الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليــم العالــي والبحــث العلمـــــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation
Thème

Quelques applications de la transformation de Laplace

Présenté Par :
M^elle^ GOURARI Khaoula

Devant le jury composé de :

Dr. BENDIMRED Lamia	MAA	UATBB (Ain Témouchent)	Présidente
Pr. HAMMOUDI Ahmed	Prof	UATBB (Ain Témouchent)	Examinateur
Dr. GAOUAR Soumia	MCB	UATBB (Ain Témouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2022/2023

Dedicace

Je dédie ce travail
À mes chers parents, à ma mére qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études et de ma vie.
À mes sœurs: Wahiba, Houaria et Razika.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département de Mathématiques et Informatique, de la faculté des Sciences et de la Technologie, université Ain Temouchent-Belhadj Bouchaib.
Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné le courage et la force pour terminer ce travail.
Je remercie mes parents pour leur soutien, et je remercie ma mére pour avoir été à mes côtés et de m'avoir encouragé jusqu'à ce que je termine ce mémoire.
Je remercie ma promotrice Dr GAOUAR Soumia pour m'avoir beaucoup aidé, pour ses idées et ses conseils bénéfiques, ainsi pour le temps qu'elle a consacré pour moi. Je la remercie pour tout.
Je remercie aussi les membre du jury, la présidente: Mme. BENDIMRED Lamia et l'examinateur: Professeur HAMMOUDI Ahmed pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant d'examiner ce modeste travail.
Enfin, je remercie tout ceux qui m'ont enseigné durant mon cursus, en particulier mes enseignants de l'université d'Ain Temouchent-Belhadj Bouchaib

Table de Matières

Introduction

Les transformations de Fourier et de Laplace sont deux exemples importants de transformations intégrales. Elles interviennent dans de nombreuses questions de physique mathématique, de calcul des probabilités, d'automatique, etc.., mais les particularités de la transformation de Laplace et son utilité réside dans l'ajout d'un facteur multiplicatif e^{-st} dans sa fromule intégrale, ce qui a pour conséquence immédiate que la classe des fonctions admettant une transformée de Laplace est beaucoup plus vaste que la classe des fonctions admettant une transformée de Fourier.

La restriction aux seules fonctions causales fait que la transformation de Laplace est particulièrement adaptée à l'étude de la dynamique des systèmes dont on connait l'état à un instant donné (pris comme instant initial en posant $t = 0$). Étant donné un système dont on connait l'état initial et l'équation régissant son évolution, le problème est typiquement de déterminer, à chaque instant $t > 0$, la valeur $f(t)$ que prend une variable f du système à laquelle on s'intéresse.

En pratique, La transformation de Laplace permet de ramener des problèmes d'analyse linéaire à la résolutions d'équations algébriques.

Ce travail se compose de trois chapitres, et c'est organisé comme suit:

CHAPITRE 1: Transformation de Laplace

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats fondamentaux, définitions et propriétés de la transformation de Laplace qui sont utilisés tout au long de ce mémoire, et qui concerne aussi la transfomée de Laplace inverse.

CHAPITRE 2: Quelques applications de la transformation de Laplace en mathématiques:

Dans ce chapitre, nous considérons plusieurs exemples détaillés de l'application de la transfomée de Laplace, dans la résolution de différents types d'équations différentielles ordinaires, de systèmes différentiels, d'équations intégrales de Volerra et d'équations aux dérivées partielles.

CHAPITRE 3: Quelques applications de la transformation de Laplace en physique:

Ce chapitre est dédié à l'étude de quelques applications de la transfomée de Laplace en physiques appliquée, où deux contextes physique seront traités, soient le mouvement harmonique (oscillatoire) et les circuits électriques. Deux exemples détaillées seront étudiés dans chaque axe:

- Le mouvement harmonique simple et amorti, en mécanique.
- Le circuit RLC simple et double, en éléctronique.

On s'intéresse à la modélisation et la résolution mathématique de ces problèmes de physique par la transformée de Laplace.

Chapitre 1

Transformation de Laplace

Les transformations de Fourier et de Laplace sont deux exemples importants de transformations intégrales de la forme:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : A & \longrightarrow & B \\ f & \longmapsto & F(s) = \int_I K(s,t) f(t)\, dt, \end{array} \tag{1.1}$$

où A et B désignent deux espaces fonctionnels, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $K(s,t)$ une fonction réelle ou complexe appelée noyau de la transformation.

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ correspond au choix suivant:

$$I = \mathbb{R}, \;\; s = y \in \mathbb{R} \text{ et } K(s,t) = e^{-ist}$$

La transformation de Laplace $\mathcal{L}$ est quant à elle définie en prenant:

$$I = \mathbb{R}_+, \;\; s = x + iy \in \mathbb{C} \text{ et } K(s,t) = e^{-st}$$

Si l'on fait le choix d'un espace fonctionnel A ne contenant que des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont causales, c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$, la transformation de Laplace peut être considérée comme une extension de la transformation de Fourier.

En effet, si elle existe, la transformée de Fourier d'une fonction causale $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par la restriction de la transformée de Laplace à l'axe imaginaire pur:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(iy) &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt && (1.2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt && (1.3) \\ &= \mathcal{F}\{f(t)\}(y) && (1.4) \end{aligned}$$

1.1 Définitions et exemples

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite causale si $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.*

Remarque 1.1.1 *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ peut-être envisagée comme une fonction causale, il suffit pour cela de la multiplier par la fonction échelon-unité $\mathcal{U}(t)$ (également notée $\mathcal{H}(t)$ et alors appelée fonction de Heaviside), définie par:*

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Définition 1.1.2 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction causale localement intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Laplace de f, lorsqu'elle existe, est la fonction F de la variable (réelle ou complexe) s qui est définie par:*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

$f(t)$ est appelée l'originale de F et $F(s)$ est l'image de f par la transformation de Laplace, et on écrit:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Exemples 1.1.1

1. *La fonction-échelon unité $\mathcal{U}$:*

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t)e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad \textit{pour } Re(s) > 0$$

2. *La fonction exponentielle e^{at}, où $a \in \mathbb{C}$:*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\, dt = \frac{1}{s-a} = \mathcal{L}\{U(t)\}(s-a) \quad \textit{pour } Re(s) > Re(a)$$

1.2 Existence de la transformée de Laplace

Proposition 1.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction causale localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Supposons que f soit à croissance exponentielle, c'est-à-dire telle que:*

$$\exists (M, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \ |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

Sa transformée de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ est alors définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > \alpha$.

Preuve. En effet, nous avons:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}, \quad |f(t)e^{-st}| \leq M|e^{(\alpha-s)t}| = Me^{(\alpha-Re(s))t}$$

par conséquant:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t}\, dt = \frac{M}{Re(s)-\alpha} < +\infty, \quad \text{pour } Re(s) > \alpha$$

1.3 Propriétés de la transformée de Laplace

1.3.1 Linéarité

Proposition 1.3.1 *Soient (λ, μ) un couple de nombres complexes et $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions causales localement intégrables sur $\mathbb{R}$. La transformée de Laplace de $(\lambda f + \mu g)$ est définie en tout point s de $\mathbb{C}$ où $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ et $\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ sont toutes les deux définies, et en un tel s, nous avons:*

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\}(s) = \lambda\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \mu\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

Preuve. Conséquence directe de la linéarité de l'intégrale.
Exemple 1.3.1 *Transformées de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \textit{pour } Re(s) > 0
\end{aligned}$$

De la même manière:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \textit{pour } Re(s) > 0$$

1.3.2 Transformée d'une homothétie

Transformée de $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

Proposition 1.3.2 *La transformée de Laplace de f_λ est définie en s si et seulement si, la transformée de Laplace de f est définie en $\frac{s}{\lambda}$, et nous avons:*

$$\mathcal{L}\{f_\lambda(t)\}(s) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}\{f(t)\}(\frac{s}{\lambda})$$

Preuve. Ce résultat se prouve en posant le changement de variable $u = \lambda t$, $du = \lambda dt$, dans le calcul de la transformée de Laplace, nous avons:

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}\{f(\lambda t)\}(s) & = & \int_0^{+\infty} f(\lambda t)e^{-st}\ dt \\ & = & \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{1}{\lambda}su}\ du \\ & = & \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}\{f(t)\}(\frac{s}{\lambda}) \\ & = & \frac{1}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda})\end{array}$$

1.3.3 Transformée d'une translatée

Transformée de $\mathcal{T}_{t_0}(t) = f(t - t_0)$, où $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Proposition 1.3.3 *La transformée de Laplace de $\mathcal{T}_{t_0}$ est définie en s si et seulement si, il en est de même de la transformée de Laplace de la fonction causale f, et nous avons:*

$$\mathcal{L}\{\mathcal{T}_{t_0}(t)\}(s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Preuve. Ce résultat se prouve en posant le changement de variable $u = t - t_0$, $du = dt$, dans le calcul de la transformée de Laplace, nous avons:

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}\{f(t-t_0)\}(s) & = & \int_0^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}\ dt \\ & = & \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-(u+t_0)s}\ du \\ & = & e^{-t_0 s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\ & = & e^{-t_0 s}F(s)\end{array}$$

Exemple 1.3.2 *Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, tel que $0 < a < b$. On considère la fonction:*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ a < t < b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Pour presque tout t, $f(t)$ peut être écrite sous la forme suivante:

$$f(t) = \mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)$$

Par la linéarité de la tranformation de Laplace, nous avons:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - a)\}(s) - \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - b)\}(s)$$

et d'après le théorème du retard, nous avons:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = (e^{-as} - e^{-bs})\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t)\}(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

1.3.4 Transformée d'une dérivée

Théorème 1.3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction causale de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que:*

1. $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ *existe (dans* $\mathbb{C}$*)*
2. $\exists (M, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

La transformée $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ est définie pour tout $s \in]\alpha, +\infty[$, et on a:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+)$$

Preuve. Sachant que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'hypothèse (2) du théorème nous assure que la transformée $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ est définie pour tout $s \in]\alpha, +\infty[$.

