} + \dots \end{cases}$$

2.2.2 Méthode de perturbation régulière appliquèe aux équation différntielle avec une condition initiale

Définition 2.2.6. *[3] S'il existe des constantes M et ε_0 et un ensemble S telle que*

$$|u(t,\varepsilon)| \leq M|v(t,\varepsilon)|$$

Pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $t \in S$, alors on dit que u est grand oh de v sur S lorsque ε tend vers 0 et on écrit :

$$u(t,\varepsilon) = O(v(t,\varepsilon)) \ , \ (\varepsilon \to 0) \ , (t \in S).$$

Exemple 2.2.7. *Considérons le probléme de la valeur initiale(IVP)*

$$\begin{cases} x^{'}(t) + x(t) + \varepsilon x^2(t) & = 0 \\ x(0) & = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Nous remplaçons le développement asymptotique relative à ε au voisinage de 0

$$x(t,\varepsilon) \sim x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big)$$

dans l'équation (2.6) *, nous obtenons :*

$$(x_0^{'}(t) + \varepsilon x_1^{'}(t) + \cdots) + (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots) + \varepsilon(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots)^2 = 0$$
$$x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + \cdots = 1$$

Etape 1 : En commençant par les termes qui n'impliquent pas ε, nous avons

$$\begin{cases} x_0^{'}(t) + x_0(t) & = 0 \\ x_0(0) & = 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Par intégration de l'équation $(1,7)$, *on obtient :*

$$x_0(t) = e^{-t}$$

Etape 2 : Mettons le coefficient de ε *égal à* 0 *:*

$$\begin{cases} x_1^{'}(t) + x_1(t) + x_0^2(t) & = 0 \\ x_1(0) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{'}(t) + x_1(t) + e^{-2t} & = 0 \\ x_1(0) & = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

La solution de (2.8) *est donnée par*

$$x_1(t) = e^{-2t} - e^{-t}$$

Etape 3 : Mettons le coefficient de ε^2 *égale à 0 , nous avons :*

$$\begin{cases} x_2^{'}(t) + x_2(t) + 2x_0x_1 & = 0 \\ x_2(0) & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2^{'}(t) + x_2(t) + 2e^{-3t} - 2e^{-2t} & = 0 \\ x_2(0) & = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

La solution de (2.9) *est donnèe par*

$$x_2(t) = e^{-3t} - 2e^{2-t} + e^{-t}$$

Par conséquent, le développement de perturbations est donnée par

$$e^{-t} + \varepsilon(e^{-2t} - e^{-t}) + \varepsilon^2(e^{-3t} + e^{-2t} - 2e^{-t}) + \cdots + O\big(\varepsilon^{n+1}\big) \tag{2.10}$$

trouvons maintenant la solution exacte de problème (1.6), *posons*

$$x = \frac{1}{\omega}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} + \omega & = -\varepsilon \\ \omega(0) & = 1 \end{cases}$$

solution de ce probléme est donnée par

$$\omega(t) = \varepsilon + (1+\varepsilon)e^{-t}$$

d'où , la solution exacte de problème (2.6) *est*

$$x(t,\varepsilon) = \frac{e^{-t}}{1+\varepsilon(1-e^{-t})}$$

Pour aller plus loin, utilisons les séries géométriques pour écrire la solution exacte sous la forme d'une série infinie

$$(2.10) \Rightarrow x(t,\varepsilon) = e^{-t}(1-\varepsilon(1-e^{-t}) + \varepsilon^2(1-e^{-t})^2 + \cdots).$$

Cette solution est converge si $\varepsilon|1-e^{-t}| < 1$. *Maintenant calculons l'estimation de l'erreur absolue. En utilisons le premier terme de la série de perturbation on obtient :*

$$|x(t,\varepsilon) - e^{-t}| \leq \varepsilon(1-e^{-t})e^{-t} \ \ (t \geq 0) \tag{2.11}$$

ainsi que l'estimation de l'erreur relative

$$\frac{|x(t,\varepsilon) - e^{-t}|}{e^{-t}} \leq \varepsilon(1-e^{-t}) \ \ (t \geq 0)$$

Nous pouvons alors utiliser les deux premiers termes de la série de perturbations et obtenir des estimations d'erreur plus faibles

$$|x(t,\varepsilon) - e^{-t}(1-\varepsilon(1-e^{-t}))| \leq e^{-t}\varepsilon^2(1-e^{-t})^2,$$

et

$$\frac{|x(t,\varepsilon) - e^{-t}(1-\varepsilon(1-e^{-t}))|}{e^{-t}} \leq \varepsilon^2(1-e^{-t})^2,$$

le fait que (2.11) *est satisfaite ,En utilisant la définition* (2.2.6) *alors*

$$x(t,\varepsilon) - e^{-t} = O(\varepsilon) \ \ ,(\varepsilon \to 0) \ \ ,(t \geq 0),$$

Plus précisément

$$x(t,\varepsilon) - e^{-t} = O(\varepsilon e^{-t}) \ \ ,(\varepsilon \to 0) \ \ ,(t \geq 0),$$

Cette dernière expression est généralement écrite sous la forme équivalente

$$x(t,\varepsilon) = e^{-t}(1+O(\varepsilon)) \ \ ,(\varepsilon \to 0) \ \ ,(t \geq 0).$$

Si on utilisons les deux premiers termes de la série de perturbations, on a alors

$$x(t,\varepsilon) = e^{-t}(1-\varepsilon(1-e^{-t}) + O(\varepsilon^2)) \ \ ,(\varepsilon \to 0) \ \ ,(t \geq 0).$$

2.2.3 Méthode de perturbation régulière appliquèe au problème aux limites

Exemple 2.2.8. *Considérons le probléme aux limites suivant :*

$$\begin{cases} \varepsilon x''(t) + x'(t) + x(t) & = 0 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = a \ , \ \ x(1) = b \end{cases} \tag{2.12}$$

On recherche le développement assymptotique relative à ε au voisinage de 0

$$x(\varepsilon) \sim x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^n x_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big) \tag{2.13}$$

En remplaçons l'équation (2.13) *dans* (1.12) *, on obtient*

$$\varepsilon\big(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots\big)'' + \big(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots\big)' + (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots) = 0$$

En mettant à zéro les coefficients de chaque puissance de ε, on obtient :

$$\begin{cases} O(1) : x_0 + \dot{x}_0 & = 0 \\ O(\varepsilon) : x_1' + x_1 & = -x_0'' \\ \vdots \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} O\big(1)\big) : x_0 & = be^{1-x} \\ O\big(\varepsilon)\big) : x_1 & = b(1-x)e^{1-x} \\ \vdots \end{cases}$$

Ainsi

$$(2.13) \Rightarrow x \sim b\big[1 + \varepsilon(1-x)\big]e^{1-x} + O(\varepsilon^2)$$

Exemple 2.2.9. *Considérons le probléme suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0 \\ x(0) = A, \quad x'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Supposons que la solution de cette équation de la forme suivante

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots + \varepsilon^n x_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big). \tag{2.15}$$

En remplaçant l'équation (2.15) *dans l'équation* (2.14)*, on obtient*

$$\Big(\frac{d^2x_0}{dt^2} + \varepsilon\frac{d^2x_1}{dt^2} + \varepsilon^2\frac{d^2x_2}{dt^2} + \ldots\Big) + \big(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots\big) + \varepsilon\big(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots\big)^3 = 0,$$

d'ou

$$\Big(\frac{d^2x_0}{dt^2}+x_0\Big)+\varepsilon\Big(\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1+x_0^3\Big)+\varepsilon^2\Big(\frac{d^2x_2}{dt^2}+x_2+3x_0^2x_1\Big)+\cdots\varepsilon^n x_n+O\big(\varepsilon^{n+1}\big)=0$$

Mettons tous les coefficients des différentes puissances de à zéro, on obtient alors les systémes suivants :

$$\begin{cases} O(1):\ \dfrac{d^2x_0}{dt^2}+x_0=0 \\ x(0)=A,\ \ x'(0)=0 \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} O(\varepsilon):\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2}+x_1=-x_0^3 \\ x_1(0)=0,\ \ x_1'(0)=0 \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} O(\varepsilon^2):\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}+x_2=-3x_0^2x_1 \\ x_2(0)=0,\ \ x_2'(0)=0 \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\vdots$$

La solution de systéme (2.16) *est donnée par :*

$$x_0(t)=A\cos t$$

cherchons la solution de (2.17)

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1&=-x_0^3\\ &=(-\frac{3A^2}{4})\cos t-(\frac{A^3}{4})\cos 3t\end{aligned} \tag{2.19}$$

La solution particuliére de (2.17) *est donnée par*

$$x_{1P}=(\frac{A^3}{32})\cos 3t-(\frac{3A^3}{8})t\sin t$$

Par conséquent, la solution générale de (2.17) *est*

$$x_1(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+(\frac{A^3}{32})\cos 3t-(\frac{3A^3}{8})t\sin t$$

Les conditions initiales, spécifiées par le systéme (2.14)*, permettent de déterminer les constantes arbitraires* $C1$ *et* $C2$*, on obtient* $C1 = (A^3/32)$ *et* $C_2 = 0$*, ainsi* $x_1(t)$ *devient*

$$x_1(t) = (\frac{A^3}{16})(\cos 3t - \cos t) - 3At \sin t$$

Donc , la solution perturbé de systéme (2.14) *est*

$$x(t, \varepsilon) = A \cos t + \varepsilon\big[(\frac{A^3}{32})(\cos 3t - \cos t) - 12t \sin t + O(\varepsilon)\big] \tag{2.20}$$

Cependant, la solution (2.20) *montre que* $x_1(t)$*, (le terme de correction de la fonction périodique* $x_0(t)$ *est supposé petit) est non seulement non périodique mais de plus non borné lorsque* $t \to \infty$.

