

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Mathématique et informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématique et informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations différentielles et modélisation
Thème

**Dynamique d'un modèle Lotka-Volterra avec deux
prédateurs et une proie et un retard**

Présenté Par :

1) Mr Ghezzal Kamel Nasr Allah

Devant le jury composé de :

Dr. Beniani abderrahmane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. Hariri Mohamed	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Dr. Bentout Soufiane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2022/2023

Dédicase

Je dédie ce ce mémoire :

A

L'âme de mon père, ta sagesse et ta passion pour la connaissance ont été une source d'inspiration constante. Même si tu n'es plus physiquement parmi nous, je ressens ta présence et ton soutien dans chaque mot que j'écris.

A

Ma mère, tu es la force qui nourri mes rêves et m'a encouragé à poursuivre mes ambitions. Ta bienveillance, tes encouragement ont été mon refuge tout au long de parcours académique exigeant.

A

Mon frère, tu as été mon compagnon de route et mon confident. Je dédie ce mémoire à notre lien indéfectible et la force de notre relation fraternelle.

A

Ma grand-mère, ta sagesse ancestrale et ton amour inconditionnel ont été une source d'inspiration constante. Tes conseils précieux ont façonné ma vision du monde. Je t'adresse cette dédicace avec une profonde gratitude et un amour fini.

A

Mes cousins *Amine* et *Mehdi*, vous avez été mes compagnons d'aventure, mes sources de joie et mes piliers de soutien. Vos encouragement, vos conseils et votre présence chaleureuse ont été inestimables.

Kamel

Remerciements

Tout d'abord je remercie **ALLAH** qui m'a donné la force et volonté pour accomplir ce modeste travail.

Je souhaite également adresser mes remerciements à mon encadreur *Mr. Bentout Sofiane*, pour ses conseils éclairés et ses orientations. Sa passion pour le sujet et sa disponibilité constante.

Je tiens à remercier *Mr. Beniani Abderrahmane*, pour l'honneur qu'il me fait en présidant dont le jury de ce mémoire.

Je tien aussi à remercier *Mr. Hariri Mohamed* d'avoir accepter d'examiner ce mémoire.

Mes remerciements aussi à mes amies qui ont été à mes cotés, de m'avoir encouragé.

Enfin, je voudrais remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont été un soutien moral dans les moments où j'en avais le plus besoin.

Table des matières

1 PRÉLIMINAIRES	6
1.1 Équation différentielles ordinaires	6
1.2 Cauchy-Lipshitz	7
1.3 Point d'équilibre	7
1.3.1 Stabilité des points d'équilibre	7
1.4 Stabilité locale des système non linéaire	8
1.5 Critère de Routh-Hurwitz	9
1.6 Fonction de Lyapounov	10
1.7 La compactification de Poincaré	12
1.8 Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf	13
2 Modèle Lotka-Volterra avec deux prédateurs et une proie	14
2.1 Dynamique globale du système (2.1) avec des ressources limitées pour les proies	15
2.2 Existence et stabilité des équilibres	16
2.3 Dynamique globale	19
3 Modèle Lotka-Volterra avec deux prédateurs et une proie et un retard	30
3.1 Existence et stabilité locale des équilibres	31
3.2 Comportement asymptotique en l'absence d'équilibres positifs	35

Introduction Général

L'étude de la dynamique des systèmes prédateur-proie trouve son origine dans les travaux de Lotka et Volterra, qui ont envisagé un modèle pour un prédateur et une seule proie dans un environnement constant et uniforme, connu maintenant comme modèle standard Lotka-Volterra. Dans ce modèle, les populations de prédateurs et les proies oscillent en permanence pour presque toutes les conditions initiales positives. Dans le même travail, Volterra a également soutenu que la coexistence de deux prédateurs ou plus en compétition pour moins de ressources de proies est impossible ; cette affirmation s'appelait le principe de concurrence exclusion.

Hsu et Hubbell [8] ont étudié les modèles Lotka-Volterra à 4 dimensions avec deux prédateurs concurrents partageant deux espèces de proies sous l'hypothèse que les espèces de proies étaient capables de s'auto-reproduire et de se régénérer logistiquement en l'absence de consommation, et ils ont obtenu des conditions dans lesquelles les prédateurs concurrents survivre ou mourir. Leurs résultats ont révélé que le principe d'exclusion compétitive était vrai pour certaines valeurs de paramètres dans le modèle Lotka-Volterra avec deux concurrents prédateurs partageant deux espèces de proies. c'était noter que la réponse fonctionnelle du prédateur à la densité des proies est linéaire dans le modèle Lotka – Volterra. Dans le cas où le prédateur la réponse fonctionnelle à la densité de proies est non linéaire, le principe d'exclusion compétitive a été réexaminé par Koch dans via la simulation numérique. Cela a montré que la coexistence de deux prédateurs en compétition pour une seule espèce de proie était en effet possible lorsque la réponse fonctionnelle des prédateurs à la densité des proies a été supposée selon à la cinétique de Michaelis-Menten, et une telle coexistence s'est produite le long de ce qui semblait être une orbite périodique dans l'octant positif de \mathbb{R}^3 plutôt qu'un équilibre.

Hsu Hubbell et Waltman dans [6], [7] ont étudié le problème de concurrence des deux prédateurs pour un modèle de proie unique avec une réponse fonctionnelle non linéaire. En combinant analyse théorique avec des simulations numériques, ils ont obtenu le paramètre étendue de la validité du principe d'exclusion concurrentielle et offrait un large gamme de valeurs de paramètres pour la coexistence de deux prédateurs numériquement. Suivant ces observations numériques, il y a eu plusieurs développements théoriques importants pour justifier

la coexistence de deux prédateurs en compétition pour une seule espèce de proie modèle avec des réponses fonctionnelles non linéaires - par exemple, des techniques de bifurcation et arguments de perturbation singuliers. La bifurcation de Hopf et la bifurcation périodique de l'orbite ont été appliquée à ce modèle pour obtenir une orbite périodique stable dans l'octant positif de \mathbb{R}^3 .

Cette orbite périodique stable bifurque à partir d'un cycle limite prédateur-proie bidimensionnel dans le plan, ce qui implique la coexistence de deux prédateurs concurrents. Muratori et Rinaldi [12] dans ont d'abord considéré problème par des arguments de perturbation singuliers. Utilisation des techniques des systèmes dynamiques et la théorie des perturbations géométriques singulières, Liu, Xiao et Yi [11] ont donné des conditions qui garantissent la coexistence de deux prédateurs pour le modèle via des analyse.

Il est bien connu que la concurrence pour les ressources est courante dans la nature et la société. La dynamique globale du modèle concurrentiel des ressources est importante pour comprendre du mécanisme de la sélection naturelle : le principe d'exclusion compétitive ou la coexistence d'espèces concurrentes.

Ce mémoire est composé de trois chapitre :

Le premier chapitre porte sur les préliminaires, qui rappellent les équations différentielles ordinaires ainsi que quelques définitions et théorèmes utilisés dans la suite.

Le deuxième chapitre traite du modèle de Lotka Volterra en trois dimension (deux prédateurs et une proie. Nous avons étudié la stabilité des points d'équilibres ainsi que la dynamique globale du modèle.

Le troisième chapitre porte également sur le même modèle mais cette fois avec un retard.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre on va donner des théorèmes et des définitions qu'on a utilisés dans ce mémoire.

1.1 Équation différentielles ordinaires

Définition 1 Les équations différentielles ordinaires (EDO) sont des équations mathématiques qui impliquent une fonction inconnue et sa ou ses dérivées.

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut s'écrire sous la forme :

$$F(t, y, y', \dots, y^n) = 0,$$

où F est une fonction de $n+2$ variables. Nous ne considérons que le cas où t et y sont à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 2 Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , J un ouvert de \mathbb{R}^n avec $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ un élément de \mathbb{R}^n . On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à une fonction $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue le système suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec y_0 la condition initiale à l'instant t_0 . Pour tout $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on note $f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y), \dots, f_n(t, y))$ telle que f_i est continue avec $i = 1 \dots n$.

Remarque 1 Si f ne dépend pas de t , l'équation (1.1) est dite autonome, si non on dit que l'équation est non-autonome.

Un système différentielle autonome s'écrit comme se suit :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Avec $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J \in \mathbb{R}^n$ et $y_0 \in J$.

Définition 3 (*Problème de Cauchy*)

On appelle problème de Cauchy, le problème de trouver un intervalle I tel que $t_0 \in I$ et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0. & y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2 Cauchy-Lipshitz

Le théorème de Cauchy-Lipshitz donne un résultat d'existence et d'unicité de solution pour des équations différentielles.

Théorème 1 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, supposé lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in K, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$$\| f(t, y) - f(t, z) \| \leq k \| y - z \| .$$

Alors, pour tous $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy (1.3) admet une unique solution.

1.3 Point d'équilibre

Soit l'équation autonome suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Définition 4 on dit que x^* est un point d'équilibre est l'origine de (1.4) si $f(x^*) = 0$.

Avec $x(t_0) = x^*$ alors $x(t) = x^*$, $t \geq t_0$.

1.3.1 Stabilité des points d'équilibre

Définition 5 1. L'équilibre x^* est dite stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$, telle que

$$\| x - x_0 \| < \delta, \Rightarrow \forall t > 0 \| x(t) - x_0 \| < \epsilon.$$

2. On dit que x^* est un équilibre asymptotiquement stable s'il est stable et :

i La condition de stabilité simple est vérifiée.

ii

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_0\| = 0. \quad r > 0.$$

3. On dit que x^* est un équilibre instable s'il n'est pas stable.

4. L'équilibre x^* est dit exponentiellement stable s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$\|x(t)\| \leq Mx_0e^{-\alpha t} = Ke^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0, K = Mx_0$$

1.4 Stabilité locale des système non linéaire

Soit le système non linéaire suivant [\[1\]](#)

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (1.5)$$

Où $f, g \in C^1(D)$, D ouvert de \mathbb{R}^2 .

Supposons que (x_0, y_0) est un point d'équilibre c'est à dire $f(x_0, y_0) = 0$ et $g(x_0, y_0) = 0$, en utilisant le développement de Taylor du premier ordre pour f et g pour linearisé le système [\(1.5\)](#) pur savoir la nature du point d'équilibre.