En fixant $s \in]\alpha, +\infty[$, on a $|f(t)e^{-st}| \leq Me^{(\alpha-s)t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, et $\alpha - s < 0$ si bien que:

$$\left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} = -f(0^+)$$

Un intégration par parties permet de déduire que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\, dt && (1.5) \\ &= \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt && (1.6) \\ &= -f(0^+) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) && (1.7) \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction causale de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que les conditions suivantes soient vérifiées, pour $n \in \mathbb{N}^*$:*

1. $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}, \quad f^k(0^+) = \lim_{t\to 0} f^k(t)$ *existe (dans* $\mathbb{C}$*)*
2. $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}, \quad \exists (M_k, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |f^k(t)| \leq M_k e^{\alpha t}$

La transformée $\mathcal{L}\{f^n(t)\}(s)$ est définie pour tout $s \in]\alpha, +\infty[$, et on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+) && (1.8) \\ &= s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-1-k}(0^+) && (1.9) \end{aligned}$$

En particulier, si les dérivées successives de f vérifient:

$$f^{(n-1)}(0^+) = f(0^+) = 0$$

alors

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad \textit{pour tout } s \in]\alpha, +\infty[$$

1.3.5 Transformée d'une primitive

Corollaire 1.3.2 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction causale continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que la fonction causale donnée sur $\mathbb{R}_+$ par la primitive de f s'annulant en 0 est une fonction qui vérifie les hypothèses du théorème précédent. Dans ce cas, sa transformée de Laplace est définie pour tout $s \in]\alpha, +\infty[$, et on a:*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\ du\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Preuve. Le théorème précédent nous assure en effet que:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\ du\right\}(s)$$

1.3.6 Théorème de la valeur initiale

Théorème 1.3.2 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction causale de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant:*

$$\forall k \in \{0, 1\},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \exists M_k \in \mathbb{R}_+^*,\ \ |f^k(t)| \leq M_k e^{\alpha t}$$

Si $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$ existe (dans $\mathbb{C}$), alors:

$$f(0^+) = \lim_{s \to +\infty} s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Preuve. On sait que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ et $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ sont définies pour tout $s \in]\alpha, +\infty[$, et telles que:

$$s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+) = \mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$$

Par ailleurs, pour tout s fixé dans $]\alpha, +\infty[$, l'inégalité $|f'(t)e^{-st}| \leq M_1 e^{(\alpha - s)t}$, qui est satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, nous assure que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \left|\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\ dt\right| && (1.10)\\
&\leq \int_0^{+\infty} |f'(t)e^{-st}|\ dt && (1.11)\\
&\leq M_1 \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - s)t}\ dt && (1.12)\\
&= \frac{M}{s - \alpha} && (1.13)
\end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = 0$$

et donc

$$f(0^+) = \lim_{s \to +\infty} s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

1.3.7 Théorème de la valeur finale

Théorème 1.3.3 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction causale de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a:*

1. $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$ *et* $f(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$ *existent (dans $\mathbb{C}$),*
2. $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *(resp. $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ est définie pour $Re(s) > 0$ (resp. $Re(s) \geq 0$)*
3. $f(+\infty) = \lim_{s \to 0^+} s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

Preuve.

1. Pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a:

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\ dt = f(t_2) - f(t_1)$$

Sachant que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que:

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) \quad \text{ et } f(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} f(t) \quad \text{ existent (dans } \mathbb{C})$$

2. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$, alors f est bornée sur $\mathbb{R}_+$

3. Comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ est nécessairement définie pour $Re(s) \geq 0$. Et comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ est nécessairement définie pour $Re(s) > 0$, et pour tout $s \in]0, +\infty[$, on a:

$$s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+) = \mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$$

Par ailleurs, pour tout $s \in]0, +\infty[$, l'inégalité $|f'(t)e^{-st}| \leq |f'(t)|$ est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous assure que:

$$\begin{aligned} \lim_{s \to 0^+} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} \lim_{s \to 0^+} (f'(t)e^{-st})\ dt && (1.14) \\ &= \int_0^{+\infty} f'(t)\ dt && (1.15) \\ &= f(+\infty) - f(0^+) && (1.16) \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\lim_{s \to 0^+} (s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+)) = f(+\infty) - f(0^+)$$

D'où

$$\lim_{s \to 0^+} s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = f(+\infty)$$

1.4 Transformation inverse de Laplace

Théorème 1.4.1 *Soient f et g deux fonctions causales continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ dont les transformées de Laplace sont définies sur un même domaine de $\mathbb{C}$. S'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \qquad \textit{pour tout } s \in]s_0, +\infty[,$$

alors les fonctions f et g sont égales sauf éventuellement aux points de discontinuités de l'une ou de l'autre.

Soit une fonction causale f continue sur $\mathbb{R}$ de transformée de Laplace F, on dit donc que f est la transformée inverse de Laplace, ou la fonction originale, de F qu'on note:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$$

Remarque 1.4.1 *La transformée inverse de Laplace de la fonction F, notée f est donnée par:*

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{st}\, ds$$

Cependant, cette définition mathématique est rarement utiliser pour calculer des transformées inverses.

1.4.1 Propriétés de la transformée inverse de Laplace

1.4.2 Linéarité

La transfomée inverse de Laplace est linéaire. Ceci est une méthode générale pour cacluler l'originale d'une fraction rationnelle:

- Décomposition en éléments simples.
- Calcul de l'originale élément simple par élément simple en utilisant la linéarité.

Exemple 1.4.1 *Original de $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$.*
On a:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(1-s^2)(1+s^2)+s^4}{s^3(s^2+1)} \\ &= \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

Par linéarité de la transformée inverse, on obtient:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}(t)$$

et d'après le tableau des transformées de Laplace des fonction usuelles (voir Annexe), on trouve:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$$

Proposition 1.4.1 (Formule de Heaviside) [3]

Cette méthode dite de Heaviside permet de calculer la transformée inverse de Laplace dans le cas d'une fraction rationnelle:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

où

$$Q(s) = (s - r_1)(s - r_2)(s - r_3)...(s - r_n)$$

avec, les r_k sont tous distincts et le degré du polynôme P est infèrieur au degré du polynôme Q, $(dP < dQ = n)$. On peut donc écrire:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t}$$

1.4.3 Homothétie d'une transformée

Propriété 1.4.1 [7]

La transformée de Laplace de $t \longmapsto f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ est définie en s si et seulement si, la transfomée de Laplace F de f est définie en λs, et on a:

$$\mathcal{L}\{f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\}(s) = \lambda F(\lambda s)$$

d'où

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(\lambda s)\}(t) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$$

1.4.4 Translatée d'une transformée

Propriété 1.4.2 [7]

Pour tout $(s,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, la transformée de Laplace de $\mathcal{U}(t)(e^{at}f(t))$ est définie en s si et seulement si, la transfomée de Laplace F de f est définie en $s - a$, et on a:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$$

en d'autres termes:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at}f(t)$$

Cette formule est d'une très grande importance pratique, elle indique que multiplier une fonction par e^{-at} dans le domaine du temps produira une translation de a unités dans le domaine s.

Cela permet de calculer la transformée de Laplace de fonctions qui ne sont pas dans le tableau de transformées.