Ainsi, une application directe de (2.20) *conduit à des difficultés si on veut calculer des approximations des solutions analytiques et périodiques d'équations différentielles non linéaires de la forme donnée par* (2.14).

2.3 Etude de solution des systémes perturbées non linéaire

2.3.1 Développement simple

Considérons le problème de la valeur initiale

$$x^{'} = f(t, x, \varepsilon) \ , \quad x(0) \ \text{donné}. \tag{2.21}$$

où $t \geq 0 \quad , x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.3.1. *Si* $f(t, x, \varepsilon)$ *est développable en série de Taylor par rapport à* ε

$$f(t, x, \varepsilon) = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 \ldots$$

alors, la solution (2.21) *est développable en série de Taylor et donnée par*

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots + \varepsilon^n x_n(t) + O\big(\varepsilon^{n+1}\big).$$

Théorème 2.3.2. *[1] Soit x la solution unique du problème de la valeur initiale*

$$\begin{cases} x' & = f_0(t,x) + \varepsilon f_1(t,x) + \cdots + \varepsilon^{n-1} f_{n-1}(t,x) + \varepsilon^n f_n(t,x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1} R(t,x,\varepsilon) \\ x(t_0) & = A \end{cases} \tag{H}$$

avec

a) $f_0, f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions continues en t et ils sont n fois continuellement dérivable en x dans l'ensemble $S = \{(t,x) : |t - t_0| \leq h, x \in D\}$, où $A \in D$,D est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^m$.

b) f_n est une fonction continues sur S pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et borné sur $S \times (0, \varepsilon]$ pour un certains ε_0>0.

c) $R(t,x,\varepsilon)$ continue en t, x et ε continûment -lipschitzienne en x. Si on remplace

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots + \varepsilon^{n-1} x_{n-1}(t)$$

dans le probléme (H) et calculer les fonctions de coefficient $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ Par la méthode de développement assymptotique relative à ε, alors

$$x(t,\varepsilon) - (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots + \varepsilon^{n-1} x_{n-1}(t)) = O(\varepsilon^n) \ \ (\varepsilon \to 0) \ \ (t \in I)$$

où I est intervalle de $[t_0 - h, t_0 + h]$ tel que $x(t) \in D$ pour $t \in I$.

Démonstration : *En remplaçant le développement formelle dans l'équation, on obtient*

$$x_0'(t) + \varepsilon x_1'(t) + \ldots = f_0(t, x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots) + \varepsilon f_1(t, x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots) + \ldots$$

Ici, les points indiquent les termes commençant par ε^2, ε^3,.... On développe en série de Taylor et en mettant en équation les coefficients des puissances égales de ε, on obtient

$$\begin{aligned} x_0' &= f_0(t, x_0) \\ x_1' &= f_1(t, x_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x_0) x_1 \end{aligned}$$

L'équation pour $x_i(t), i = 1, 2, \ldots$ est de la forme

$$x_i' = A_i(t) + B_i(t) x_i$$

où $A_i(t)$ et $B_i(t)$ dépendent de $x_0(t), \ldots, x_{i-1}(t)$, c'est-à-dire que l'équation non perturbée est non linéaire. L'équation intégrale équivalente pour le probléme (H) est :

$$x(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f_0(\tau, x(\tau))d\tau + \ldots + \varepsilon^m \int_{t_0}^{t} f_m(\tau, x(\tau))d\tau + \varepsilon^{m+1} \int_{t_0}^{t} R(\tau, x(\tau), \varepsilon)d\tau.$$

Commençons par m = 0 , nous avons

$$x_0(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f_0(\tau, x_0(\tau))d\tau$$

Donc

$$x(t) - x_0(t) = \int_{t_0}^{t} [f_0(\tau, x(\tau)) - f_0(\tau, x_0(\tau))]d\tau + \varepsilon \int_{t_0}^{t} R(\tau, x(\tau), \varepsilon)d\tau.$$

le faite que f_0 est continue Lipschitz de constante Ł, et $\|R\| \leq M$, alors pour $t \geq t_0$ on a

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} L\|x(\tau) - x_0(\tau)\|d\tau + \varepsilon M(t - t_0).$$

Appliquant le lemme (1.1.15) de Gronwall à $\delta_1 = L$, $\delta_2 = \varepsilon M$ et $\delta_3 = 0$ permet de produire

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon \frac{M}{L} e^{L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{M}{L}$$

On en conclut que x(t) - $x_0(t) = O(\varepsilon)$ à échelle de temps 1.

Ainsi, l'on peut dire que

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon\psi(t, \varepsilon)$$

2.3.2 Développement de Poincaré

Considérons le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) & = \eta \end{cases} \tag{2.22}$$

Nous supposons que $f(t, x, \varepsilon)$ peut être développée en série de Taylor convergente par rapport à ε et x dans un certain domaine. Le problème non perturbé est

$$x_0' = f(t, x_0, 0).$$

Remarque 2.3.3. *Dans de nombreuses applications, par exemple si nous recherchons des solutions périodiques, nous ne connaissons pas les conditions initiales précises, nous en tenons compte en admettant des dérivations d'ordre μ*

$$x(t_0) = x_0(t_0) + \mu$$

Avec μ une constante, á ce point indépendante de ε, nous traduisons

$$x = y + x_0(t)$$

à trouver pour y

$$\begin{cases} y^{'}(t) & = F(t, y, \varepsilon), \\ y(t_0) & = \mu. \end{cases} \tag{2.23}$$

avec $F(t, y, \varepsilon) = f(t, y + x_0(t), \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0)$.
Les propriétés d'expansion de $f(t, x, \varepsilon)$ impliquent que $F(t, y, \varepsilon)$ possède une expansion en puissance convergente par rapport á y et ε dans un voisinage de $y = 0, \varepsilon = 0$.

Théorème 2.3.4. *(***Poincaré)***[7]*
Considérons le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} y^{'}(t) & = F(t, y, \varepsilon), \\ y(t_0) & = \mu. \end{cases} \tag{2.24}$$

avec $|t - t_0| \leq h\,, y \in D \subset \mathbb{R}^n\,, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, 0 \leq \mu \leq \mu_0$.
Si $F(t, y, \varepsilon)$ est continue par rapport à t, y et ε et peut être développée en une série de puissance convergente par rapport à y et ε pour $\|y\| \leq p, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors $y(t)$ peut être développée en une série de puissance convergente par rapport à ε et μ dans un voisinage de $\varepsilon = \mu = 0$, convergente à l'échelle de temps 1.

Démonstration : La preuve est bien détaillée dans [16]

Remarque 2.3.5. *Dans le théorème, nous avons supposé que F (ou f) dépend d'un seul paramétre ε, il est facile d'étendre le théoréme au cas d'un nombre fini arbitraire de paramétre.*

2.4 Perturbation du systéme linéaire avec grand paramétre

Nous considérons l'équation différentielle suivante :

$$x'' + \eta p(t,\eta).x' + \eta^2 q(t,\eta)x = 0 \ , \ \ \forall t \in I = [a,b] \tag{I}$$

qui peut être s'écrit :

$$X' = \eta^r.A(t,\eta).X \tag{E}$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \acute{x} \end{pmatrix} \ , \ \ X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \eta^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\eta^2} \\ -q & \frac{-p}{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \ , \ \ A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\eta^2} \\ -q & \frac{-p}{\eta} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.4.1. *On suppose que A est analytique en η (η assez grand)*

$$A(t,\eta) = A(t) + \frac{A_1(t)}{\eta} + \cdots + \frac{A_n(t)}{\eta^n}$$

Dans ce cas p(t) et q(t) s'enprime par :

(1) $p(t,\varepsilon) = p_0(t) + \frac{p_1(t)}{\varepsilon} + \cdots$

(2) $q(t,\varepsilon) = q_0(t) + \frac{q_1(t)}{\varepsilon} + \cdots +$ *avec* $\varepsilon \geq \varepsilon_0$