La linéarisation du système [\(1.5\)](#) autour de l'équilibre (x_0, y_0) est donnée par la matrice jacobienne suivante :

$$J_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

L'étude du portrait de phase s'est faite suite à l'étude de valeur propre tel que :

$$\det J_{(x_0, y_0)} = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{et} \quad \text{tr} J_{(x_0, y_0)} = \lambda_1 + \lambda_2,$$

avec les deux valeurs propres vérifient l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \text{tr} J_{(x_0, y_0)} \lambda + \det J_{(x_0, y_0)} = 0.$$

La nature des points d'équilibre dépend du signe de Δ qui est donnée par :

$$\text{tr}^2 J_{(x_0, y_0)} - 4 \det J_{(x_0, y_0)} = 0,$$

alors on a trois cas :

1. $\Delta > 0$: on a deux valeurs propres réelles

- Si $\det J_{(x_0, y_0)} < 0$ alors les deux valeurs propres sont de signes opposées, donc le point d'équilibre est un point selle (instable).
 - Si $\det J_{(x_0, y_0)} > 0$ et Si $\text{tr} J_{(x_0, y_0)} < 0$ alors les deux valeurs propres sont de signes négatifs, donc le point d'équilibre est un noeud stable.
 - Si $\det J_{(x_0, y_0)} > 0$ et Si $\text{tr} J_{(x_0, y_0)} > 0$ alors les deux valeurs propres sont de signes positifs, donc le point d'équilibre est un noeud instable.
2. $\Delta = 0$: on a une seule valeur propre double.
- Si $\text{tr} J_{(x_0, y_0)} > 0$, alors on a un noeud dégénéré instable.
 - Si $\text{tr} J_{(x_0, y_0)} < 0$, alors on a un noeud dégénéré stable.
3. $\Delta < 0$: alors on a deux valeurs propres complexes $\lambda_{1,2} = \alpha + \beta i$ alors :

$$\begin{cases} \det(M) = \alpha^2 - \beta^2 > 0, \\ \text{tr}(M) = 2\alpha. \end{cases}$$

- Si $\text{tr} J_{(x_0, y_0)} > 0$, alors on a un foyer dégénéré instable.
- Si $\text{tr} J_{(x_0, y_0)} < 0$, alors on a un foyer dégénéré stable.
- Si $\text{tr} J_{(x_0, y_0)} = 0$, alors on a un centre.

1.5 Critère de Routh-Hurwitz

Une méthode algébrique basée sur le calcul de déterminants particuliers dits déterminants de Routh.

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

tel que A est une matrice carrée de dimension n à coefficients constantes, on suppose que $\det(A) \neq 0$. Pour démontrer qu'un équilibre est asymptotiquement stable, il faut donc a priori calculer les valeurs propres λ_i de A et vérifier que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$. Les valeurs propres de A sont solution de l'équation caractéristique $\det(\lambda I - A) = 0$ cette dernière est un polynôme de degré n que nous écrivons sous la forme suivantes [3]

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

les déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de manière suivante :

$$H_1 = |a_1|,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_3^2,$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_k \end{vmatrix},$$

Avec $k = \overline{2, n}$.

Si les déterminants $H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$ sont strictement positifs alors le point est asymptotiquement stable.

Dans le cas de dimension 3 l'équation caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0.$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1 a_2 - a_3 > 0, \\ a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0. \end{cases}$$

Alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

1.6 Fonction de Lyapounov

Les fonctions de Lyapounov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre.

Définition 6 [2] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ,

1. On dit que V est définie positive si :
 - $V(0) = 0$.
 - $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.
2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.

Théorème 2 (stabilité de Lyapounov) [13]

1. Si $V'(x) < 0, \forall x \neq 0$, alors x^* est asymptotiquement stable.
2. Si $V'(x) \leq 0, \forall x \neq 0$, alors x^* est stable.

3. Si x^* est un équilibre asymptotiquement stable et lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini $V(x)$ tend vers l'infini toutes les trajectoires tendent vers x^* , alors on dit que le point x^* est globalement asymptotiquement stable.

Définition 7 (Cycle limite)

On appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 8 (Le Flot)

On appelle flot du système (1.4) l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ où $\phi(t, x_0)$ est la solution de ce système telle que $\phi(0, x_0) = x_0$.

Définition 9 (Intégrale première)

Une fonction $I(x, y)$ est dite intégrale première d'un système dynamique de type (1.5) sur un domaine D du plan si $I(x(t), y(t))$ est constante pour toute solution $(x(t), y(t))$ du système dynamique.

Définition 10 (Ensemble invariant)

Un ensemble invariant I , pour le système (1.4) est défini comme un ensemble de conditions initiales x_0 , tel que la solution $F(x_0, t)$ reste dans l'ensemble $I \forall t$.

$$I = \{x \mid x_0 \in I \Rightarrow F(x, t) \in I \quad \forall t \geq 0\}$$

Théorème 3 (de la divergence)

Soit $\dot{x} = f(x)$ un système de classe C^1 et $V(t)$ le volume dans \mathbb{R}^n du transformé d'un compacte K par le flot du système. Alors :

$$\dot{V}(t)_{t=0} = \int_K \operatorname{div} f dx$$

Si $\dot{V} < 0$, le système est dissipatif $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$

Théorème 4 (LaSalle) [14]

Considérons le système $\dot{x} = f(x)$ et supposons qu'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable et une constante l telles que :

- $\Omega_l = \{x \mid V(x) \leq l\}$ fermé et borné.
- $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_l$.

- $E \subset \Omega_l$ avec $E = \{x | \dot{V}(x) = 0\}$.
- M le plus grand ensemble invariant, $M \subset E$ alors, $\forall x \in \Omega_l \quad X(x_0, t) \rightarrow M$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Théorème 5 (Poincaré Bendixon) [\[10\]](#)

Si une trajectoire du système autonome de seconde ordre reste dans une région finie D , alors l'une des conditions suivantes est vraie :

1. La trajectoire va vers un point d'équilibre.
2. La trajectoire tend vers un cycle limite asymptotiquement stable.
3. la trajectoire soit un homoclinique ou heteroclinique.

Théorème 6 (De comparaison)

Soient $f = \frac{dx}{dt}$ et $g = \frac{dy}{dt}$ deux fonction définies sur I avec $I \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq g(x)$. Alors si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$, donc $l \leq l'$.

1.7 La compactification de Poincaré

La compactification de Poincaré de l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 consiste à ajouter un point à l'infini pour obtenir une sphère à l'infini. cette sphère est appelée sphère de Poincaré et est souvent notée \mathbb{S}^3 .

La construction de cette sphère de Poincaré consiste à considérer une famille de cercles de rayon croissant centrés à l'origine. Les points à l'infini de \mathbb{R}^3 sont définis comme les limites de cette famille de cercle, c'est à dire les points pour lesquels la distance à l'origine devient infinie.

En ajoutant ce point à l'infini, on obtient la sphère de Poincaré, qui est topologiquement équivalente à une boule fermée, cette sphère de Poincaré est souvent utilisée en géométrie hyperbolique en particulier pour représenter le modèle de l'espace hyperbolique tridimensionnel. La compactification de Poincaré est utile pour étudier les propriétés de l'espace tridimensionnel à l'infini, et pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles qui impliquent des fonctions définies sur l'espace tridimensionnel.

1.8 Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf

Théorème 7 (Dimension 2) [\[4\]](#) Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z), \\ \dot{y} = g(x, y, z). \end{cases} \quad (1.6)$$

Avec $z \in \mathbb{R}$.

On suppose que le système [\(1.6\)](#) admet un point d'équilibre qu'on note $(x^*(z), y^*(z))$. Soit $J(x^*(z), y^*(z))$ la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme $\lambda_{1,2} = a(z) \pm ib(z)$ avec $a(z)$ la partie réelle et $b(z)$ la partie imaginaire.

Soit z' une valeur particulière du paramètre z pour laquelle on a $a(z^*) = 0$ et $b(z^*) \neq 0$ et $\frac{da}{dz}(z^*) \neq 0$. Alors si $\frac{da}{dz}(z^*) > 0$ on a trois cas possible :

- Quand $z = z^*$, il existe des trajectoires concentriques autour de $(x^*(z), y^*(z))$ correspond alors à des centre. on parle de bifurcation de Hopf dégénérée.
- Quand $z = z^*$, le point d'équilibre $(x^*(z), y^*(z))$ est asymptotiquement stable, et $\exists \tilde{z} > z^*$, $\forall z$ vérifiant $z^* < z < \tilde{z}$ tel qu'il existe, autour de $(x^*(z), y^*(z))$ qui est instable, un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{z - z^*}$. On parle de bifurcation de Hopf super-critique.
- Quand $z = z^*$, le point d'équilibre $(x^*(z), y^*(z))$ est instable, et $\exists \tilde{z} < z^*$, $\forall z$ vérifiant $\tilde{z} < z < z^*$ tel qu'il existe, autour de $(x^*(z), y^*(z))$ qui est asymptotiquement stable, un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{|z - z^*|}$. On parle de bifurcation de Hopf sous-critique.

Remarque 2 Si $\frac{da}{dz}(z^*) < 0$, il faut inversé les conclusion, c'est à dire le cycle limite asymptotiquement stable (respectivement instable) apparait pour des valeurs du paramètre inférieurs (respectivement supérieures) à z^* .

Chapitre 2

Modèle Lotka-Volterra avec deux prédateurs et une proie

Dans ce chapitre on va étudier la dynamique globale des modèles tridimensionnels Lotka-Volterra avec deux prédateurs en compétition avec une seule proie. On suppose que les deux espèces de prédateurs sont en concurrence purement exploitante sans interférence entre rivaux, le taux de croissance des espèces proie est logistique en l'absence de prédation, et la réponse fonctionnelle du prédateur est linéaire. Alors on peut écrire le modèle comme un système d'équations différentielles ordinaires comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = S(t) \left(r_3 - \frac{1}{K}S(t) - b_1x_1(t) - b_2x_2(t) \right), \\ \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) (-r_1 + a_1S(t)), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) (-r_2 + a_2S(t)). \end{cases} \quad (2.1)$$

On suppose que tous les paramètres sont positifs avec :

S : représente la densité de population de proie.

x_1 et x_2 : Représentent la densité des prédateurs.

r_3 : Le taux de croissance de la proie

K : La capacité de charge de la proie qui décrit la richesse des ressources pour la proie.

b_1 et b_2 : L'effet de prédation sur la proie.

r_1 et r_2 : Le taux de mortalité du prédateur en absence de la proie.

a_1 et a_2 : Le taux de conversion de la biomasse proie à la biomasse prédateur.

Remarque 3 Pour le K :

1. Si $K \rightarrow \infty$ alors les ressources en proie sont illimitées et la proie peut augmenter jusqu'à l'infini, ce qui implique que le taux de croissance de l'espèce proie est linéaire en absence

de prédation.

2. Si K est borné c'est à dire que la ressource en proie est limitée, alors le taux de croissance de l'espèce proie est logistique en absence de prédation.

La dynamique globale du système (2.1) dépend de la ressource de la proie. Il y a deux cas : la ressource limitée pour les proies (c'est à dire que K est borné) et la ressource illimitée pour les proies (c'est à dire $K = +\infty$).

