الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليــم العالــي والبحــث العلمـــــي
Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE
Pour l’obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation

Solution numérique des équations différentielles d’ordre fractionnaire

Présenté Par :
1) M[elle] MESSAOUD Hadjer

Devant le jury composé de :

Dr Boumedien BOUKHARI	MAA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr Ahmed HAMMOUDI	Pr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. Kheira MEKHALFI	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2022/2023

Dédicaces

Je dédie mon travail

A mes très chers père et mère, qui se sont tenus à mes côtés et m'ont soutenu tout au long de mon parcours étude

A mon frère Amin, sa femme Nasira et son fils younes

A mes frères Abd Rahmen et Salah Eddine qui m'ont soutenu par leur amour et leur encouragement

A mon encadreur Dr.Mekhalfi Kheira

A tous mes amis

A tous mes enseignants de mathématiques

A tous les étudiants de 2^{me} année Master Math 2022/2023.

Remerciements

Je remercie avant tout Allah de m'avoir donné la force, le courage, et la volonté pour finir et réussir dans ce travail.

Deuxièmement, je voudrais remercier Dr. Mekhalfi Kheira pour son aide, ses précieux conseils qui m'ont poussé à faire un gros effort pour compléter ce mémoire, et je la remercie encore pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.

Et je remercie les membres de jury d'avoir accepté d'examiner mon travail.

j'adresse également un grand merci à tous les enseignants de département de Mathématiques pour toutes leurs encouragements et leurs efforts qui ont contribué à mon succès, ainsi que l'administration en général.

Mes vifs remerciements vont également aux mes parents et mes frères pour leur soutein moral qui m'ont permis de réaliser le parcours universitaires.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes de près ou de loin qui m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Au tournant de ce siècle, de nombreux simulateurs ont la conviction étrange que les équations différentielles décrivent tout ce qui se passe dans le monde réel. Cette approche de la modélisation peut donner lieu à des tentatives de modification de la réalité pour s'adapter aux outils de simulation, alors que la méthode correcte devrait être complètement opposée. Le défi consiste à rechercher de nouveaux outils ou à utiliser ceux qui sont connus depuis longtemps, mais qui sont simplement oubliés.

L'objectif du calcul fractionnaire est de généraliser la définition de la dérivation d'ordre entière d'une fonction. La dérivée d'ordre non entier apparu à la fin de 1695 où L'Hôpital a posé une question à Leibniz de connaître la signification de $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. En 1738, Euler a remarqué le problème de la dérivée d'ordre non entier. En 1822, Fourier a proposé une représentation intégrale afin de définir la dérivée, et sa version peut être considérée comme la première définition de la dérivée d'un ordre arbitraire (positif). Abel, en 1823, a résolu une équation intégrale associée au problème des tautochrones, qui est considérée comme la première application du calcul fractionnaire. En 1823, Liouville a proposé une définition basée sur la formule de dérivée de la fonction exponentielle. Cette expression est connue comme la première définition logique pour la dérivée fractionnaire. La deuxième définition de Liouville, est présentée en termes d'intégrale et s'appelle la version de Liouville pour l'intégration d'ordre non entier. Après une série d'ouvrages de Liouville, l'article le plus important a été publié par Riemann (1847). Donc, l'approche de Riemann-Liouville est donnée par une intégrale. Grunwald (1867) et Letnikov (1868) ont développé une approche de la dérivée fractionnaire en termes de série convergente. Letnikov a montré que sa définition coïncide avec le version de Liouville. En 1892, Hadamard a publié un article dans lequel la dérivée d'ordre non entier d'une fonction analytique doit être effectuée en termes de sa série de Taylor.

Ces dernières années, des équations différentielles fractionnaires sont apparues naturellement dans divers domaines tels que la dynamique chaotique, la modélisation, la théorie du contrôle, le traitement du signal et les applications biomédicales, etc. Les équations différentielles d'ordre fractionnaires ont attiré l'attention de nombreux chercheurs en raison d'un large éventail d'applications dans plusieurs domaines de la sciences tels que la physique, la chimie, la biologie, l'ingénierie et la finance. Dans tous ces domaines scientifiques, il est important de trouver des solutions exactes ou approximatives à ces équations.

Dans ce mémoire, nous allons exposer quelques méthodes de résolution d'équations différentielles fractionnaires. Il est scindé en trois chapitres comme suit :

Chapitre 1 **:** Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques utilisées dans le calcul fractionnaire telles que la fonction gamma, la fonction bêta, et nous allons donner les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et celle du Caputo et le lien entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés intéressantes.

Chapitre 2 **:** Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles ordinaires d'ordre 1, à savoir la méthode d'Euler, la méthode de Runge-Kutta 2 et Runge-Kutta 4 et enfin la méthode de Taylor.

Chapitre 3 **:** On sait que les équations différentielles d'ordre fractionnaire ce sont des généralisations des équations différentielles ordinaires. Dans ce chapitre, nous étudions des approximations analytiques de la solution d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire par les méthodes : Demirci et Ozalp, ADM, HPM et VIM permis plusieurs appliquée a la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Cette efficacité d'approximations justifier par plusieurs exemples.

A la fin, on donne une conclusion du travail effectué et on termine ce mémoire par une bibliographie riche.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous introduisons la fonction Gamma, la fonction Bêta, qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications. Pour plus de détails voir [12].

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, cette fonction a étudiée par d'autres mathématiciens comme Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$, Christoph Gudermann $(1798-1852)$ et Joseph Liouville $(1809-1882)$. Elle apparaît aussi dans divers domaines comme la théorie des nombres, l'intégration définie et les séries hypergéométrique.

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{1.1}$$

Quand la partie réelle de z est strictement positive $\mathcal{R}e(z) > 0$.

$\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(0_+) = +\infty$.

Propriétés 1.1.1 *Une propriétée importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est donnée par la relation de récurence suivante :*
pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, on a :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{1.3}$$

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(z) > 0$. Alors :

$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. par intégration par partie :

$$\begin{cases} u = e^{-t} \Longrightarrow u' = -e^{-t} \\ v' = t^{z-1} \Longrightarrow v = \frac{1}{z} t^z \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(z) & = & \dfrac{1}{z}\big[e^{-t}t^z\big]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{z}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt. \\ & = & \dfrac{1}{z}\Gamma(z+1) \\ & \Longrightarrow & \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \end{array}$$

D'après (1.2) pour tout $z \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(1) & = & 1 \\ \Gamma(2) & = & 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) & = & 2\Gamma(2) = 2 \times 1 = 2! \\ \Gamma(4) & = & 3\Gamma(3) = 3 \times 2 \times 1 = 3! \\ & ... & \\ \Gamma(n) & = & (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)! \\ \Gamma(n+1) & = & n\Gamma(n) = n(n-1).......2.1 = n! \end{array}$$

Exemples 1.1.1 *:*

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \big[-e^{-t}\big]_0^{+\infty} = 1.$

2. $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t dt.$

   Par intégration par partie :

$$\begin{cases} u = t \Longrightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-t} \Longrightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(2) & = & \big[-te^{-t}\big]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ & = & \big[-e^{-t}\big]_0^{+\infty} = 1. \end{array}$$

3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$

On pose : $u = \sqrt{t} \Longrightarrow t = u^2 \Longrightarrow dt = 2udu.$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$$

L'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du \\ &= \frac{1}{2}.\sqrt{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

Alors : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

4. $\Gamma(\frac{-1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{-3}{2}}dt.$

Par intégration par partie :

$$\begin{cases} u = e^{-t} \Longrightarrow u' = -e^{-t} \\ v' = t^{\frac{-3}{2}} \Longrightarrow v = -2t^{\frac{-1}{2}} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) &= \Big[-2e^{-t}t^{\frac{-1}{2}}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt. \\ &= -\int_0^{+\infty} 2t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt \\ &= -2\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{-1}{2}}dt \\ &= -2\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= -2\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

1.1.2 Fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans certaine combinaison avec la fonction Gamma .

Définition 1.1.2 [12] *La fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de seconde espèce) est donnée par :*
pour tout $(z,\omega)\in\mathbb{C}^2$ *avec* $\mathcal{R}e(z)>0$ *et* $\mathcal{R}e(\omega)>0$, *on a :*

$$B(z,\omega)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt \tag{1.4}$$

Proposition 1.1.1 *Les fonctions Gamma et Bêta sont liées par la relation suivante :*

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \tag{1.5}$$

Preuve. Pour tout $(z,\omega)\in\mathbb{C}^2$ tel que : $\mathcal{R}e(z)>0$ et $\mathcal{R}e(\omega)>0$. En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\omega-1}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t-x}t^{z-1}x^{\omega-1}dtdx,\end{aligned}$$

on effectue le changement de variable :

$$r=t+x \;\; et \;\; t=rs, donc : 0\leq r\leq +\infty \;\; et \;\; 0\leq s\leq 1$$

Ainsi : $dr=dt+dx$, $dt=sdr+rds$,et $dx=dr-dt=dr-sdr-rds=(1-s)dr-rds$
Alors : $dtdx=rdrds$.
Il s'en suit :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-r}(rs)^{z-1}(r-rs)^{\omega-1}rdrds\\ &= \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z-1}s^{z-1}r^{\omega-1}(1-s)^{w-1}rdrds\\ &= \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{\omega-1}ds\int_0^{+\infty} e^{-r}r^{(z+\omega)-1}dr\\ &= B(z,\omega)\int_0^{+\infty} e^{-r}r^{(z+\omega)-1}dr\\ &= B(z,\omega)\Gamma(z+\omega)\end{aligned}$$

D'où :

$$B(z,\omega)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}.$$

Proposition 1.1.2 *Pour tout* $p,q\in\mathbb{C}$; $\mathcal{R}e(p)>0$ *et* $\mathcal{R}e(q)>0$ *on a les propriétées suivantes :*

1. $B(p,q) = B(q,p)$.