On suppose que $p_i(t)$ et $q_j(t)$ sont de classe C^∞ pour $\eta \geq \eta_0$. Les séries (1) et (2) sont uniformément convergente en t pour $\eta \geq \eta_0$. Soit $r_1(t)$ et $r_2(t)$ les valeurs propres supposés destinctes de la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 & -p_0 \end{pmatrix}$$

et soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les primitives de $r_1(t)$ et $r_2(t)$.
Alors, il existe des formelles ϕ_1 de (I) déduits des solutions de (E) qui sont de la forme

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\phi_1(t,\eta) = \big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\frac{1}{\eta^k}\big)e^{\eta s_1(t)},$$
$$\phi_2(t,\eta) = \big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(t)\frac{1}{\eta^k}\big)e^{\eta s_2(t)}.$$

De plus pour chaque solution formelle $\phi(t,\eta)$ *,il existe une de famille solution effectives* $(\psi_n(t,\eta))_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que pour* η *assez grand.*

$$|\psi_n^1(t,\eta) - \sum a_k(t)\frac{1}{\eta^k}e^{\eta - s_1(t)}| \leq \frac{c_n}{\eta^{n+1}} \quad \forall t \in [a,b]$$

de même pour

$$|\psi_n^2(t,\varepsilon) - \sum b_k(t)\frac{1}{\eta^k}e^{\eta - s_2(t)}| \leq \frac{c_n}{\eta^{n+1}} \quad \forall t \in [a,b]$$

Exemple 2.4.2. *Considérons l'équation suivante :*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\eta^2 + g(t))x = 0 \ , \quad \eta > \eta_0 \neq 0$$

avec

$$g(t) = \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \cdots + \mu_n t^n + \cdots$$

c'est une série convergente pour tout t*, on a*

$$q(t,\eta) = 1 + \tfrac{g(t)}{\eta^2} \quad , \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors}$$

$det(A_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$ *d'où les valeurs propres sont données par*

$$r_1(t) = i \quad , \quad r_2(t) = -i$$

Soient $s_1(t)$*,* $s_2(t)$ *les primitives de* $r_1(t)$ *,* $r_2(t)$ *données par :*

$$s_1(t) = it \quad , \quad s_2(t) = -it$$

1. *Cherchons $\phi_1(t,\eta)$:*

$$\phi_1(t,\eta) = \big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\frac{1}{\eta^k}\big)e^{\eta s_1(t)}.$$
$$= e^{\eta it}\big(a_0(t) + \frac{a_1(t)}{\eta_1} + \ldots + \frac{a_n(t)}{\eta_n} + \ldots\big)$$

▶ *Sa dériveé $1^{ére}$ est donnée par :*

$$\phi_1^{'}(t,\eta) = \eta i e^{\eta it}\big(a_0, \frac{a_1}{\eta^1}, + \ldots, \frac{a_n}{\eta^n} + \ldots\big) + e^{\eta it}\big(a_0^{'}(t) + \frac{\acute{a}_1(t)}{\eta^1}, + \ldots + \frac{\acute{a}_n(t)}{\eta^n} + \ldots\big)$$

▶ *La dériveé $2^{éme}$ est donnée par :*

$\phi_1^{''}(t,\eta) = \eta^2 e^{\eta it}\big(a_0(t) + \frac{a_1(t)}{\eta_1} + \ldots + \frac{a_n(t)}{\eta^n}\big) + 2\eta i e^{\eta it}\big(\acute{a}_0(t) + \frac{\acute{a}_1(t)}{\eta^1} + \ldots + \frac{\acute{a}_n(t)}{\eta_n}\big) + e^{\eta it}\big(a_0^{''}(t) + \frac{a_1^{''}(t)}{\eta^1} + \cdots + \frac{a_n^{''}(t)}{\eta^n}\big)$

En choisissant $a_0(t) = 1$, ou trouve de proche en proche , les fonctions $a_n(t)$ en annulant les coefficient η^p dans l'équation vérifier par ϕ_1

$$\phi_1^{''} + (\eta^2 + g(t))\phi_1 = 0 \tag{2.25}$$

$$(2.25) \Longleftrightarrow e^{\eta it}\big[(a_0^{''} + \frac{a_1^{''}}{\eta^2} + \ldots) + 2i(a_0^{'}\eta + a_1^{'} + \frac{a_2^{'}}{\eta} + \ldots) + g(t)(a_0 + \frac{a_1}{\eta} + \ldots)\big]\big] = 0$$
$$\Longleftrightarrow 2ia_0^{'}\eta + (2ia_1^{'} + g(t)a_0) + (a_1^{''} + a_2^{'}2i + g(t)a_1)\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2}(a_2^{''} + 2ia_3^{'} + g(t)a_2) + \ldots = 0$$

alors ,on obtient :

$$\begin{cases} 2i\acute{a}_1(t) + g(t)a_0 & = 0 \\ 2i\acute{a}_2 + g(t)a_1 & = -a_1^{''} \\ 2i\acute{a}_n + g(t)a_2 & = -\acute{a}_2 \\ \vdots & \\ 2i\acute{a}_n + g(t)a_{n-1} & = -a_{n-1}^{''} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 & = -\frac{2ia_1^{'}(t)}{g(t)} \\ a_1 & = \frac{-2ia_2^{'} - a_1^{''}}{g(t)} \\ \vdots & \\ a_{n-1} & = \frac{-2ia_n^{'} - a_{n-1}^{''}}{g(t)} \end{cases}$$

d'où

$$\phi_1(t,\eta) = e^{\eta it}\big(-\frac{2ia_1^{'}(t)}{g(t)} + \frac{-2ia_2^{'} - a_1^{''}}{g(t)\eta} + \ldots + \frac{-2ia_n^{'} - a_{n-1}^{''}}{g(t)\eta^n} + \ldots\big)$$

2. *Cherchons* $\phi_2(t,\eta)$:

$$\begin{aligned}\phi_2(t,\eta) &= \big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\frac{1}{\eta^k}\big)e^{\eta s_2(t)} \\ &= e^{\eta-it}\big(a_0(t)+\frac{a_1(t)}{\eta_1}+\ldots+\frac{a_n(t)}{\eta_n}+\ldots\big)\end{aligned}$$

► *Sa dériveé* $1^{ére}$ *est donnée par :*

$$\phi_2^{'}(t,\eta) = -\eta i e^{-\eta it}\big(a_0,\frac{a_1}{\eta^1}+\ldots+\frac{a_n}{\eta^n}+\ldots\big)+e^{-\eta it}\big(a_0^{'}(t)+\frac{\acute{a}_1(t)}{\eta^1}+\ldots+\frac{\acute{a}_n(t)}{\eta^n}+\ldots\big)$$

► *La dériveé* $2^{éme}$ *est donnée par :*

$\phi_2^{''}(t,\eta) = \eta^2 e^{-\eta it}\big(a_0(t)+\frac{a_1(t)}{\eta_1}+\ldots+\frac{a_n(t)}{\eta^n}\big)-2\eta i e^{-\eta it}\big(\acute{a}_0(t)+\frac{\acute{a}_1(t)}{\eta^1}+\ldots+\frac{\acute{a}_n(t)}{\eta_n}\big)+ e^{-\eta it}\big(a_0^{''}(t)+\frac{a_1^{''}(t)}{\eta^1}+\cdots+\frac{a_n^{''}(t)}{\eta^n}\big)$

En choisissant $a_0(t)=1$ *, ou trouve de proche en proche , les fonctions* $a_n(t)$ *en annulant les coefficient* η^p *dans l'équation vérifier par* ϕ_2

$$\phi_2^{''}+(\eta^2+g(t))\phi_2 = 0 \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}(2.26) &\Longleftrightarrow e^{-\eta it}\big[(a_0^{''}+\frac{a_1^{''}}{\eta^2}+\ldots)-2i(a_0^{'}\eta+a_1^{'}+\frac{a_2^{'}}{\eta}+\ldots)+g(t)(a_0+\frac{a_1}{\eta}+\ldots)\big]\big] = 0 \\ &\Longleftrightarrow -2ia_0^{'}\eta+\big(-2ia_1^{'}+g(t)a_0\big)+\big(a_1^{''}-a_2^{'}2i+g(t)a_1\big)\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}\big(a_2^{''}-2ia_3^{'}+g(t)a_2\big)+\ldots = 0\end{aligned}$$

alors ,on obtient :

$$\begin{cases} -2i\acute{a}_1(t)+g(t)a_0 &= 0 \\ -2i\acute{a}_2+g(t)a_1 &= -a_1^{''} \\ -2i\acute{a}_n+g(t)a_2 &= -\acute{a}_2 \\ \vdots & \\ -2i\acute{a}_n+g(t)a_{n-1} &= -a_{n-1}^{''} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0(t) &= \frac{2ia_1^{'}(t)}{g(t)} \\ a_1(t) &= \frac{2ia_2^{'}-a_1^{''}}{g(t)} \\ \vdots & \\ a_{n-1}(t) &= \frac{2ia_n^{'}-a_{n-1}^{''}}{g(t)} \end{cases}$$

d'où

$$\phi_2(t,\eta) = e^{-\eta it}\big(\frac{2ia_1^{'}(t)}{g(t)}+\frac{2ia_2^{'}-a_1^{''}}{g(t)\eta}+\ldots+\frac{2ia_n^{'}-a_{n-1}^{''}}{g(t)\eta^n}+\ldots\big)$$