1. Si K est borné : on obtient des conditions suffisante et nécessaire pour que le principe d'exclusion soit vérifié. Si il est vérifié, alors un prédateur va à l'extinction, et l'autre prédateur et sa proie coexistent à un état stable positif dans \mathbb{R}^2 . Si non, alors soit les trois espèces coexisteront à un équilibre positif dans l'octant positif de \mathbb{R}^3 , soit les deux prédateurs concurrents vont à l'extinction et la proie persiste.
2. Si K est illimitée ($K = +\infty$) : nous donnons des conditions suffisante et nécessaire pour que le principe d'exclusion compétitive soit vérifié. Si il est vérifié, alors l'un des deux prédateurs et sa proie coexistent sous la forme d'oscillation périodique dans le premier quadrant de \mathbb{R}^2 , et l'autre prédateur va à l'extinction. Si non, alors soit trois espèces coexisteront sous forme d'oscillations périodique dans l'octant positif de \mathbb{R}^3 sauf les équilibres positifs dans cet octant.

Dans la premier section nous étudions la dynamique globale du système (2.1) car K est un paramètre borné.

2.1 Dynamique globale du système (2.1) avec des ressources limitées pour les proies

Dans cette section, nous considérons le système (2.1) avec K borné dans \mathbb{R} . Nous étudions d'abord l'existence et la stabilité des points des équilibres finis et des équilibres à l'infini, puis nous étudions la dynamique globale.

2.2 Existence et stabilité des équilibres

Pour trouver les points d'équilibre il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = 0, \\ \frac{dX_1(t)}{dt} = 0, \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(t) \left(r_3 - \frac{1}{K}S(t) - b_1x_1(t) - b_2x_2(t) \right) = 0, \\ x_1(t) (-r_1 + a_1S(t)) = 0, \\ x_2(t) (-r_2 + a_2S(t)) = 0. \end{cases}$$

On trouve

$$E_0 = (0, 0, 0), E_1 = (r_3k, 0, 0) \text{ et } E_2 = \left(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K} \left(r_3K - \frac{r_1}{a_1} \right), 0 \right), E_3 = \left(\frac{r_2}{a_2}, 0, \frac{1}{b_2K} \left(r_3K - \frac{r_2}{a_2} \right) \right)$$

$$\text{Si } \begin{cases} r_3K > \frac{r_1}{a_1}, \\ r_3K > \frac{r_2}{a_2}. \end{cases}$$

Ainsi un équilibre positif $E_+ = (S^*, x_1^*, x_2^*)$ si et seulement si $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3K > \frac{r_1}{a_1}$, de plus lorsque le système (2.1) a un équilibre positif alors il a une infinité d'équilibres positifs qui remplissent un segment L :

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) : S = \frac{r_1}{a_1}, b_1x_1 + b_2x_2 = r_3 - \frac{r_1}{Ka_1}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

La matrice jacobienne associé au système (2.1) est :

$$J(S, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K}S - b_1x_1 - b_2x_2 & -b_1S & -b_2S \\ a_1x_1 & -r_1 + a_1S & 0 \\ a_2x_2 & 0 & -r_2 + a_2S \end{pmatrix}.$$

Pour $E_0 = (0, 0, 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r_3 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 \end{pmatrix}.$$

On a trois valeurs propres $r_3, -r_1, -r_2$, deux valeurs propres négatives et une positive c'est à dire que l'origine est instable.

Pour $E_1 = (r_3k, 0, 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -r_3 & -b_1r_3K & -b_2r_3K \\ 0 & -r_1 + a_1r_3K & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 + a_2r_3K \end{pmatrix},$$

$$\text{On trouve valeurs propres : } \begin{cases} \lambda_1 = -r_3 < 0, \\ \lambda_2 = -r_1 + a_1r_3k, \\ \lambda_3 = -r_2 + a_2r_3k. \end{cases}$$

1. Si $\frac{r_1}{a_1} < r_3K$ ou $\frac{r_2}{a_2} < r_3K$ donc E_1 est instable.

2. Si $\frac{r_1}{a_1} > r_3K$ et $\frac{r_2}{a_2} > r_3K$ donc E_1 est asymptotiquement stable.

Pour $E_2 = (\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}), 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{Ka_1} & \frac{-b_1r_1}{a_1} & \frac{-b_2r_1}{a_1} \\ \frac{a_1}{b_1}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 + \frac{a_2r_1}{a_1} \end{pmatrix}.$$

La première valeur propre est donnée par $\lambda_1 = -r_2 + \frac{a_2r_1}{a_1}$ et les deux autres valeurs propres provient de la sous matrice M_1 donnée par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{Ka_1} & \frac{-b_1r_1}{a_1} \\ \frac{a_1}{b_1}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec :

$$\begin{cases} \det(M_1) = \frac{r_1}{K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}) > 0, \\ \text{tr}(M_1) = -\frac{r_1}{Ka_1} < 0. \end{cases}$$

Alors de cette sous matrice on a deux valeurs propre négative, par conséquent on a deux cas possible :

- Si $\frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{a_2}$, Alors E_2 est localement asymptotiquement stable.
- Si $\frac{r_1}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}$, Alors E_2 , alors E_2 est instable.

Pour $E_3 = (\frac{r_2}{a_2}, 0, \frac{1}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}))$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} -\frac{r_2}{Ka_2} & \frac{-b_1r_2}{a_2} & \frac{-b_2r_2}{a_2} \\ 0 & -r_1 + \frac{a_1r_2}{a_2} & 0 \\ \frac{a_2}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est claire que $\lambda = -r_1 + \frac{a_1r_2}{a_2}$ est une valeur propre et les deux autres valeurs propres provient de la sous matrice M_2 donnée par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{r_2}{Ka_2} & \frac{-b_2r_2}{a_2} \\ \frac{a_2}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec :

$$\begin{cases} \det(M_2) = \frac{r_2}{Ka_2}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}) > 0, \\ \text{tr}(M_2) = -\frac{r_2}{Ka_2} < 0. \end{cases}$$

Alors de cette sous matrice on a deux valeurs propre négative, par conséquent on a deux cas possible :

- si $\frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{a_1}$, Alors E_3 est localement asymptotiquement stable.

- si $\frac{r_2}{a_2} > \frac{r_1}{a_1}$, Alors E_3 , alors E_2 est instable.

Pour $E_4 = (S^*, x_1^*, x_2^*)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K}S^* - b_1x_1^* - b_2x_2^* & -b_1S^* & -b_2S^* \\ a_1x_1^* & -r_1 + a_1S^* & 0 \\ a_2x_2^* & 0 & -r_2 + a_2S^* \end{pmatrix}.$$

Et comme on a :

$$\begin{cases} r_3 - \frac{1}{K}S^* - b_1x_1 - b_2x_2 = 0, \\ -r_1 + a_1S^* = 0. \end{cases}$$

Et $S^* = \frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ Alors on peut écrire $j(E^*)$ comme se suit :

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{K}\frac{r_1}{a_1} & -b_1\frac{r_1}{a_1} & -b_2\frac{r_1}{a_1} \\ a_1x_1^* & 0 & 0 \\ a_2x_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(E^* - \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{K}\frac{r_1}{a_1} - \lambda & -b_1\frac{r_1}{a_1} & -b_2\frac{r_1}{a_1} \\ a_1x_1^* & -\lambda & 0 \\ a_2x_2^* & 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

le polynôme caractéristique est :

$$J(E^* - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{K}\frac{r_1}{a_1} - \lambda & -b_1\frac{r_1}{a_1} & -b_2\frac{r_1}{a_1} \\ a_1x_1^* & -\lambda & 0 \\ a_2x_2^* & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

nous obtenons :

$$-\lambda^3 - \frac{r_1}{Ka_1}\lambda^2 - (a_1b_1x_1^* + a_2b_2x_2^*)\frac{r_1}{a_1}\lambda = 0,$$

multipliant par (-1) on obtient :

$$\lambda^3 + \frac{r_1}{Ka_1}\lambda^2 + (a_1b_1x_1^* + a_2b_2x_2^*)\frac{r_1}{a_1}\lambda = 0,$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = \frac{r_1}{Ka_1} > 0, \\ a_2 = (a_1b_1x_1^* + a_2b_2x_2^*)\frac{r_1}{a_1} > 0, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

Alors d'après Routh on peut rien dire sur la stabilité.

$$Det J(E^* - \lambda) = \lambda(\lambda^2 + \frac{r_1}{Ka_1}\lambda + (r_1b_1x_1^* + r_2b_2x_2^*)) = 0 \quad (2.2)$$

l'équation (2.2) a trois racines $\lambda_1 = 0$ et les deux autres racines provient de l'équation $\lambda^2 + \frac{r_1}{Ka_1}\lambda + (r_1b_1x_1^* + r_2b_2x_2^*)$, et vu qu'on a une valeur propre nulle donc on peut rien dire.

Remarque 4 *Pour déterminer la stabilité de E^* on doit utiliser la géométrie différentielle (compactification de Poincaré de \mathbb{R}^3).*

Proposition 1 *Système (2.1) restreint à la compactification de l'octant \mathbb{R}_+^3 a un isolé équilibre O_i à l'infini qui est l'extrémité de l'axe S positif invariant et a une ligne remplie d'équilibres E_I à l'infini qui est la fin du plan invariant $S = 0$ intersection avec la compactification de l'octant \mathbb{R}_+^3 .*

Preuve Nous allons étudier le portrait de phase du système (2.1) sur le quadrant positif du plan invariant x_1x_2 . Sur ce plan, le flot est déterminé par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -r_1x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = -r_2x_2(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Avec r_1 et r_2 sont des constantes positives.

On remarque que toutes les solutions du système (2.3) sur le plan x_1x_2 sauf les équilibres à l'infini s'approchera de l'origine $(0, 0, 0)$.

Par conséquent, le portrait de phase dans la partie finie et près de chaque équilibre E_i ressemble à une selle, nous pouvons esquisser les portraits de phase près de tous les équilibres à l'infini du système (2.3) sur $S = 0$. Le portrait de phase et dans la Figure 2.1

Preuve

Théorème 8 *Toutes les orbites du système (2.1) avec des conditions initiales positives sont positives et borné.*

Preuve Comme le flot du système (2.1) est invariant dans les trois plans de \mathbb{R}_+^3 , toutes les trajectoires du système (2.1) avec des conditions initiales positives restent dans \mathbb{R}_+^3 . Nous savons que tous les équilibres à l'infini du système (2.1) dans sa forme finie direction sont des répulsifs. Par conséquent, toutes les trajectoires du système (2.1) avec une valeur initiale positive conditions ne peuvent pas atteindre l'infini. Cela implique que toute trajectoire est bornée.