2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.

3. $B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$.

Preuve :

1. $B(p,q) = B(q,p)$:

   $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$.

   On pose : $s = 1-t \Longrightarrow t = 1-s \Longrightarrow dt = -ds$.

$$\begin{cases} t \longrightarrow 0 \Longrightarrow s \longrightarrow 1 \\ t \longrightarrow 1 \Longrightarrow s \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 (1-s)^{p-1}s^{q-1}ds \\ &= B(q,p) \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)} \\ &= B(q,p). \end{aligned}$$

2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$:

$$\begin{aligned} B(p+1,q) &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+1+q)} \\ &= \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p)q\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}. \end{aligned}$$

   Alors :

$$\begin{aligned} B(p+1,q) + B(p,q+1) &= \frac{(p+q)\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} \\ &= B(p,q). \end{aligned}$$

3. $B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$:

$$\begin{aligned}
B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}\\
&= \frac{\Gamma(p)q\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}\\
&= \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}\\
&= \frac{q}{p+q}B(p,q).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{q}{p}B(p+1,q) &= \frac{q\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{p\Gamma(p+1+q)}\\
&= \frac{q}{p}\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}
\end{aligned}$$

$\frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{(p+q)}B(p,q)$.Donc :

$B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{(p+q)}B(p,q)$.

1.2 Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

Dans la suite on va présenter les notions de la dérivée et l'intégrale fractionnaire. Il existe beaucoup d'approches différents qui on été utilisées pour généraliser la notion de dérivation d'ordre non entiers, par exemple on a : la formule de Grunwalf-Letnikov, Riemann-Liouville et de Caputo, on s'intéresse seulement sur les deux derniers.

1.2.1 Intégration fractionnaire

Définition 1.2.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle intégrale d'ordre α au sens de Riemann-Liouville (R.L) La fonction définie par :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt. \quad x > a \tag{1.6}$$

Exemple 1.2.1 *Pour $f(x) = (x-a)^\beta$:*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt$$

On faissant le changement de variable, en effet : $r = \frac{t-a}{x-a}$, *c'est à dire :*

$t = a + r(x-a) \Longrightarrow dt = (x-a)dr.$

$$\begin{cases} t \longrightarrow a \Longrightarrow r \longrightarrow 0 \\ t \longrightarrow x \Longrightarrow r \longrightarrow 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-r(x-a))^{\alpha-1}(a+r(x-a)-a)^\beta (x-a)dr. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((x-a)(1-r))^{\alpha-1} r^\beta (x-a)^\beta (x-a)dr. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1+\beta+1}(1-r)^{\alpha-1} r^\beta dr. \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^\beta dr. \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha).
\end{aligned}$$

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.7}$$

- *Si on prend* $\alpha = 1$ *:*

$$\begin{aligned}
I_a (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}(x-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{1}{(\beta+1)}(x-a)^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *La relation* (1.6) *peut s'écrire comme :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)dt \tag{1.8}$$

Car : On a :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

On pose : $s = x - t \Longrightarrow t = x - s \Longrightarrow dt = -ds.$

$$\begin{cases} t \longrightarrow a \Longrightarrow s \longrightarrow x-a \\ t \longrightarrow x \Longrightarrow s \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-a}^0 s^{\alpha-1} f(x-s)(-ds) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} s^{\alpha-1} f(x-s)ds.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, pour $\alpha, \beta > 0$, on a :*

$$I_a^\alpha \circ I_a^\beta f = I_a^{\alpha+\beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \tag{1.9}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha \circ I_a^\beta f)(x) &= I_a^\alpha (I_a^\beta f)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dtds.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable : $r = \frac{t-s}{x-s}$

$t = s + r(x-s) \Longrightarrow (t-s) = r(x-s) \Longrightarrow dt = (x-s)dr.$

$$\begin{cases} t \longrightarrow s \Longrightarrow r \longrightarrow 0 \\ t \longrightarrow x \Longrightarrow r \longrightarrow 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt &= \int_0^1 (x-s-r(x-s))^{\alpha-1} r^{\beta-1}(x-s)^{\beta-1}(x-s)dr \\
&= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1}(1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} (x-s)^\beta dr \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} dr \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha \circ I_a^\beta) f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= (I_a^{\alpha+\beta} f)(x).
\end{aligned}$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de R.L

Définition 1.2.2 *On appelle dérivée d'ordre α au sens de R.L d'une fonction $f \in L^1$, la fonction définie par :*

$$D_a^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \quad x > a \tag{1.10}$$

avec : $n = [\alpha] + 1$.

Exemple 1.2.2 *Pour $f(x) = (x-a)^\beta$:*

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = (\frac{d}{dx})^n (I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta).$$

Nous avons :

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \Longrightarrow I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}$$

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = (\frac{d}{dx})^n (\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(x-a)^{n+\beta-\alpha})$$

Alors :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} . \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.11}$$

Donc :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Remarques 1.2.1 *:*

1) Si on prend $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} D_a(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} \\ &= \frac{\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} \\ &= \beta(x-a)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

2) Si on prend $\beta = 0$:

$$D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

c'est à dire que la dérivée au sens de R.L d'une constante n'est pas nulle.

Proposition 1.2.2 *: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrale, alors :*

1)

$$(D_a^\alpha \circ I_a^\alpha)f = D_a^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f = D_a^n I_a^n f = f \tag{1.12}$$

2)

$$I_a^\alpha (D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \longrightarrow a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f(x) \right] \tag{1.13}$$

Si $0 < \alpha < 1$, alors : $n = [\alpha] + 1 = 0 + 1 = 1$, et :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (D_a^\alpha f)(x) &= f(x) - \frac{I_a^{n-\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} \\ &= f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x \longrightarrow a} [I_a^{1-\alpha} f(x)] \end{aligned}$$

alors :

$$I_a^\alpha (D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \frac{I_a^{n-\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} \tag{1.14}$$

Remarque 1.2.2 *En général :*

$$D_a^{\alpha_1} \circ D_a^{\alpha_2} f \neq D_a^{\alpha_2} \circ D_a^{\alpha_1} f \neq D^{\alpha_1+\alpha_2} f$$

Exemples 1.2.1 *:*

1) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^{\frac{-1}{2}}. \end{aligned}$$

On a :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}$$

donc :

- $D^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0^+)} x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 0$
- $D^{\frac{1}{2}} \circ D^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}}(0) = 0$

- $D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = D^1 x^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-1)}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{-2\sqrt{\pi}}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

c'est à dire : $D^{\frac{1}{2}} \circ D^{\frac{1}{2}} \neq D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

2) soient $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$

- $D^{\frac{1}{2}}f$

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})}x^0 \\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} \\ &= \Gamma(\frac{3}{2}) \\ &= \Gamma(\frac{1}{2}+1) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

- $D^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(0)}x^{-1} = 0.$
- $D^{\frac{1}{2}} \circ D^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}}(0) = 0.$
- $D^{\frac{3}{2}} \circ D^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = D^{\frac{3}{2}}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = (\frac{d}{dx})^2 I_0^{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$ *car on a :* $D_a^{\alpha}f(x) = (\frac{d}{dx})^n I_a^{n-\alpha}f(x),$

et : $I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$, *donc :*

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \big[-2(x-t)^{\frac{1}{2}} \big]_0^x \\ &= x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

alors : $D^{\frac{3}{2}} \circ D^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = (\frac{d}{dx})^2 x^{\frac{1}{2}} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$

- $D^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = D^2 x^{\frac{1}{2}} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$.

Conclusion : $D^{\frac{1}{2}} \circ D^{\frac{3}{2}} = 0 \neq D^{\frac{3}{2}} \circ D^{\frac{1}{2}} \neq D^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$.

Propriétés 1.2.1 *:*

1) Si $\alpha > \beta > 0$, *alors :*

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x)$$

2) Si $\beta \geq \alpha > 0$ *et la dérivée fractionnaire* $D^{\beta-\alpha} f$ *existe, alors :*

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f(x)) = D_a^{\beta-\alpha} f(x)$$

Preuve.

1) Pour $\alpha > \beta > 0$, alors :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (I_a^\alpha f(x)) &= D^n I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(x) \\ &= D_a^n (I_a^{n-\beta+\alpha} f)(x) \\ &= D_a^n I_a^n (I_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x). \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (I_a^\alpha f(x)) &= D^n I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(x) \\ &= D_a^n I_a^{n-(\beta-\alpha)} f(x) \\ &= D_a^{\beta-\alpha} f(x). \end{aligned}$$

1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

En 1967, un article [1] de M. Caputo a été publié, dans lequel une nouvelle définition d'une dérivée fractionnaire a été utilisée. Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.
Dans cette section, nous exposons la définition et certaines propriétées de ce nouvel opérateur, aujourd'hui appelé dérivée fractionnaire de Caputo et surtout montrons sa connexion aux opérateurs fractionnaires intégraux et différentiels de Riemann-Liouville. Nous commençons par une définition :

Définition 1.2.3 ([*12*]) *La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^cD_a^\alpha f$ est définie par :*

$$
{}^cD_a^\alpha f(x) = I_a^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt \tag{1.15}
$$

Avec $n \in \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$, f continue, et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Exemple 1.2.3 *Pour $f(x) = (x-a)^\beta$ avec $\beta \geq 0$, on a :*

$$
{}^cD_a^\alpha f(x) = \begin{cases} 0, & si \quad \beta \in \{0, 1, 2.........n-1\} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}, & si \quad \beta > n-1 \end{cases} \tag{1.16}
$$

En particulier, si f est constante sur $[a, b]$, alors : ${}^cD_a^\alpha f = 0$.