Par conséquent

$$\phi(t,\eta)=\begin{pmatrix}\phi_1(t,\eta)=e^{\eta it}\big(-\frac{2ia_1^{'}(t)}{g(t)}+\frac{-2ia_2^{'}-a_1^{''}}{g(t)\eta}+\ldots+\frac{-2ia_n^{'}-a_{n-1}^{''}}{g(t)\eta^n}+\ldots\big)\\ \phi_2(t,\eta)=e^{-\eta it}\big(\frac{2ia_1^{'}(t)}{g(t)}+\frac{2ia_2^{'}-a_1^{''}}{g(t)\eta}+\ldots+\frac{2ia_n^{'}-a_{n-1}^{''}}{g(t)\eta^n}+\ldots\big)\end{pmatrix}$$

2.5 Perturbation du systéme périodique Dans le cas d'un petit paramétre

Définition 2.5.1. *Soit le systéme*

$$X'=f(t,X) \tag{2.27}$$

est périodique si :

$$f(t+T,X)=f(t,X),\quad \forall X\in D\subset\mathbb{R}^2,\ t\in I \ \textit{ et pour } \ T>t$$

Définition 2.5.2. *Equation variationnelle associe á* (2.27) *pour* $X=X_0$ *est l'équation linéarisée de* (2.27) *au voisinage de* X_0

$$y^{'}=f_X^{'}(t,X_0)y$$

Le Théoréme suivant est valable dans le cas ou f n'est pas linéaire.

Théorème 2.5.3. *Soit*

$$f:I\times D\times J\to\mathbb{R}^2\ ,\ \textit{avec}\ I\subseteq\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}^2\ \textit{ et}\,J=[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$$
$$\acute{X}=f(t,X,\varepsilon)=f(t+T,X,\varepsilon) \tag{F}$$

oú $f,f_\varepsilon',\acute{f}_X$ sont des fonctions continues.
On suppose que pour :

1. $\varepsilon=0$ *, l'équation*

$$\acute{X}=f(t,X,0) \tag{2.28}$$

admet une solution T-périodique $\varphi(t)$.

2. L'équation variationnelle associé á (2.28) *au voisinage de* φ

$$\acute{Y} = \acute{f}_X(t, \varphi(t), 0)Y \tag{2.29}$$

L'équation (2.29) *admet aucune autre solution périodique que* $Y \equiv 0$.

Alors : pour $|\varepsilon|$ *assez petit ,* $|\varepsilon| < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$*, l'équation* (F) *admet une solution* $\psi(t, \varepsilon)$ *T-périodique continue en* $(t, \varepsilon) \in I \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ *et* $\psi(t, 0) = \varphi(t)$

Démonstration *:*
On considére la valeur intial $X(0)$ *de la forme*

$$X(0) = \varphi(0) + \tau \ , \tau \in \mathbb{R}^2 \ \ | \ \tau \ | \quad \textit{assez petit} \tag{2.30}$$

Soit $\phi(t, \varepsilon, \tau)$ *la solution de* (F) *vérifiant :*

$$\phi(0, \varepsilon, \tau) = \varphi(0) + \tau$$

cette équation existe dáprés le théoréme de Cauchy-Lipschitz. Pour que $\phi(t, \varepsilon, \tau)$ *soit* T*-périodique il faut et il suffit que*

$$\phi(T, \varepsilon, \tau) - \phi(0, \varepsilon, \tau) = 0,$$

i.e

$$\phi(T, \varepsilon, \tau) - \varphi(0) - \tau = 0. \tag{2.31}$$

On résoud (2.31) *en utilisant le théoréme des fonction implicite, car* (2.31) *est une relation implicite entre* τ *et* ε.

Corollaire 2.5.4. *Si* $f(t, X, \varepsilon)$ *est analytique en* (t, ε) *pour* t *fixé*

$$\psi(t, \varepsilon) = \phi(t, \varepsilon, \tau(\varepsilon))$$

alors,la solution de F est aussi analytique au voisinage de $\varepsilon = 0$ *,Dans ce cas on peut écrire :*

$$\psi(t,\varepsilon) = \sum_{n\geq 0} \psi_n(t)\varepsilon^n \quad ,\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \psi_n T - periodique$$

Ainsi

$$\psi^{'}(t,\varepsilon) = f(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{n\geq 0} \psi^{'}_n(t)\varepsilon^n.$$

Exemple 2.5.5. *Soit*

$$x^{''} + a(x^2-1)x' + x = \varepsilon \sin t \tag{I}$$

$$(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^{'} & = y - a(\dfrac{x^3}{3} - x) \\ y^{'} & = -x+\varepsilon.\sin t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow X^{'} = f(t,X,\varepsilon) = \begin{pmatrix} y - a(\frac{x^3}{3} - x) \\ -x + \varepsilon \sin t \end{pmatrix}$$

Où

$$X^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pour $\varepsilon = 0$ *, la solution périodique* $x = y = 0 \Longleftrightarrow X = 0$ *de* (2.32) *et la solution* $\phi(t)$ *du théoréme* (2.4.5).

Le systéme variationnelle au $V(0)$

$$\acute{Y} = f^{'}_X(t,\varphi(t),0).Y \tag{2.32}$$

avec

$$f^{'}_X(t,X)\mid_{X=0} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

d'ou

$$(2.32) \Rightarrow \begin{cases} y^{'}_1 & = ay_1 + y_2 \\ y^{'}_2 & = -1 \end{cases} \tag{II}$$

Le polynome caractéristique de ce systéme est :

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$$

1. *Si* $\Delta = a^2 - 4 > 0$ *i.e* $|a| > 2$

   On a deux racines λ_1 *et* λ_2 *données par :*

$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

   La forme générale de la solution de (II) *est donnée par*

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

   Donc, la seul solution périodique de (II) *est*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. *Si* $\Delta = a^2 - 4 < 0$ *, Avec les racines données par*

$$\lambda_1 = \bar{\lambda_2} = \frac{a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}$$

   La forme générale de la solution de (II) *est donnée par*

$$y(t) = C_1 e^{a/2t} \sin \frac{4 - a^2}{2} t + C_2 e^{a/2t} \cos \frac{4 - a^2}{2} t$$

   dans ce cas , la seule solution périodique est

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. *Si* $\Delta = 0$*,on a une seule racine* $\lambda = \dfrac{a}{2}$

   Les solution de (II) *sont des combinaisons de* e^t *et* te^t *, et dans ce cas la seule solution périodique de* (II) *est*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la fait que f est un polynôme de degré 1 en ε ,alors $f(t,x,\varphi)$ est analytique.Donc d'aprés le corollaire (2.4.6) la solution de (I) est analytique c-â-d :

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{n\geq 0}x_n(t)\varepsilon^n \tag{*}$$

Nous remplaçons l'équation $(*)$dans l'équation (I) , on obtient

$$\sum_{n\geq 0}x_n^{''}(t)\varepsilon^n+a\Big(\big(\sum_{n\geq 0}x_n(t)\varepsilon^n\big)^2-1\Big)\sum x_n^{'}(t)\varepsilon^n+\sum x_n(t)\varepsilon^n=\varepsilon\sin t \tag{2.33}$$

D'aprés (2.33) *:* $x_0(t)=0$.