2.3 Dynamique globale

On montre d'abord que le système (2.1) permet la coexistence de deux prédateurs concurrents pour certaines valeurs de paramètres, ce qui implique que la coexistence de deux prédateurs

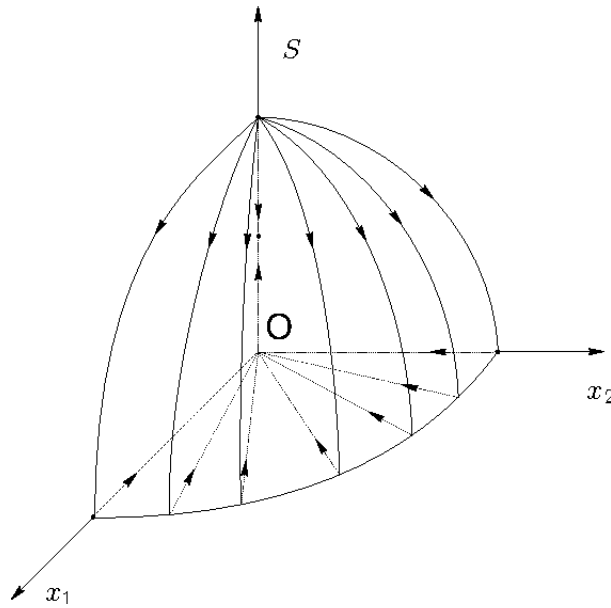


FIGURE 2.1 – Le portrait de phase du système (2.3) proche de tous les équilibres à l’infini sur \mathbb{S}^2

en compétition pour une seule espèce de proie est possible lorsque la réponse fonctionnelle des prédateurs à la densité des proies est linéaire. Et pour d’autres valeurs de paramètres, les deux prédateurs concurrents disparaissent et seules les proies survivent.

Théorème 9 Si $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$, le système (2.1) admet une intégrale première.

Preuve

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{-r_1 x_1}{-r_2 x_2}, \\
 &\Leftrightarrow \frac{dx_1}{-r_1 x_1} = \frac{dx_2}{-r_2 x_2}, \\
 &\Leftrightarrow \frac{-1}{r_1} \int \frac{dx_1}{x_1} = \frac{-1}{r_2} \int \frac{dx_2}{x_2}, \\
 &\Leftrightarrow \frac{-1}{r_1} \ln |x_1| = \frac{-1}{r_2} \ln |x_2| + c, \\
 &\Leftrightarrow \frac{-a_2}{a_1 r_2} \ln |x_1| = \frac{-1}{r_2} \ln |x_2| + c \quad \text{car } r_1 = \frac{a_1 r_2}{a_2}, \\
 &\Leftrightarrow a_2 \ln |x_1| = a_1 \ln |x_2| + c, \\
 &\Leftrightarrow \ln |x_1|^{a_2} - \ln |x_2|^{a_1} = c, \\
 &\Leftrightarrow \ln \frac{x_1^{a_2}}{x_2^{a_1}} = c, \\
 &\Leftrightarrow x_1^{a_2} x_2^{-a_1} = c'.
 \end{aligned}$$

On définit :

$$F(S, x_1, x_2) = x_1^{a_2} x_2^{-a_1}$$

1. Si $r_3 K > \frac{r_1}{a_1}$, alors sur la surface invariante $F(S, x_1, x_2) = c > 0$ dans \mathbb{R}_+^3 , le système (2.1) a un unique équilibre positif $E_+(\frac{r_1}{a_1}, (cx_2^{a_1})^{\frac{1}{a_2}}, x_2)$.
2. Si $r_3 K \leq \frac{r_1}{a_1}$, alors sur la surface invariante $F(S, x_1, x_2) = c > 0$ dans \mathbb{R}_+^3 , le système (2.1) n'a pas d'équilibre et toutes les orbites approchent du point $(r_3 K, 0, 0)$ de cette surface invariante.

Preuve On a $F(S, x_1, x_2) = x_1^{a_2} x_2^{-a_1}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{dF(S, x_1, x_2)}{dt} &= \frac{dF}{dS} \frac{dS}{dt} + \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= a_2 x_1^{a_2-1} x_2^{-a_1} x_1 (-r_1 + a_1 S) - a_1 x_1^{a_2} x_2^{-a_1-1} x_2 (-r_2 + a_2 S) \\ &= a_2 (-r_1 + a_1 S) - a_1 (-r_2 + a_2 S) x_1^{a_2} x_2^{-a_1} \\ &= (a_1 r_2 - a_2 r_1) F(S, x_1, x_2) \\ &= a_1 a_2 \left(\frac{r_2}{a_2} - \frac{r_1}{a_1} \right) F(S, x_1, x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

1. Pour $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3 K > \frac{r_1}{a_1}$: on sait que le système (2.1) possède une infinité d'équilibres positifs $E_+(S, x_1, x_2)$ qui remplissent le segment L , par conséquent la superficie $F(S, x_1, x_2) = c$ doit croiser L exactement en un point du plan $S = \frac{r_1}{a_1}$.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = S(t) \left(r_3 - \frac{1}{K} S(t) - b_1 (cx_2^{a_1}(t))^{\frac{1}{a_2}} - b_2 x_2(t) \right), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(t) (-r_2 + a_2 S(t)). \end{cases} \quad (2.4)$$

Le système (2.4) a un seul équilibre positive $(\frac{r_1}{a_1}, x_2^+)$, où x_2^+ est la solution unique de :

$$r_3 - \frac{r_1}{K a_1} = b_1 (cx_2^{a_1}(t))^{\frac{1}{a_2}} + b_2 x_2(t)$$

La matrice jacobienne associé au système (2.4) est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K} S - b_1 (cx_2^{a_1})^{\frac{1}{a_2}} - b_2 x_2 & -S \left(\frac{b_1 a_1}{a_2} c^{\frac{1}{a_2}} x_2^{\frac{a_1}{a_2}-1} + b_2 \right) \\ a_2 x_2 & -r_2 + a_2 S \end{pmatrix}.$$

Pour $(\frac{r_1}{a_1}, x_2^+)$ La matrice jacobienne associé est :

$$M = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K} \frac{r_1}{a_1} - b_1 (cx_2^{a_1})^{\frac{1}{a_2}} - b_2 x_2^+ & -\frac{r_1}{a_1} \left(\frac{b_1 a_1}{a_2} c^{\frac{1}{a_2}} x_2^{\frac{a_1}{a_2}-1} + b_2 \right) \\ a_2 x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \det(M) = \frac{r_1}{a_1}(b_1 a_1 c^{\frac{1}{a_2}} x_2^{\frac{a_1}{a_2}} + b_2) a_2 x_2^+ > 0, \\ \operatorname{tr}(M) = r_3 - \frac{2}{K} \frac{r_1}{a_1} - b_1 (c x_2^{a_1})^{\frac{1}{a_2}} - b_2 x_2^+ < 0. \end{cases}$$

Alors on a deux valeurs propres négative, par conséquent le point est stable.

D'après le théorème (8), nous savons que toute solution du système (2.4) est positive et bornée, on montre que l'équilibre est globalement stable, supposons que le système (2.4) a une périodique non triviale solution $\gamma(t)$ de période T qui est la première orbite fermée proche de l'équilibre $(\frac{a_1}{r_1}, x_2^+)$, tel que :

$$\gamma(t) = \{(S, x_2) : S = S(t) > 0, x_2 = x_2(t), 0 \leq t \leq T\}$$

Par intégration du système (2.4) par rapport t sur $[0, T]$ on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dS}{S(t)} &= \int_0^T \left(r_3 - \frac{1}{K} S(t) - b_1 (c x_2^{a_1}(t))^{\frac{1}{a_2}} - b_2 x_2(t) \right) dt = 0, \\ \int_0^T \frac{dx_2}{x_2(t)} &= \int_0^T (-r_2 + a_2 S(t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Où $(S(t), x_2(t))$ est la solution périodique non trivial $\gamma(t)$ du système (2.4).

Dans la suite nous considérons la stabilité de $\gamma(t)$. On calcule l'intégrale de divergence du champ vectoriel (2.4) le long de la solution périodique $\gamma(t)$.

On pose $f_1 = \frac{dS}{dt}$ et $f_2 = \frac{dx_2}{dt}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dS} \\ \frac{df_2}{dx_2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \operatorname{div} V dt &= \int_0^T \frac{df_1}{dS} + \frac{df_2}{dx_2} \\ &= \int_0^T \left(r_3 - \frac{2}{K} S(t) - b_1 (c x_2^{a_1}(t))^{\frac{1}{a_2}} - b_2 x_2(t) + (-r_2 + a_2 S(t)) \right), \\ &= \int_0^T -\frac{1}{K} S(t) < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution périodique $\gamma(t)$ est stable. D'autre part, l'unique l'équilibre est stable. Cela conduit à une contradiction (d'après le théorème de Poincaré Bendixon). Ainsi, la solution périodique non triviale $\gamma(t)$ n'existe pas, ce qui implique que l'équilibre $(\frac{r_1}{a_1}, x_2^+)$ est globalement stable.

2. Pour $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3 K \leq \frac{r_1}{a_1}$: on sait que le système (2.1) n'a pas d'équilibre dans \mathbb{R}_+^3 donc il n'existe pas solutions périodiques sur la surface invariante $F(S, x_1, x_2) = c$, et toutes les solutions du système (2.4) sont bornées. Sur la frontière de la surface invariante $F(S, x_1, x_2) = c$, le système (2.4) a deux équilibres $(0, 0)$ qui est une selle et $(r_3 K, 0)$ est un nœud stable, ainsi toutes les solutions du système (2.4) avec les conditions initiales positives se rapprochent de l'équilibre $(r_3 K, 0)$.

Pour obtenir la dynamique globale du système (2.1) dans \mathbb{R}_+^3 il faut voir la dynamique du système sur les trois plans. Le système (2.1) sur le plan invariant x_1x_2 a un seul équilibre $(0, 0)$ qui est globalement stable. On considère la dynamique du système (2.1) sur le plan invariant Sx_1 et sur le plan invariant Sx_2 respectivement.

Le système restreint de (2.1) sur le plan Sx_1 est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = S(t) \left(r_3 - \frac{1}{K}S(t) - b_1x_1(t) \right), \\ \frac{dX_1(t)}{dt} = x_1(t) (-r_1 + a_1S(t)). \end{cases} \quad (2.6)$$

Et sur le plan Sx_2 le système restreint de (2.1) est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = S(t) \left(r_3 - \frac{1}{K}S(t) - b_2x_2(t) \right), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = x_2(t) (-r_2 + a_2S(t)). \end{cases} \quad (2.7)$$

Proposition 2 Pour les deux systèmes précédent si $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ nous avons que :

1. Si $r_3K > \frac{r_1}{a_1}$ alors les deux systèmes ont trois points d'équilibres, $(0, 0), (r_3k, 0)$, sont les même pour les deux systèmes et se sont des points selle et $(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1})), (\frac{r_2}{a_2}, \frac{1}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}))$ respectivement pour (2.6) et (2.7) qui sont des noeud instable qui attire toutes les orbites à l'intérieur du plan Sx_1 et du plan Sx_2 , respectivement.
2. Si $r_3K \leq \frac{r_1}{a_1}$ alors les deux systèmes ont deux points d'équilibres, $(0, 0)$ qui est un point selle et $(r_3k, 0)$ qui est un noeud stable, qui attire toutes les orbites à l'intérieure du plan Sx_1 et du plan Sx_2 , respectivement.