Exemple 1.4.2 *L'originale de* $F(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$.
On a:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = e^{at}\cos(\omega t)$$

1.4.5 Dérivée d'une transformée

Théorème 1.4.2 *On considère une fonction* f *satisfaisant les hypothèses du théorème d'existence, donc* f *est continue par morceaux pour* $t \geq 0$ *et est exponentielle d'ordre* α. *Sa transformée de Laplace existe (pour* $s > \alpha$*), et on a:*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}$$

Preuve. On dérive l'intégrale de la transformée de Laplace par rapport à la variable s:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} (-t)f(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)
\end{aligned}$$

On déduit que:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{dF}{ds}$$

Remarque 1.4.2 *Plus généralement, la transformée de Laplace* F *de* f *est définie et indéfiniment dérivable, elle vérifie:*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

1.4.6 Théorème de convolution

Définition 1.4.1 *Le produit de convolution de deux fonctions* f *et* g *est noté* $f * g$ *et est defini par:*

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\,du$$

Théorème 1.4.3 [3]

Soient deux fonctions f et g de transformées de Laplace respectives:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) \quad \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$$

Alors, la transformée de Laplace du produit de convolution sera égale au produit usuel des transformées de Laplace de chaque fonctions:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s)$$

et on a:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\}(t) = (f * g)(t)$$

Chapitre 2

Quelques applications de la transformation de Laplace

2.1 Résolution d'équations Différentielles linéaires

2.1.1 Résolution d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Exemple 2.1.1 *On considère l'équation différentielle ordinaire suivante avec la condition initiale:*

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = te^t, \\ y(0) = -1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Par la transformée de Laplace, on a:

$$\mathcal{L}\{y'(t) - y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{te^t\}(s)$$

et d'après la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) - \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{te^t\}(s) &\iff s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y(0) - \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{te^t\}(s) \\ &\iff Y(s)(s-1) + 1 = \frac{1}{(s-1)^2} \\ &\iff Y(s) = \left(\frac{1}{(s-1)^2} - 1\right)\frac{1}{(s-1)} \\ &\iff Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)} \end{aligned}$$

ensuite, on applique la transformée inverse de Laplace pour trouver la fonction originale $y(t)$ qui est la solution de notre système 2.1, on obtient:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{s-1}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^3}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{2}t^2e^t - e^t \\ &= e^t\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

d'où, la solution de système 2.1 est la fonction $y(t)$ donnée par:

$$y(t) = e^t\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)$$

2.1.2 Résolution d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Exemple 2.1.2 *Soit l'équation différentielle ordinaire suivante, avec ses conditions initiales:*

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2e^{-2t}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Par la transformée de Laplace, sa linéarité et la formule de la transformée d'une dérivée, on a:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) + 4\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) + 3\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 2\mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s)$$

de plus,

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = 2\left(\frac{1}{s+2}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad Y(s)(s^2+4s+3) - 1 = \frac{2}{s+2} \\ &\Longleftrightarrow \quad Y(s) = \left(\frac{2}{s+2} + 1\right)\left(\frac{1}{s^2+4s+3}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad Y(s) = 2\left(\frac{1}{(s+2)(s^2+4s+3)}\right) + \frac{1}{s^2+4s+3} \\ &\Longleftrightarrow \quad Y(s) = 2\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right) + \frac{1}{(s+1)(s+3)} \end{aligned}$$

Par une décomposition en éléments simples, on trouve:

$$\begin{aligned} Y(s) &= 2\left(\frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+3}\right) + \frac{a'}{s+1} + \frac{b'}{s+3} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right) - 2\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+3}\right) \end{aligned}$$

avec: $a = \frac{1}{2}, \ b = -1 \ c = \frac{1}{2}, \ a' = \frac{1}{2},$ *et* $b' = -\frac{1}{2}$
ensuite, on applique la transformée inverse de Laplace, on obtient:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-2\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right\}(t) \\
&= \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)(t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t) \\
&= \frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}
\end{aligned}$$

d'où, la solution du système 2.2:

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Remarque 2.1.1 *La formule de Heaviside est une méthode plus simple pour retrouver le même résultat obtenu ci-dessus, elle permet de calculer la transformée inverse de Laplace dans le cas d'une fraction rationnelle:*

En effet, après l'application de la transfromée de Laplace à l'équation 2.2, on a trouvé:

$$Y(s) = \left(\frac{2}{s+2} + 1\right)\left(\frac{1}{s^2+4s+3}\right)$$

et par la transformée inverse de Laplace, on est arrivé à:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+2)(s^2+4s+3)}\right\}(t)
\end{aligned}$$

qui est de la forme:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{P(r_i)}{Q'(r_i)}e^{r_i t}\right\}(t)$$

avec r_i *sont les racines du* $Q(s)$*. On pose:*

$$P(s) = s+4, \quad Q(s) = (s+2)(s^2+4s+3) \quad \text{et } Q'(s) = 3s^2+12s+11$$

or, les racines de $Q(s)$ *sont:* $r_1 = -2, \ r_2 = -1, \ r_3 = -3$
Alors, en remplaçant dans la formule de Heaviside, on obtient:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} + \frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{-2t} + \frac{P(-3)}{Q'(-3)}e^{-3t} \\
&= \frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}
\end{aligned}$$

qui est la solution du système 2.2

Exemple 2.1.3 *Soit l'équations différentielle suivante avec ses conditions initiales:*

$$\begin{cases} y''(t) - \frac{5}{2}y'(t) + y(t) = -\frac{5}{2}\sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

On applique la transformée de Laplace à équation du système 2.3, on obtient:

$$\mathcal{L}\{y''(t) - \frac{5}{2}y'(t) + y(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{-\frac{5}{2}\sin t\right\}(s)$$

et par la linéarité et la formule de la dérivée de la transformée de Laplace, on a:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) - \frac{5}{2}\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = -\frac{5}{2}\mathcal{L}\{\sin t\}(s)$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - \frac{5}{2}(sY(s) - y(0)) + Y(s) = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & Y(s)\left(s^2 - \frac{5}{2}s + 1\right) - 2 = -\frac{5}{2(s^2+1)} \\ \Longleftrightarrow \quad & Y(s) = \left(-\frac{5}{2(s^2+1)} + 2\right)\left(\frac{2}{2s^2-5s+2}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & Y(s) = \frac{4s^2-1}{(s^2+1)(2s^2-5s+1)} \end{aligned}$$

par la transformée inverse de Laplace, on obtient:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2-1}{(s^2+1)(2s^2-5s+1)}\right\}(t) \end{aligned}$$

ensuite, on utilise la formule de Heaviside:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{4} \frac{P(r_i)}{Q'(r_i)} e^{r_i t}\right\}(t)$$

avec, les r_i sont les racines de $Q(s)$, données par:

- (i) *et* $(-i)$ *sont les racines de* (s^2+1)
- $\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* (2) *sont les racines de* $(2s^2-5s+2)$

et on a: $P(s) = 4s^2 - 1$ *et* $Q^{'}(s) = 8s^3 - 15s^2 + 8s - 5.$
on remplace les racines dans la formule de Heaviside, on trouve:

$$y(t) = \frac{P(i)}{Q'(i)}e^{it} + \frac{P(-i)}{Q'(-i)}e^{-it} + \frac{P(\frac{1}{2})}{Q'(\frac{1}{2})}e^{t/2} + \frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t}$$

d'où:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-5}{10}e^{it} + \frac{-5}{10}e^{-it} + \frac{0}{-\frac{15}{4}}e^{t/2} + \frac{15}{15}e^{2t} \\ &= \frac{-1}{2}e^{it} + \frac{-1}{2}e^{-it} + e^{2t} \\ &= -\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + e^{2t} \\ &= -\cos t + e^{2t} \end{aligned}$$

solution du sysème 2.3

Exemple 2.1.4 *On étudie l'équation différentielle du second ordre suivante:*

$$y''(t) - 2y'(t) - 2y(t) + 3\int_0^t y(\tau)d\tau = 3 - 3e^t \tag{2.4}$$

avec les conditions initiales:

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1$$

On applique la transformée de Laplace, on obtient:

$$\mathcal{L}\left\{y''(t) - 2y'(t) - 2y(t) + 3\int_0^t y(t)dt\right\}(s) = \mathcal{L}\{3 - 3e^t\}(s)$$

Par les propriétés de la linéarité, la dérivée et la primitive de la transfomée de Laplace, on trouve:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + 3\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(t)dt\right\}(s) = 3\mathcal{L}\{1\}(s) - 3\mathcal{L}\{e^t\}(s)$$

$$\begin{aligned} &\iff (s^2Y(s) - sy(0) - y'0) - 2(sY(s) - y(0)) - 2Y(s) + \frac{3}{s}Y(s) = 3\left(\frac{1}{s}\right) - 3\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &\iff Y(s)\left(s^2 - 2s - 2 + \frac{3}{s}\right) - 1 = \frac{3}{s} - \frac{3}{s-1} \\ &\iff Y(s) = \left(\frac{-3 + s^2 - s}{s(s-1)}\right)\left(\frac{s}{s^3 - 2s^2 - 2s + 3}\right) \\ &\iff Y(s) = \frac{s^2 - s - 3}{(s-1)(s-1)(s^2 - s - 3)} \\ &\iff Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

Pour trouver la fonction originale $y(t)$, on passe par la transformée inverse de Laplace, qui donne:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(t) \\ &= te^t \end{aligned}$$

d'où, la solution du système 2.3:

$$y(t) = te^t$$

2.1.3 Résolution d'équations différentielles du second ordre à coefficients variables

Exemple 2.1.5 *Soit l'équation différentielle ordinaire suivante avec ses conditions initiales:*

$$\begin{cases} ty''(t) + y'(t) + 4ty(t) = 0, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