1. *Cherchons $x_1(t)$:*

$$\begin{aligned}(2.34)\Longleftrightarrow x_1^{''}(t)+a\big(x_0^2(t)-1\big)x_1^{'}(t)+x_1(t)&=\sin t\\ \Longleftrightarrow x_1^{''}(t)-ax_1^{'}(t)+x_1(t)&=\sin t\end{aligned} \tag{2.34}$$

   On recherche les solutions périodiques de (2.34)

$$x_1^{''}(t)-ax_1^{'}+x_1(t)=0$$

   admet pour seule solution périodique la solution trivial

$$x_1(t)=\frac{\cos t}{a},\ \ a\neq 0$$

2. *cherchons la solution de $x_2(t)$:*

$$\begin{aligned}(2.34)\Longleftrightarrow x_2^{''}(t)+ax_1^2(t)+a\big(x_0^2(t)-1\big)x_2^{'}(t)+a(2x_0(t)x_1(t))x_1^{'}(t)+x_2(t)=0\\ \Longleftrightarrow x_2^{''}(t)-ax_2^{'}+x_2(t)=-ax_1^2(t)x_0^{'}(t)\end{aligned}$$

   On obtient

$$z^{''}-az^{'}+z=g(t) \tag{2.35}$$

avec

$$g(t)=0\Rightarrow x_2(t)\equiv 0$$

car cette equation c'est l'équation variationnel qui admet pour solution c'est la solution trivial. $x_3(t)$ est solution de l'équation (2.35) *,avec*

$$g(t)=-ax_1^2x_1^{'}=\frac{1}{4a^2}(\sin t+\sin 3t)$$

Ainsi, la solution $x_3(t)$ est donnée par :

$$x_3(t) = \frac{1}{4a^3}\cos t - \frac{2}{a^2(9a^2+64})\sin 3t + \frac{3}{4a(9a^2+64)}\cos 3t$$

d'où

$$x(t,\varepsilon) = \frac{\cos t}{a} + x_3(t) = \frac{1}{4a^3}\cos t - \frac{2}{a^2(9a^2+64})\sin 3t + \frac{3}{4a(9a^2+64)}\cos 3t$$

2.5.1 Stabilitè des systemes périodiques

Soit

$$X' = A(t)X \ , \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ X \in \mathbb{R}^2 \tag{2.36}$$

avec

$$A(t+T) = A(t) \ , \quad T > 0$$

Théorème 2.5.6. *Si $\phi(t)$ est une matrice fondamental pour (2.36) alors $\phi(t+T)$ l'est aussi. De plus pour tout matrice ϕ, il existe une matrice non singuliére(inversible) P $T-$périodique et une matrice constante R tel que*

$$\phi(t) = P(t)e^{tR}$$

Démonstration *:*

1. *Montrons que $\psi(t) = \phi(t+T)$ est une matrice fondamentale , En effet :*

$$\psi(t) = \phi(t+T) \ , \ t \in \mathbb{R}.$$

En effet, puisque $\phi(t)$ est une matrice fondamentale alors elle vérefie :

$$\phi^{'}(t) = A(t)\phi(t) \ , \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\psi^{'}(t) = \phi^{'}(t+T) = A(t+T)\phi(t+T) = A(t)\phi(t).$$

2. *Montons que il existe une matrice non singuliéré p T-périodique et une matrice constante R tel que*

$$\phi(t) = p(t)e^{TR}$$

En effet : $\psi(t)$ est non singuliér c-à-d : $\psi(t)$ est inversible donc $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\psi(t) = \phi(t).C$$

Or,si

$$\phi(t) = p(t)e^{TR}$$

il existe une matrice non singuliéré p T-périodique et une matrice constante R tel que :

$$\psi(t) = p(t)e^{TR}$$

alors

$$\begin{aligned} \phi(t) = P(t)e^{tR} \Rightarrow \phi(t+T) &= P(t+T)e^{(t+T)R} \\ &= P(t)e^{tR}.C \\ &= P(t)e^{tR}e^{TR} = P(t)e^{TR}C. \end{aligned}$$

D'ou

$$C = e^{TR}$$

Ainsi

$$\psi(t+T) = \phi(t)C.$$

Remarque 2.5.7. *Les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de e^{TR} sont appelés les multiplicateurs de floquet associées à A.*

Chapitre 3

Méthode de Perturbation de Lindstedt-Poincaré

La méthode de Lindstedt-Poincaré est une extension de la méthode de perturbation de Poincaré, elle est utiliseé pour résoudre des d'équations différentielles non linéaires. Elle est plus puissante , plus complexe puisque elle est nécessité la résolution itérative d'équation differentielle d'ordre supérieur.

3.1 Principe de Lindstedt-Poincaré

La méthode de Lindstedt ne s'applique que pour les équations différentielles du type suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon F(x, \frac{dx}{dt}) \tag{3.1}$$

Oú F est une fonction analytique de x et $\dot{x}(t)$.

On suppose que la solution périodique de (3.1) *s'ecrit sous forme :*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{m} \varepsilon^n x_n(t) + O(\varepsilon^{n+1})$$

Si $\varepsilon = 0$,nous obtenons le problème non perturbé suivant :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t, 0) + x(t, 0) = 0$$

L'idée de la méthode est d'introduire une transformation de la variable indépendante. Cette transformation nous permettra d'éviter l'occurrence de termes séculaires dans les solutions d'équations des séries de perturbations (3.1).

L'idée fondamentale de cette méthode consiste de faire un changement d'échelle de temps en introduisant une nouvelle variable $\theta = \omega t$. *nous obtenons une nouvelle fonction* $x(\theta)$ *avec la période* 2π , *et les deux* x *et* ω *sont étendus en série des puissances de paremétre* ε *comme suit :*

$$x(\theta, \varepsilon) = x_0(\theta) + \varepsilon x_1(\theta) + \ldots + \varepsilon^n x_n(\theta) + \ldots \tag{3.2}$$

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^n \omega + \ldots \tag{3.3}$$

Les ω_i *sont des constantes inconnues.*

On note :

$$x^{'} \equiv \frac{dx}{d\theta} \quad , \qquad x^{''} \equiv \frac{d^2x}{d\theta^2}$$

et

$$F_x(x, x^{'}) \equiv \frac{\partial F(x, x^{'})}{\partial x} \quad , \qquad F_{x'}(x, x^{'}) \equiv \frac{\partial F(x, x^{'})}{\partial x'}$$

pour $\theta = \omega t$ *,on a :*

$$\frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{d\theta} et \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2x}{d\theta^2}$$

l'équation (3.1) *devient*

$$\omega^2 \frac{d^2}{d\theta^2}(\theta, \varepsilon) + x(\theta, \varepsilon) = \varepsilon F(x, \omega \frac{dx}{d\theta}) \tag{3.4}$$

avec

$$\omega^2 x^{''} + x = \varepsilon F(x, \omega x^{'}), \;\; 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{3.5}$$

On introduisons les équations (3.2) *et* (3.3) *dans* (3.5) *,on obtient*

$$\big(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\omega_3+\ldots\big)^2\big(x_0^{''}+\varepsilon^2 x_2^{''}+\varepsilon^3 x_3^{''}+\ldots\big)+\big(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon^3 x_3+\ldots\big) = \varepsilon F\big(x, \omega x^{'}\big).$$

En mettant à zéro les coefficients de chaque puissance de ε, on obtient :

$$
\begin{aligned}
x_0^{''} + x_0 &= 0 \\
x_1^{''} + x_1 &= -2\omega_1 x_0^{''} + F(x_0, x_0^{'}) \\
x_2^{''} + x_2 &= -2\omega_2 x_1^{''} - (\omega_1^2 + 2\omega_2) x_0^{''} + F_x(x_0, x_0^{'}) x_1 + F_{x'}(x_0, x_0^{'})(\omega_1 x_0^{'} + x_1^{'}), \\
x_3^{''} + x_3 &= G_3(x_0^{'}, x_1^{'}, x_2^{'}; x_0^{'}, x_1^{'}, x_2^{'}) \\
&\vdots \\
x_n^{''} + x_n &= G_n(x_0^{'}, x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots.., x_{n-1}; x_0^{'}, x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots..., x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Remarque 3.1.1. *Si F est une fonction polynomiale en x et dx/dt, alors G_n "est aussi une fonction polynomiale par rapport à ses arguments".*

Remarque 3.1.2. *La condition de la périodicité pour la nouvelle variable θ peut être exprimée comme*

$$x(\theta) = x(\theta + 2\pi)$$

Remarque 3.1.3. *Les conditions correspondantes pour $x_n(\theta)$ sont*

$$x_n(\theta) = x_n(\theta + 2\pi)$$

Remarque 3.1.4. *Le systéme linéarisé ne doit pas contenir des termes séculaires ce qui permet de déterminer les parametres ω_k.*

Remarque 3.1.5. *la $(n+1)$ième approximation de la solution de l'équation (3.1) selon la méthode de Lindstedt-Poincaré est donnée par*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m x_m(t) + O\big(\varepsilon^{n+1}\big),$$

telle que

$$\theta = \omega t = [1 + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^m \omega_m + O\big(\varepsilon^{n+1}\big)]t.$$

Exemple 3.1.6. (équation de Duffing)

Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{3.6}$$

Avec les conditions initiales $x(0) = A$ *et* $(dx/dt(0) = 0$. *Supposons que le développement assymptotique relative à* ε *au voisinage de 0 est donnée par :*

$$x(\theta, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^n x_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big). \tag{3.7}$$

On a $\theta = \omega t$ *telle que*

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots + \varepsilon^n\omega_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big) \tag{3.8}$$