Preuve la matrice jacobienne associé au système (2.6) est :

$$J(S, x_1) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K}S - b_1x_1 & -b_1S \\ a_1x_1 & -r_1 + a_1S \end{pmatrix}.$$

1. Si $r_3K > \frac{r_1}{a_1}$:

- Pour $(0, 0)$ la matrice jacobienne associé est la suivante :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r_3 & 0 \\ 0 & -r_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice a deux valeurs propres de signes opposé, alors on a un point selle.

- Pour $(r_3K, 0)$ la matrice jacobienne associé est la suivante :

$$J(r_3K, 0) = \begin{pmatrix} -r_3 & -b_1r_3K \\ 0 & -r_1 + a_1r_3K \end{pmatrix}$$

La matrice a deux valeurs propres de signes opposé, alors on a un point selle.

- La matrice jacobienne au point $(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}))$ est donnée par

$$J\left(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K}\left(r_3K - \frac{r_1}{a_1}\right)\right) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2r_1}{Ka_1} - r_3 + \frac{r_1}{Ka_1} & -b_1\frac{r_1}{a_1} \\ \frac{a_1}{b_1}\left(r_3K - \frac{r_1}{a_1}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \det(J) = r_3K - \frac{r_1}{a_1} > 0, \\ \operatorname{tr}(J) = -\frac{r_1}{Ka_1} < 0. \end{cases}$$

Donc la matrice admet deux valeurs propres négative alors on a un noeud stable.

2. Si $(r_3K \leq \frac{r_1}{a_1})$:

Pour $(r_3K, 0)$ la matrice jacobienne admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -r_3$, $\lambda_2 = -r_1 + a_1r_3K$ qui sont négatives alors le point d'équilibre est un noeud stable.

Théorème 10 1. Si $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3K > \frac{r_1}{a_1}$, alors le système (2.1) a une infinité de points équilibres positifs qui remplit un segment L qui attirent toutes les solutions du système (2.1) avec des conditions initiales positives, les extrémités de L attirent toutes les solutions du système (2.1) avec des conditions initiales positives $(S, x_1, 0)$ ou $(S, 0, x_2)$, et l'origine $(0, 0, 0)$ attire toutes les solutions du système (2.1) avec conditions initiales non négatives $(0, x_1, x_2)$. Voici le portrait de phase dans la Figure 2.2.

2. Si $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3K \leq \frac{r_1}{a_1}$, alors le système (2.1) n'a que deux équilibres $(0, 0, 0)$ qui attire toutes les solutions du système (2.1) dans le plan x_1x_2 , et $(r_3K, 0, 0)$ qui attire toutes les solutions du système (2.1) sauf les orbites dans le plan x_1x_2 . Voici le portrait de phase dans la Figure 2.3.

Remarque 5 D'après le théorème (10) les deux prédateurs concurrents coexistent ou coextinct s'ils ont le même rapport de taux de mortalité (r_i) et de taux de propagation (a_i). Lorsque le rapport entre le taux de mortalité et le taux de propagation du prédateur est inférieur à le produit du taux de natalité (r_3) et de la capacité de charge de la proie (K), deux facteurs concurrents les prédateurs coexistent à un équilibre positif. Cependant, si le rapport entre le taux de mortalité et le taux de propagation du prédateur est supérieur au produit du taux de

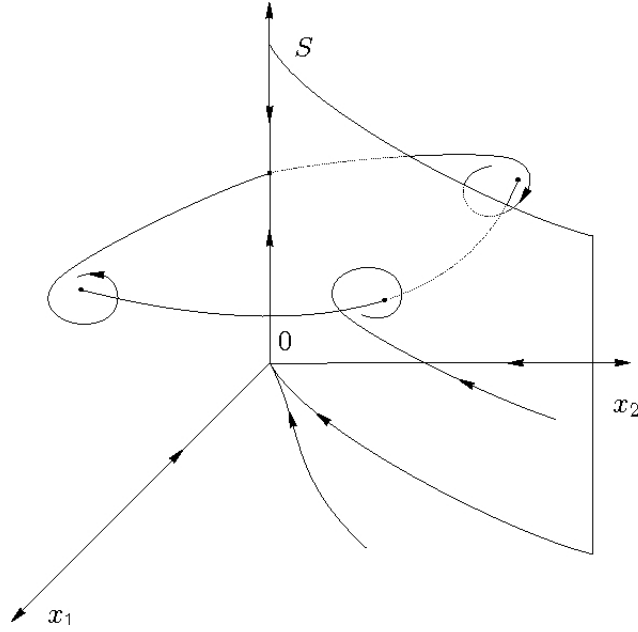


FIGURE 2.2 – Dynamique globale du système (2.1) lorsque $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3K > \frac{r_1}{a_1}$

natalité et la capacité de charge de la proie, puis les deux espèces de prédateurs concurrentes finissent par disparaître même si les proies persistent. Cela coïncide avec notre intuition mais contraire au principe d'exclusion compétitive.

Théorème 11 Si $\frac{r_1}{a_1} \neq \frac{r_2}{a_2}$ alors le principe d'exclusion compétitive peut s'appliquer pour le système (2.1).

1. Si $\frac{r_1}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}$, alors toutes les orbites du système (2.1) dans \mathbb{R}_+^3 sont asymptotique aux orbites sur le plan Sx_2 .
2. Si $\frac{r_2}{a_2} > \frac{r_1}{a_1}$, alors toutes les orbites du système (2.1) dans \mathbb{R}_+^3 sont asymptotique aux orbites sur le plan Sx_1 .

Preuve Soit l'ensemble D l'intersection de la boule de compactification de Poincaré B et \mathbb{R}_+^3 c'est-à-dire que $D = B \cap \mathbb{R}_+^3$. On choisit un ensemble compact suffisamment grand D_1 , $D_1 \subset D$, avec D_1 n'est pas incluse dans $x_2 = 0$, et on choisit un ensemble compact suffisamment grand D_2 , $D_2 \subset D$, avec D_2 n'est pas incluse dans $x_1 = 0$.

on sait que D_1 et D_2 sont des ensembles invariants positifs du système (2.1) c'est-à-dire toutes les solutions $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ du système (2.1) avec le point initial $(S(t_0), x_1(t_0), x_2(t_0))$ en D_1 ou en D_2 resteront respectivement en D_1 ou en D_2 .

on considère la fonction suivante :

$$V_1(S, x_1, x_2) = x_1^{a_2} x_2^{-a_1}$$

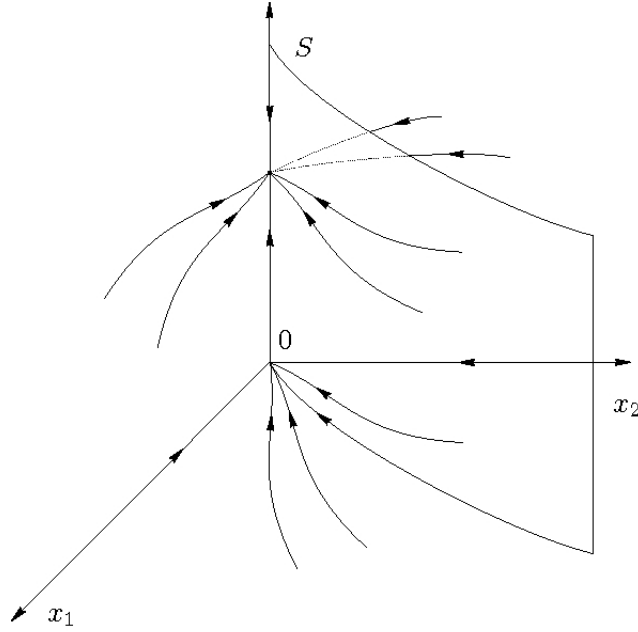


FIGURE 2.3 – Dynamique globale du système (2.1) lorsque $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3K \leq \frac{r_1}{a_1}$

Donc

$$\frac{dV(S, x_1, x_2)}{dt} = a_1 a_2 \left(\frac{r_2}{a_2} - \frac{r_1}{a_1} \right) V(S, x_1, x_2) \leq 0 \quad \text{car } \frac{r_1}{a_1} \leq \frac{r_2}{a_2}$$

On pose

$$D_0 = \{(S, x_1, x_2) : \frac{dV(S, x_1, x_2)}{dt} = 0, (S, x_1, x_2) \in D_1\}$$

alors

$$D_0 = \{(S, x_1, x_2) : x_1 = 0\} \quad \text{car } x_2 \neq 0$$

D'après le théorème de La Salle, nous savons que tout les solutions du système (2.1) dans D_1 sont asymptotique aux orbites sur le plan Sx_2 ce qui implique l'énoncé (1) .

Pour démontrer l'énoncé (2) en choisissant une fonction qu'on note $V_2(S, x_1, x_2) = x_1^{-a_2} x_2^{a_1}$.

Remarque 6 Quand $\frac{r_1}{a_1} \neq \frac{r_2}{a_2}$ presque toutes les orbites du système (2.1) sont asymptotique à certaines orbites sur le plan Sx_1 ou sur le plan Sx_2 . Mais nous ne savons pas quels types les orbites sur le plan Sx_1 ou sur le plan Sx_2 sont les orbites asymptotiques. Il faut montrer que l'un des deux prédateurs concurrents doit disparaître et l'autre prédateur doit survivre. On considère donc la dynamique du système (2.1) sur le plan Sx_1 invariant et sur le plan Sx_2 invariant.

Proposition 3 Si $\frac{r_1}{a_1} \neq \frac{r_2}{a_2}$:

1. Si $r_3K > \frac{r_1}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}$ ou $r_3K > \frac{r_2}{a_2} > \frac{r_1}{a_1}$, alors le système (2.6) ou (2.7) a trois équilibres $(0, 0), (r_3K, 0)$ qui sont des points selles et $(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}))$ ou $(\frac{r_2}{a_2}, \frac{1}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}))$

respectivement qui est un nœud stable qui attire toutes les orbites à l'intérieur du plan Sx_1 et Sx_2 respectivement.

2. Si $\frac{r_2}{a_2} < r_3K \leq \frac{r_1}{a_1}$ alors, le système (2.6) a deux équilibres $(0, 0)$ et $(r_3K, 0)$, où $(0, 0)$ est un point selle et $(r_3K, 0)$ est un nœud stable qui attire toutes les orbites de (2.6) à l'intérieur du plan Sx_1 . Et le système (2.7) a trois équilibres $(0, 0)$, $(r_3K, 0)$ qui sont des points selles et $(\frac{r_2}{a_2}, \frac{1}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}))$ est un nœud stable qui attire toutes les orbites de (2.7) à l'intérieur du plan Sx_2 , respectivement.
3. Si $\frac{r_1}{a_1} < r_3K \leq \frac{r_2}{a_2}$ alors le système (2.7) a deux équilibres $(0, 0)$ et $(r_3K, 0)$, où $(0, 0)$ est une selle et $(r_3K, 0)$ est un nœud stable qui attire toutes les orbites de (2.7) à l'intérieur du plan Sx_2 . Et le système (2.6) a trois équilibres $(0, 0)$, $(r_3K, 0)$ qui sont des points selles et $(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}))$ est un nœud ou stable qui attire toutes les orbites de (2.6) à l'intérieur du plan Sx_1 .
4. Si $r_3K \leq \frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{a_1}$ ou $r_3K \leq \frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{a_2}$ alors les systèmes (2.6) et (2.7) ont deux équilibres $(0, 0)$ qui est un point selle, et $(r_3K, 0)$ qui est un nœud stable qui attire toutes les orbites de (2.6) et (2.7) à l'intérieur du plan Sx_1 et du plan Sx_2 respectivement.