Nous avons :

$$
{}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^\beta (x-t)^{n-\alpha-1} dt
$$

et :

$$
\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(t-a)^{\beta-n}
$$

donc :

$$
{}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)} \int_a^x (t-a)^{\beta-n}(x-t)^{n-\alpha-1} dt
$$

par le changement de variable : $t = a + r(x-a) \Longrightarrow dt = (x-a)dr$

$$
\begin{cases} t \longrightarrow a \Longrightarrow r \longrightarrow 0 \\ t \longrightarrow x \Longrightarrow r \longrightarrow 1 \end{cases}
$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^x (t-a)^{\beta-n}(x-t)^{n-\alpha-1}(x-a)dr &= \int_0^1 (r(x-a))^{\beta-n}(x-a-r(x-a))^{n-\alpha-1}(x-a)dr \\
&= \int_0^1 r^{\beta-n}(x-a)^{\beta-n}(x-a)^{n-\alpha-1}(1-r)^{n-\alpha-1}(x-a)dr \\
&= \int_0^1 r^{\beta-n}(x-a)^{\beta-\alpha}(1-r)^{n-\alpha-1}dr \\
&= (x-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 r^{\beta-n}(1-r)^{n-\alpha-1}dr \\
&= (x-a)^{\beta-\alpha}B(\beta-n+1,n-\alpha).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^\alpha(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-\alpha}B(\beta-n+1,n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Pour $\beta = 0$:

$${}^cD_a^\alpha 1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

mais :

$${}^cD_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{d^n}{dt^n}1(x-t)^{n-\alpha-1}dt = 0$$

si $\beta \leq n-1$, on a :

$${}^cD_a^\alpha(x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^\beta(x-t)^{n-\alpha-1}dt = 0$$

si $\beta > n-1$:

$${}^cD_a^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Propriétés 1.2.2 *:*

1) Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha]+1$, alors :

$$({}^cD_a^\alpha\, {}^cD_a^\beta f)(x) = ({}^cD_a^{\alpha+\beta} f)(x)$$

2) On a :

$$(I_a^\alpha\, {}^cD_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Preuve.

1) En utilisant la formule (1.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
({}^cD_a^\alpha\, {}^cD_a^\beta f)(x) &= ({}^cD_a^\alpha(I_a^{n-\beta} D^n f))(x) \\
&= (I_a^{n-\alpha} D^n (I_a^{n-\beta} D_a^n f))(x) \\
&= (I_a^{n-(\alpha+\beta)} D_a^n I_a^n D_a^n f)(x) \\
&= (I_a^{n-(\alpha+\beta)} D_a^n f)(x) \\
&= ({}^cD_a^{\alpha+\beta} f)(x).
\end{aligned}$$

2) D'après la formule (1.15), on a :

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha\, {}^cD_a^\alpha f)(x) &= I_a^\alpha (I_a^{n-\alpha} D^n f)(x) \\
&= (I_a^n D_a^n f)(x) \\
&= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.
\end{aligned}$$

1.3 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.3.1 *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \mathcal{R}e(\alpha) < n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, et soit $f \in \mathbb{C}^n$ une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^cD^\alpha f(t)$ et $D^\alpha f(t)$ existent alors :*

$$ {}^cD^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} \tag{1.17}$$

Preuve. On considère le développement limité en série de Taylor de la fonction f en $t = 0$

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}t^k + R_{n-1}.$$

Avec

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1}d\tau.$$

En utilisant les propriétées d'intégration d'ordre n, on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1}d\tau = I^n f^{(n)}(t).$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville on a :

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= D^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} D_a^\alpha t^k + D^\alpha R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)\Gamma(k+1)} t^{k-\alpha} + D^\alpha I^n f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} + ({}^c D^\alpha f)(t).
\end{aligned}$$

Donc :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha}$$

D'où le résultat.

On déduit que si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 1, 2, 3......n-1$ on aura

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t).$$

Chapitre 2

Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

Dans ce chapitre nous allons étudier la résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO) par quelques méthodes numérique : la méthode d'Euler, les méthodes de Runge-Kutta, qui sont utilisées pour calculer des solutions approchées des équations différentielles du premier ordre. Pour plus de détail voir [11].

2.1 Le problème mathématique

Une EDO est une équation exprimée sous la forme d'une relation

$$F(y(t), y'(t), y''(t), ..., y^p(t)) = g(t) \tag{2.1}$$

les inconnues sont une fonction $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et son intervalle de définition I.
p est appelé l'ordre de l'équation est défini comme celui de la dérivée la plus élevée rencontrée dans l'équation.
$g(t)$ est appelée second membre de l'équation. Si $g(t) = 0$, on dit que l'équation est homogène.
Résoudre une équation différentielle est de chercher toutes les fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation précédente (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).
Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une application donnée

$$\begin{aligned} f : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\longrightarrow f(t, y). \end{aligned}$$

Et soit y une application différentiable de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle équation différentielle du premier ordre, la relation :

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)). \tag{2.2}$$

On dit que y est la solution de cette équation différentielle sur $[a, b]$ si y vérifie la relation (2.2) pour tout $t \in [a, b]$.
On appelle problème de Cauchy ou problème de condition initiale l'équation différentielle à laquelle on adjoint la condition initiale $y(a) = y_0$ où y_0 est un nombre donnée :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2 Solution exacte

Une équation différentielle du 1^{ere} ordre se présente sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t). \tag{2.4}$$

Où a et b sont deux fonctions continues en t.
Pour résoudre l'équation (2.4) on procède de la manière suivante :
• On cherche la solution homogène de l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) est à variables séparables, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} = a(t)dt \Longrightarrow ln|x| &= \int a(t)dt + c \qquad (c = cst) \\ \Longrightarrow |x| &= e^c.e^{\int a(t)dt} \\ &= ke^{\int a(t)dt}. \end{aligned}$$

Où k est une constante positive , d'où : $x_0(t) = ke^{\int a(t)dt}$, $k \in \mathbb{R}$.
• On cherche une solution particulière de l'équation (2.4), on utilise la méthode de variation de la constante, elle consiste à chercher la solution particulière de (2.4) sous la forme :

$$x_p(t) = k(t)e^{\int a(t)dt}$$

dérivons x_p par rapport à t :

$$\frac{dx_p}{dt} = k'(t)e^{\int a(t)dt} + k(t)a(t)e^{\int a(t)dt}.$$

Or x_p vérifie l'équation (2.4). Donc :

$$k'(t)e^{\int a(t)dt} + k(t)a(t)e^{\int a(t)dt} = a(t)k(t)e^{\int a(t)dt} + b(t)$$

$$k'(t)e^{\int a(t)dt} = b(t) \Longrightarrow k'(t) = b(t)e^{-\int a(t)dt} \Longrightarrow k(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$$

D'où :

$$x_p(t) = e^{\int a(t)dt}.\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt.$$

• La solution générale de l'équation (2.4) est la somme de la solution homogène et la solution particulière :

$$x(t) = k(t)e^{\int a(t)dt} + e^{\int a(t)dt}.\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt.$$

Exemple 2.2.1 *:* $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

• *La solution homogène :*

$$\begin{aligned} y' = \frac{2}{x+1}y \Longrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{x+1}y \\ \Longrightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{2}{x+1}dx \\ \Longrightarrow lny &= 2ln(x+1) + c \\ &= ln(x+1)^2 + c \\ \Longrightarrow y(x) &= e^c.e^{ln(x+1)^2} \\ \\ \Longrightarrow Donc: y_0(x) &= \lambda(x+1)^2. \end{aligned}$$

• *La solution particulière :*

En utilisant la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} y = \lambda(x)(x+1)^2 \Longrightarrow y' &= \lambda'(x)(x+1)^2 + 2\lambda(x)(x+1) \\ &= 2\lambda(x)(x+1) + (x+1)^3 \\ \Longrightarrow \lambda'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3 \Longrightarrow \lambda'(x) &= x+1 \\ \Longrightarrow \lambda(x) &= \frac{1}{2}x^2 + x. \end{aligned}$$

D'où :

$$y_p(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)(x+1)^2$$

• *La solution générale est :*

$$y(x) = \lambda(x+1)^2 + x(\frac{1}{2}x+1)(x+1)^2.$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Définition 2.3.1 *Soit f une application définie sur $[a,b]\times\mathbb{R}$, s'il existe une constante $L>0$ indépendante de t, u et v telle que :*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leq L|u-v| \;\; \forall u,v \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

et $\forall t \in [a,b]$, alors f est dite Lipschitzienne de rapport L sur $[a,b]\times\mathbb{R}$ (ou simplement L-lipschitzienne).