On remplaçons dans l'équation (3.6) *on obtient*

$$\omega^2 x^{''} + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{3.9}$$

On remplaçons l'équation (3.8) *et* (3.7) *dans l'équation* (3.9) *,on obtient :*

$$\omega^2\big(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots\big)\big(x_0^{''}+\varepsilon x_1^{''}+\varepsilon^2 x_2^{''}+\ldots\big)+\big(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots\big)+\varepsilon\big(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots\big)^3 = 0$$

En mettant à zéro les coefficients de chaque puissance de ε*, on obtient :*

$$\begin{cases} O\big(1\big) : x_0^{''} + x_0 = 0 \\ x_0^{'}(0) = A, \quad x_0 = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} O\big(\varepsilon\big) : x_1^{''} + x_1 = -x_0^3 - 2\omega_1 x_0^{''} \\ x_1^{'}(0) = 0, \quad x_1(0) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} O\big(\varepsilon^2\big) : x_2^{''} + x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2\omega_1 x_1^{''} - (\omega_1^2 + 2\omega_2)x_0^{''} \\ x_2(0) = 0, \quad x_2^{'}(0) = 0 = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\vdots$$

la solution de systéme (3.10) *est donné par :*

$$x_0(\theta) = A\cos\theta$$

On remplaçons ce résultat dans l'équation (3.11)*,on obtient :*

$$x_1^{''} + x_1 = 2\omega_1 A\cos\theta - A^3\cos^3\theta$$

Nous utilisons la formule trigonométrique :

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta)$$

Ainsi

$$\big(2\omega_1 A - 3\frac{A^3}{4}\big)\cos\theta = \big(\frac{A^3}{4}\big)\cos 3\theta$$

Le terme séculaire peut être éliminer si le coeffcient de $\cos\theta$ *est nul, en posons :*

$$2\omega_1 A - 3\frac{A^3}{4} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{3A^2}{8}$$

alors , le systéme (3.11) *devient :*

$$\begin{cases} x_1^{''} + x_1 = -A^3\cos^3\theta \\ x_1^{'}(0) = 0, \quad x_1 = 0 \end{cases}$$

La solution particulier de ce systéme est donnée par

$$x_{1p}(\theta) = \frac{A^3}{32}\cos 3\theta.$$

Par conséquent,la solution générale est

$$x_1(\theta) = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + \frac{A^3}{32}\cos 3\theta \tag{3.13}$$

Par les conditions initiales on trouve que

$$x_1(\theta) = \frac{A^3}{32}\big[\cos\theta - \cos 3\theta\big].$$

On remplaçons ce résultat dans systéme (3.12), *on obtient :*

$$x_2^{''} + x_2 = \big(\frac{21A^4}{128} + 2\omega_2\big)A\cos\theta + \big(\frac{3A^5}{16}\big)\cos 3\theta - \big(\frac{3A^5}{128}\big)\cos 5\theta \tag{3.14}$$

Donc,l'absence des termes séculaires donne :

$$\frac{21A^4}{128} + 2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{-21A^4}{256}$$

alors l'équation (3.12) *devient :*

$$x_2'' + x_2 = \big(\frac{3A^5}{16}\big)\cos 3\theta - \big(\frac{3A^5}{128}\big)\cos 5\theta$$
$$x_2(0) = 0, \quad x_2' = 0$$

La solution particulier de cette équation est donnée par :

$$x_{2p}(\theta) = \frac{-3A^5}{128}\cos 3\theta + \frac{3A^5}{3072}\cos 5\theta$$

Par conséquent, la solution générale est donnée par

$$x_2(\theta) = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + \frac{-3A^5}{128}\cos 3\theta + \frac{A^5}{1024}\cos\theta$$

ainsi $x_2(\theta)$ *devient :*

$$\frac{3A^5}{128}\frac{-3A^5}{128}\cos 3\theta + \frac{A^5}{1024}\cos\theta$$

Donc, la solution générale est

$$x_2(\theta) = \big(\frac{A^5}{1024}\big)(23\cos\theta - 24\cos 3\theta + \cos 5\theta)$$

Finalement, le développpoment assymptotique relative de la solution de l'équation (3.6) *est donnée par :*

$$x(\theta,\varepsilon) = A\cos\theta + \varepsilon\big(\frac{A^3}{32}\big)(-\cos\theta + \cos 3\theta) + \varepsilon^2\big(\frac{A^5}{1024}\big)(23\cos\theta - 24\cos 3\theta + \cos 5\theta) + O\big(\varepsilon^3\big)$$

oú $\theta = \omega t$ *telle que*

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\big(\frac{3A^2}{8}\big) - \varepsilon^2\big(\frac{21A^4}{256}\big) + O\big(\varepsilon^3\big)$$

Exemple 3.1.7. *Considérons l'équation de van der pol*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} \tag{3.15}$$

Avec les conditions initiales $x(0) = A$ *et* $(dx/dt(0) = 0$.

Supposons que le développement assymptotique relative à ε *au voisinage de 0 est donnée par :*

$$x(\theta,\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^n x_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big). \tag{3.16}$$

On a $\theta = \omega t$ *telle que*

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots + \varepsilon^n\omega_n + O\big(\varepsilon^{n+1}\big). \tag{3.17}$$

On remplaçons dans l'équation (3.15) *on obtient*

$$\begin{cases} \omega^2 x^{''}(\theta) + x(\theta) - \varepsilon(1 - x^2(\theta))\omega x^{'}(\theta) = 0 \\ x(0) = A, \quad x^{'}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

En mettant à zéro les coefficients de chaque puissance de ε, *on obtient :*

$$\begin{cases} O\big(1\big) : x_0^{''} + x_0 = 0 \\ x_0^{'}(0) = A, \quad x_0 = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} O\big(\varepsilon\big) : x_1^{''} + x_1 = -2\omega_1 x_0^{''} + (1 - x_0^2)x_0^{'} \\ x_1^{'}(0) = A_1, \quad x_1 = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} O\big(\varepsilon^2\big) : x_2^{''} + x_2 = -2\omega_1 x_1^{''} - (\omega_1^2 + 2\omega_2)x_0^{''} - 2x_0 x_1 x_1^{'} + (1 - x_0^2)(x_1^{'} + \omega_1 x_0^{'}) \\ x_2^{'}(0) = A_2, \quad x_2 = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\vdots \tag{3.22}$$

la solution de systéme (3.19) *est donné par :*

$$x_0(\theta) = A\cos\theta$$

On remplaçons ce résultat dans systéme (3.20),*on obtient :*

$$x_1^{''}(\theta) + x_1(\theta) = 2\omega_1 A_0 \cos\theta - A_0\big(1 - \frac{A_0^2}{4}\big)\sin\theta + \big(\frac{A_0^3}{4}\big)\sin 3\theta \tag{3.23}$$

En éliminant les termes séculaires

$$A_0 = 2, \quad \omega_1 = 0$$

alors l'équation (3.23) *devient :*

$$\begin{aligned} x_1^{''}(\theta) + x_1(\theta) &= \big(\frac{A_0^3}{4}\big)\sin 3\theta \\ x_1(0) = 0, &\quad \dot{x}_1(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

La solution particuliére de ce systéme est donnée par

$$x_{1p} = \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

Par conséquent,la solution générale est

$$x_1(\theta) = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

ainsi $x_1(\theta)$ *devient :*

$$x_1(\theta) = -\frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

La solution de l'équation (3.19) *est* $x_0(\theta) = A\cos\theta$ *, et la solution de l'équation* (3.20) *est* $-\frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta$ *et* $\omega_1 = 0$*. On remplaçons ce résultat dans systéme* (3.21)*, on obtient :*

$$x_2^{''} + x_2 = \big(4\omega_2 + \frac{1}{4}\big)\cos\theta + 2A_1\sin\theta - \big(\frac{3}{2}\big)\cos 3\theta + 3A_1\sin 3\theta + \big(\frac{5}{4}\big)\cos 5\theta \qquad \text{(I)}$$

En éliminant les termes séculaires en posant

$$4\omega_2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{-1}{16}$$

alors, l'équation (I) *devient :*

$$x_2^{''} + x_2 = -\big(\frac{3}{2}\big)\cos 3\theta + \big(\frac{5}{4}\big)\cos 5\theta$$

$$x_2(0) = 0, \quad x_2^{'} = 0$$

La solution partiucliére de ce systéme est donnée par

$$x_{2p}(\theta) = -\frac{5}{96}\cos 5\theta$$

Par conséquent, la solution générale est

$$x_2(\theta) = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta - \frac{5}{96}\cos 5\theta$$

Ainsi

$$x_2^{'}(\theta) = \big(A_2 - \frac{13}{96}\big)\cos\theta + \frac{1}{96}\big(18\cos 3\theta - 5\cos 5\theta\big)$$