On applique la transformée de Laplace:

$$\mathcal{L}\{ty''(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) + \mathcal{L}\{4ty(t)\}(s) = 0$$

et par les propriétés de la transfomée de Laplace, en particulier, celles de la dérivation et de la multiplication par t^n*, on obtient:*

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) - 4\frac{dY}{ds}(s) = 0$$

ce qui donne:

$$(s^2+4)\frac{dY}{ds}(s) + sY(s) = 0$$

d'où

$$\frac{dY}{Y}(s) + \frac{sds}{s^2+4} = 0$$

une simple intégration donne:

$$\ln Y(s) + \frac{1}{2}\ln(s^2+4) = C$$

avec

$$Y(s) = \frac{\tilde{C}}{\sqrt{s^2+4}}$$

maintenant, on passe par la transformée inverse de Laplace:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\tilde{C}}{\sqrt{s^2+4}}\}(t) \\ &= \tilde{C}J_0(2t) \end{aligned}$$

or, $J_0(t)$ *est la fonction de Bessel d'ordre zéro, définie par:*

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^24^2} - \frac{t^6}{2^24^26^2} + ...$$

sa transformée de Laplace est donnée par:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{J_0(t)\}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{2^2}\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2^2 4^2}\frac{4!}{s^5} - \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\frac{6!}{s^7} + ... \\
&= \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^6} + ...\right] \\
&= \frac{1}{s}\left[\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}
\end{aligned}$$

dans cet exemple, on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{J_0(2t)\}(s) &= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{(s/a)^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^2+2^2}}
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer $\tilde{C}$, on note que:

$$y(0) = \tilde{C}J_0(0) = \tilde{C} = 3$$

d'où, la solution de notre équation est obtenue et est donnée par:

$$y(t) = 3J_0(2t)$$

2.1.4 Résolution d'équations différentielles avec source discontinue

Exemple 2.1.6 *Soit à résoudre l'équation différentielle suivante:*

$$y''(t) + 4y(t) = f(t) \tag{2.6}$$

avec:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < t < 4 \\ 0 & si\ t > 4 \end{cases}$$

avec les conditions initiales suivantes: $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

D'abord, on exprime la fonction discontinue $f(t)$ à l'aide de la fonction échelon-unité:

$$f(t) = 2 - 2\mathcal{U}(t-4)$$

On applique maintenant la transformée de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''+4y\}(s) = \mathcal{L}\{2-2\mathcal{U}(t-4)\}(s) &\iff (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-4s} \\
&\iff (s^2+4)Y(s) - 2s = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-4s} \\
&\iff Y(s) = \frac{2}{s(s^2+4)} - \frac{2}{s(s^2+4)}e^{-4s} + \frac{2s}{s^2+4}
\end{aligned}$$

en décomposant en fractions partielles les deux premièrs termes, on obtient:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}\right) - \left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}\right)e^{-4s} + \frac{2s}{s^2+4} \\ &= \left(\frac{1}{2s} + \frac{3s}{2(s^2+4)}\right) - \left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}\right)e^{-4s} \end{aligned}$$

Par la transfromée inverse de Laplace, on l'applique facilement sur les deux premièrs termes, ce qui donne:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(2t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}\right)e^{-4s}\right\}(t)$$

et pour le terme qui reste, on utilise la propriété suivante: $\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$, *on pose:*

$$F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)} \;\; et\ a = 4$$

On doit alors évaluer $f(t-4)\mathcal{U}(t-4)$. *On a:*

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

Ce qui implique:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}\right)e^{-4s}\right\}(t) &= f(t-4)\mathcal{U}(t-4) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2(t-4))\right)\mathcal{U}(t-4) \end{aligned}$$

La solution finale de l'équation différentielle est donnée par:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(2t) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t-8)\right)\mathcal{U}(t-4)$$

En considérant la définition de la fonction échelon-unité, cette solution peut aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(2t) & si \quad 0 < t < 4 \\ \frac{3}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t-8) & si \quad t > 4 \end{cases}$$

Exemple 2.1.7 *On considère l'équation différentielle suivante:*

$$2y''(t) + y'(t) + 2y(t) = g(t) \tag{2.7}$$

où

$$g(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; 5 \le t < 20 \\ 0 & si \;\; 0 \le t < 5 \;\; ou \;\; t \ge 20 \end{cases}$$

avec les conditions initiales:

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$$

On peut exprimer la fonction discontinue g plus simplement à l'aide de la fonction de Heaviside:

$$g(t) = \mathcal{U}_5(t) - \mathcal{U}_{20}(t)$$

on applique la transfromée de Laplace:

$$\begin{aligned}
&2\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) + 2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{U}_5(t)\}(s) - \mathcal{L}\{\mathcal{U}_{20}(t)\}(s) \\
\iff \quad & 2(s^2F(s) - sy(0) - y'(0)) + (sF(s) - y(0)) + 2F(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s} \\
\iff \quad & (2s^2 + s + 2)F(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s} \\
\iff \quad & F(s) = e^{-5s}\frac{1}{s(2s^2+s+2)} - e^{-20s}\frac{1}{s(2s^2+s+2)}
\end{aligned}$$

On rappelle que:

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}_c(t)f(t-c)\}(s) = e^{-sc}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

par la transfromée inverse de Laplace, on a alors:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) \\
&= \mathcal{U}_5(t)f(t-5) - \mathcal{U}_{20}(t)f(t-20)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{s(2s^2+s+2)}$*. Il reste donc à déterminer* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(2s^2+s+2)}\right\}(t)$
Par une décomposition en éléments simples, on trouve:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s} + \frac{bs+d}{2s^2+s+2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\right\}(t)
\end{aligned}$$

avec $a = \frac{1}{2}$*,* $b = -1$ *et* $d = -\frac{1}{2}$*, on arrive à:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right\}(t) + \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} \\
&= e^{-\frac{t}{4}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) + \frac{\sqrt{15}}{15}e^{-\frac{t}{4}}\sin\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(2s^2+s+2)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{4}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) + \frac{\sqrt{15}}{15}e^{-\frac{t}{4}}\sin\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right)
\end{aligned}$$

et la solution est donc donnée par l'expression suivante:

$$y(t) = \mathcal{U}_5(t)f(t-5) - \mathcal{U}_{20}(t)f(t-20)$$

2.2 Résolution des systèmes différentiels

2.2.1 Système d'équations différentielles du premier ordre

Exemple 2.2.1 *On considère le système différentiel suivant:*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

avec les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On note:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s), \quad et \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

On applique la transformée de Laplace, et la formule donnant la transformée de Laplace d'une dérivée permet d'écrire:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \end{cases}$$

qui est équivalent au système suivant:

$$\begin{aligned} \begin{cases} sX(s) - x(0) = X(s) - 2Y(s) \\ sY(s) - y(0) = X(s) + Y(s) \end{cases} &\iff \begin{cases} sX(s) - 1 = X(s) - 2Y(s) \\ sY(s) = X(s) + Y(s) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (s-1)X(s) + 2Y(s) = 1 \\ (s-1)Y(s) = X(s) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ((s-1)^2 + 2)X(s) = s - 1 \\ Y(s) = \dfrac{1}{s-1} X(s) \end{cases} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2 + 2} \\ Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2 + 2} \end{cases}$$

Par la transformée inverse de Laplace, on trouve x et y solutions du système 2.8

$$\begin{cases} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = e^t \cos(\sqrt{2}t) \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin(\sqrt{2}t) \end{cases}$$

2.2.2 Système d'équations différentielles du second ordre

Exemple 2.2.2 *Soit le système différentiel du second ordre suivant:*

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) + 3x(t) = 15e^{-t} \\ y''(t) - 4x'(t) + 3y(t) = 15\sin(2t) \end{cases} \tag{2.9}$$

avec les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} x(0) = 35, \ x'(0) = -48 \\ y(0) = 27, \ y'(0) = -55 \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace à chaque équation du système 2.9, on obtient:

$$\begin{cases} s^2X(s) - 35s + 48 + sY(s) - 27 + 3X(s) = \dfrac{15}{s+1} \\ s^2Y(s) - 27s + 55 - 4(sX(s) - 35) + 3Y(s) = \dfrac{30}{s^2+4} \end{cases}$$

qui est équivalent à:

$$\begin{cases} (s^2+3)X(s) + sY(s) = 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} \\ -4sX(s) + (s^2+3)Y(s) = 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} \end{cases} \tag{2.10}$$