Preuve La matrice jacobienne associé au système (2.6) est :

$$J(S, x_1) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K}S - b_1x_1 & -b_1S \\ a_1x_1 & -r_1 + a_1S \end{pmatrix}.$$

1. Si $r_3K > \frac{r_1}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}$ ou $r_3K > \frac{r_2}{a_2} > \frac{r_1}{a_1}$:

- Pour $(0, 0)$ la matrice jacobienne associé est la suivante :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r_3 & 0 \\ 0 & -r_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice a deux valeurs propres de signes opposées $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_1$ alors on a un point selle.

- Pour $(r_3K, 0)$ la matrice jacobienne associé est la suivante :

$$J(r_3K, 0) = \begin{pmatrix} -r_3 & -b_1r_3K \\ 0 & -r_1 + a_1r_3K \end{pmatrix}.$$

La matrice a deux valeurs propres de signes opposé $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_1 + a_1r_3K$ alors on a un point selle.

- La matrice jacobienne au point $(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1 K}(r_3 K - \frac{r_1}{a_1}))$ est donnée par :

$$J\left(\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1 K}(r_3 K - \frac{r_1}{a_1})\right) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2r_1}{Ka_1} - r_3 + \frac{r_1}{Ka_1} & -b_1 \frac{r_1}{a_1} \\ \frac{a_1}{b_1}(r_3 K - \frac{r_1}{a_1}) & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \det(J) = r_3 K - \frac{r_1}{a_1} > 0, \\ \operatorname{tr}(J) = -\frac{r_1}{Ka_1} < 0. \end{cases}$$

Donc la matrice admet deux valeurs propres négative alors on a un noeud stable.

2. Si $\frac{r_2}{a_2} < r_3 K \leq \frac{r_1}{a_1}$:

- Pour le système (2.6) avec $r_3 K \leq \frac{r_1}{a_1}$:

— La matrice jacobienne au point $(0, 0)$ admet deux valeurs propres opposées $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_1$ donc on a un point selle.

— La matrice jacobienne au point $(r_3 K, 0)$ admet deux valeurs propres négatives $\lambda_1 = -r_3$, $\lambda_2 = -r_1 + a_1 r_3 K$ donc on a un noeud stable.

- Pour le système (2.7) avec $r_3 K > \frac{r_2}{a_2}$:

— La matrice jacobienne au point $(0, 0)$ admet deux valeurs propres opposées $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_1$ donc on a un point selle.

— La matrice jacobienne au point $(r_3 K, 0)$ admet deux valeurs propres opposées $\lambda_1 = -r_3$, $\lambda_2 = -r_1 + a_1 r_3 K$ donc on a un point selle.

— Pour $(\frac{r_2}{a_2}, \frac{1}{b_2 K}(r_3 K - \frac{r_2}{a_2}))$ la matrice jacobienne associée est :

$$J\left(\frac{r_2}{a_2}, \frac{1}{b_2 K}(r_3 K - \frac{r_2}{a_2})\right) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2r_2}{Ka_2} - r_3 + \frac{r_2}{Ka_2} & -b_2 \frac{r_2}{a_2} \\ \frac{a_2}{b_2}(r_3 K - \frac{r_2}{a_2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \det(J) = r_3 K - \frac{r_2}{a_2} > 0, \\ \operatorname{tr}(J) = -\frac{r_2}{Ka_2} < 0. \end{cases}$$

Donc la matrice admet deux valeurs propres négative alors on a un noeud stable.

3. La troisième résultat est comme la deuxième.

4. Si $r_3 K \leq \frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{a_1}$ ou $r_3 K \leq \frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{a_2}$ pour les deux système (2.6) et (2.7) on a :

- Pour le point $(0, 0)$ la matrice jacobienne admet deux valeurs propres de signes opposées $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_1$ et $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_2$ respectivement alors on a un point

selle.

- Pour le point $(r_3K, 0)$ la matrice a deux valeurs propres de signes négative $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_1 + a_1r_3K$ et $\lambda_1 = r_3$, $\lambda_2 = -r_1 + a_1r_3K$ alors on a un noeud stable.

Théorème 12 *Le principe de l'exclusion vaut pour le système (2.1) si et si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

1. $r_3K > \frac{r_1}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}$ Dans ce cas, l'espèce prédatrice $x_1(t)$ va à l'extinction, et l'espèce prédatrice $x_2(t)$ survit.
2. $\frac{r_2}{a_2} < r_3K \leq \frac{r_1}{a_1}$ Dans ce cas, l'espèce prédatrice $x_1(t)$ va à l'extinction, et l'espèce prédatrice $x_2(t)$ survit.
3. $r_3K > \frac{r_2}{a_2} > \frac{r_1}{a_1}$ Dans ce cas, l'espèce prédatrice $x_2(t)$ va à l'extinction, et l'espèce prédatrice $x_1(t)$ survit.
4. $\frac{r_1}{a_1} < r_3K < \frac{r_2}{a_2}$ Dans ce cas, l'espèce prédatrice $x_2(t)$ va à l'extinction, et l'espèce prédatrice $x_1(t)$ survit.

Remarque 7 *Si $r_3K \leq \frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{a_1}$ ou $r_3K \leq \frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{a_2}$ dans ce cas, les deux prédateurs concurrents vont à l'extinction, et toutes les orbites du système (2.1) sont asymptotique à l'équilibre $(r_3K, 0, 0)$ sauf les orbites sur le plan x_1x_2 .*

Chapitre 3

Modèle Lotka-Volterra avec deux prédateurs et une proie et un retard

Le modèle de Lotka Volterra ne prend pas en compte le retard qui peu existe dans les interactions entres les espèces. Le retard peut être causé par différent facteurs, tels que les temps de digestion, les déplacements ou les comportements des prédateurs et des proies. Ils peuvent avoir des effets significatifs sur la dynamique des populations et doivent donc être pris en compte pour une compréhension plus précise des interactions entre les espèces. Volterra a observé que la coexistence de deux prédateurs ou pour moins de proies est impossible. Pour décrire deux prédateurs en compétition pour une proie, Llibre et Xiao dans [9] ont obtenu des conditions suffisantes et nécessaires pour que le principe d'exclusion concurrentielle soit maintenu dans le système (2.1).

Dans l'environnement de prédation écologique réel, un décalage temporel se produit souvent, ce qui est dû au temps nécessaire au prédateur pour rattraper la proie ou la gestation période de reproduction du prédateur .

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = S(t) \left(r_3 - \frac{1}{K}S(t) - b_1x_1(t) - b_2x_2(t) \right), \\ \frac{dX_1(t)}{dt} = x_1(t) (-r_1 + a_1S(t - \tau)), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = x_2(t) (-r_2 + a_2S(t - \tau)). \end{cases} \quad (3.1)$$

La seule différence entre les systèmes (2.1) et (3.1) est qu'un retard apparaît dans le système (3.1), fait que le système (3.1) a une dynamique beaucoup plus riche que le système (2.1). Si $r_3K > \frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ le système (2.1) a une infinité d'équilibres positifs $E^+(S, x_1, x_2)$ remplissant un segment L . Dans le système (3.1), la présence d'une temporisation peut provoquer des oscillations non linéaires et conduire à un calcul complètement différent performance. Ainsi, même si le délai est suffisamment petit, on ne peut pas prétendre que le segment L attire toutes les solutions du système (3.1) satisfaisant conditions initiales positives. Nous verrons que tout équilibre positif $E^+(S, x_1, x_2)$ attire juste les solutions du système (3.1) avec des

valeurs initiales proches de $E^+(S, x_1, x_2)$ quand τ est suffisamment petit.

Lemme 1 *Il existe une constante positive M telle que toute solution positive $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ du système (3.1) avec condition initiale positive satisfait :*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) < M, \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) < M, \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) < M$$

Preuve Considérons les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \hat{S}(t) \left(r_3 - \frac{1}{K}\hat{S}(t) - b_1\hat{x}_1(t) \right), \\ \frac{d\hat{x}_1(t)}{dt} = \hat{x}_1(t) \left(-r_1 + a_1\hat{S}(t - \tau) \right), \\ \frac{d\hat{x}_2(t)}{dt} = \hat{x}_2(t) \left(-r_2 + a_2\hat{S}(t - \tau) \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

et :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{S}(t)}{dt} = \tilde{S}(t) \left(r_3 - \frac{1}{K}\tilde{S}(t) - b_2\tilde{x}_2(t) \right), \\ \frac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} = \tilde{x}_1(t) \left(-r_1 + a_1\tilde{S}(t - \tau) \right), \\ \frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} = \tilde{x}_2(t) \left(-r_2 + a_2\tilde{S}(t - \tau) \right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Soit $(\hat{S}(t), \hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))$ et $(\tilde{S}(t), \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ les solutions des systèmes (3.2) et (3.3), respectivement. On sait qu'il existe $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ tels que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \hat{S}(t) < M_1, \limsup_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}_1(t) < M_1, \limsup_{t \rightarrow +\infty} \tilde{S}(t) < M_1$ et $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}_2(t) < M_1$. D'après principe de comparaison la solution $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ du système (3.1) est inférieure à chacun des solutions des systèmes (3.2) et (3.3). On peut donc prendre $M = \max\{M_1, M_2\}$ tel que :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) < M, \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) < M, \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) < M$$

3.1 Existence et stabilité locale des équilibres

Système (3.1) a toujours les équilibres $E_0 = (0, 0, 0)$ et $E_1 = (r_3K, 0, 0)$. De plus, $E_2 = (\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}), 0)$ et $E_3 = (\frac{r_2}{a_2}, 0, \frac{1}{b_2}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}))$

$$\text{Si } \begin{cases} r_3K > \frac{r_1}{a_1}, \\ (r_3K > \frac{r_2}{a_2}). \end{cases}$$

Ainsi le système (3.1) admet un équilibre positif $E_+^* = (S^*, x_1^*, x_2^*)$ si et seulement si $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ et $r_3K > \frac{r_1}{a_1}$, de plus lorsque le système (3.1) a un équilibre positif alors il a une infinité d'équilibres positifs qui remplissent un segment L .