Finalement, le développoment assymptotique relative de la solution de l'équation (3.15) *est donnée par :*

$$x(\theta,\varepsilon) = 2\cos\theta + \big(\frac{\varepsilon}{4}\big)(3\sin\theta - \sin 3\theta) + \frac{\varepsilon^2}{96}\big(- 13\cos\theta + 18\cos 3\theta - 5\cos 5\theta\big)$$

3.2 Existence de solution périodique

Considérons l'équation différentielle non linéaire

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon F(x, \frac{dx}{dt}) \tag{3.25}$$

Oú ε *est un petit paramètre positif,* F *est une fonction polynomiale de ses arguments , et les conditions initiales sont*

$$x(0) = A, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

Comme dans les sections précédentes, nous avons $\theta = \omega(\varepsilon)t$ *et développer* $x(\theta)$ *et* $\omega(\varepsilon)$ *en série à* ε *i.e :*

$$x(\theta) = x_0(\theta) + \varepsilon x_1(\theta) + O\big(\varepsilon^2\big), \tag{3.26}$$

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + O\big(\varepsilon^2\big). \tag{3.27}$$

Les équations différentielles suivantes sont, respectivement, vérifiées par $x_0(\theta)$ *et* $x_1(\theta)$

$$\begin{cases} x_0^{''} + x_0 & = 0 \\ x_0(0) & = A, \quad x^{'}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} x_1^{''} + x_1 & = -2\omega_1\ddot{x}_0 + F(x_0, x_0^{'}) \\ x_1(0) & = 0, \quad x_1^{'}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

La solution de $x_0(\theta)$ *est donnée par*

$$x_0(\theta) = A\cos\theta \tag{3.30}$$

En remplaçons l'équation (3.29) *par le côté droit de l'équation* (3.30), *on obtient*

$$x_1^{''} + x_1 = 2\omega_1 A\cos\theta + F(A\cos\theta, -A\sin\theta) \tag{3.31}$$

La solution de l'équation (3.31) *avec les conditions initiales de l'équation* (3.29) *est la suivante*

$$x_1(\theta) = \int_0^\theta \big[2\pi\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)\big]\sin(\theta-\tau)d\tau \tag{3.32}$$

La fonction $x_0(\theta)$ *est périodique avec une période de* 2π. *si* $x_1(\theta)$ *est périodique de période* 2π, *alors*

$$x_1(\theta) = (\theta + 2\pi), \quad x_1^{'}(\theta) = (\theta + 2\pi) \tag{3.33}$$

Pour $x_1(\theta) = \dot{x}_1(\theta) = 0$, *on obtient les conditions suivantes*

$$x_1(2\pi) = 0, \quad x_1^{'}(2\pi) = 0 \tag{3.34}$$

En appliquant ces résultats à l'équation (3.32), *on obtient*

$$\int_0^{2\pi} \big[2\pi\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)\big]\sin(\tau)d\tau = 0 \tag{3.35}$$

$$\int_0^{2\pi} \big[2\pi\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)\big]\cos(\tau)d\tau = 0 \tag{3.36}$$

La seconde relation permet d'utiliser le fait que la dérivée de l'équation (3.32) *est*

$$x_1^{'} = \int_0^{\theta} \big[2\pi\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)\big]\cos(\theta - \tau)d\tau \tag{3.37}$$

Puisque

$$\int_0^{2\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau = 0$$

$$(3.35) \Longleftrightarrow P(A) \equiv \int_0^{2\pi} F(A\cos\tau, A\sin\tau)\sin\tau d\tau = 0 \tag{3.38}$$

Puisque

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\tau d\tau = \pi$$

$$(3.36) \Longleftrightarrow Q(A,\omega_1) \equiv 2\pi\omega_1 A + \int_0^{2\pi} F(A\cos\theta, A\sin\theta)\cos\tau d\tau = 0 \tag{3.39}$$

le fait que $F(x, dx)$ *est une fonction polynomiale de ses arguments , alors P(A) est aussi une fonction polynomiale de A.*

Ainsi , l'équation (3.25) *a une solution périodique si les conditions des l'équations* (3.38) *et* (3.39) *sont satisfaites. La solution périodique particuliére obtenue par l'équation* (3.25) *est la suivante*

$$x^{(i)}(\theta,\varepsilon) = \bar{A}_i\cos[\omega^{(i)}t] + O\big(\varepsilon\big),$$

$$\omega^{(i)} = 1 + \varepsilon\bar{\omega}^{(i)} + O\big(\varepsilon\big).$$

où $\bar{A}_i$ les racines réelles de $P(A)$ et $\bar{\omega}_1^i$ la fréquence donnée par la solution de l'équation (3.39).

Exemple 3.2.1. *Considérons l'équation différentielle non linéaire*

$$x'' + \omega_0^2 x + \varepsilon\delta x^3 = 0 \tag{3.40}$$

avec des conditions

$$x(0) = A, \;\; x'(0) = 0 \qquad x_0(t) = A\cos t$$

D'apres le principe de la méthode de Lindsted -Poincaré, l'équation (3.40) *devient :*

$$\omega^2 y'' + \omega_0^2 y + \varepsilon\delta y^3 = 0 \tag{3.41}$$

On cherche une solution de periode 2π *de l'équation*$(3,41)$, *Soit :*

$$\begin{aligned} y(\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i(\theta)\varepsilon^i = y_0(\theta) + \varepsilon y_1(\theta) + \dots \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1^2 + \varepsilon^2\omega_2^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.42}$$

En remplaçons l'équation (3.42) *dans l'équation* $(3,41)$ *nous obtenons :*

$$\big(\omega_0^2+\varepsilon\omega_1^2+\varepsilon^2\omega_2^2+....\big)\big(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+...\big)^{"}+\omega_0^2\big(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+...\big)+\delta\varepsilon\big(y_0+\varepsilon y_1+....\big)^3 = 0 \tag{3.43}$$

En mettant à zéro les coefficients de chaque puissance de ε, *on obtient :*

$$\begin{cases} O(1) : \omega_0^2 y_0^{"} + \omega_0^2 y_0^2 = 0 \\ y(0) = A, y^{'}(0) = 0, y(s) = A\cos s \end{cases} \tag{3.44}$$

$$\begin{cases} O(\varepsilon) : \omega_1^2 y_0^{"} + \omega_0^2 y_1^{"} + \omega_0^2 y_1 + \delta y^3 = 0 \\ y(0) = A, y^{'}(0) = 0, y(s) = A\cos s \end{cases} \tag{3.45}$$

$$\vdots \tag{3.46}$$

La solution de systéme (3.44) *est donnée par*

$$y_0(t) = A\cos t$$

Cherchons la solution de systéme (3.45),*Nous commençons à résoudre l'équation de ce systéme*

$$\begin{aligned}\omega_1^2 y_0'' + \omega_0^2 y_1'' + \omega_0^2 y_1 + \delta y^3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \omega_0^2(y_1'' + y_1) = \omega_1^2 A\cos s - \delta A^3 \cos^3 s \\ &\Longleftrightarrow y_1'' + y_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0^2} A\cos s - \frac{\delta A^3}{\omega_0^2}\cos^3 s \qquad (3.47)\end{aligned}$$

La condition de périodicité pour la solution y_1 *l'existe de* y_1 *n'est possible que si les conditions d'orthogonale est vérifier,* $\exists y_1$ *si seulement si :*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}A\cos s - \delta\frac{A^3}{\omega_0^2}\cos^3 s\right)\cos s ds = 0 \\ \int_0^{2\pi}\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}A\cos s - \delta\frac{A^3}{\omega_0^2}\cos^3 s\right)\sin s ds = 0\end{aligned} \qquad (3.48)$$

$$(3.48) \Longleftrightarrow \int_0^{2\pi}(\omega_1^2 A\cos s - \delta A^3\cos^3 s)\cos s ds = 0 \qquad (3.49)$$

$$\int_0^{2\pi}(\omega_1^2 A\cos s - \delta A^3\cos^3 s)\sin s ds = 0 \qquad (3.50)$$

La relation (3.50) *est toujours vérifiée*

$$\begin{aligned}(3.50) &\Longleftrightarrow \omega_1^2 A\int_0^{2\pi}\cos^2 ds - \delta A^3\int_0^{2\pi}\cos^4 s ds = \omega_1^2 A\pi - \delta A^3\frac{3}{4}\pi = 0 \\ &\Longleftrightarrow \omega_1^2 - \delta A^2\frac{3}{4} = 0 \\ &\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{3}{4}\delta A^2\end{aligned}$$

pour que (3.47) *admet une solution* 2π *périodique il faut que* $\omega_1^2 = \frac{3}{4}\delta A^2$

$$\begin{aligned}(3.47) &\Longleftrightarrow y_1'' + y_1 = -\frac{\delta A^3}{4\omega_0^2}\cos 3s \\ &\Longleftrightarrow y_1(s) = \alpha\cos s + \beta\sin s + \frac{\delta A^3}{32\omega_0^2}\cos 3s, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Maintenant, on a la condition initial

$$\begin{cases} y_1(0) & = 0 \\ y_1^{'}(0) & = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha + \frac{\delta A^3}{32\omega_0^2} & = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\delta A^3}{32\omega_0^2} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(\theta) &= y_0(\theta) + \varepsilon y_1(\theta) \\ &= A\cos\theta + \varepsilon \frac{\delta A^3}{32\omega_0^2}(-\cos\theta + \cos 3\theta) + \ldots \end{aligned}$$

et

$$x(t) = A\cos\omega t + \varepsilon \frac{\delta A^3}{32\omega_0^2}(-\cos\omega t + \cos 3\omega t) + \ldots$$

y est de 2π périodique et x de T-périodique avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$