On commence par résoudre la première équation du système 2.10, par la méthode de Cramer, on pose:

$$A = \begin{pmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{pmatrix} \qquad \textit{telle que }, det(A) \neq 0$$

alors,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\begin{vmatrix} 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} & s \\ 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{det(A)} \\ &= \frac{35s^3 - 48s^2 + 300s - 63}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{15(s^2+3)}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} - \frac{30s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} \\ &= \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4} \end{aligned}$$

ensuite, on résoud la deuxième équation du système 2.10:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s-21+\dfrac{15}{s+1} \\ \\ -4s & 27s-195+\dfrac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{det(A)} \\
&= \frac{27s^3-55s^2-3s-585}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{60s}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{30(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} \\
&= \frac{30s}{s^2+9} - \frac{60}{s^2+1} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}
\end{aligned}
$$

par la transfomée inverse de Laplace, on obtient:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t \\
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = 30\cos 3t - 60\sin t - 3e^{-t} + \sin 2t
\end{aligned}
$$

2.3 Résolution d'équations intégrales de Volterra

2.3.1 Equation de Volterra de première espèce

Exemple 2.3.1 *On considère l'équation intégrale de Volterra de première espèce suivante:*

$$1 - \cos x = \int_0^x \cos(x-t)u(t)\ dt \tag{2.11}$$

En prenant la trasformée de Laplace du produit de covolution, on obtient:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^x \cos(x-t)u(t)dt\right\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(x)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{u(t)\}(s) \\
&= \frac{s}{s^2+1}U(s)
\end{aligned}
$$

sachant que la transformée de Laplace d'un produit de convolution de deux fonctions, est le produit usuel des transfomées de Laplace de chaque fonction.

maintenant, on prend la transformée de Laplace des deux côtés de (2.11), on obtient:

$$\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}U(s) \Longleftrightarrow \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}U(s)$$

d'où

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

et par la transformée inverse de Laplace, on obtient $u(x) = x$, sachant que $u(x)$ est la solution exacte de l'équation intégrale de Volterra de première espèce.

2.3.2 Equation de Volterra de seconde espèce

Exemple 2.3.2 *On résoud l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce suivante:*

$$g(x) - \int_0^x \sin(x-y)g(y)\ dy = \cos x \tag{2.12}$$

en utilisant la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution, on obtient:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^x \sin(x-y)g(y)\ dy\right\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin x\}(s)\mathcal{L}\{g(x)\}(s)\\ &= \frac{1}{s^2+1}G(s)\end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (2.12), on trouve:

$$G(s) - \frac{1}{s^2+1}G(s) = \frac{s}{s^2+1} \Longleftrightarrow G(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1}$$

ce qui donne

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

par la transformée inverse de Laplace, on obtient:

$$g(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) = 1$$

d'où, $g(x)$ est la solution exacte de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

2.4 Résolution des équations aux dérivées partielles

Exemple 2.4.1 *Soit, à déterminer, la solution $u(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles suivante:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.13}$$

avec les conditions suivantes:

$$u(x,0) = \sin x,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0$$

Soit $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}(s)$ la transformée de Laplace de $u(x,t)$.
On applique la transformée de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}(s)$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st}\ dt \\
&= \lim_{z \to +\infty} \int_0^z \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st}\ dt \\
&= \lim_{z \to +\infty} \left([u(x,t)e^{-st}]_0^z + s \int_0^z u(x,t)e^{-st}\ dt \right) \\
&= s \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-st} dt - u(x,0) \\
&= sU(x,s) - u(x,0)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}(s), \quad v = \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-st}\ dt \\
&= \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} v(x,t)e^{-st}\ dt \\
&= \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-st}\ dt \\
&= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-st}\ dt \\
&= \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2}
\end{aligned}$$

alors, en combinant les deux résultats, on trouve:

$$sU(x,s) - u(x,0) = \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2}$$

d'où:

$$\frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} - sU(x,s) = \sin x \tag{2.14}$$

qui est une équation différentielle du second ordre non homogème. La solution de équation (2.14) est donc de la forme:

$$U(x,s) = U_g(x,s) + U_p(x,s)$$

telles que: U_g *est la solution générale de l'équation homogène et* U_p *est la solution particulière de l'équation non homogène.*

On commence par calculer la solution générale de l'équation homogène:

$$\frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} - sU(x,s) = 0$$

d'après l'équation caractéristique associée $r^2 = s$*, on déduit que* $\sqrt{s}$ *et* $-\sqrt{s}$ *sont les racines réèlles de l'équation homogène, alors la solution est de la forme:*

$$U_g(x,s) = \alpha e^{\sqrt{s}x} + \beta e^{-\sqrt{s}x},$$

où α *et* β *sont des constantes.*

La solution particulière de l'équation non homogène est donnée par:

$$U_p(x,s) = \gamma \sin x,$$

et

$$\frac{d^2U_p(x,s)}{dx^2} = -\gamma \sin x,$$

et on a

$$\frac{d^2U_p(x,s)}{dx^2} - sU_p(x,s) = \sin x \Longrightarrow -\gamma \sin x - s\gamma \sin x = \sin x$$

Donc on déduit que $\gamma = -\dfrac{1}{s+1}$*, alors*

$$U_p(x,s) = -\frac{\sin x}{s+1}$$

La solution de l'équation (2.14) est par conséquent égale à

$$U(x,s) = \alpha e^{\sqrt{s}x} + \beta e^{-\sqrt{s}x} - \frac{\sin x}{s+1}$$

Pour déterminer les constantes α *et* β*, on a d'après les conditions initiales:*

$$U(0,s) = \alpha + \beta$$
$$U(\pi,s) = \alpha e^{\sqrt{s}\pi} + \beta e^{-\sqrt{s}\pi}.$$

d'où

$$U(0,s) = \mathcal{L}\{u(0,t)\}(s) = \int_0^{+\infty} u(0,t)e^{-st}\ dt = 0$$
$$U(\pi,s) = \mathcal{L}\{u(\pi,t)\}(s) = \int_0^{+\infty} u(\pi,t)e^{-st}\ dt = 0$$

donc

$$\alpha + \beta = 0$$
$$\alpha e^{\sqrt{s}\pi} + \beta e^{-\sqrt{s}\pi} = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

La solution de l'équation (2.14) devient donc:

$$U(x,s) = -\frac{\sin x}{s+1}.$$

Finalement, pour obtenir la solution $u(x,t)$ *on appliquons l'inverse de la transformée de Laplace, c'est-à-dire*

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{\sin x}{s+1}\right\}(t),$$

on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{\sin x}{s+1}\right\}(t) = -\sin x\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t) = -e^{-t}\sin x,$$

alors, la solution de notre équation aux dérivées partielles est donnée par:

$$u(x,t) = -e^{-t}\sin x.$$

Chapitre 3

Quelques applications de la transformation de Laplace en physique

Dans ce chapitre, deux contextes physique seront traités, soient le mouvement harmonique (oscillatoire) et les circuits électriques.

3.1 Application de la transformation de Laplace en mécanique

Dans cette section, on s'intéresse à des systèmes mécaniques générant des vibrations ou des mouvements oscillatoires. L'étude de ce type de systèmes est fondamentale en génie, à tout ce qui produit ou contrôle des vibrations (amortisseurs d'autos, par exemple), à des problèmes de rigidité de structures, etc. Pour illustrer ces systèmes, un modèle de base très simple sera étudié, c'est celui de la masse suspendue à un ressort. L'étude de ce modèle, dans son cas le plus général, nous amènera à résoudre l'équation différentielle suivante où y est la position d'un objet et $f(t)$ est une force extérieure appliquée sur celui-ci:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = f(t)$$

où m, b et k sont des constantes positives.

3.1.1 Mouvement harmonique simple

On considère le cas le plus simple, soit celui du mouvement harmonique simple où il n'y a ni force extérieure, ni amortissement.

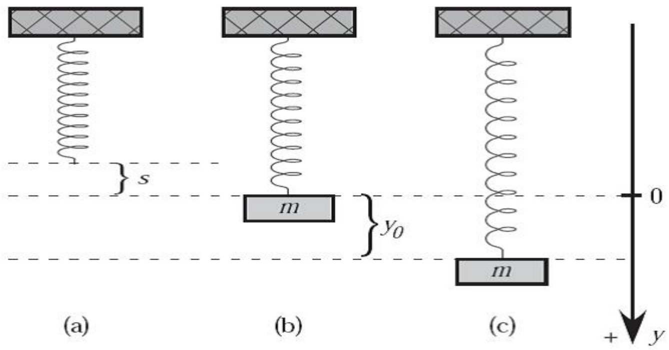

Figure 3.1: Le mouvement harmonique avec un référentiel pour la position

Un ressort de masse négligeable, suspendu à un support fixe, et un objet de masse m, accroché à l'extrémité libre du ressort. La figure ci-dessus illustre cette situation. À gauche, on voit seulement le ressort suspendu. Au milieu, on voit l'objet de masse m suspendu au bout du ressort, qui s'étire alors d'une longueur s, et on considère le tout en équilibre, donc sans mouvement. Le référentiel de y tracé à droite de la figure, représente la position de l'objet, avec $y = 0$ la position d'équilibre. On remarque que y représente également l'étirement (si positif) ou la compression (si négatif) du ressort par rapport à sa valeur à l'équilibre.