Théorème 2.3.1 *Si f est une application définie sur $[a,b]\times\mathbb{R}$ continue et L-lipschitzienne par rapport à y, alors le problème de Cauchy* (2.3) *admet une solution unique sur $[a,b]$ et ceci pour toute condition initiale y_0, ($\forall y_0 \in \mathbb{R}$.)*

2.4 Résolution numérique des équations différentielles ordinaires d'ordre1

2.4.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est l'une des méthodes les plus anciennes de résolution d'une EDO du premier ordre. Il existe deux méthodes types de méthode d'Euler explicite et implicite.
La méthode d'Euler est une procédure numérique qui permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du premier ordre avec condition initiale.
Considérons alors une subdivision de $[a,b]$ en N sous intervalles $[t_i,t_{i+1}]$ de longueur h telle que : $i=0,...,N$ et $h=\frac{b-a}{N}$ et $t_i=a+ih$, avec $t_0=a$ et $t_n=b$.

Algorithme d'Euler

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n) \\ \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \tag{2.7}$$

Méthode d'Euler explicite

Dans la méthode d'Euler explicite, le problème (2.3) est discrétisée par :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t} \qquad et \qquad f(t,y)=f(t_n,y_n) \tag{2.8}$$

où y_n est la valeur de y au temps t_n, y_{n+1} est la valeur inconnue que l'on désire calculer de y au temps t_{n+1}, $\Delta t = h = t_{n+1}-t_n$ est le pas de temps.

En remplaçant (2.8) dans (2.3), on trouve :

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\Delta t \tag{2.9}$$

cette méthode est dite explicite car la valeur de y au temps t_{n+1} peut être déterminer à partie de la valeur y au temps t_n.

Exemple 2.4.1 *Résoudre l'équation suivant par la méthode d'Euler explicite :*

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{2.10}$$

peut s'écrire sous la forme (2.3) *en posant :*

$$f(y) = ky \tag{2.11}$$

L'équation (2.10) *est discrétisée suivant l'approche* (2.8) *:*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \qquad et \qquad ky = ky_n \tag{2.12}$$

on remplace (2.12) *dans* (2.10)*, on obtient :*

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = ky_n \tag{2.13}$$

Ainsi :

$$y_{n+1} = (1 + k\Delta t)y_n \tag{2.14}$$

Méthode d'Euler implicite

Dans la méthode d'Euler implicite, le problème (2.3) est discrétisée par :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \qquad et \qquad f(t, y) = f(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{2.15}$$

A la différence de la méthode explicite, f est calculée à partir de la valeur y au temps t_{n+1}.
En replaçant (2.15) dans (2.3), on trouve :

$$y_{n+1} = y_n + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Delta t \tag{2.16}$$

Exemple 2.4.2 *on utilise la méthode d'Euler implicite pour résoudre l'équation* (2.10) *:*
En appliquant (2.15) *dans l'équation* (2.10)*, on obtient :*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \qquad et \qquad ky = ky_{n+1} \tag{2.17}$$

En remplaçant (2.17) *dans* (2.10), *on obtient :*

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = k y_{n+1} \tag{2.18}$$

Ainsi

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - k\Delta t} \tag{2.19}$$

Exemple 2.4.3 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = t + y \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

• *On veut approcher, à* 10^{-3}, *la solution de cette équation en* $t = 1$ *à l'aide de la méthode d'Euler, en subdivisant l'intervalle* $[0, 1]$ *en dix parties égales.*
Selon l'algorithme d'Euler :

$$\begin{array}{rcl} y_{n+1} & = & y_n + hf(t_n, y_n) \qquad et \quad h = 0.1 \\ t_{n+1} & = & t_n + h \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y_{n+1} & = & y_n + hf(t_n, y_n) \\ & = & y_n + h(t_n + y_n) \\ & = & y_n(h + 1) + ht_n \end{array}$$

On calcule les valeurs du tableau :

n	*0*	*1*	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_n	1	1.1	1.22	1.362	1.5282	1.7210	1.9431	2.1974	2.4871	2.8158	3.1874

On trouve : $y(1) \approx 3.187$

• *On cherche la solution exacte :*
La solution exacte de l'équation est donnée par :

$$y(t) = 2e^t - t - 1$$

équation sans second membre :

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \Longrightarrow \frac{dy}{y} = dt \Longrightarrow lny = t + c \Longrightarrow y = ke^t \; avec \; k \in \mathbb{R}$$

une solution particulière : on applique la méthode de la variation de la constante :

$$y = ke^t \ \ donc : y' = k'e^t + ke^t \Longrightarrow k'e^t + ke^t = ke^t + t$$

ainsi

$$k' = te^{-t} \Longrightarrow k = \int te^{-t} \Longrightarrow k = e^{-t}(-1-t) + c \ \ avec \ \ c \in \mathbb{R}$$

Solution générale :
On remplace k on trouve :

$$y = (e^{-t}(-1-t) + c)e^t donc : y = -1 - t + ce^t$$

Finalement, grâce à la condition initiale $y(0) = 1$, on détermine c, d'où :

$$y(0) = 1 = -1 - 0 + ce^0 \Longrightarrow c = 2$$

Ainsi, la solution exacte est : $y(t) = -1 - t + 2e^t$.
• *comparaison :*
Ce qui donne : $y(1) = 3.437$.(l'approximation calculée est donc trés grossière).

Exemple 2.4.4 *On considère le problème de Cauchy suivante :*

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

• *La solution exacte :*

$$\frac{dy}{dt} = 2y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = 2dt \Longrightarrow y = \lambda e^{2t}$$

On a :

$$y(0) = 5 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow y(t) = 5e^{2t}$$

alors : $y(1) = 5e^2 = 36.94528049$.
• *Construirons la solution approchée donnée par la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{N}$:*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ &= y_n + \frac{1}{N}(2y_n) \\ y_{n+1} &= \left(\frac{2}{N} + 1\right) y_n \end{aligned}$$

Et : $y(0) = 5$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0\left(1+\frac{2}{N}\right) \\ y_2 &= y_1\left(1+\frac{2}{N}\right) = y_0\left(1+\frac{2}{N}\right)^2 \\ &\vdots \\ y_N &= y_0\left(1+\frac{2}{N}\right)^N \end{aligned}$$

• *calculons la valeur approchée de* $y(1)$ *pour* $N = 10$, $N = 10^2$, $N = 10^3$ *:*
Pour $N = 10$ *:*

$$y(1) = y_{10}(1) = y(0)\left(1+\frac{2}{10}\right)^{10} = 5\left(1+\frac{2}{10}\right)^{10} = 30.95868211$$

Pour $N = 10^2$ *:*

$$y(1) = y(0)\left(1+\frac{2}{100}\right)^{100} = 36.22323059$$

Pour $N = 10^3$ *:*

$$y(1) = y(0)\left(1+\frac{2}{1000}\right)^{1000} = 36.87156195$$

• *cette valeur devient quand* $N \longrightarrow \infty$ *:*

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{a}{N}\right)^N = e^a \Longrightarrow \lim_{N\longrightarrow\infty} y_N = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(5\left(1+\frac{2}{N}\right)^N\right) = 5e^2.$$

Conclusion : on conclure

$$y(1) = \lim_{N\longrightarrow\infty} y_N = 5e^2.$$

On remarque que quand N *augment, la solution approchée tend vers la valeur exacte.*

2.4.2 Méthode de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1715, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.
La méthode de Taylor est basée sur la relation :

$$y(x+h) = y(x)+y'(x)h+\frac{1}{2!}y''(x)h^2+\frac{1}{3!}y^{(3)}(x)h^3+...+\frac{1}{m!}y^{(m)}(x)h^m+E(x,h) \quad (2.20)$$

On peut approcher l'erreur par :

$$E(x,h) = \frac{h^m}{(m+1)!}(y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x)) \tag{2.21}$$

Exemple 2.4.5 *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'(x) + 4y(x) = x^2 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2.22}$$

On veut estimer $y(0.1)$ *par la méthode de Taylor d'ordre* 4 *avec un seul pas d'intégration.*
Le développement de Taylor en 0 *jusqu'à l'ordre* 4 *est*

$$y(h) = y(0) + y'(0)h + \frac{1}{2!}y''(0)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(0)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)h^4$$

on a : $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -4y(x) + x^2 &\Longrightarrow&\quad y'(0) = -4 \\ y''(x) &= -4y'(x) + 2x &\Longrightarrow&\quad y''(0) = 16 \\ y^{(3)}(x) &= -4y''(x) + 2 &\Longrightarrow&\quad y^{(3)}(0) = -62 \\ y^{(4)}(x) &= -4y^{(3)}(x) &\Longrightarrow&\quad y^{(4)}(0) = 248 \end{aligned}$$

Donc pour $x = 0$ *et* $h = 0.1$*, on obtient :*

$$y(0.1) \approx 1 + \frac{-4}{10} + \frac{16}{200} + \frac{-62}{6000} + \frac{248}{240000} = 0.6707$$

Maintenant, calculons l'erreur d'après l'équation (2.21)

On a besoin $y^{(4)}(0.1)$ *et* $y^{(4)}(0)$

$y^{(4)}(0.1)$ *se calcule par récurrence :*

$y^{(4)}(x) = -4y^{(3)}(x) = -4(-4y''(x)+2) = -4(-4(-4y'(x)+2x)+2) = -4(-4(-4(-4y(x)+x^2)+2x)+2)$