La matrice jacobienne associé au système (3.1) est :

$$J_\tau(S, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K}S - b_1x_1 - b_2x_2 & -b_1S & -b_2S \\ a_1x_1e^{-\lambda\tau} & -r_1 + a_1S & 0 \\ a_2x_2e^{-\lambda\tau} & 0 & -r_2 + a_2S \end{pmatrix}.$$

Pour $E_0 = (0, 0, 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r_3 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne admet trois valeurs propres $r_3, -r_1, -r_2$, deux valeurs propres négatives et une positive c'est à dire que l'origine est instable.

Pour $E_1 = (r_3k, 0, 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -r_3 & -b_1r_3K & -b_2r_3K \\ 0 & -r_1 + a_1r_3K & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 + a_2r_3K \end{pmatrix}.$$

On a trois valeurs propres :
$$\begin{cases} \lambda_1 = -r_3 < 0, \\ \lambda_2 = -r_1 + a_1r_3k, \\ \lambda_3 = -r_2 + a_2r_3k. \end{cases}$$

1. Si $r_3K > \frac{r_1}{a_1}$ ou $r_3K > \frac{r_2}{a_2}$ donc E_1 est instable.

2. Si $r_3K < \frac{r_1}{a_1}$ et $r_3K < \frac{r_2}{a_2}$ c'est à dire $r_3K < \min\{\frac{r_1}{a_1}, \frac{r_2}{a_2}\}$ donc E_1 est asymptotiquement stable.

Pour $E_2 = (\frac{r_1}{a_1}, \frac{1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1}), 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{Ka_1} & \frac{-b_1r_1}{a_1} & \frac{-b_2r_1}{a_1} \\ \frac{a_1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1})e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 + \frac{a_2r_1}{a_1} \end{pmatrix}.$$

La première valeur propre est donnée par $\lambda_1 = -r_2 + \frac{a_2r_1}{a_1}$ et les deux autres valeurs propres provient de la sous matrice D_1 donnée par :

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{Ka_1} & \frac{-b_1r_1}{a_1} \\ \frac{a_1}{b_1K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1})e^{-\lambda\tau} & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec :

$$\begin{cases} \det(D_1) = \frac{r_1}{K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1})e^{-\lambda\tau} > 0, \\ \text{tr}(D_1) = -\frac{r_1}{Ka_1} < 0. \end{cases}$$

Alors de la matrice D_1 on a deux valeurs propres négatives.

- Si $\lambda_1 < 0$ $\frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{a_2}$, Alors E_2 est localement asymptotiquement stable.
- si $\lambda_1 > 0$ $\frac{r_1}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}$, Alors E_2 , alors E_2 est instable.

Pour $E_3 = (\frac{r_2}{a_2}, 0, \frac{1}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2}))$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} -\frac{r_2}{Ka_2} & \frac{-b_1r_2}{a_2} & \frac{-b_2r_2}{a_2} \\ 0 & -r_1 + \frac{a_1r_2}{a_2} & 0 \\ \frac{a_2}{b_2K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1})e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La première valeur propre est donnée par $\lambda_1 = -r_1 + \frac{a_1r_2}{a_2}$ et les deux autres valeurs propres provient de la sous matrice D_2 donnée par :

$$D_2 = \begin{pmatrix} -\frac{r_2}{Ka_2} & \frac{-b_2r_2}{a_2} \\ \frac{a_2}{b_2K}(r_3K - \frac{r_2}{a_2})e^{-\lambda\tau} & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec :

$$\begin{cases} \det(D_2) = \frac{r_2}{K}(r_3K - \frac{r_1}{a_1})e^{-\lambda\tau} > 0, \\ \text{tr}(D_2) = -\frac{r_2}{Ka_2} < 0. \end{cases}$$

- si $\frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{a_1}$, Alors E_2 est asymptotiquement stable.
- si $\frac{r_2}{a_2} > \frac{r_1}{a_1}$, Alors E_2 , alors E_2 est instable.

Pour $E_4^* = (S^*, x_1^*, x_2^*)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} r_3 - \frac{2}{K}S^* - b_1x_1^* - b_2x_2^* & -b_1S^* & -b_2S^* \\ a_1x_1^*e^{-\lambda\tau} & -r_1 + a_1S^* & 0 \\ a_2x_2^*e^{-\lambda\tau} & 0 & -r_2 + a_2S^* \end{pmatrix}.$$

Et comme on a :

$$\begin{cases} r_3 - \frac{1}{K}S^* - b_1x_1 - b_2x_2 = 0, \\ -r_1 + a_1S^* = 0. \end{cases}$$

Et $S^* = \frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}$ Alors on peut écrire $j(E^*)$ comme se suit :

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{K}\frac{r_1}{a_1} & -b_1\frac{r_1}{a_1} & -b_2\frac{r_1}{a_1} \\ a_1x_1^*e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ a_2x_2^*e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(E^* - \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{K}\frac{r_1}{a_1} - \lambda & -b_1\frac{r_1}{a_1} & -b_2\frac{r_1}{a_1} \\ a_1x_1^*e^{-\lambda\tau} & -\lambda & 0 \\ a_2x_2^*e^{-\lambda\tau} & 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$J(E^* - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{K}\frac{r_1}{a_1} - \lambda & -b_1\frac{r_1}{a_1} & -b_2\frac{r_1}{a_1} \\ a_1x_1^*e^{-\lambda\tau} & -\lambda & 0 \\ a_2x_2^*e^{-\lambda\tau} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Nous obtenons :

$$-\lambda^3 - \frac{r_1}{Ka_1}\lambda^2 - (a_1b_1x_1^* + a_2b_2x_2^*)\frac{r_1}{a_1}\lambda e^{-\lambda\tau} = 0,$$

multipliant par (-1) on obtient :

$$\lambda(\lambda^2 + \frac{r_1}{Ka_1}\lambda + (r_1b_1x_1^* + r_2b_2x_2^*)e^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (3.4)$$

d'après l'équation (3.4) on a trois valeurs propres :

$$\lambda = 0,$$

et

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{r_1}{Ka_1}\lambda + (r_1b_1x_1^* + r_2b_2x_2^*)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.5)$$

comme $\frac{r_1}{Ka_1} > 0$ et $(r_1b_1x_1^* + r_2b_2x_2^*) > 0$ nous concluons que toutes les solutions réelles d'équation (3.5) sont négatifs.

On pose $\lambda = i\beta$ avec $\beta > 0$ alors le polynôme $P(\lambda) = 0$ deviendra :

$$-\beta^2 + \frac{i\beta r_1}{a_1 K}\lambda + (r_1b_1x_1 + r_2b_2x_2)e^{-i\beta\tau}, \quad (3.6)$$

on sépare la partie imaginaire et la partie réelle de l'équation (3.6) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\beta^2 + r_1b_1x_1\cos\beta\tau + r_2b_2x_2\cos\beta\tau = 0, \\ \frac{\beta r_1}{a_1 K} - r_1b_1x_1\sin\beta\tau - r_2b_2x_2\sin\beta\tau = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

On met les deux équation à la puissance deux et on les additionnent nous obtenons :

$$\beta^4 + \frac{\beta^2 r_1^2}{a_1^2 K^2} - (r_1b_1x_1 + r_2b_2x_2)^2 = 0,$$

on pose $\sqrt{\mu} = \beta \Rightarrow \mu^2 = \beta^4$ alors nous obtenons :

$$\mu^2 + \frac{\mu r_1^2}{a_1^2 K^2} - (r_1b_1x_1 + r_2b_2x_2)^2 = 0, \quad (3.8)$$

On peut réécrire l'équation (3.8) sous la forme :

$$\left(\mu + \frac{r_1^2}{2a_1^2 K^2}\right)^2 - (r_1b_1x_1 + r_2b_2x_2)^2 - \left(\frac{r_1^2}{2a_1^2 K^2}\right)^2 = 0,$$

donc :

$$\mu = \sqrt{(r_1b_1x_1 + r_2b_2x_2)^2 + \left(\frac{r_1^2}{2a_1^2 K^2}\right)^2} - \frac{r_1^2}{2a_1^2 K^2},$$

alors

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{4(r_1b_1x_1 + r_2b_2x_2)^2 + \left(\frac{r_1^2}{a_1^2 K^2}\right)^2} - \frac{r_1^2}{a_1^2 K^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$> 0.$$

Par conséquent, l'équation (3.5) a une paire de racines imaginaires pures $\pm i\beta$. De plus on résout l'équation $P_\tau(i\beta) = 0$ pour τ , et d'après le système (3.7) on a :

$$\begin{aligned}\tan \beta\tau &= \frac{r_1}{a_1 K \beta} \Leftrightarrow \beta\tau = \arctan \frac{r_1}{a_1 K \beta}, \\ &\Leftrightarrow \tau = \frac{1}{\beta} \arctan \frac{r_1}{a_1 K \beta}.\end{aligned}$$

En calculant la différentiel de l'équation (3.5) par rapport à τ et à λ :

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{a\lambda e^{-\lambda\tau}}{b + 2\lambda - a\tau e^{-\lambda\tau}},$$

avec $a = r_1 b_1 x_1 + r_2 b_2 x_2$ et $b = \frac{r_1}{a_1 K}$,

$$\begin{aligned}Re \left\{ \frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\beta} \right\} &= Re \left\{ \frac{ia\beta e^{-i\beta\tau}}{b + 2i\beta - a\tau e^{-i\beta\tau}} \right\} \\ &= Re \left\{ \frac{ia\beta(\cos\beta\tau - i\sin\beta\tau)}{b + 2i\beta - a\tau(\cos\beta\tau - i\sin\beta\tau)} \right\} \\ &= Re \left\{ \frac{ia\beta(\cos\beta\tau - i\sin\beta\tau) [b - a\tau\cos\beta - i(\sin\beta\tau - 2\beta)]}{[b - a\tau\cos\beta + i(\sin\beta\tau + 2\beta)] [b - a\tau\cos\beta - i(\sin\beta\tau + 2\beta)]} \right\} \\ &= \frac{2a\beta \cos(\beta\tau) + a\beta b \sin(\beta\tau)}{[b - a\tau\cos(\beta\tau)]^2 [2\beta + a\tau\sin(\beta\tau)]^2}.\end{aligned}$$

on pose : $I = 2a\beta^2 \cos(\beta\tau) + a\beta b \sin(\beta\tau)$ alors, $I = 2a\beta^2 \cos(\arctan b) + a\beta b \sin(\arctan b)$.

Nous avons que :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

alors, on obtient :

$$\begin{aligned}I &= \frac{2a\beta^2}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{a\beta b^2}{\sqrt{1+b^2}} \\ &= \frac{2a\beta^2 + a\beta b^2}{\sqrt{1+b^2}} > 0,\end{aligned}$$

donc, on a $Re \left\{ \frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\beta} \right\} = \frac{2a\beta^2 + a\beta b^2}{[b - a\tau\cos(\beta\tau)]^2 [2\beta + a\tau\sin(\beta\tau)]^2 \sqrt{1+b^2}} > 0$.