On applique la deuxième loi de Newton: $F = ma$ avec:

- m est la masse de l'objet
- F est la somme algébrique des forces s'exerçant sur l'objet
- a est l'accélération de l'objet

y représente la position de l'objet par rapport au point d'équilibre, on obtient alors l'équation différentielle suivante:

$$ma = F \Longleftrightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \tag{3.1}$$

On détermine expérimentalement la valeur de la constante k, quand on suspend un objet au ressort et que celui-ci s'étire d'une longueur s. Au repos, deux forces opposées sont en équilibre, soient, le poids (qu'on note P et on sait que $P = mg$) dirigé vers le bas et la tension du ressort F_R dirigée vers le haut. La somme des 2 forces est nulle puisque l'objet est au repos. On a donc:

$$\begin{aligned} P + F_R = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad mg - ks = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad mg = ks \\ &\Longleftrightarrow \quad k = \frac{mg}{s} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le référentiel est défini avec $y = 0$ au point d'équilibre, mais après avoir suspendu l'objet au ressort, et pour une position quelconque y pendant le mouvement oscillatoire de l'objet en mouvement (où la direction positive étant vers le bas), le ressort est en réalité étiré d'une longueur de $y+s$ par rapport à sa longueur initiale. L'application de la deuxième loi de Newton nous donne alors:

$$\begin{aligned} ma = F = P + F_R \quad &\Longrightarrow \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k(y+s) \\ &\Longrightarrow \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ky - ks \end{aligned}$$

Cependant, comme on a dans le cas d'objet en repos que, $mg - ks = 0$, on retrouve alors notre résultat pour le mouvement harmonique simple.

La vitesse de l'objet est bien sûr donnée par:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = y'(t)$$

qui est positive désignant un mouvement vers le bas ou négative désignant un mouvement vers le haut. On considère que la force du ressort est la seule agissant sur l'objet et qu'il n'y a pas de mouvement avant $t = 0$, le mouvement débutant à ce moment sous l'effet d'une position initiale $y_0 = y(0)$, et d'une vitesse initiale $v_0 = v(0) = y'(0)$.

Exemple 3.1.1 *Maintenant, on considère un objet ayant une masse de* $200g$ *est suspendu à un ressort qui s'étire alors de* $10cm$*. On descend l'objet* $50cm$ *sous le point d'équilibre et on le relâche.*
Questions:

- *Déterminer les équations de la position et de la vitesse de cet objet*
- *Où sera l'objet après 2 secondes?*
- *est-ce que l'objet monte ou descend ?*

D'abord, on doit utiliser les unités de base du système internationnal SI:

- *Les forces en Newtons (N)*
- *Les longueurs en Mètres (m)*
- *Les masses en kilogrammes (kg)*
- *Le temps en secondes (s)*

On utilise $g = 10m/s^2$ *comme valeur pour l'acceleration due à l'attraction gravitationnelle.*

Dans cet exemple, on a: $m = \frac{1}{5}kg$*, l'étirement initial* $s = \frac{1}{10}m$*, la position initiale* $y(0) = \frac{1}{2}m$ *et une vitesse initiale* $y'(0) = 0m/s$ *puisqu'on relâche l'objet à* $t = 0$.

On peut déterminer la constante k du ressort en utilisant l'équation 3.2, on obtient

$$mg = ks \Longrightarrow k = 20$$

L'équation différentielle de ce mouvement est donnée par:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 100y = 0$$

avec:

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad et\ y'(0) = 0$$

On résoud l'équation par la transfomée de Laplace, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\frac{d^2y}{dt^2} + 100y\}(s) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad s^2Y(s) - \frac{1}{2}s + 100Y(s) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Y(s)(s^2+100) = \frac{1}{2}s \\ &\Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+100} \end{aligned}$$

et par la transformée inverse de Laplace, on obtient la solution $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+100}\}(t) = \frac{1}{2}\cos(10t)$$

En évaluant les fonctions position et vitesse pour $t = 2s$, on trouve

$$y(2) = 0,204041m \quad \quad et \quad \quad v(2) = -4,56473m/s$$

Après 2 secondes, l'objet est $20,4cm$ sous le point d'équilibre et il remonte à une vitesse de $4,56m/s$. On note également que l'accélération de l'objet est donnée par:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -50\cos(10t)$$

À $t = 2s$, on a une accélération de $a(2) = -20,4m/s^2$. La vitesse et l'accélération étant toutes deux négatives, on peut conclure que la grandeur de la vitesse augmente à $t = 2s$. On a le graphe de la solution $y(t)$:

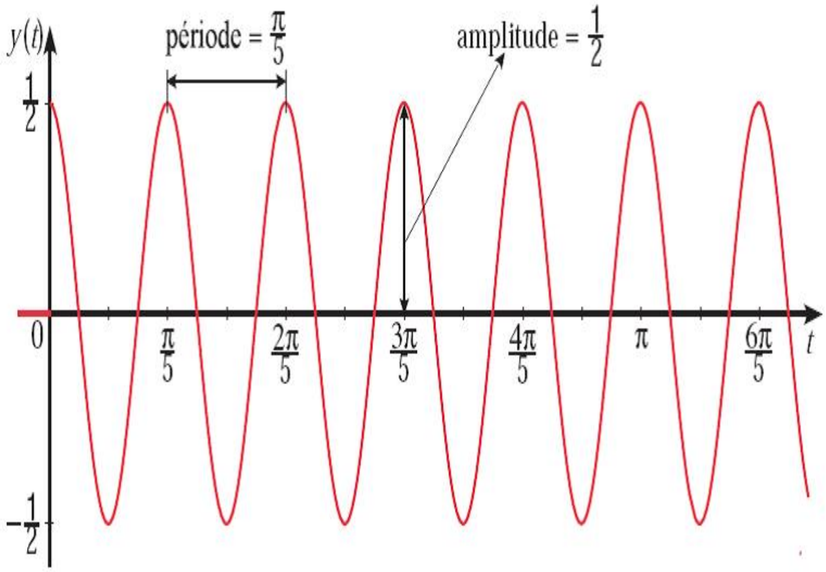

Figure 3.2: Graphe de la solution

3.1.2 Mouvement harmonique amorti

Le mouvement harmonique simple n'est pas très réaliste, car on sait que tout mouvement oscillant finit par s'arrêter. Naturellement, la résistance de l'air devrait donner un amortissement dans le mouvement, une diminution dans l'amplitude des oscillations et un retour éventuel au point d'équilibre pour s'arrêter.

On va maintenant considérer qu'en plus de la force k, il y aura une force d'amortissement qui s'applique sur l'objet en mouvement. De par sa nature, cette force s'oppose toujours au mouvement, que l'objet monte ou descende.

Cette nouvelle force, notée F_a, est toujours dirigée à l'opposé du mouvement. On considère également que celle-ci est proportionnelle à la vitesse, on a:

$$F_a = -bv \Longrightarrow F_a = -b\frac{dy}{dt}, \qquad \text{avec } b > 0$$

Si on remplace cette nouvelle composante à l'équation 3.1, on obtient:

$$ma = F \Longrightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0 \tag{3.3}$$

où b est la constante d'amortissement.

Exemples 3.1.1 *On considère un objet de masse* $m = \frac{1}{5}kg$ *suspendu à un ressort ayant une constante (positive)* $k = 20kg/s^2$, *une position initiale* $y(0) = \frac{1}{2}m$ *et une vitesse initiale de* $4m/s$ *vers le bas, donc* $v(0) = y'(0) = 4m/s$.

La vitesse initiale est positive puisqu'elle est dirigée vers le bas, qui est la direction positive de la position. On ajoute à cette situation une force d'amortissement, avec un coefficient d'amortissement $b = \frac{12}{5}kg/s$.