3.2.1 Cas où F dépend uniquement de x

Supposons que F soit une fonction uniquement de x, c-à-d :$F = F_1(x)$. Soit

$$u = A\cos\tau \Rightarrow du = -A\sin\tau d\tau$$

alors

$$(3.38) \Longleftrightarrow P(A) = -\int_A^A F_1(u)du = 0$$

Ainsi, l'équation (3.38) *peut être satisfaite pour n'importe quelle valeur de A . En considérant une valeur de A , la fréquence modifiée ω est la suivante*

$$\omega_1 = -(\frac{1}{2\pi A})\int_0^{2\pi} F_1(A\cos\tau)\cos\tau d\tau. \tag{3.51}$$

1). Si F contient un terme a_1x^{2n} , où n est un entier non négatif , alors sa valeur de départ à ω est

$$\omega_1 = -(\frac{a_1 A^{2n-1}}{2\pi})\int_0^{2\pi}(\cos\tau)^{2n+1}d\tau = 0$$

2). Si $F_1(x)$ possède un terme a_2x^{2n+1} , alors

$$\omega_1 = -(\frac{a_2 A^{2n}}{2\pi})\int_0^{2\pi}(\cos\tau)^{2n+2}d\tau \neq 0$$

Examples 3.2.2. *Considérons l'équation suivante*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon x^2 \tag{3.52}$$

oú $F = x^2$. *Dans ce cas, l'équation* (3.52) *devient*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\big(\frac{1}{2\pi A}\big) \int_0^{2\pi} (A^2 \cos^2 \tau) \cos \tau d\tau \\ &= -\big(\frac{A}{2\pi}\big) \int_0^{2\pi} \big(\frac{1}{4}\big)(3\cos\tau + \cos 3\tau) d\tau = 0 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Ce résultat permet d'obtenir pour la fréquence

$$\omega(\varepsilon) = 1 + O\big(\varepsilon^2\big)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -\varepsilon x^3 \tag{3.54}$$

avec $F = -x^3$. *Par conséquent, la correction de fréquence est*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \big(\frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \cos^4 \tau d\tau \\ &= \frac{3A^2}{8} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Ainsi, cette équation différentielle non linéaire posséde une solution périodique de fréquence

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\big(\frac{3A^2}{8}\big) + O\big(\varepsilon^2\big).$$

3.2.2 Cas où F dépend uniquement de dx/dt

Soit la fonction F *qui dépend uniquement de* dx/dt. *Dans ce cas*

$$F_2(x) = F_2(-A \sin \tau),$$

On obtient avec l'équation (3.20)

$$2\pi\omega_1 A = -\int_0^{2\pi} F_2(-A \sin \pi) \cos \tau d\tau = 0 \tag{3.56}$$

Ainsi, la correction de fréquence ω_1 *est nulle.cela signifie que* $\omega(\varepsilon)$ *prendre la forme suivante :*

$$\omega(\varepsilon) = 1 + O\big(\varepsilon^2\big) \tag{H}$$

Proposition 3.2.3. *Soit $F_2(dy/dt)$ une fonction polynomiale de dy/dt, si le terme $b_1(dx/dt)^{2n}$ apparaît dans F_2, sa contribution à $P(A)$ est nulle. Ceci résulte directement du résultat suivant :*

$$P(A) = \int_0^{2\pi} b_1 A^{2n} (\sin\tau)^{2n} \sin\tau d\tau = 0$$

Proposition 3.2.4. *considérons un terme de la forme $b_2(dx/dt)^{2n+1}$ sa contribution à P(A) est non nulle :*

$$P(A) = \int_0^{2\pi} b_2 A^{2n+1} (\sin\tau)^{2n+1} \sin\tau d\tau \neq 0$$

Remarque 3.2.5. *Systémes pour lesquels*

$$F\big(x, \frac{dx}{dt}\big) = \bar{F}\big[x, \big(\frac{dx}{dt}\big)^2\big]$$

sont appelés systéme conservateur généralisé

Exemple 3.2.6. *Soit*

$$F_2\big(\frac{dx}{dt}\big) = \frac{dx}{dt} - \big(\frac{1}{3}\big)\big(\frac{dx}{dt}\big)^3$$

Soit

$$P(A) = -\pi A\big(1 - \frac{A^2}{4}\big) = 0$$

Ainsi, l'équation différentielle non linéaire correspondant à cette fonction ,admet une solution périodique non triviale d'amplitude A=2 et de fréquence donnée par l'équation(H).

Conclusion

Dans ce mémoire ,nous nous intéressons à étudié certaines techniques de résolution des équations différentielles perturbées qui permettent de déterminer une solution approximative d'une équation différentille linéaire ou non linéaire.

Bibliographie

[1] *H.Ali,*Perturbation Methods,***448*** (1973).

[2] *S.Benzoni,*Equations différentielles ordinaires*,* (2007).

[3] *S.Benzoni-Gavage,*Calcul Différentielle et Equations Différentielles*,Dunod Paris,**368*** (2014).

[4] *J.Damailly,*Analyse numérique et Equations différentielles*,**343*** (2006).

[5] *M.Holmes,*Introduction to Perturbation Methods *,Texts in Applied Mathematics,**456*** (2013).

[6] *Q.Hervé and Z.Claude,*Analyse pour l'agrégation*,**640*** (2013).

[7] *G.Kelley and A.Peterson,*The Theory of Differential Equations*,Classical and Qualitative,University of Oklahoma. Norman,**436*** (2010).

[8] *M.Lefebvre ,* Equations différentielles $2^{éme}$ édition revue et augment*,Université de Montréal,**370*** (2016).

[9] *L.Marha and P.Abell James Braselton ,*Differential Equations With Mathematica*,san Diego Clifornia,**880*** (2016).

[10] *R.Mickens,*Oscillations in Planar Dynamic Systems*, Clark Atlanta University,*(1600).

[11] *V.Mircea and T.Ileana,*Ordinary Differential Equations with Applications to Mechanics*,Springer Netherlands,*(2007).

[12] *J.Pierre,*Analyse numérique et équations différentielles*.Grenoble Sciences,**343*** (2006).

[13] *K.Shivamoggi,*Perturbation Methods for Differential Equations*,University of Central Florida Orlando,**368*** (2002).

[14] W.Simon, Methematical techniques for biology and medicine, *Courire Corporation,**405***(2015).

*[15] G.Teschi,*Ordinary Differential Equation and Dynamical Systemes,***356*** (2012).

*[16] F.Verhulst,*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems,*Second Revised and Expanded Edition,University of Utrecht,* ***306*** (2006).

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la résolution d'équations différentielles perturbées.

Puis nous allons examiner la méthode de perturbation de Poincaré et nous allons appliquer aux :Équation différentielle algébrique ,Équation différentielle avec une condition initiale et problème aux limites.

Enfin,nous allons étudier la méthode de Lindstedt-Poincaré appliquée sur les équations différentielles non linéaires pour analyser l'existence des solutions périodiques.

Mots clés : *équations différentielles, méthodes de perturbation,méthode de Lindstedt-Poincaré ,Existence des solutions périodiques,méthode de perturbation de Poincaré.*

مــلــخــص

في هذه الأطروحة نحن مهتمون بحل المعادلات التفاضلية المضطربة.ثم سنقوم بفحص طريقة اضطراب بوانكاريه وينطبق على: المعادلة التفاضلية الجبرية ، المعادلة التفاضلية مع الشرط الأولي ومشكلة الحدود.

أخيرًا ، قمنا بدراسة طريقة *Lindstedt-Poincaré* المطبقة على المعادلات التفاضلية غير الخطية لتحليل وجود الحلول الدورية.

Abstract

In this memoir, we study the solution of perturbed differential equations

We will then examine the Poincaré perturbation method and apply this method to: algebraic differential equations, differential equations with an initial condition and boundary problems.

Finally, we study the Lindstedt-Poincaré method applied to nonlinear differential equations to analyze the existence of periodic solutions.

Keywords : *differentials equations, method the perturbation , method the Lindstedt-Poincare ,Existence of periodic solutions, method the perturbation of Poincare.*