Donc on a une bifurcation de Hopf, alors chaque équilibre positif $E^* = (S^*, x_1^*, x_2^*)$ du système (3.1) est un équilibre dégénéré avec une variété centrale unidimensionnelle.

3.2 Comportement asymptotique en l'absence d'équilibres positifs

On s'intéresse seulement au point $E_1 = (r_3 K, 0, 0)$, avec $\frac{r_1}{a_1} \neq \frac{r_2}{a_2}$.

Théorème 13 Si $r_3K < \min\{\frac{r_1}{a_1}, \frac{r_2}{a_2}\}$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

Preuve Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = r_3KH \left(\frac{S(t)}{r_3K} \right) + \frac{b_1}{a_1}x_1(t) + \frac{b_2}{a_2}x_2(t) + V_+,$$

$$\text{avec } H(x) = x - 1 - \ln x, V_+ = \int_{-\tau}^0 b_1x_1(t)S(t+\alpha)d\alpha + \int_{-\tau}^0 b_2x_2(t)S(t+\alpha)d\alpha.$$

$V(t) \geq 0$ si et seulement si :

- $S(t) = S^*$.
- $x_1(t) = x_2(t) = 0$.

Alors V est défini positive.

La dérivée de V est donné comme se suit :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dS} \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dV}{dx_2} \frac{dx_2}{dt}, \\ &= \left[1 - \frac{r_3K}{S(t)} \right] S(t) \left[r_3 - \frac{S(t)}{K} - b_1x_1(t) - b_2x_2(t) \right] + \frac{b_1}{a_1}x_1(t) [-r_1 + a_1S(t-\tau)] \\ &\quad + \frac{b_2}{a_2}x_2(t) [-r_2 + a_2S(t-\tau)] + b_1x_1(t)S(t) + b_2x_2(t)S(t) - b_1x_1(t)S(t-\tau) - b_2x_2(t)S(t-\tau), \\ &= 2S(t)r_3 - \frac{S^2(t)}{K} - r_3^2K + r_3Kb_1x_1 + r_3Kb_2x_2 - \frac{b_1}{a_1}r_1x_1(t) - \frac{b_2}{a_2}r_2x_2(t), \\ &= -\frac{1}{K} [S(t) - r_3K]^2 - b_1 \left(\frac{r_1}{a_1} - r_3K \right) x_1(t) - b_2 \left(\frac{r_2}{a_2} - r_3K \right) x_2(t), \\ &< 0. \end{aligned}$$

Comme $r_3K < \min\{\frac{r_1}{a_1}, \frac{r_2}{a_2}\}$ et $\frac{dV}{dt} < 0 \forall S > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$. Et $\frac{dV}{dt} = 0$ si et seulement si $(S(t), x_1(t), x_2(t)) = (r_3K, 0, 0)$. Par l'invariance de La Salle, nous concluons que E_1 est globalement attractif. De plus, on sait que E_1 est localement asymptotiquement stable. Alors E_1 est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 14 1. Si $\frac{r_1}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}$, alors toutes les orbites du système (3.1) dans \mathbb{R}_+^3 sont asymptotique aux orbites sur le plan Sx_2 .

2. Si $\frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{a_2}$, alors toutes les orbites du système (3.1) dans \mathbb{R}_+^3 sont asymptotique aux orbites sur le plan Sx_1 .

Preuve D'après le système (3.1) on a $\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) (-r_1 + a_1S(t-\tau))$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{x_1(t)} &= (-r_1 + a_1 S(t - \tau)) dt, \\
\int_0^t \frac{dx_1(t)}{x_1(t)} &= \int_0^t (-r_1 + a_1 S(t - \tau)) dt, \\
\ln |x_1(t)| - \ln |x_1(0)| &= -r_1 t + \int_0^t (-r_1 + a_1 S(t - \tau)) dt, \\
\frac{x_1(t)}{x_1(0)} &= e^{-r_1 t + \int_0^t (-r_1 + a_1 S(t - \tau)) dt}, \\
x_1(t) &= x_1(0) e^{-r_1 t} e^{a_1 \int_0^t (-r_1 + a_1 S(t - \tau)) dt}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

De la même manière on trouve :

$$x_2(t) = x_2(0) e^{-r_2 t} e^{a_2 \int_0^t (-r_2 + a_2 S(t - \tau)) dt}. \tag{3.10}$$

par des calculs simples nous obtenons :

$$\frac{x_2^{a_1}(t)}{x_1^{a_2}(t)} = \frac{x_2^{a_1}(0)}{x_1^{a_2}(0)} e^{(r_1 a_2 - r_2 a_1) t}$$

1. Si $\frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{a_2}$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[x_2(t)]^{a_1}}{[x_1(t)]^{a_2}} = 0$. Et comme $x_1(t)$ est borné, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_2(t)]^{a_1} = 0$, ce qui signifie que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$.
2. De la même manière Si $\frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{a_1}$ nous obtenons $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$.

Remarque 8 D'après le théorème (14) on voit lorsque $\frac{r_1}{a_1} \neq \frac{r_2}{a_2}$ l'un des prédateurs va à l'extinction. Le système (3.1) deviendra comme se suit :

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= S(t) \left(r_3 - \frac{1}{K} S(t) - b x(t) \right), \\
\frac{dx(t)}{dt} &= x(t) (-r + a S(t - \tau)).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

- Si $r_3 K > \frac{r}{a}$ le système (3.11) a trois point d'équilibre $(0, 0)$, $(r_3 K, 0)$, $(\frac{r}{a}, \frac{1}{bK}(r_3 K - \frac{r}{a}))$.
- Si $r_3 K < \frac{r}{a}$ le système (3.11) a deux point d'équilibre $(0, 0)$, $(r_3 K, 0)$.

Dans ce cas l'équilibre $(0, 0)$ attire tous solutions du système (3.11) dans l'axe S , et l'équilibre $(r_3 K, 0)$ attire toutes les solutions du système (3.11) attend les orbites dans l'axe S .

oui

Conclusion

Cette étude de ce mémoire a montré que le modèle de Lotka-Volterra peut être un outil précieux pour comprendre les interactions entre les espèces dans un écosystème. L'ajout d'un retard dans le modèle a permis de mieux capturer la dynamique temporelle de l'interaction entre la proie et les prédateurs, aussi l'ajout du retard joue un rôle crucial dans la dynamique des population. Il peut entraîner des comportement complexe, mais aussi stabiliser l'écosystème. Nous avons constaté que la concurrence entre les prédateurs peut jouer un rôle important dans la stabilité de l'écosystème et que cela peut conduire à une instabilité si les prédateurs sont en compétition pour la même proie. Nous avons également noté que la prédation peut avoir un effet de régulation sur la population de proie.

Bibliographie

[*Mémoires*]

- [1] A. Elaihar, Etude du modèle de leslie en dynamique des populations, université d'ain temouchent, 2021.
- [2] R. Khaldi, Etude d'un Système Dynamique d'ordre Fractionnaire, université d'ain temouchent, 2022.
- [3] F. Souna, Etude mathématiques du gréganisme en ecologie, université de tlemcen, 2016.

[*Articles*]

- [4] S. Charles Biologie Mathématique et modélisation (M1 - aMIV), 2008.
- [5] S. Guo, M. Xu, Dynamics of a DELAYED LOTKA-VOLTERRA model with two predators competing for one prey. Discrete and Continuous dynamical systems series B, 5573 – 5595, 2022.
- [6] S. B. Hsu, S. P. Hubbel, et P. Waltman, competing predators, SIAM J. Appl. Math. 35 (1978), pp. 617 – 625.
- [7] S. B. Hsu, S. P. Hubbel, et P. Waltman, construbition to the theory of competing predators, Ecological Monographs, 48 (1978), pp. 337 – 349.
- [8] S.-B. Hsu et S. P. Hubbell, Two predators competing for two prey species : An analysis of MacArthur's model, Math. Biosci47(1979), pp.143 – 171.
- [9] J. LIBRE et D. XIAO, Global dynamics of a LOTKA–VOLTERRA model with two predators competing for one prey, Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM J. Appl. MATH. 74, pp. 434–453, 2014
- [10] J. Louis Pac, système dynamique, cours et exercices corrigés, Dunod, Paris,2012, 2016.
- [11] W. Liu, D. Xiao, et Y. Yi, Relaxation oscillations in a class of predator-prey systems, J. Differential Equation, 188(2003), pp. 306 – 331.

- [12] S. Muratori et S. Rinaldi, Remarks on competitive coexistence, *SIAM J. Appl. Math.* 49 (1989), pp. 1462 – 1472.
- [13] J. L. Dalecki and M. G. Krein. Stability of solution of differential equations in banach space. American math. Society providence Rhode Island, 1975.
- [14] P. Mullhaupt Méthode de Lyapunov et théorème de Lasalle, analyse et commande des systèmes non linéaires.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous étudions la dynamique globale d'une classe de systèmes Lotka-Volterra tridimensionnels à huit paramètres. Ces systèmes décrivent deux prédateurs en compétition pour la même nourriture, c'est-à-dire qu'ils partagent une proie. Par analyse théorique de ce système, nous obtenons des conditions suffisantes et nécessaires pour que le principe d'exclusion compétitive se maintienne, ce qui donne le comportement dynamique global des trois espèces. En prenant en compte les retards dans les interactions entre ces espèces, les retards peuvent être causés par divers facteurs, tels que le temps de digestion des prédateurs ou la période de gestation des proies.

Mot clés : Prédateur, Proie, Lotka-Volterra, Dynamique Globale, Extinction, Coexistence.

ملخص:

في هذه الأطروحة، ندرس الديناميكيات العالمية لفئة من أنظمة لوتكا فولتيرا ثلاثية الأبعاد المكونة من ثمانية معلمات. تصف هذه الأنظمة مفترسين يتنافسان على نفس الطعام ، أي أنها تشترك في الفريسة. من خلال التحليل النظري لهذا النظام ، نحصل على الشروط الكافية والضرورية للحفاظ على مبدأ الاستبعاد التنافسي ، والذي يعطي السلوك الديناميكي العالمي للأنواع الثلاثة. بالنظر إلى التأخيرات في التفاعلات بين هذه الأنواع ، يمكن أن تكون التأخيرات ناتجة عن عوامل مختلفة ، مثل وقت هضم الحيوانات المفترسة أو فترة حمل الفريسة.

كلمات مفتاحية: مفترس ، فريسة ، لوتكا فولتيرا ، ديناميات عالمية ، انقراض ، تعايش.

Abstract :

This memory, we study the global dynamics of a class of eight parameter three dimensional Lotka-Volterra systems. This system describes two predators competing for the same food, that is to say, they share a prey. By theoretical analysis on this system, we obtain sufficient and necessary conditions for the exclusion and coexistence of the three species. By taking into account the delays in interactions between these species, delays can be caused by various factors, such as the digestion time of predators or the gestation period of prey.

Keywords : Predator, Prey, Lotka-volterra ,Global Dynamics, Extinction, Coexistence.