Ainsi $y^{(4)}(0.1) = 166,259$ *et on obtient l'estimation de l'erreur :*

$E \approx \frac{0.1^4}{5!}(166.259 - 248) = -0.000068$

Méthode de Taylor d'ordre2
Une première façon d'améliorer la méthode d'Euler consiste à utiliser un développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2.
Le développement de Taylor d'ordre 2 implique :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) \tag{2.23}$$

d'une part :

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)) \tag{2.24}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} y''(t_n) &= \frac{\delta}{\delta t}(y'(t))|_{t=t_n} \\ &= \frac{\delta}{\delta t}(f(t, y(t)))|_{t=t_n} \\ &= \left(\frac{\delta f}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta y}.\frac{\delta y}{\delta t}\right)|_{t=t_n} \\ &= \left(\frac{\delta f}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta y}.y'\right)_{t=t_n} \\ &= \frac{\delta f}{\delta t}(t_n, y(t_n)) + \frac{\delta f}{\delta y}(t_n, y(t_n)).f(t_n, y(t_n)). \end{aligned}$$

Il vient :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\delta f}{\delta t}(t_n, y(t_n)) + \frac{\delta f}{\delta y}(t_n, y(t_n)).f(t_n, y(t_n))\right]$$

On est donc amené à considérer l'algorithme suivant, appelée l'algorithme de Taylor d'ordre 2 :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\delta f}{\delta t}(t_n, y_n) + \frac{\delta f}{\delta y}(t_n, y_n).f(t_n, y_n)\right] \\ \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \tag{2.25}$$

2.4.3 Méthode de Runge-Kutta

Les méthodes de type Runge-Kutta permettent d'obtenir une plus grande précision que les méthodes d'Euler (dans le sens où elles donnent en général des solutions numériques plus proches des solutions analytiques que les méthodes d'Euler). Cette précision est obtenue par l'utilisation d'un pas de calcul intermédiaire. On évite alors l'inconvénient de méthodes du type Euler qui demandent le concours de méthodes itératives.
Les deux méthodes de Runge-Kutta les plus employées sont l'algorithme dit 'RK2' à deux pas de calcul et l'algorithme dit 'RK4' à quatre pas de calcul.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre2 (RK2)

On reprend l'algorithme (2.25) de Taylor en écrivant la seconde équation de la manière suivante :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + h\frac{\delta f}{\delta t}(t_n, y_n) + h\frac{\delta f}{\delta y}(t_n, y_n).f(t_n, y_n)\right] \quad (2.26)$$

Selon le développement de Taylor on a des termes en h près,

$$\left[f(t_n, y_n)+h\frac{\delta f}{\delta t}(t_n, y_n)+h\frac{\delta f}{\delta y}(t_n, y_n).f(t_n, y_n)\right] = f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right) \quad (2.27)$$

Ainsi, on obtient l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ y_{n+1} = y_n + hK_2 = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)) \end{cases} \quad (2.28)$$

Exemple 2.4.6

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) = 2e^{-t} - 0.3y(t) \\ y(0) &= 3 \quad et \quad h = 0.05 \\ y(0.15) &= ?? \end{aligned}$$

$n = 0, t_0 = 0, y_0 = 3$:
$K_1 = f(0, 3) = 2e^{-0} - 0.3 \times 3 = 1.1$
$\longrightarrow K_2 = f(0.025, 3.0275) = 2e^{-0.025} - 0.3 \times 3.0275 = 1.042$
$\Longrightarrow y(t_1) = y_1 = y(0.05) = y(0) + 0.05 \times 1.042 = 3 + 0.05 \times 1.042 = 3.052$

$n = 1, t_1 = 0.05, y_1 = 3.052$
$K_1 = f(0.05, 3.052) = 2e^{-0.05} - 0.3 \times 3.052 = 0.987$
$\longrightarrow K_2 = f(0.075, 3.077) = 2e^{-0.075} - 0.3 \times 3.077 = 0.932$
$\Longrightarrow y_2 = y(0.1) = y(t_1) + 0.05 \times 0.932 = 3.052 + 0.05 \times 0.932 = 3.099$

$n = 2, t_2 = 0.1, y_2 = 3.099$
$K_1 = f(0.1, 3.099) = 2e^{-0.1} - 0.3 \times 3.099 = 0.88$
$\longrightarrow K_2 = f(0.125, 3.121) = 2e^{-0.125} - 0.3 \times 3.121 = 0.829$
$\Longrightarrow y_3 = y(0.15) = y(0.1) + 0.05 \times 0.829 = 3.099 + 0.05 \times 0.829 = 3.14.$

Exemple 2.4.7 *On considère le problème de Cauchy suivante :*

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

On se propose résoudre ce problème numériquement sur l'intervalle $[0, 1]$, *en utilisant les schémas de Runge-Kutta d'ordre* 2 *avec un pas* $h = \frac{1}{n}$.

• *Solution exacte :*

$$\frac{dy}{dt} = 3y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = 3\,dt \Longrightarrow y = \lambda e^{3t}$$

$$y(0) = 2 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow y(t) = 2e^{3t}$$

• *Et :*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right) \\ &= y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}3y_n\right) \\ &= y_n + h\left(3y_n + \frac{9}{2}hy_n\right) \\ y_{n+1} &= y_n\left(1 + 3h + \frac{9}{2}h^2\right) \end{aligned}$$

• *En déduire* y_n *en fonction de* y_0 , h, n *:*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n\left(1 + 3h + \frac{9}{2}h^2\right) \\ &= y_{n-1}\left(1 + 3h + \frac{9}{2}h^2\right)^2 \\ &\vdots \\ &= y_0\left(1 + 3h + \frac{9}{2}h^2\right)^{n+1} \\ y_n &= y_0\left(1 + 3h + \frac{9}{2}h^2\right)^n \end{aligned}$$

• *Calculon* $y(1)$ *pour* $n = 10$, $n = 10^2$, $n = 10^3$ *:*
La valeur exacte :

$$y(1) = 2e^3 = 40.17107385$$

La valeur approchée :
Pour $n = 10 \Longrightarrow h = 0.1$ *:*

$y_{10}(1) = 2\bigg(1 + 3 \times 0.1 + 4.5 \times (0.1)^2\bigg)^{10} = 38.74831655$
$Pour\ n = 100 \Longrightarrow h = 0.01$:
$y_{100}(1) = 2\bigg(1 + 3 \times 0.01 + 4.5 \times (0.01)^2\bigg)^{100} = 40.1534026$
$Pour\ n = 1000 \Longrightarrow h = 0.001$:
$y_{1000}(1) = 2\bigg(1 + 3 \times 0.001 + 4.5 \times (0.001)^2\bigg)^{1000} = 40.17089348.$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f\bigg(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\bigg) \\ K_3 = f\bigg(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\bigg) \\ K_4 = f(t_{n+1}, y_n + hK_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases} \tag{2.29}$$

Exemple 2.4.8

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) = 2y(t) - 3t \\ y(0) &= 2 \quad et \quad h = 0.1 \\ y(0.3) &= ?? \end{aligned}$$

$n = 0, t_0 = 0, y_0 = 2$
$K_1 = f(0, 2) = 2 \times 2 - 3 \times 0 = 4$
$\longrightarrow K_2 = f(0.05, 2.2) = 2 \times 2.2 - 3 \times 0.05 = 4.25$
$\longrightarrow K_3 = f(0.05, 2.2125) = 2 \times 2.2125 - 3 \times 0.05 = 4.275$
$\longrightarrow K_4 = f(0.1, 2.4275) = 2 \times 2.4275 - 3 \times 0.1 = 4.555$
$\Longrightarrow y_1 = y(0.1) = 2 + 0.1 \times \frac{1}{6}(4 + 2 \times 4.25 + 2 \times 4.275 + 4.555) = 2.427.$

$n = 1, t_1 = 0.1, y_1 = 2.427$
$K_1 = f(0.1, 2.427) = 2 \times 2.427 - 3 \times 0.1 = 4.554$
$\longrightarrow K_2 = f(0.15, 2.6547) = 2 \times 2.6547 - 3 \times 0.15 = 4.859$

$\longrightarrow K_3 = f(0.15, 2.67) = 2 \times 2.67 - 3 \times 0.15 = 4.89$
$\longrightarrow K_4 = f(0.2, 2.916) = 2 \times 2.916 - 3 \times 0.2 = 5.232$
$\Longrightarrow y_2 = y(0.2) = 2.427 + 0.1 \times \frac{1}{6}(4.554 + 2 \times 4.859 + 2 \times 4.89 + 5.232) = 2.915.$

$n = 2, t_2 = 0.2, y_2 = 2.915$
$K_1 = f(0.2, 2.915) = 2 \times 2.915 - 3 \times 0.2 = 5.23$
$\longrightarrow K_2 = f(0.25, 3.1765) = 2 \times 3.1765 - 3 \times 0.25 = 5.603$
$\longrightarrow K_3 = f(0.25, 3.1952) = 2 \times 3.1952 - 3 \times 0.25 = 5.64$
$\longrightarrow K_4 = f(0.3, 3.479) = 2 \times 3.479 - 3 \times 0.3 = 6.058$
$\Longrightarrow y_3 = y(0.3) = 2.915 + 0.1 \times \frac{1}{6}(5.23 + 2 \times 5.603 + 2 \times 5.64 + 6.058) = 3.478.$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, nous avons traité la résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaires à l'aide de quelques méthodes numériques : la méthode de Demirci et Ozalp, la méthode Adomian (ADM), la méthode de perturbation d'homotopie(HPM)et la méthode d'itération variationnelle(VIM).