On a l'équation différentielle suivante:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{12}{5}\frac{dy}{dt} + 20y = 0$$

qui peut être écrite sous la forme:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 100y = 0$$

avec:

$$y(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et } y'(0) = 4$$

par la transfromée de Laplace et la formule de Heaviside, on obtient la solution suivante:

$$y(t) = e^{-6t}\left(\frac{1}{2}\cos(8t) + \frac{7}{8}\sin(8t)\right)$$

La présence du terme e^{-6t} *nous confirme que la valeur de* y *retourne à* 0 *rapidement, ce qui est normal d'un point de vue physique. On remarque aussi la présence de fonctions trigonométriques, veut dire que l'objet devrait osciller de chaque côté du point d'équilibre. Si on diminue la force d'amortissement, on pourrait s'attendre à un retour plus lent au point d'équilibre avec plus d'oscillations. Par exemple, Si on reprenait nos données mais avec un coefficient d'amortissement deux fois plus petit, donc* $b = \frac{6}{5}kg/s$, *on trouverait la solution suivante:*

$$y(t) = 0,763e^{-3t}\sin(9.539t + 0.714)$$

Dans cette dernière réponse, on constate un terme amortisseur e^{-3t} *plus faible que dans la première réponse. La figure ci-dessous illustre les deux fonctions position obtenues:*

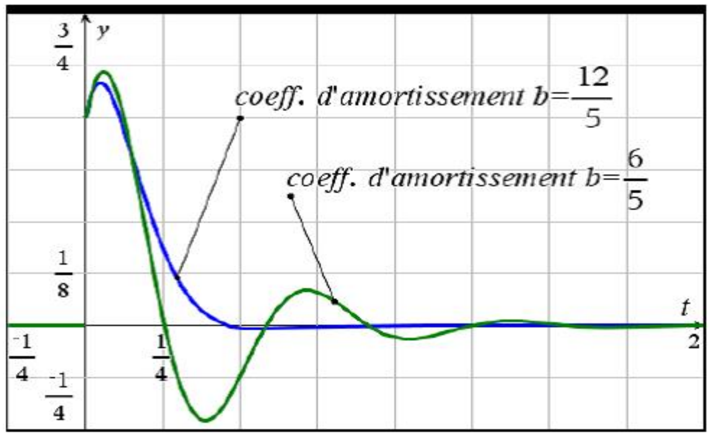

Figure 3.3: Graphe des solutions obtenues

3.2 Application de la transformation de Laplace en éléctronique

La transformée de Laplace a gagné sa popularité grâce à Oliver Heaviside, un ingénieur électricien, qui l'a utilisée dans le domaine de l'électronique (une branche de la physique appliquée, qui s'intéresse aux phénomènes de conduction électrique et aux équipements associés). En utilisant la transformée de Laplace, on peut analyser un circuit électrique pour découvrir sa capacité maximale et déterminer s'il y a un problème avec le circuit. Cela est essentiel pour les ingénieurs, en particulier les ingénieurs électriciens, qui doivent s'assurer que les machines fonctionnent correctement.

3.2.1 Circuit RLC simple

On a le schéma d'un circuit RLC suivant:

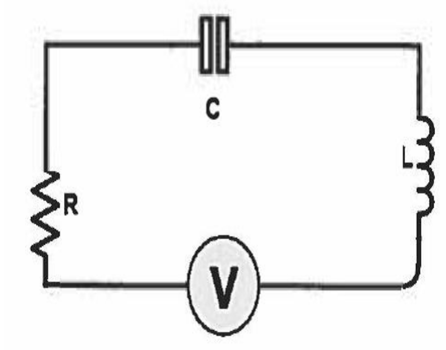

Figure 3.4: Circuit RLC simple

On commence par identifier les différents symboles du circuit et leur signification. Il serait également utile d'identifier ce qui est utilisé pour mesurer chacun de ces différents éléments du circuit, afin de pouvoir s'y référer ultérieurement.

Les symboles sont les suivants:

- R signifie résistance et se mesure en ohms (Ω).
- L signifie bobine (ou inducteur) et se mesure en henrys (H).
- C signifie condensateur et se mesure en farads (F).
- V signifie générateur ou batterie et se mesure en volts (V).
  Il convient de noter qu'un autre symbole couramment utilisé pour V est E lors de la réalisation de schémas de circuits.

On peut mesurer les charges des condensateurs et les courants en les modélisant par des fonctions du temps. L'équation utilisée pour modéliser les circuits est la suivante:

$$V(t) = RI + L^{'} + \frac{Q}{C} \tag{3.4}$$

Q est la variable utilisée pour représenter la charge d'un circuit. L'équation 3.4 s'explique par le fait que la chute de tension dans un circuit[1] est modélisée par les résultats suivants:

- La chute de tension aux bornes d'une résistance d'un circuit est modélisée par RI avec $I = \dfrac{dQ}{dt}$.

[1]Dans un circuit électrique, une chute de tension se produit normalement lorsqu'un courant traverse le câble. Elle est liée à la résistance ou à l'impédance du flux de courant avec des éléments passifs dans les circuits, y compris les câbles, les contacts et les connecteurs affectant le niveau de chute de tension.

- Aux bornes d'un inducteur, on a $L\frac{dI}{dt}$, et comme on sait que $I = \frac{dQ}{dt}$, on peut la simplifier pour obtenir $L\frac{d^2Q}{dt^2}$, qui peut ensuite être réduite encore plus à LI'.
- À travers un condensateur, on a $\frac{Q}{C}$
- Dans un générateur, on a $-V$

En prenant la transformée de Laplace de cette équation, après avoir introduit les valeurs des différents éléments du circuit, et par la transformée inverse du résultat des calculs, on peut obtenir une solution finale de notre circuit RLC.

Remarque 3.2.1 *Il est nécessaire de noter qu'on a utilisé les lois de Kirchhoff pour obtenir l'équation 3.4, on a:*

1. *La loi des noeuds stipule que la somme des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui sortent du même nœud*
2. *La loi des mailles qui est la deuxième loi de Kirchhoff, stipulant que dans une maille d'un réseau électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle*

Ces deux lois sont extrêmement importantes pour l'analyse des circuits éléctriques, car sans elles, l'équation 3.4 qu'on a utilisé pour modéliser le circuit ne fonctionnerait pas.

Maintenant, on montre comment la transformée de Laplace est utilisée dans cet exemple introductif, en donnant des valeurs aux composants du circuit étudié:

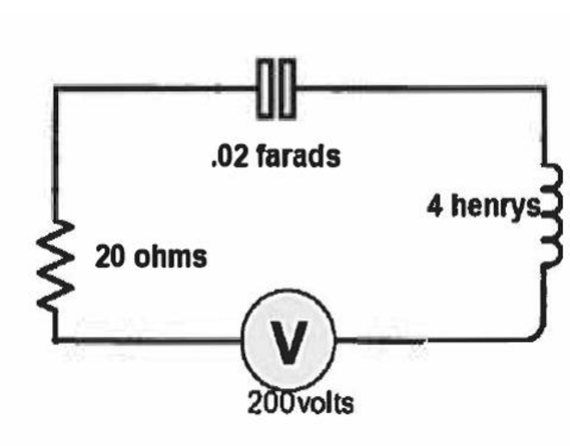

Figure 3.5: Circuit RLC avec valeurs de ses composants étiquetés

D'après le schéma ci-dessus, notre circuit comporte une inducteur de 4 henrys, une résistance de 20 ohms et un condensateur de 0,02 farads. En ce qui concerne la charge et le courant, on fixe une condition pour que la charge du condensateur et le courant dans le circuit soient nuls à $t = 0$. On cherche à trouver la charge du condensateur à tout moment t, où V est égal à 200 volts.

En remplaçant ces valeurs dans l'equation 3.4, on obtient:

$$4\frac{dI}{dt} + 20I + \frac{1}{0.02}Q = 200 \tag{3.5}$$

et puisque $I = \dfrac{dQ}{dt}$, l'équation 3.5 devient:

$$4\frac{d^2Q}{dt^2} + 20\frac{dQ}{dt} + 50Q = 200 \tag{3.6}$$

en raison de notre charge à $t = 0$ étant nulle, il est important de prendre en compte les conditions initiales suivantes:

$$Q(0) = 0, \text{ et } Q'(0) = 0$$

On note que:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = Q'', \text{ et } \frac{dQ}{d} = Q'$$

L'équation 3.8 peut être réécrite comme suit:

$$Q'' + 5Q' + \frac{25}{2}Q = 50 \tag{3.7}$$

c'est une équation différentielle ordinaire du second ordre. Par la transformée de Laplace, on obtient:

$$\mathcal{L}Q'' + 5Q' + \frac{25}{2}Q = \mathcal{L}50$$

$$\Longrightarrow (s^2q - sQ(0) - Q'(0)) + 5(sq - Q(0)) + \frac{25}{2}q = \frac{50}{s} \tag{3.8}$$

et par les conditions initiales, on a la simplification suivante:

$$q(s^2 + 5s + 12.5) = \frac{50}{s}$$

d'où

$$q = \frac{50}{s(s^2 + 5s + 12.5)}$$

L'objectif mainetant est de prendre la transformée de Laplace inverse afin de retrouver un résultat dans le domaine temporel d'origine.

Puisqu'on ne sait pas qu'elle serait la fonction de la transformée inverse de la fonction obtenue, on doit la simplifier. Pour commencer, on fait recours à la decomposition en éléments simples, ce qui permet d'obtenir:

$$\frac{50}{s(s^2 + 5s + 12.5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 5s + 12.5} \tag{3.9}$$

alors, on a:

$$A = 4, \quad B = -4, \quad \text{et } C = -20$$

en remplaçant leur valeurs dans l'équation 3.9, on obtient:

$$\frac{50}{s(s^2 + 5s + 12.5)} = \frac{4}{s} + \frac{-4s - 20}{s^2 + 5s + 12.5}$$

À partir de là, on simplifie le résultat pour l'adapter à la forme des fonctions du tableau des transformées de Laplace.

$$\frac{50}{s(s^2 + 5s + 12.5)} = \frac{4}{s} - 4\frac{s + \frac{5}{2}}{(s + \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}} - 10\frac{1}{(s + \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}}$$

L'équation correspondant désormais au tableau des transformées de Laplace, nous pouvons prendre la transformée inverse:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} - 4\frac{s + \frac{5}{2}}{(s + \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}} - 10\frac{1}{(s + \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}}\right\} = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t}\cos(\frac{5}{2}t) - 4e^{-\frac{5}{2}t}\sin(\frac{5}{2}t)$$

Ainsi, la charge à tout moment t, avec $t > 0$, est l'équation ci-dessus. On peut voir à quoi cela ressemble d'après le graphe ci-dessous:

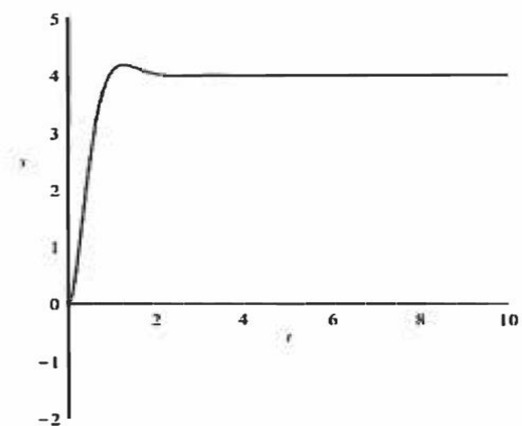

Figure 3.6: Graphe de la solution

Nous pouvons voir sur ce graphe que la charge atteint son maximum un peu après $4C$ et qu'elle se stabilise à $4C$.

3.2.2 Circuit RLC avec deux branches

Après avoir donné un exemple de circuit électrique plutôt basique, on va proposer un autre un peu plus complexe avec plusieurs branches pour montrer comment la transformée de Laplace est utilisée dans un cas plus avancé.

On a un circuit avec deux branches différentes On détermine d'abord quelle est l'intensité du courant dans chacun des ces circuits. Grâce à la deuxième loi de Kirchhoff, on sait que la somme des tensions dans un circuit fermé est nulle, et on peut voir que nos circuits sont fermés d'après la figure ci-dessous. On note par Q le courant autour de la partie supérieure du circuit, puis de Q'et Q'' les courants respectifs qui se divisent au point de jonction, de sorte que:

$$Q = Q' + Q''$$

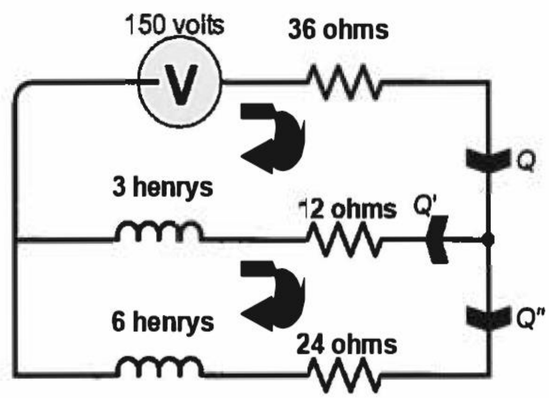

Figure 3.7: Circuit RLC avec deux branches

Il est également important de poser les conditions initiales suivantes:

$$Q(0) = 0, \text{ et } Q'(0) = 0$$

On analyse ce circuit. Pour ce faire, on applique la deuxième loi de Kirchhoff à ces deux branches pour obtenir les équations suivantes:

$$-12Q' - 3\frac{dQ'}{dt} + 6\frac{dQ''}{dt} + 24Q'' = 0$$

$$36Q + 3\frac{dQ'}{dt} + 12Q' = 150$$

en divisant chaque équation par 3, on obtient:

$$-4Q' - \frac{dQ'}{dt} + 2\frac{dQ''}{dt} + 8Q'' = 0$$

$$12Q + \frac{dQ'}{dt} + 4Q' = 50$$

On résoud d'abord la première équation:

$$\mathcal{L}(-4Q' - \frac{dQ'}{dt} + 2\frac{dQ''}{dt} + 8Q'') = 0$$

qui donne:

$$\begin{aligned} -4q' - (sq' - Q'(0)) + 2(sq'' - Q(0)) + 8q'' &= 4q' - sq' + 2sq + 8q &(3.10)\\ &= (s+4)q' - (2s+8)q'' &(3.11)\end{aligned}$$

d'où

$$(s+4)q' = (2s+8)q'' \Longleftrightarrow q' = 2q''$$

On passe à la deuxième équation, en appliquant la deuxième loi de Kirchhoff, on peut la modifier pour obtenir ce qui suit:

$$\frac{dQ'}{dt} + 8Q' + 6Q'' = 50$$

La raison en est de pouvoir uiliser la transformée de Laplace:

$$\mathcal{L}(\frac{dQ'}{dt} + 8Q' + 6Q'') = \mathcal{L}(50)$$

d'où

$$(sq' - Q'(0)) + 8q' + 6q'' = \frac{50}{s}$$

et par les conditions initiales, l'équation devient:

$$(s+8)q' + 6q'' = \frac{50}{s}$$

Puisque $q' = 2q''$, on obtient:

$$q''(10s+14) = \frac{50}{s} \Longleftrightarrow q'' = \frac{50}{s(10s+14)}$$

par la transformée de Laplace inverse, on arrive à:

$$\mathcal{L}^{-1}(q'') = \mathcal{L}^{-1}(\frac{50}{s(10s+14)})$$

d'où

$$Q'' = \frac{25}{7} - e^{\frac{7}{5}t}\frac{25}{7}$$

on déduit que:

$$Q' = \frac{50}{7} - 2e^{\frac{7}{5}t}\frac{25}{7}$$

On rappelle qu'on a $Q = Q' + Q''$, il s'ensuit que:

$$Q = \frac{25}{7} - e^{\frac{7}{5}t}\frac{25}{7} + \frac{50}{7} - 2e^{\frac{7}{5}t}\frac{25}{7}$$

alors

$$Q = \frac{75}{7} - 3e^{\frac{7}{5}t}\frac{25}{7}$$

À tout moment t, avec $t > 0$, la tension du circuit aura la valeur indiquée par l'équation donnée par Q. Le graphe suivant permet de bien comprendre ce que cela signifie:

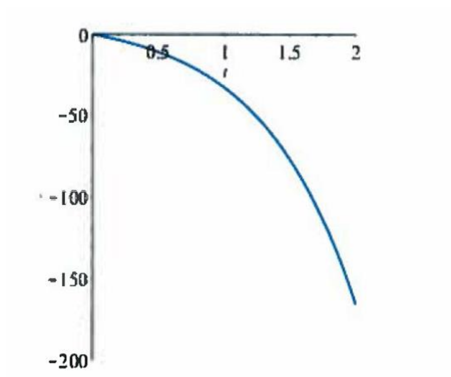

Figure 3.8: Graphe de la solution

Ce graphe montre que la charge diminue de manière exponentielle et qu'elle continuera à baisser.

*

Annexe A

Tableau de transfomées de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n (n entier positif)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t^n,\, n\in\mathbb{R},\, n>-1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$\frac{df}{dt}=f'(t)$	$s\,F(s)-f(0)$
$\frac{d^2f}{dt^2}=f''(t)$	$s^2F(s)-s\,f(0)-f'(0)$
$\frac{d^nf}{dt^n}=f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$g(t)\,u(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}$

$F(s)$	$f(t)$
$e^{-as}F(s)$	$f(t-a)u(t-a)$
$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$
$F(s)\cdot G(s)$	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = f(t)*g(t) = (f*g)(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$
$\frac{1}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t)$
$\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t))$
$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(t\sin(\omega t))$

Conclusion

La transformée de Laplace a rapidement gagné une grande popularité et s'est imposée comme un élément indispensable pour ceux qui se destinent aux mathématiques, à l'ingénierie, à la physique et à d'autres sciences. Elle fait désormais partie intégrante de la science moderne et est utilisée dans un grand nombre de disciplines, qu'elle soit utilisée dans l'analyse des circuits électriques, en mécanique, dans le traitement des signaux ou même pour la modélisation de la désintégration radioactive en physique nucléaire. Ses applications sont nombreuses, et sans elle, plusieurs de nos avancées technologiques auraient été freinées.

Bibliography

[1] COCAGNE, Andre. Applications of Laplace transform. 2017.

[2] LESFARI, Ahmed, distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace. Cours et exercices, 2012.

[3] MARTINEZ-MAURE, Yves. La transformation de Laplace et en Z. 2011.

[4] PICARD, GILLES. Equations Différentielles. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[5] POWERS, David L. Boundary value problems: and partial differential equations. Academic Press, 2009.

[6] SAWANT, L. S. Applications of Laplace transform in engineering fields. International Research Journal of Engineering and Technology, 2018, vol. 5, no 5, p. 3100-3105.

[7] SPIEGEL, Murray R. Laplace transforms. New York: McGraw-Hill, 1965.