Définition 3.0.1 ***(Equation différentielle fractionnaire au sens du Caputo)***
Soient $[a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ avec α est un nombre non entier et $f(., y) : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $t \in [a, b]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy pour une équation différentielle avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α est donnée comme suite :

$$^{c}D_{a}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales :

$$y^{(k)}(a) = c_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, ..., n-1, n = [\alpha] + 1. \tag{3.2}$$

Définition 3.0.2 ***(Equation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville)***
Soient $[a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ avec α est un nombre non entier et $f(., y) : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $t \in [a, b]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy pour une équation différentielle avec dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α est donnée comme suite :

$$^{RL}D_{a}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \tag{3.3}$$

avec les conditions initiales

$$^{RL}D^{\alpha-k}y(a) = c_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, ..., n, n = [\alpha] + 1 \tag{3.4}$$

où $[\alpha]$ est la partie entière de α.

3.1 La méthode de Demirci et Ozalp

Dans cette section, nous nous intéressons par la méthode de Demirci et Ozalp [2] pour trouver les solutions exactes des problèmes de Cauchy d'une équation différentielle avec dérivée fractionnaire.

Théorème 3.1.1 ***(Demirci et Ozalp)*** *On considère le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $0 < \alpha < 1$. *Soit la fonction* g *définie par :*

$$g(v, y_*(v)) = f\Bigg(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}, y\Bigg(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}\Bigg)\Bigg) \tag{3.6}$$

Alors, une solution du problème de Cauchy (3.5) *est donnée comme suite*

$$y(t) = y_*\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \tag{3.7}$$

où $y(v)$ *est la solution d'équations différentielles d'ordre entier*

$$\frac{d(y_*(v))}{v} = g(v, y_*(v)) \tag{3.8}$$

avec la condition initiale

$$y_*(0) = y_0 \tag{3.9}$$

Exemple 3.1.1 *On considère le problème de Cauchy pour l'équation différentielle linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{1}{2}} y(t) = t \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Nous avons : $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$, $f(t, y(t)) = t$ *et*

$$\begin{aligned} g(v, y_*(v)) &= f\Bigg(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}, y\Bigg(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}\Bigg)\Bigg) \\ &= t - \left[\sqrt{t} - v\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2 \\ &= t - (\sqrt{t})^2 - v^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) + 2v(\sqrt{t})\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 2v\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - v^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc, on déduit que $y_*(v)$ *est la solution de l'équation différentielle d'ordre entier suivante :*

$$\frac{d(y_*(v))}{v} = 2v\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - v^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)$$

Par l'intégration de l'équation différentielle précédente, on obtient :

$$y_*(v) = v^2\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{v^3}{3}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) + y_0$$

Ainsi, la solution du problème de Cauchy (3.10) *est :*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_*\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right) \\ &= \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right)^2\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right)^3\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) + y_0 \\ &= \frac{4}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + y_0. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.2 *On considère le problème de Cauchy pour l'équation différentielle linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{1}{2}}y(t) = t + y(t) \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Nous avons $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$, $f(t, y(t)) = t + y(t)$ *et :*

$$\begin{aligned} g(v, y_*(v)) &= f\left(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}, y\left(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}\right)\right) \\ &= t - \left[\sqrt{t} - v\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2 + y_*(v) \\ &= t - (\sqrt{t})^2 - v^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) + 2v\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + y_*(v) \\ &= 2v\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - v^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) + y_*(v). \end{aligned}$$

Donc, on déduit que $y(v)$ *est la solution de l'équation différentielle d'ordre entier suivante :*

$$\frac{d(y_*(v))}{v} = 2v\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - v^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) + y_*(v) \tag{3.12}$$

la solution de l'équation différentielle (3.12) *est :*

$$y_*(v) = -2(v+1)\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + (v^2+2v+2)\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) + e^v\left[y_0 + 2\sqrt{t}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - 2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right].$$

Par conséquent, la solution du problème (3.11) *est :*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_*\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right) \\ &= -t + \frac{\pi}{2} + e^{2\sqrt{t}/\sqrt{\pi}}\left(y_0 + \sqrt{\pi t} - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Exemple 3.1.3 *On considère le problème de Cauchy d'une équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{1}{2}}y(t) = (1-y(t))^4 \\ \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Nous avons, $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$, $f(t, y(t)) = (1-y(t))^4$ *et*

$$\begin{aligned} g(v, y_*(v)) &= f\left(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}, y\left(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}\right)\right) \\ &= (1-y_*(v))^4. \end{aligned}$$

Donc, on déduit que $y_*(v)$ *est la solution d'équations différentielles d'ordre entier suivante :*

$$\frac{d(y_*(v))}{v} = (1-y_*(v))^4$$

Par conséquent, la solution du problème de Cauchy (3.13) *est*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_*\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{t}+\sqrt{\pi}}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.4 *On considère l'équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville suivante :*

$$\begin{cases} D_0^{\frac{1}{2}}y(t) = t^3 \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On a : $0 < \alpha < 1$, $f(t, y(t)) = t^3$ *et*

$$\begin{aligned} g(v, y_*(v)) &= f\Big(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}, y\Big(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}\Big)\Big) \\ &= \left(t - \left[t^{\frac{1}{2}} - v\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2\right)^3 \\ &= 8v^3 t^{\frac{3}{2}}\Gamma^3\left(\frac{3}{2}\right) - 12v^4 t\Gamma^4\left(\frac{3}{2}\right) + 6v^5 t^{\frac{1}{2}}\Gamma^5\left(\frac{3}{2}\right) - v^6\Gamma^6\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc, on déduit :

$$\frac{d(y_*(v))}{v} = 8v^3 t^{\frac{3}{2}}\Gamma^3\left(\frac{3}{2}\right) - 12v^4 t\Gamma^4\left(\frac{3}{2}\right) + 6v^5 t^{\frac{1}{2}}\Gamma^5\left(\frac{3}{2}\right) - v^6\Gamma^6\left(\frac{3}{2}\right)$$

Par intégration de l'équation différentielle précédente, on obtient :

$$y_*(v) = 2v^4 t^{\frac{3}{2}}\Gamma^3\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{12}{5}v^5 t\Gamma^4\left(\frac{3}{2}\right) + v^6 t^{\frac{1}{2}}\Gamma^5\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{v^7}{7}\Gamma^6\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ainsi, la solution est :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_*\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right) \\ &= \frac{16}{35}\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &= \frac{32}{35}\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

3.2 La méthode Adomian (ADM)

La décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique développée par le mathématicien américain George Adomian, elle est utilisée pour la résolution du problèmes algébriques, différentiels, intégrales, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et les équations aux dérivées partielles ([4]). L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré et donne la solution sous forme d'une série infinie, qui converge rapidement vers la solution exacte quand elle existe. La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires.
On considère l'équation différentielle non linéaire fractionnaire au sens de Caputo suivante :

$$^cD^\alpha u(x) = f(x, u(x)) = g(x) + h(x)u + N(x, u) \tag{3.14}$$

où g,h sont des fonctions continues, $0 < \alpha < 1$, et N est la partie non linéaire de f. Appliquons l'opérateur I sur les deux cotés de l'équation précédente, on trouve l'équation :

$$u(x) = u(0) + I^{\alpha}[g](x) + I^{\alpha}[h(x)u + N(x, u)](x) \tag{3.15}$$

ADM propose la relation de récurence suivante :

$$u_0(t) = u(0) + I^{\alpha}[g](x), \quad u_{n+1}(t) = I^{\alpha}[h(x)u + A_n](x), \quad n \geq 0 \tag{3.16}$$

tel que les A_n sont des polynômes Adomian. Finalement, nous rapprochons la solution par la série suivante :

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \quad et \quad \lim_{N \longrightarrow \infty} \Phi_N = u(t) \tag{3.17}$$

Définition 3.2.1 *Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) = F(u_0) \\ \\ A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}. \end{cases} \tag{3.18}$$

La formule proposée par G.Adomian pour calculer des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$, *est la suivante :*

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) = F(u_0) \\ A_1(u_0, u_1) &= \frac{d}{d\lambda}[N(u_0 + \lambda u_1)]_{\lambda=0} = u_1 N'(u_0) = u_1 F'(u_0) \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda^2}[N(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)]_{\lambda=0} = u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 N''(u_0) \\ &= u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 F''(u_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Exemple 3.2.1 *Soit l'équation différentielle non linéaire fractionnaire au sens de Caputo suivante :*

$$\begin{cases} {}^c D^{\alpha} y(t) = -y^2(t) & 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Selon la décomposition d'Adomian :

$$y_{n+1}(t) = -I^{\alpha}[A_n](t)$$

ou $A_0 = y_0^2,\ A_1 = 2y_0y_1,\ A_2 = y_1^2 + 2y_0y_2,$*....sont les polynômes d'Adomian pour le terme non linéaire* $F(y) = y^2$.

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= 1\\
y_1(t) &= -I^\alpha[A_0](t) = -I^\alpha(y_0^2) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\
y_2(t) &= -I^\alpha[A_1](t) = -I^\alpha(2y_0y_1) = -I^\alpha\left(\frac{-2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) = \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\\
y_3(t) &= -I^\alpha[A_2](t) = -I^\alpha(2y_0y_2 + y_1^2) = -I^\alpha\left(\frac{4}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)}\right)t^{2\alpha}\\
&= \left(-4 - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)}\right)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} y_n(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + ...$$

et

$$y(t) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \Phi_N$$

Donc :

$$y(t) = 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \left(-4 - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)}\right)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + ... \qquad (3.19)$$

En substituant $\alpha = 1$ *dans* (3.19)*, nous obtenons :*

$$y(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

Exemple 3.2.2 *considérons l'équation différentielle fractionnaire non linéaire au sens de Riemann Liouville suivante :*

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = 2e^{y(t)} & 0 < \alpha < 1\\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Selon la décomposition d'Adomian :

$$y_{n+1}(t) = 2I^\alpha(A_n)(t)$$

tel que : $A_0 = e^{y_0}$, $A_1 = y_1 e^{y_0}$, $A_2 = y_2 e^{y_0} + \frac{1}{2} y_1^2 e^{y_0}$,*...sont les polynômes d'Adomian pour le terme non linéaire* $F(y) = e^y$.

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= 0 \\
y_1(t) &= 2I^\alpha(A_0)(t) = 2I^\alpha e^{y_0} = 2I^\alpha 1 = \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
y_2(t) &= 2I^\alpha(A_1)(t) = 2I^\alpha y_1 e^{y_0} = 2I^\alpha \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{4t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
y_3(t) &= 2I^\alpha(A_2)(t) = 2I^\alpha(y_2 e^{y_0} + \frac{1}{2} y_1^2 e^{y_0}) = 2I^\alpha \left(\frac{4t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{1}{2} \frac{4t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right) \\
&= \left(\frac{8}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} \right) t^{3\alpha} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Alors la solution est :

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \ldots$$

3.3 La méthode de perturbation d'homotopie(HPM)

La méthode de perturbation d'homotopie, a été proposée et développée par le mathématicien chinois Ji-Haun-He en 1999. La méthode de perturbation d'homotopie est un outil mathématique puissant pour étudier une grande variété de problèmes apparaissant dans différents domaines. Elle est obtenue avec succès par combinaison de la théorie de l'homotopie dans la topologie avec la théorie de la perturbation. La caractéristique importante de la méthode de perturbation d'homotopie est qu'elle fournit une solution presque exacte à beaucoup de problèmes linéaires et non-linéaires sans la nécessité du calcul des polynômes Adomian.(voir [8])

Description de la méthode

Nous considérons l'équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire au sens de Caputo suivante :

$$^cD^\alpha u(t) = N(u) + g(t) \tag{3.20}$$

telle que : $t \in \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, N est la partie non linéaire, $g(t)$ est une fonction continue.

On construit une homotopie :

$$v(t,p) : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

De sorte que :

$$(1-p)[^cD_0^\alpha v -^c D_0^\alpha u_0] + p[^cD_0^\alpha v - N(v) - g(t)] = 0 \tag{3.21}$$

où : $p \in [0,1]$, u_0 est une condition initiale de u.
lorsque $p = 0$, l'équation précédente devient :

$$^{c}D_0^{\alpha} v -^{c} D_0^{\alpha} u_0 = 0 \tag{3.22}$$

et lorsque $p = 1$, l'équation (3.21) devient l'équation (3.20).

Supposons que la solution de l'équation (3.20) peut être écrite comme suit :

$$v = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i \tag{3.23}$$

Alors, pour $p = 1$, la solution approximative de l'équation différentielle (3.20) sera donc :

$$u = \lim_{p \longrightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + ... = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i \tag{3.24}$$

Exemple 3.3.1 *Nous considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante :*

$$^{c}D_0^{\alpha} u - 2xu = -2x \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.25}$$

Avec la condition initiale suivante :

$$u(0) = 2 \tag{3.26}$$

où $^{c}D_0^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo
pour $\alpha = 1$, la solution exacte de l'équation

$$y' - 2xy = -2x \tag{3.27}$$

avec la condition initiale (3.26) *est donnée par :*

$$y = exp(x^2) + 1 \tag{3.28}$$

D'après la formule (3.21) *nous pouvons construire l'homotopie comme suit :*

$$(1-p)[^{c}D_0^{\alpha} v - {^{c}D_0^{\alpha}} u_0] + p[^{c}D_0^{\alpha} v - 2xv + 2x] = 0, p \in [0,1] \tag{3.29}$$

ou :

$$^{c}D_0^{\alpha} v - {^{c}D_0^{\alpha}} u_0 + p^{c} D_0^{\alpha} u_0 - 2xp[v] + 2p(x) = 0 \tag{3.30}$$

nous essayons maintenant d'obtenir une solution pour (3.30) *sous la forme :*

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + ... \tag{3.31}$$

En substituont (3.31) *dans* (3.30), *et on identifiant avec les termes des différents monômes en p, nous obtenons les équations différentielles d'ordre fractionnaire suivantes :*

$$\begin{cases} p^0 : {}^cD_0^\alpha v_0 = {}^cD_0^\alpha u_0, \\ p^1 : {}^cD_0^\alpha v_1 + {}^cD_0^\alpha u_0 - 2xv_0 + 2x = 0, \\ p^2 : {}^cD_0^\alpha v_2 - 2xv_1 = 0, \\ p^3 : {}^cD_0^\alpha v_3 - 2xv_2 = 0, \\ \quad\quad \vdots \end{cases} \tag{3.32}$$

D'après (3.32) *et la condition initiale* (3.26), *nous obtenons les premiers termes suivants :*

$$\begin{cases} v_0(x) = 2, \\ v_1(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1}, \\ v_2(x) = \frac{4(\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+3)} x^{2\alpha+2}, \\ v_3(x) = \frac{8(\alpha+2)(2\alpha+3)}{\Gamma(3\alpha+4)} x^{3\alpha+3}, \\ v_4(x) = \frac{16(\alpha+2)(2\alpha+3)(3\alpha+4)}{\Gamma(4\alpha+5)} x^{4\alpha+4}, \\ \quad\quad \vdots \end{cases} \tag{3.33}$$

et comme :

$$u(x) = \lim_{p \longrightarrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(x) \tag{3.34}$$

La solution approchée de l'équation (3.25) *s'exprime comme suite :*

$$u(x) = 2 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} + \frac{4(\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+3)} x^{2\alpha+2} + \frac{8(\alpha+2)(2\alpha+3)}{\Gamma(3\alpha+4)} x^{3\alpha+3} + ... \tag{3.35}$$

pour $\alpha = 1$, *nous obtenons les quatres premiers termes de la solution approchée de l'équation* (3.25) *dans le cas entier*

$$u(x) = 2 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + ... \tag{3.36}$$

D'autre part le développement en série de taylor au voisinage de $x = 0$ *pour la solution exacte* (3.28) *est donné par :*

$$u(x) = 1 + (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + ...) = 1 + exp(x^2) \tag{3.37}$$

Cela confirme donc notre résultat.

Exemple 3.3.2 *Nous considérons l'équation différentielle non linéaire fractionnaire suivante :*

$$^{c}D_0^{\alpha}u - 2u + u^2 = -1 \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.38}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 2 \tag{3.39}$$

où $^{c}D_0^{\alpha}$ *désigne la dérivée fractionnaire au sens du Caputo.*
Si $\alpha = 1$, *on obtient l'équation suivante :*

$$y' - 2y + y^2 = -1 \tag{3.40}$$

L'équation (3.40) *admet la solution exacte suivante :*

$$y(x) = \frac{1}{1+x} + 1, \quad |x| < 1$$

Nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$(1-p)[^{c}D_0^{\alpha}v - {}^{c}D_0^{\alpha}u_0] + p[^{c}D_0^{\alpha}v - 2v + v^2 + 1] = 0, p \in [0,1] \tag{3.41}$$

ou

$$^{c}D_0^{\alpha}v - {}^{c}D_0^{\alpha}u_0 + p\,{}^{c}D_0^{\alpha}u_0 - p[2v - v^2 - 1] = 0 \tag{3.42}$$

Nous essayons maintenant d'obtenir une solution pour (3.42) *sous la forme :*

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + ... \tag{3.43}$$

En substituant (3.43) *dans* (3.42), *et identifiant les termes de mêmes puissances de* p, *nous obtenons les équations différentielles d'ordre fractionnaire suivants :*

$$\begin{cases} p^0 : {}^{c}D_0^{\alpha}v_0 = {}^{c}D_0^{\alpha}u_0, \\ p^1 : {}^{c}D_0^{\alpha}v_1 + {}^{c}D_0^{\alpha}u_0 - 2v_0 + {v_0}^2 + 1 = 0, \\ p^2 : {}^{c}D_0^{\alpha}v_2 - 2v_1 + 2v_0v_1 = 0, \\ p^3 : {}^{c}D_0^{\alpha}v_3 - 2v_2 + {v_1}^2 + 2v_0v_2 = 0, \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{3.44}$$

A partir de l'équation (3.44) *et la condition* (3.39) *nous obtenons les premiers termes suivant :*

$$\begin{cases} v_0(x) = 2, \\ v_1(x) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha}, \\ v_2(x) = \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} x^{2\alpha}, \\ v_3(x) = \left(-4 - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right) \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}, \\ \quad \vdots \end{cases} \tag{3.45}$$

et comme :

$$u(x) = \lim_{p \longrightarrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(x)$$

nous obtenons les premiers termes de la solution approchée de l'équation (3.38) *:*

$$u(x) = 2 + \frac{-1}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} + \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} x^{2\alpha} + \left(-4 - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \right) \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + ... \tag{3.46}$$

substituant $\alpha = 1$ *dans* (3.46), *nous obtenons la solution approchée de l'équation* (3.38) *dans le cas entier*

$$u(x) = 2 - x + x^2 - x^3 + ... \tag{3.47}$$

3.4 La méthode d'itération variationnelle(VIM)

La méthode itérative variationnelle (VIM) a été développé par Je-Haun-He au début des années 1990. Cette méthode à été utilisée par beaucoup des chercheurs dans une variété de champs scientifiques et peut résoudre des problèmes non linéaire, et a été proposé la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique. La méthode est basé sur la détermination de multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

Description de la méthode

Zhiwu et al. [14] ont étudié la convergence de la méthode d'itération variationnelle (VIM) pour les équations différentielles fractionnaires au sens du Caputo. Ils ont considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} ({}^{c}D_0^{\alpha} y)(t) = f(t, y(t)), \quad n-1 < \alpha \leq n \\ y^{(k)}(0) = y_0^k, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \end{cases} \tag{3.48}$$

où $t \in [0,T]$, $y^{(k)}(t)$ désigne la dérivée d'ordre k de $y(t)$ et $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition de Lipschitz

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L|u_1 - u_2|; \quad t > 0 \;\; u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.49}$$

où L est la constante de Lipschitz. On définit la norme

$$\| y \|_\infty = max_{0 \leq t \leq T} |y(t)|$$

Diethelm et al. [3] ont prouvé que le problème (3.48) peut être équivalent à l'équation suivante :

$$y(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \tag{3.50}$$

On pose

$$g(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!} \tag{3.51}$$

L'équation (3.50) peut être transformée sous la forme :

$$y(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \tag{3.52}$$

Selon l'idée de Xu [15] et Ghorbani et al. [5], l'itération pour l'équation (3.52) peut être construire comme suit :

$$y_{n+1}(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau. \tag{3.53}$$

On utilise la valeur initiale $y_0(t) = y_0^{(0)} + y_1^{(1)} t + ... + y_{n-1}^{(n-1)} t^{n-1}$ et on commence l'itération. La valeur y_n de la n-ième d'itération se rapproche vers la solution exacte du problème (3.48) par :

$$y = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n \tag{3.54}$$

Exemple 3.4.1 *Nous considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivant :*

$$^cD_0^\alpha y = -y, \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \tag{3.55}$$

avec les conditions suivantes :

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{3.56}$$

la solution approchée de l'équation (3.55) *d'après la méthode VIM est écrit sous la forme suivante :*

$$y = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n$$

telle que

$$y_{n+1}(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y_n(x))dx$$

et

$$g(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!}$$

D'après la formule (3.55) *et les conditions* (3.56)*, dans cet exemple* $f(x, y(x)) = -y$*, et* $g(t) = 1$*, nous obtenons les formules donnant les premiers termes :*

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= 1 \\
y_1(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_0 dx \\
y_2(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_1 dx \\
y_3(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_2 dx \\
&\vdots \\
y_{n+1}(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_n dx
\end{aligned}$$

nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= 1 \\
y_1(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
y_2(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} \\
y_3(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)} \\
&\vdots \\
y_n(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma^4(\alpha+1)} + ... + (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma^n(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

comme

$$y = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n$$

alors

$$y(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma^4(\alpha+1)} + ... + (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma^n(\alpha+1)}\right)$$

donc

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^{\alpha})^k}{\Gamma^k(\alpha+1)} \tag{3.57}$$

En substituant $\alpha = 2$ *dans* (3.57), *nous obtenons :*

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{(2!)^2} - \frac{t^6}{(2!)^3} + ... + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2!)^n} \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{8} + ... + (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Exemple 3.4.2 *Nous considérons l'équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire suivante :*

$${}^{c}D_0^{\alpha} y = y^2 + 1 \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.58}$$

avec la condition initiale suivante :

$$y(0) = 0 \tag{3.59}$$

la solution approchée de l'équation (3.58) *d'après la méthode VIM est écrite sous la forme*

$$y = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n$$

telle que

$$y_{n+1} = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y_n(x)) dx \tag{3.60}$$

dans cet exemple $f(x, y(x)) = y^2 + 1$ *et* $g(t) = 0$ *d'après* (3.58), *car*

$$g(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!}, 0 < \alpha < 1$$

D'après la formule (3.60), *nous obtenons les formules donnant les premiers termes :*

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= 0 \\
y_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}(y_0^2+1)dx \\
y_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}(y_1^2+1)dx \\
y_3(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}(y_2^2+1)dx \\
&\vdots \\
y_{n+1}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}(y_n^2+1)dx
\end{aligned}$$

Nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= 0 \\
y_1(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
y_2(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)} \\
y_3(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)} + \frac{2t^{5\alpha}}{\Gamma^5(\alpha+1)} + \frac{t^{7\alpha}}{\Gamma^7(\alpha+1)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

comme

$$y = \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n$$

nous obtenons

$$y(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)} + \frac{2t^{5\alpha}}{\Gamma^5(\alpha+1)} + \frac{t^{7\alpha}}{\Gamma^7(\alpha+1)} + ... \tag{3.61}$$

En substituant $\alpha = 1$ *dans* (3.61), *nous obtenons la serie suivant :*

$$y(t) = t + t^3 + 2t^5 + t^7 + ... \tag{3.62}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons donné quelques définitions et propriétés de l'intégrale d'ordre fractionnaire et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle du Caputo qui sont les plus populaires parmi plusieurs définitions des dérivées fractionnaires.

Nous avons aussi présenté quelques méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles ordinaire et même pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaires.

Bibliographie

[1] Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is amost frequency independent. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13, 529-539, 1967.

[2] Demirci E. et Ozalp N. A method for solving differential equation of fractional. Journal of computationaanApplieMathematics, 236, 2754-2762, 2012.

[3] Diethelm.K,Ford.N.J,"Analysis of fractional differential equations",J.math.Anal.Appl,265,(2002),229-248.

[4] Ghorbani, A. Beyond Adomian's Polynomials. Chaos Solutons Fract.,39(3), (2009), 1486-1492.

[5] Ghorbani.A,Nadjufi.J.S,"An effective modification of He's variational iteration method",Nonl.Anal.real W.Appl,10,(2009),2828-2833.

[6] Hari M. Srivastava Anatoly A. Kilbas and Juan J. Trujillo (Eds.). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies 204. Elsevier, 1 edition, 2006.

[7] He, J.H. A Coupling Method of Homotopy Technique and Perturbation Technique for Non-linear Problems. Int. J. Non-Linear Mech.,35,(2000),37-43.

[8] He.J.H,"Application of homotopy perturbation method to non-linear ware equations",Chaos Solitions raactals,26(3),(2005),695-700.

[9] He, J.H. Homotopy Perturbation Technique, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 178(3), (1999), 257-262.

[10] He, J.H. Some Asymptotic Methods for Strongly Nonlinear equations. Int. J. Modern Phys. B, 20(10), (2006), 1141-1199.

[11] J.C.Butcher(1987) :The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations.John Wiley and Sons.[MA 65/276].

[12] Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press, New York, 1999.

[13] S. K. Ntouyas, Existence Results For First Order Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations And Inclusions With Fractional Integral Boundary Conditions,J, Fractional Calculus and Applications, July, 2012.

[14] Wem.Z,Yi.J,Liu.H,"Convergence Analysis of Variational Iteration Method for Caputo Fractional Differential Equations",V.324 of the series Commu. in Comp and Inf Sci,Asia Sim,(2012),2506-2509.

[15] XU.L,"The variational iteration method for solving integral equations",Comp.Math Appl,54,(2007),1071-1078.

Résumé

Ce mémoire est dédié à la résolution numérique des équations différentielles ordinaire et aussi d'ordre fractionnaire. Nous allons donner quelques notions préliminaires fondamentales utilisées dans le calcul fractionnaire.
Nous avons présenté certains méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles ordinaires d'ordre 1, comme la méthode d'Euler, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 et encore la méthode de Taylor.
Enfin, nous expliquons la méthode de Demirci et Ozalp, les méthodes de ADM, HPM et VIM pour résoudre numériquement les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Abstract
This memory is dedicated to the resolution of ordinary differential equation and also of fractional order. We give some fundamental preliminary notions used in fractional calculation.
We present some numerical methods to solve the ordinary differential equations order 1 like Euler's method, the Runge-kutta method 2 and 4, Taylor's method.
Finally, we explain the method of Demirci and Ozalp, the methods ADM, HPM, VIM to solve numerically the fractional differential equations.

ملخص

هذه المذكرة مخصصة لحل المعادلات التفاضلية و ايضا ذات الرتب الكسرية. نقدم بعض المفاهيم الاساسية المستخدمة في الحساب الكسري. ايضا، نقدم بعض الطرق المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية من الدرجة 1 مثل طريقة اويلر، طريقة غونج كيتا 2 و 4 ، و طريقة تايلور. و اخيرا، نقدم طريقة ديميرسي و اوزالب، و طرق VIM ، HPM ، ADM لحل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية.