

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département des Mathématiques et de l'informatique



Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques  
Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation  
Thème

# Equations différentielles à retard

Présenté Par :

1) Melle Derghal Mama

Devant le jury composé de :

Dr Bennafla Djamila	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Présidente
Dr Hellal Meryem	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent )	Examinatrice
Dr. Mammam Imane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent )	Encadrante

*Année Universitaire 2022/2023*

# Remerciement




*Je remercie, avant tout Allah le tout puissant de m'avoir donné la force et la volonté nécessaire pour achever ce travail.*

*Je remercie aussi mon encadrante Madame Mammam Imane, pour son aide, ses conseils, son savoir-faire et ses compétences.*

*Je remercie aussi les membres du jury Dr Bennafla Djamila, et Dr Hellal Meryem de m'avoir fait l'honneur d'en faire partie et d'avoir accepté l'évaluation de ce mémoire.*

*Je tiens à remercier mon unique source de joie, ma mère, mon père, et toute ma famille, qui m'ont soutenu, durant mon cursus universitaire.*



# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail, à mes  
deux parents.*

*A ma sœur et mes frères, qui m'ont  
soutenu durant tout mon cursus  
universitaire.*

*A ma très chère amie Asya qui m'a  
beaucoup aidé et m'a beaucoup  
encouragé.*

*A tous mes amis.*

*A tous ceux que j'aime.*



# Table des matières

<b>Notations et abréviations</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>7</b>
I.1 Équations différentielles ordinaires . . . . .	7
I.1.1 Existence et unicité de solution . . . . .	7
I.2 Notion de stabilité . . . . .	8
I.3 Stabilité des systèmes linéaires . . . . .	9
I.3.1 Stabilité d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	9
I.3.2 Linéarisation . . . . .	10
I.4 Stabilité au sens Lyapunov . . . . .	11
<b>II Stabilité des équations différentielles à retard</b>	<b>13</b>
II.1 Équation différentielle à retard constant . . . . .	13
II.2 Intégration des équations différentielles à retard constant par la méthode des étapes . . . . .	14
II.3 Stabilité des équations différentielles à retard . . . . .	17
II.4 Équation différentielle linéaire à retard à coefficient constants . . . . .	18
II.5 Etude de l'équation $\dot{y}(t) = ay(t) + by(t - r)$ . . . . .	20
<b>III Équations à retard en biologie</b>	<b>24</b>
III.1 Le modelé de Malthus . . . . .	24
III.2 Un modèle d'hématopoïèse . . . . .	25

**TABLE DES MATIÈRES** **4**

---

III.2.1	Modèle mathématique . . . . .	25
III.2.2	Points d'équilibre et stabilité . . . . .	26
III.2.3	Stabilité pour le $r = 0$ . . . . .	26
III.2.4	Stabilité pour $r > 0$ . . . . .	28
<b>Conclusion</b>		<b>37</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>38</b>

# Notations et abréviations

EDO	:Équation différentielle ordinaire.
EDR	:Équation différentielle à retard.
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réelles.
$\mathbb{R}_+$	:L'ensemble des nombres réels positifs ou nul.
$C([-r, 0], \mathbb{R})$	: L'ensemble des fonctions continues de $[-r, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$ .
$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$	: La dérivée première qui représente la vitesse du système.
$Tr(A)$	: La trace d'une matrice.
$\det(A)$	: Déterminant d'une matrice.
$y^*$	:le point d'équilibre du système linéaire.
$Re(\lambda)$	:La partie réelle de $\lambda$ .

---

# Introduction

Les équations différentielles à retard surviennent dans certains modèles dont l'état à un instant donné, est une fonction qui dépend de son passé. On peut rencontrer ces équations dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie . . . etc. En effet, dans certains phénomènes, on s'est aperçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrire l'évolution sur un intervalle de temps donné.

À notre connaissance l'apparition des équations différentielles à retard (EDR) remonte au 18<sup>ème</sup> siècle. L'analyse de ces équations a commencé dans les années cinquante, ces années ont vu une explosion de la théorie qui a été largement développée, les EDR intéressent beaucoup de chercheurs travaillant sur la viscoélasticité, les problèmes mécaniques, les réacteurs nucléaires, le flux de chaleurs, les réseaux de neurones, la combustion, l'interaction des espèces, les modèles micro-biologiques, épidémiologiques ou physiologique, ainsi que beaucoup d'autres.

Dans la deuxième moitié du dernier siècle, la théorie des équations à retard a connu un grand développement, notamment on trouve Bellman et Cooke (1963) [12], El'sgol'et Norkin (1973) [7], Lunel et Walther (1995)[11]. Une classe générale d'équations différentielles à retard a été initialement introduite par V. Volterra (1928)[13], il a étudié le modèle proie-prédateur.

Beaucoup de phénomènes rencontrés en physique, biologie, chimie, étude des réseaux de neurones, circulation routière,...etc. ont trouvé dans la théorie des équations à retard un bon moyen de modélisation, (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires).

On appelle équation à retard toute équation dans laquelle la valeur de la dérivée à

un instant de la solution dépend aussi des valeurs prises avant cet instant. Le retard joue un rôle dominant dans plusieurs domaines et que les modèles avec retard fournissent des résultats plus précis et réalistes que leurs homologues sans retard.

Ce mémoire contient trois chapitres répartis comme suit :

- **Le premier chapitre** : nous nous intéressons à introduire quelques notions de base d'équations différentielles ordinaires et certains résultats de la théorie d'existence et d'unicités des solutions à valeur initiale (problème de Cauchy).
- **Le deuxième chapitre** : est consacré à l'étude des équations différentielles à retard constant, nous donnons une définition générale, nous déterminons la solution d'une EDR et un théorème d'existence et d'unicité de la solution. Ainsi que la méthode d'intégration des étapes.
- **le troisième chapitre** : consiste à donner des applications des équations différentielles à retard en biologie, nous donnons quelques modèles, nous déterminons les points d'équilibre et nous étudions leur stabilité. A la fin, nous donnons une conclusion et quelques perspectives.



# Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur les équations différentielles ordinaires, notamment quelques résultats d'existence, d'unicité, ainsi que la linéarisation et la stabilité des points d'équilibre.

## I.1 Équations différentielles ordinaires

**Définition I.1.1** [3] Soient  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction donnée,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in U$ , et  $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ . Un système de  $n$  équations différentielles ordinaires sur  $U$  est une relation de type :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

**Définition I.1.2** [3] La fonction  $y \in \mathcal{C}^1(U)$  est dite solution de (I.1) si  $y$  vérifie le système (I.1).

### I.1.1 Existence et unicité de solution

**Définition I.1.3 (Fonction Lipschitzienne)** [4] Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $g : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $g$  est dite lipschitzienne par rapport à  $y$  si pour tout  $(t, y), (t, z) \in I \times U$ , il existe  $L > 0$  tel que

$$\|g(t, y(t)) - g(t, z(t))\| \leq L \|y(t) - z(t)\|. \quad (\text{I.2})$$

**Théorème I.1.1** [4] Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $g : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $g$  est lipschitzienne par rapport à  $y$ , alors on a les propriétés suivantes

**Existence** : Il existe  $T > 0$  et  $y \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T], J)$  solution du problème de Cauchy (I.1).

**Unicité** : Si  $z$  est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, alors  $z$  coïncide avec  $y$  sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .

**Régularité** : Si de plus  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ , alors  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^{r+1}$ .

**Remarque I.1.1** Si  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  elle est localement lipschitzienne.

**Définition I.1.4** Le point  $y^* \in U$  est dit point d'équilibre du système (I.1) si  $g(y^*) = 0$ .

## I.2 Notion de stabilité

**Définition I.2.1** [6] L'équilibre  $y^*$  de (I.1) est dit stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $y(t)$  de (I.1) on a

$$\|y(t_0) - y^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \|y(t) - y^*\| < \varepsilon.$$

**Définition I.2.2** [10] L'équilibre  $y^*$  de (I.1) est dit instable, s'il existe  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\eta > 0$ , tel qu'il existe une solution  $y(t)$  de (I.1) on a

$$\|y(t_0) - y^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \|y(t) - y^*\| \geq \varepsilon.$$

**Définition I.2.3** [6] L'équilibre  $y^*$  de (I.1) est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe  $r > 0$  tel que pour toute solution  $y(t)$  de (I.1) on a

$$\|y(t_0) - y^*\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*\| = 0.$$

## I.3 Stabilité des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{Y}(t) = A.Y(t) \quad (\text{I.3})$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  (avec  $s = 1, 2, \dots$ ) les valeurs propres de la matrice  $A$  et  $y^* = (y_1, \dots, y_n)$  avec  $n \in \mathbb{R}^n$  le point d'équilibre du système linéaire (I.3).

### Théorème I.3.1 [14]

- (i) Si les valeurs propres de la matrice  $A$  ont des parties réelles nulles ou négatives alors l'équilibre  $y^*$  est stable.
- (ii) Si les valeurs propres de la matrice  $A$  ont des parties réelles strictement négatives alors l'équilibre  $y^*$  est asymptotiquement stable.
- (iii) Si l'une des valeurs propres de  $A$  a une partie réelle positive alors l'équilibre  $y^*$  est instable.

### I.3.1 Stabilité d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Soit le système suivant

$$\dot{Y} = AY$$

où  $A$  une matrice carré de dimension  $2 \times 2$ , et  $\det(A) \neq 0$ . Le seul point d'équilibre de ce système est le point  $(0, 0)$ .

La matrice  $A$  admet deux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  solution de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \text{ avec } \begin{cases} \text{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \end{cases} .$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant

$$\Delta = [Tr(A)]^2 - 4det(A).$$

•1<sup>er</sup> Cas  $\Delta = 0$

On a une valeur propre double :  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$  et  $det(A) = \frac{1}{4}[Tr(A)]^2$ ,

1. si  $\lambda_0 > 0$ ,  $Tr(A) = 2\lambda_0 > 0$  et  $det(A) = \lambda_0^2 > 0$  alors l'origine est instable.
2. Si  $\lambda_0 < 0$  et  $Tr(A) = 2\lambda_0 < 0$  alors l'origine est stable.

•2<sup>eme</sup> Cas  $\Delta > 0$

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes.

1. Si  $det(A) < 0$  et les valeurs propres de la matrice  $A$  sont de signes opposées alors, l'origine est instable.
2. Si  $det(A) > 0$  et  $Tr(A) < 0$ , alors l'origine est stable.
3. Si  $det(A) > 0$  et  $Tr(A) > 0$ , alors l'origine est instable.

•3<sup>eme</sup> Cas  $\Delta < 0$

On a deux valeur propre complexes conjuguées  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ .

1. Si  $Tr(A) > 0$  et la partie réelle des valeurs propres est positive, alors l'origine est un foyer instable.
2. Si  $Tr(A) < 0$  et la la partie réelle des valeurs propres est négative, alors l'origine est un foyer stable.
3. Si  $Tr(A) = 0$  et la partie réelle des valeurs propres est nulle, alors l'origine est un centre.

## I.3.2 Linéarisation

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{y} = g_1(y, z) \\ \dot{z} = g_2(y, z) \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

avec  $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  deux fonctions non linéaire,  $y, z \in \mathbb{R}^2$ ,  $(y^*, z^*)$  le point d'équilibre du système (I.4) donné par

$$\begin{cases} \dot{y} = g_1(y^*, z^*) = 0 \\ \dot{z} = g_2(y^*, z^*) = 0 \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} u(t) = y(t) - y^* \\ v(t) = z(t) - z^* \end{cases},$$

par se changement de variables, on se place dans un voisinage de  $(0, 0)$ , et par un développement de Taylor du premier ordre de  $g_1$  et  $g_2$ , on a

$$\begin{cases} u(t) = \dot{y} = g_1(0, 0) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(0, 0)(y - 0) + \frac{\partial g_1}{\partial z}(0, 0)(z - 0) \\ v(t) = \dot{z} = g_2(0, 0) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(0, 0)(y - 0) + \frac{\partial g_2}{\partial z}(0, 0)(z - 0) \end{cases}$$

mais  $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$  ainsi obtient le système linéaire  $\dot{Y} = J.Y$  où  $Y = (u, v)^t$ , et la matrice  $J$  représente la matrice jacobienne de la matrice  $A$ , et elle est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y}(0, 0) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(0, 0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(0, 0) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(0, 0) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent le système linéaire obtenu approxime le système de départ au voisinage du point d'équilibre  $(0, 0)$ .

## I.4 Stabilité au sens Lyapunov

**Définition I.4.1** [14] Soit  $V : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue,  $V$  est dite définie positive si :

1.  $V(0) = 0$ ,
2.  $V(y) > 0$  pour tout  $y \neq 0$ ,

$V$  est dite définie négative si  $-V$  est définie positive.

**Définition I.4.2** [1] Une fonction  $V : I \times U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite fonction de Lyapunov si :

- $V$  est définie positive .
- $\dot{V}(t, y) < 0$  pour tout  $y \in U \setminus \{0\}$ .

**Théorème I.4.1** [10] Soit  $y^* = 0$  un point d'équilibre de (I.1) et  $V$  une fonction définie positive sur un voisinage de  $y^*$ .

1. Si  $\dot{V} \leq 0$ ,  $\forall y \in U \setminus \{0\}$ , alors  $y^*$  est stable.
2. Si  $\dot{V} < 0$ ,  $\forall y \in U \setminus \{0\}$ , alors  $y^*$  est asymptotiquement stable.

# Stabilité des équations différentielles à retard

Dans ce chapitre, nous allons étendre les notions et résultats de stabilité dans le cas des équations différentielles à retard.

## II.1 Équation différentielle à retard constant

**Définition II.1.1** [9] On appelle *équation différentielle à retard constant*, une équation différentielle de la forme :

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t - r)) \quad (\text{II.1})$$

où  $g : I \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction donnée,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}^n$  et  $r$  un nombre réel strictement positif qu'on appelle le retard.

**Remarque II.1.1** Pour déterminer la solution de l'équation différentielle sur un intervalle  $[t_0, t_0 + r]$ , il faut connaître  $y(t)$  sur un intervalle antérieur  $[t_0 - r, t_0[$ .

**Définition II.1.2** [9] Une fonction sur  $[t_0 - r, \infty[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , différentiable sur  $[t_0, \infty)$  est dite *solution* de l'équation (II.1), si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} y_{[t_0-r, t_0]} = \phi \\ \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t - r)) \quad \text{pour } t \in [t_0, \infty) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

*Autrement dit*

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{pour } t \in [t_0 - r, t_0] \\ \phi(t) + \int_{t_0}^t g(s, y(s), y(s-r)) & \text{pour } t \in [t_0 - r, \infty) \end{cases}. \quad (\text{II.3})$$

*Pour énoncer un résultat d'existence et unicité de la solution, on considère le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-r)), & t > r \\ y(t) = \phi(t) & t \in [-r, 0] \text{ et } \phi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}) \end{cases}. \quad (\text{II.4})$$

**Théorème II.1.1** [8] *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $g$  une fonction donnée.*

*Si  $g : I \times U^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue, alors le problème (II.4) admet au moins une solution.*

*Si de plus  $g$  est localement lipschitzienne par rapport aux deux derniers variables, alors cette solution est unique.*

## II.2 Intégration des équations différentielles à retard constant par la méthode des étapes

La méthode des étapes dite aussi la méthode pas à pas permet de résoudre numériquement les EDR et permet par la même occasion d'établir l'existence et l'unicité de la solution.

Pour expliquer cette méthode considérons l'équation linéaire à retard avec coefficients variables :[7]

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = b_1(t)y(t) + b_2(t)y(t-r), & t \in [0, r] \\ y(t) = \phi(t) & t \in [-r, 0] \end{cases}. \quad (\text{II.5})$$

On va résoudre ce problème par la méthode des étapes. Le principe de cette méthode est de chercher des solutions sur des intervalles de types  $[pr, (p+1)r]$  où



$p \in \mathbb{N}$ , en suivant les étapes suivantes :

**Étape 1 :** Dans l'intervalle  $[-r, 0]$ , la solution  $y(t)$  est la fonction donnée  $\phi(t)$ , alors le problème (II.5) est résolu dans l'intervalle  $[-r, 0]$ , et la solution est donnée par :  $y_0(t) = \phi(t)$  pour  $t \in [-r, 0]$ .

**Étape 2 :** Dans l'intervalle  $[0, r]$ , si  $t \in [0, r]$  alors  $t - r \in [-r, 0]$ , donc  $y(t - r) = y_0(t - r)$  dans l'intervalle  $[0, r]$  et le système (II.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = b_1(t)y(t) + b_2(t)y_0(t - r), & t \in [0, r] \\ y(0) = \phi(0) \end{cases}, \quad (\text{II.6})$$

qui est un problème à valeur initiale pour une équation différentielle ordinaire EDO où  $y_0(t - r) = \phi(t - r)$  est connue. Ainsi, on résout cette EDO dans  $[0, r]$  en utilisant la condition initiale  $y(0) = \phi(0)$ , et on désigne par  $y_1(t)$  la solution dans  $[0, r]$ .

**Étape 3 :** Dans l'intervalle  $[r, 2r]$ , si  $t \in [r, 2r]$  alors  $t - r \in [0, r]$ , donc  $y(t - r) = y_1(t - r)$  dans l'intervalle  $[r, 2r]$  et le système (II.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = b_1(t)y(t) + b_2(t)y_1(t - r), & t \in [r, 2r] \\ y(r) = y_1(r) \end{cases}, \quad (\text{II.7})$$

cette (E.D.O) avec la condition initiale  $y_1(r)$  peut à son tour être résolue pour trouver la solution  $y_2(t)$  dans  $[r, 2r]$ .

**Exemple II.2.1** Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = my(t - r), & t \in [0, 2r] \\ y(t) = \phi(t) = 1 & t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

**Étape 1 :** Dans  $[-r, 0]$  la solution est

$$y_1(t) = \phi(t) = 1.$$

**Étape 2 :** L'intégration dans  $[0, r]$ ,

Soit  $t \in [0, r]$  alors  $(t - r) \in [-r, 0]$  donc  $y(t - r) = \phi(t - r) = 1$  car  $y(t) = 1$  pour  $t \in [-r, 0]$ , alors

$$\int_0^t y'(s)ds = \int_0^t my(s - r)ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t m\phi(s - r)ds + y(0) \\ &= \int_0^t mds + y(0) \\ &= mt + 1. \end{aligned}$$

Ainsi la solution sur l'intervalle  $[0, r]$  est  $y_2(t) = mt + 1$ .

**Étape 3 :** Dans l'intervalle  $[r, 2r]$

$$\begin{aligned} \int_r^t y'(s)ds &= \int_r^t my(s - r)ds \\ \Rightarrow y(t) &= \int_r^t my(s - r)ds + y(r). \end{aligned}$$

Si  $t \in [r, 2r]$  alors  $(t - r) \in [0, r]$  donc  $y(t - r) = m(t - r) + 1$  car  $y(t) = mt + 1$  pour  $t \in [0, r]$ , par conséquent

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_r^t m(m(s - r) + 1)ds + (mr + 1) \\ &= \left[ \frac{m^2}{2}s^2 - m^2rs + ms \right]_r^t + (mr + 1) \\ &= \frac{m^2}{2}t^2 - m^2rt + mt + \frac{m^2}{2}r^2 + 1. \end{aligned}$$

Alors la solution sur l'intervalle  $[r, 2r]$  est

$$y_3(t) = \frac{m^2}{2}t^2 - m^2rt + mt + \frac{m^2}{2}r^2 + 1.$$

et ainsi de suite on continue dans les intervalles qui suivent  $[2r, 3r], \dots$

## II.3 Stabilité des équations différentielles à retard

Soit  $r \geq 0$ . On note par  $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}_+)$  l'ensemble des fonctions continues définies sur  $[-r, 0]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

$$\|\phi\| = \sup\{\phi(\theta) : -r \leq \theta \leq 0\}.$$

Soit  $\phi$  une application donnée dans  $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}_+)$  et soit le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-r)), & \text{pour } t > 0 \\ y(t) = \phi(t), & \text{pour } t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

**Définition II.3.1** [8] *Un équilibre  $y = y^*$  de (II.9) est dit stable si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $|\phi(t) - y^*| \leq \delta$  pour  $t \in [-r, 0]$  implique que toutes solutions  $y$  de (II.9), de condition initiale  $\phi$ , satisfait l'inégalité  $|y(t) - y^*| < \epsilon$  pour tout  $t \geq 0$ .*

*Si de plus il existe  $\delta_0 > 0$  tel que  $|\phi(t) - y^*| \leq \delta_0$  implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$ , alors  $y^*$  est dit asymptotiquement stable pour  $t \in [-r, 0]$ .*

**Définition II.3.2** *On dit qu'un équilibre est linéairement stable s'il est stable pour le linéarisé au voisinage de cet équilibre.*

**Définition II.3.3** [9] *On dit qu'une solution  $y$  de (II.9) est oscillatoire par rapport à une certaine valeur  $y^*$ , s'il existe une suite  $(t_n)$  avec  $t_n \geq 0$  et  $t_n \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , telle que  $y(t_n) = y^*$ . Sinon on dit qu'elle est non oscillatoire.*

*Dans le cas où  $y^* = 0$ , on dit simplement que  $y$  est oscillatoire ou non oscillatoire, respectivement.*

## II.4 Équation différentielle linéaire à retard à coefficient constants

Considérons l'équation différentielle à retards du premier ordre comme suite

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^m A_i y(t - r_i) \quad (\text{II.10})$$

où  $A_i$  est une matrice constante  $n \times n$  pour tout  $i$ , et  $0 \leq r_i \leq r$  pour tout  $i$ , avec  $r > 0$  fixé. L'équation caractéristique associée à (II.10) est

$$\det(\lambda I - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda r_i}) = 0 \quad (\text{II.11})$$

Nous avons les deux résultats suivants

**Théorème II.4.1** [8] *Soit  $\rho$  un nombre réel donné. L'équation caractéristique (II.11) admet au plus un nombre fini de racines  $\lambda$  tel que  $\text{Re}(\lambda) \geq \rho$ .*

*En conséquence, pour  $\rho = 0$ , ce résultat affirme que "la plupart" des racines de l'équation (II.11) ont une partie réelle strictement positive.*

**Théorème II.4.2** *Soit  $\rho$  un nombre réel donné. Si  $\text{Re}(\lambda) < \rho$ , où  $\lambda$  est une racine de l'équation caractéristique (II.11), alors il existe une constante  $N > 0$  telle que, pour tout  $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}_+)$ , la solution  $y$  de (II.10) satisfait l'inégalité suivante*

$$\|y(t, \phi)\| \leq N \|\phi\| e^{\rho t}, \quad \forall t \geq 0$$

*Le résultat dont nous arrivons en arrangeant ces deux derniers est comme suite*

**Corollaire II.4.1** *Si  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , pour tout solution de l'équation caractéristique (II.11), alors il existe des constantes  $N, \delta > 0$  telles que, pour tout  $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}_+)$ , la solution  $y$  de (II.10) vérifie*

$$\|y(t, \phi)\| \leq N \|\phi\| e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0$$

En d'autre terme, si toutes les racines de l'équation caractéristique (II.11) ont une partie réelle strictement négative, les solutions de l'équation de (II.10) décroissent exponentiellement vers 0, de la même manière que dans le cas les équations différentielles ordinaires ( $r = 0$ ).

**Sur l'équation à retard**  $\dot{z}(t) = az(t - r) - bz(t)$ .

Nous rencontrerons souvent l'équation différentielle linéaire à retard suivante

$$\dot{z}(t) = az(t - r) - bz(t), \quad (\text{II.12})$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ , et  $b > 0$

**Lemme II.4.1** Si  $|a| < b$ , alors toutes les solutions de l'équation (II.12) tendent vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

**Démonstration II.4.1** En cherchant une solution de la forme  $e^{\lambda t}$ , on obtient l'équation caractéristique associée (II.12).

$$\lambda = ae^{-\lambda r} - b.$$

On commence par montrer que la partie réelle de toute solution de cette équation caractéristique est négative.

Posons

$$\lambda = \mu + i\sigma.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \mu + i\sigma &= ae^{-\mu r - i\sigma r} - b \\ &= ae^{-\mu r} e^{-i\sigma r} - b \\ &= ae^{-\mu r} (\cos(\sigma r) + i \sin(\sigma r)) - b. \end{aligned}$$

En considérant la partie réelle de cette équation, on obtient

$$\mu + b = ae^{-\mu r} \cos(\sigma r).$$

Si  $\mu \geq 0$ , alors on a

$$b \leq \mu + b = ae^{-\mu r} \cos(\sigma r) \leq ae^{-\mu r} \leq a.$$

Qui est en contradiction avec l'hypothèse  $|a| < b$ .

Ainsi, toutes les racines ont une partie réelle strictement négative. C'est alors une simple application du Corollaire II.4.1 qui permet de déduire que toutes les solutions  $z$  de l'équation (II.12) ont une borne de forme

$$|z(t)| \leq Ne^{-\delta t}, \quad \delta > 0.$$

Alors, on voit que les solutions s'approchent de 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$

## II.5 Etude de l'équation $\dot{y}(t) = ay(t) + by(t - r)$

On considère l'équation à retard suivante

$$\dot{y}(t) = ay(t) + by(t - r),$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $r > 0$ .

On pose

$$x(t) = e^{-at}y(t), \quad \alpha = -be^{-ar}.$$

Alors

$$\dot{x}(t) = -ae^{-at}y(t) + e^{-at}\dot{y}(t).$$

On remplace  $y(t) = x(t)e^{at}$ , on obtient

$$\dot{x}(t) = be^{-ar}x(t - r),$$

donc

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t - r), \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si  $r = 0$  l'état stationnaire  $x \equiv 0$  est asymptotiquement stable pour tout  $\alpha > 0$  et instable pour  $\alpha < 0$ . Supposons maintenant que  $r > 0$ .

En faisant le changement de temps  $s = \eta t, \eta > 0$ , l'équation pour  $X(s) = x(t)$  devient

$$\frac{dX(s)}{ds} = \eta^{-1} \frac{dx(t)}{dt} = -\alpha \eta^{-1} x(t - r) = -\alpha \eta^{-1} X(s - \eta r).$$

— Si  $\eta = \alpha$  et  $\tau = \alpha r$  on obtient l'équation

$$\frac{dX}{ds} = -X(s - \tau).$$

— Si  $\eta = 1/r$  et  $\beta = \alpha r$  on obtient l'équation

$$\frac{dX}{ds} = -\beta X(s - 1).$$

Afin de déterminer la stabilité de la solution triviale ( $x^* \equiv 0$ ) d'une équation linéaire à retard, nous procédons comme pour les EDO. Nous cherchons des valeurs de  $\lambda \in \mathbb{C}$  telles que  $x(t) = e^{\lambda t} x_0, x_0 \neq 0$ , soit une solution.

Considérons par exemple l'équation

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t - 1).$$

On introduit l'opérateur linéaire, défini sur les fonctions différentiables, par

$$L(x)(t) = \dot{x}(t) + \beta x(t - 1).$$

Si on note par  $e^\lambda$ , la fonction  $e^\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ , on obtient

$$L(e^\lambda \cdot x_0) = \lambda e^\lambda \cdot x_0 + \beta e^{\lambda \cdot (-1)} x_0 = e^\lambda \cdot x_0 (\lambda + \beta e^{-\lambda})$$

$L(e^\lambda \cdot x_0) \equiv 0$  et  $x_0 \neq 0$ , si et seulement si  $h(\lambda) = \lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$ , avec  $h$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$ .

- L'ensemble des racines de la fonction  $h$ ,  $\{\lambda \in \mathbb{C} : h(\lambda) = 0\}$ , ne peut pas avoir

de points d'accumulation.

- $\forall R_1 < R_2$ , l'ensemble  $\{\lambda \in \mathbb{C} : h(\lambda) = 0, R_1 \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq R_2\}$  est fini.
- L'ensemble des racines de  $h$ ,  $\{\lambda \in \mathbb{C} : h(\lambda) = 0\}$ , est au plus dénombrable.

Si  $\{\lambda_n\}$  est une suite de racines distincts de  $h$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(\lambda_n) = -\infty$$

Pour chaque  $M \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq M$  pour au plus un nombre fini de racines de  $h$ .

- Si  $\lambda$  est racine de  $h$  alors  $\lambda^*$  est aussi racine de  $h$ .
- Si  $\lambda$  est racine de  $h$ , alors elle est d'ordre fini : il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $h(\lambda) = h'(\lambda) = \dots = h^{(m)}(\lambda) = 0$  et  $h^{(m+1)}(\lambda) \neq 0$ .

Soit l'équation caractéristique

$$h(\lambda) = \lambda + \beta e^{-\lambda} = 0.$$

En posant  $x = \operatorname{Re}(\lambda)$  et  $y = \operatorname{Im}(\lambda)$ , l'équation  $h(\lambda) = 0$  est équivalente au système

$$\begin{cases} x = -\beta e^{-x} \cos(y) \\ y = \beta e^{-x} \sin(y) \end{cases}$$

**Racines réelles** ( $y = 0$  et  $\lambda = x \in \mathbb{R}$ )

$$f(x) = xe^x = -\beta$$

- Si  $\beta < 0$ , il y a une racine réelle  $x > 0$  unique implique que l'équilibre 0 est instable.
- Si  $\beta > 0$  implique que  $x < 0$  et donc 0 est stable.
- Si  $0 < \beta < e^{-1}$ , alors il y a 2 racines réelles  $x_1 < x_2 < 0$ .
- Si  $\beta = e^{-1}$ , alors il y a une racine réelle unique  $x_1 = x_2 < 0$  de multiplicité 2.



- 
- Si  $\beta > e^{-1}$ , il n'y a pas de racines réelle implique que toute solution est oscillante.
  - Si  $0 < \beta < \pi/2$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $Re(\lambda) \leq -\delta$ , pour toute racine  $\lambda \Rightarrow 0$  est asymptotiquement stable.
  - Si  $\beta = \pi/2$ , alors  $\lambda = \pm i\pi/2$  sont racines et toutes les autres racines sont à partie réelle négative.
  - Si  $\beta > \pi/2$ , alors il y a des racines  $\lambda = x \pm iy$  avec  $x > 0$  et  $y \in (\pi/2, \pi)$ .

# Équations à retard en biologie

Dans ce chapitre on va étudier deux modèles mathématiques en biologie, un à une espèce qui est le modèle de Malthus à retard et le deuxième est un modèle d'hématopoïèse.

## III.1 Le modèle de Malthus

C'est un modèle mathématique qui décrit l'évolution d'une seule espèce en temps  $t (t \in \mathbb{R}^+)$  qu'on note  $x(t)$ . [15][13]

$$x'(t) = bx(t) - dx(t).$$

Où

- Le terme  $bx(t)$  détermine de population contribue à la naissance d'individus et  $b$  représente le taux de naissance.
- $dx(t)$  détermine la mort naturelles d'individus et  $d$  est le taux de mortalité.

La solution de cette équation est donnée par

$$x(t) = e^{(b-d)(t-t_0)}x(t_0), \quad t \geq t_0.$$

Donc on distingue 3 cas :

1. Une croissance exponentielle quand  $b > d$  et on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty.$$

2. Une extinction de la population quand  $b < d$  et on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

3. Une croissance constante quand  $b = d$  et on a

$$x(t) = x(t_0)$$

A près un temps assez grand, le modèle n'est pas valide, il ne tient pas compte de plusieurs facteurs.

En 1973, Cooke et Yorke ont proposé un modèle "de Malthus" modifié (population d'individus adultes) :

$$x'(t) = bx(t-r) - dx(t) \quad (\text{III.1})$$

où  $r > 0$  est l'âge auquel un individu

$x(t-r)$  : est la population qui peut se reproduire ainsi, la contribution des individus à la dynamique de la population n'est pas instantanée, mais retardée, le temps qu'ils deviennent adultes.

Il s'agit d'une équation linéaire à retard discret, le retard est égal à  $r$ .

## III.2 Un modèle d'hématopoïèse

### III.2.1 Modèle mathématique

Plusieurs maladies comme présenté dans le cycle cellulaire, après qu'une cellule entre dans la phase de prolifération, la cellule ne se divise qu'après un temps  $r$ , le temps  $r$  est composé de quatre phases :  $G_1$  est la phase pre-synthétique,  $S$  phase synthétique de ADN,  $G_2$  phase post-synthétique et  $M$  la phase de division. Après la division, chaque cellule entre dans la phase de repos  $G_0$ . Dans cette phase la cellule peut retourner pour proliférer et continuer son cycle cellulaire ou mourir avant de terminer son cycle. Le modèle complet décrivant cette situation consiste de deux

équations d'évolution (structure en âge) de réaction convection avec des conditions initiales et aux bords .

Ces équations se transforment en un système d'équations différentielles à retard.[2]

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\delta N - \beta(N)N + 2e^{-\gamma r} \beta(N_r)N_r \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma P + \beta(N)N - e^{-\gamma r} \beta(N_r)N_r \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où  $\beta$  est une fonction décroissante vérifiant :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \beta(y) = 0$$

$N$  est le nombre total des cellules qui sont dans la phase de repos.

$N_r = N(t - r)$ ,  $P$  est le nombre total des cellules qui sont dans la phase de prolifération.

$\gamma$  le taux de mortalité des cellules proliférantes.

$\delta$  le taux de mortalité des cellules non-proliférantes.

### III.2.2 Points d'équilibre et stabilité

On considère le système (III.2), dans lequel  $\beta$  (le taux d'entrée dans la phase de prolifération)

$$\beta(N) = \beta_0 \frac{\theta^n}{\theta^n + N}, \quad (\text{III.3})$$

où  $\beta_0$  est le taux maximal d'entré dans la phase de prolifération,  $\theta \geq 0, n \in \mathbb{N}$ .

### III.2.3 Stabilité pour le $r = 0$

Pour  $r = 0$  le système (III.2) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\delta N - \beta(N)N \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma P \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

**Théorème III.2.1** *Supposant  $\delta \in (0, \beta_0]$ , le système (III.4) possède un point d'équilibre non-trivial  $(N^*, 0) = (\beta^{-1}(-\delta), 0)$  qui est asymptotiquement stable, en plus du point trivial  $(0, 0)$  qui est instable.*

**Démonstration III.2.1** *L'équation caractéristique de système linéarisée de système (III.4) on point d'équilibre  $E^* = (N^*, 0)$ , possède deux racines, données par :*

On pose

$$\frac{dN}{dt} = f(N, P)$$

et

$$\frac{dP}{dt} = g(N, P)$$

**Isoclines et point d'équilibre**

- *Isocline (1) :  $f(N, P) = 0$  ce qui donne*

$$\begin{aligned} -\delta - \beta(N)N &= 0 \Rightarrow N(-\delta - \beta(N)) = 0 \\ &\Rightarrow N_1^* = 0, \quad \beta(N) = -\delta \\ &\Rightarrow N_2^* = \beta^{-1}(-\delta). \end{aligned}$$

- *Isocline (2) :  $g(N, P) = 0$  ce qui donne*

$$-\gamma P = 0 \Rightarrow P^* = 0.$$

Donc, il y a deux point d'équilibre  $(0, 0)$  et  $(\beta^{-1}(-\delta), 0)$

**Stabilité des points d'équilibre** où  $\alpha(N) = \beta(N)N$  et  $\alpha'(N)$  sa dérivée au point  $N$ .

$$J(N^*, P^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial N}(N^*, P^*) & \frac{\partial f}{\partial P}(N^*, P^*) \\ \frac{\partial g}{\partial N}(N^*, P^*) & \frac{\partial g}{\partial P}(N^*, P^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta + \alpha'(N^*) & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

où  $J$  matrice jacobienne.

Pour point  $(\beta^{-1}(-\delta), 0)$

$$J(\beta^{-1}(-\delta), 0) = \begin{pmatrix} -\delta + \alpha'(\beta^{-1}(-\delta)) & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres

$$\lambda_1 = -\delta + \alpha'(\beta^{-1}(-\delta)) = -\delta + \alpha'(N^*)$$

$$\lambda_2 = -\gamma$$

Comme  $\alpha(N)$  est décroissante, alors  $E^*$  est asymptotiquement stable.

Pour le point trivial  $(0; 0)$ , les racines de l'équation caractéristique de l'équation linéarisé de l'équation (III.4) autour de  $(0; 0)$  sont :

Pour point  $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\delta + \alpha'(0) & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres

Comme  $\alpha'(0) = \beta_0 > \delta$

$$\lambda_1 = -\delta + \alpha'(0) = -\delta + \beta_0 = -\delta + \alpha'(N^*),$$

$$\lambda_2 = -\gamma$$

$(0, 0)$  est instable

### III.2.4 Stabilité pour $r > 0$

Pour  $r > 0$  on va montrer l'existence et la stabilité d'une branche de solutions stationnaires positives, dépendant continûment du retard.

Par les changements de variables suivants :

$$t \rightarrow \frac{t}{r}, \quad u(t) = N(tr), \quad v(t) = P(tr),$$

le système (III.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = r[-\delta u(t) - \alpha(u(t)) + 2e^{-\gamma r} \alpha(u(t-1))] \\ \dot{v}(t) = r[-\gamma v(t) - \alpha(u(t)) - e^{-\gamma r} \alpha(u(t-1))] \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Où  $\alpha(N) = \beta(N)N$ .

Soit l'hypothèse suivante :

(A<sub>0</sub>) :

$$0 < r < \bar{r}, \quad \bar{r} = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{2}{1 + \frac{2\delta}{\beta_0}} \right).$$

**Proposition III.2.1** *On suppose que (A<sub>0</sub>) soit vérifiée. Alors, le système (III.5) possède un point d'équilibre non-trivial positive*

$$E^*(r) = (u^*(r), v^*(r)),$$

où

$$u^*(r) = \theta \left( \frac{\beta_0(2e^{-\gamma r} - 1) - \delta}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Et

$$v^*(t) = \frac{\delta u^*}{\gamma} \left( \frac{1 - e^{-\gamma r}}{2e^{-\gamma r} - 1} \right).$$

et un point d'équilibre trivial (0, 0).

**Démonstration III.2.2** *L'hypothèse (A<sub>0</sub>) implique que  $\beta_0(2e^{-\gamma r} - 1) > \delta$ , les points d'équilibre du système (III.5) correspondent à*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = 0 \\ \dot{v}(t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} \delta u(t) - \alpha(u) + 2e^{-\gamma r} \alpha(u) = 0 \\ \gamma v(t) - \alpha(u) - e^{-\gamma r} \alpha(u) = 0 \end{cases}$$

Comme  $\beta_0(2e^{-\gamma r} - 1) > \delta$  et  $\beta$  est une fonction strictement décroissante (invertible), il existe un seul point d'équilibre non trivial  $E^*(r) = (u^*(r); v^*(r))$  avec :

$$u^*(r) = \theta \left( \frac{\beta_0(2e^{-\gamma r} - 1) - \delta}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

et

$$v^*(r) = \frac{\delta u^*}{\gamma} \left( \frac{1 - e^{-\gamma r}}{2e^{-\gamma r} - 1} \right).$$

L'équation linéarisée autour du point d'équilibre  $E^*(r)$  est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = r[-\delta u(t) - \alpha'(u^*)(u(t)) + 2e^{-\gamma r} \alpha'(u^*)(u(t-1))] \\ \dot{v}(t) = r[-\gamma v(t) - \alpha'(u^*)(u(t)) - e^{-\gamma r} \alpha'(u^*)(u(t-1))] \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

La matrice caractéristique  $M(\lambda, r)$  de l'équation (III.6) est obtenue en posant

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} \text{ et } v(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Alors,

$$M(\lambda, r) = \begin{pmatrix} \lambda - r(\delta - \alpha'(u^*)) + 2re^{-\gamma r} \alpha'(u^*)e^{-\lambda} & 0 \\ r\alpha'(u^*) - re^{-\gamma r} \alpha'(u^*)e^{-\lambda} & \lambda - r\gamma \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique de l'équation linéaire (III.6) est donnée par :

$$\begin{aligned} W(\lambda, r) &= \det M(\lambda, r) \\ &= (\lambda - r\gamma)(\lambda - ra(r) - rb(r)e^{-\lambda}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

avec

$$a(r) = -(-\delta + \alpha'(u^*)), \quad b(r) = -2e^{-\gamma r} \alpha'(u^*)$$



et

$$\alpha'(u^*) = \frac{\delta}{\beta_0(2e^{-\gamma r} - 1)^2} [\beta_0(1 - n)(2e^{-\gamma r} - 1) + n\delta].$$

Comme  $-r\gamma < 0$ , la stabilité du point d'équilibre  $E^*(r)$  est déduite de l'étude des racines de l'équation

$$\Delta(\lambda, r) = \lambda - ra(r) - rb(r)e^{-\lambda} = 0 \quad (\text{III.8})$$

qui correspond à l'équation caractéristique associée à l'équation en  $u$ . Pour chercher le changement de la stabilité de  $E^*(r)$ , on a besoin de chercher les racines purement imaginaire de l'équation (III.8).

Soit  $\lambda = i\xi$  alors  $\Delta(i\xi, r) = 0$  si et seulement si

$$i\xi - ra(r) - rb(r)e^{-i\xi} = 0,$$

et

$$\begin{cases} b(r) \cos(\xi) = -a(r) \\ rb(r) \sin(\xi) = -\xi \end{cases}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \sin(\xi) &= \sqrt{1 - \cos^2(\xi)} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{a(r)}{b(r)}\right)^2}, \quad \text{si } 0 < \left|\frac{a(r)}{b(r)}\right| < 1 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} \xi = \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right) \in (0, \pi), \quad \text{pour } 0 < \left|\frac{a(r)}{b(r)}\right| < 1 \\ r\sqrt{b^2(r) - a^2(r)} = \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right), \quad \text{pour } 0 < \left|\frac{a(r)}{b(r)}\right| < 1 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Soit maintenant les hypothèses :

$(A_1)$  :  $a(r) < 0$ ,  $|b(r)| < -a(r)$ , pour tout  $r > 0$ .

$$(A_2) : ra(r) < 1, \quad \text{et} \quad |a(r)| \leq |b(r)|.$$

**Remarque III.2.1** Sous l'hypothèse  $(A_0)$ ,  $b(r) < 0$  est vérifié pour tout  $0 < r < \bar{r}$ .

**Théorème III.2.2** Supposons  $(A_0)$ . Alors :

- (1) le point d'équilibre trivial  $(0, 0)$  est instable.
- (2) Si  $a$  et  $b$  vérifient  $(A_1)$ , alors  $E^*(r)$  est asymptotiquement stable pour  $0 < r < \bar{r}$ .
- (3) Si  $a$  et  $b$  vérifient  $(A_2)$ ,  $n \geq 2$  et  $\gamma$  proche de 0, il existe  $r_0$  dans  $(0, r)$  tel que  $E^*(r)$  est asymptotiquement stable pour  $r \in (0, r_0)$  et instable pour  $r \in (r_0, \bar{r})$ .

**Démonstration III.2.3** (1) L'équation caractéristique de l'équation linéarisée de l'équation (III.5) autour de  $(0, 0)$  est donnée par

$$\lambda + r(\delta + \beta_0) - 2re^{-\gamma r} \beta_0 e^{-\lambda} = 0 \tag{III.10}$$

D'après l'hypothèse  $(A_0)$ , on a  $\beta_0(2e^{-\gamma r} - 1) > \delta$ . On en déduit que l'équation (III.10) possède une racine réelle positive. Alors le point  $(0, 0)$  est instable, pour tout  $0 < r < \bar{r}$ .

(2) soit  $\lambda = \mu + i\nu$  une racine de l'équation (III.8) pour  $0 < r < \bar{r}$ , On a

$$\begin{cases} \mu - ra(r) - rb(r)e^{-\mu} \cos(\nu) = 0 \\ \nu + rb(r)e^{-\mu} \sin(\nu) = 0 \end{cases} \tag{III.11}$$

On suppose qu'il existe une racine  $\mu_0 \geq 0$  de (III.11). Alors

$$-a(r) \leq b(r)e^{-\mu_0} \cos(\nu).$$

Comme

$$-1 \leq \cos(\nu) \leq 1, \quad 0 < e^{-\mu_0} < 1,$$

et

$$b(r) < 0, \quad \text{pour } 0 < r < \bar{r}$$

On a  $b(r) \leq a(r)$  ce qui contredit l'hypothèse  $(A_1)$ .

Donc pour tout  $0 < r < \bar{r}$ , toutes les racines de l'équation caractéristique (III.8) sont à partie réelle négative et  $E^*(r)$  est asymptotiquement stable.

Pour la démonstration de la stabilité dans (3), on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme III.2.1** (Hale 1993) Toutes les racines de l'équation  $(z + c)e^z + d = 0$ ; où  $c$  et  $d$  sont des réelles, sont à partie réelle négative si et seulement si

i)  $c > -1$

ii)  $c + d > 0$

iii)  $\sqrt{d^2 - c^2} < \xi$  où  $\xi$  est la racine de l'équation

$$\begin{cases} -c \tan \xi, & 0 < \xi < \pi, & \text{si } c \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

**Lemme III.2.2** Supposons  $(A_0)$  et  $(A_2)$ . Pour  $n \geq 2$  et  $\gamma$  voisin de 0, il existe une unique solution  $r_0$  de l'équation (III.8) sur  $(0, r)$  telle que  $i\xi_0$  est une racine purement imaginaire de l'équation (III.8), avec  $\xi_0 = \arccos\left(-\frac{a(r_0)}{b(r_0)}\right)$ .

De plus :

$$\begin{cases} r\sqrt{b^2(r) - a^2(r)} < \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right), & \text{pour } r \in (0, r_0) \\ r\sqrt{b^2(r) - a^2(r)} > \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right), & \text{pour } r \in (r_0, \bar{r}) \end{cases} \quad \text{(III.12)}$$

**Lemme III.2.3** Soit la fonction  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(y) = \alpha \tan y, \quad \alpha < 1, \quad \alpha \neq 0$$

Alors  $f$  possède un point fixe unique  $\xi \in (0, \pi)$ , tel que :

pour  $0 < \alpha < 1$

$$\begin{cases} f(y) < y & \text{si } y \in (0, \xi) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi), \\ f(y) > y & \text{si } y \in (\xi, \frac{\pi}{2}) \end{cases} .$$

Et pour  $\alpha < 0$

$$\begin{cases} f(y) < y & \text{si } y \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\xi, \pi) \\ f(y) > y & \text{si } y \in (\frac{\pi}{2}, \xi) \end{cases}.$$

**Preuve de (3) du théorème III.2.2.**

Il suffit de vérifier les trois conditions (i), (ii) et (iii) du lemme III.2.1.

Les assertions (i) et (ii) proviennent de l'hypothèse  $(A_2)$  en prenant  $c = -ra(r)$  et  $d = -rb(r)$ .

Pour (iii), soit  $r \in (0, r_0)$  et  $f(\varphi) = ra(r) \tan \xi$ . De la première équation de (III.12) on a :

1. Si  $a(r) = 0$ , la première inégalité de (III.12) devient  $-rb(r) < \frac{\pi}{2}$ , et (iii) est satisfaite.
2. Si  $0 < ra(r) < 1$  ou  $a(r) < 0$ , comme

$$f\left(\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right)\right) = r\sqrt{b^2(r) - a^2(r)}.$$

La première de (III.12) implique que

$$f\left(\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right)\right) < \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right),$$

avec

$$\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right) \in (0, \pi).$$

Du lemme III.2.3 et la graphe de  $f$  si  $\xi$  est le point  $c$  de  $f$  dans l'intervalle  $(0, \pi)$ , on a

$$f\left(\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right)\right) < \xi \tag{III.13}$$

implique que

$$\sqrt{(rb(r))^2 - (ra(r))^2} < \xi.$$

Ce qui donne l'assertion (iii) du lemme III.2.1 et achève la démonstration de la stabilité de  $E^*(r)$  pour  $0 < r < r_0$ .

Pour prouver l'instabilité de  $E^*(r)$  dans (3), pour  $r_0 < r < \bar{r}$ , montrons que

l'équation caractéristique (III.8) possède au moins une racine à partie réelle strictement positive.

On suppose que toutes les racines de l'équation (III.8) sont à parties réelles négatives pour  $r_0 < r < \bar{r}$ . Les assertions (i), (ii) et (iii) du lemme III.2.1 sont alors vérifiées. De la deuxième équation de (III.12) et de (III.13), on a :

$$\begin{cases} f\left(\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right)\right) > \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right) \\ \text{et} \\ f\left(\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right)\right) < \bar{\xi} \end{cases}$$

Alors, du lemme III.2.3 et le du graphe de  $f$ , on a :

$$\begin{cases} \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right) < \bar{\xi} \\ \text{et} \\ \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right) > \bar{\xi} \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Maintenant, supposons qu'il existe une racine de l'équation (III.8) à partie réelle nulle et que toutes les autres racines sont à parties réelles négatives. D'après la relation (III.9) et le lemme III.2.2 on déduit que  $r = r_0$ , ce qui contredit l'hypothèse  $r > r_0$ .

Alors  $E^*(r)$  est instable pour  $r_0 < r < \bar{r}$ .

#### Démonstration III.2.4 (du lemme III.2.2)

D'après les hypothèses  $(A_0)$  et  $(A_2)$ , chercher une racine de la deuxième équation de (III.9) revient à chercher une racine de l'équation

$$r = -\frac{\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right)}{b(r) \sin\left(\arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right)\right)} \quad (\text{III.14})$$

On pose

$$z(r) = \arccos\left(-\frac{a(r)}{b(r)}\right),$$

et

$$F(r) = -\frac{z(r)}{b(r) \sin(z(r))}.$$

comme  $F(0) > 0$  pour  $n \geq 2$  et  $F(\bar{r}) < \bar{r}$  pour  $\gamma$  dans un voisinage de 0, la continuité de  $F$  implique qu'il existe au moins un  $r_0 \in (0, \bar{r})$  tel que  $F(r_0) = r_0$ . Pour l'unicité de  $r_0$ , soit

$$g(r) = r - F(r).$$

Par différentiation par rapport à  $r$  on a :

$$g'(r) = 1 - \frac{z'(r)b(r) \sin(z(r)) - z(r)b'(r) \sin(z(r))}{(b(r) \sin(z(r)))^2} - \frac{z(r)b(r) \cos(z(r))z'(r)}{(b(r) \sin(z(r)))^2},$$

où

$$z'(r) = -\sqrt{1 - \left(\frac{a(r)}{b(r)}\right)^2} \frac{a'(r)b(r) - a(r)b'(r)}{b^2(r)}.$$

D'après la définition de  $a(r)$  et  $b(r)$  on a :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} b'(r) = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} a'(r) = 0$$

Uniformément pour  $r \in (0, \bar{r})$ , Alors :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} g'(r) = 1 > 0.$$

Uniformément pour  $r \in (0, \bar{r})$  et  $g$  est une fonction croissante sur l'intervalle  $(0, \bar{r})$  pour  $\gamma$  au voisinage de 0.

On déduit que  $r_0$  est unique dans  $(0, \bar{r})$ .

D'après le théorème III.2.2, on ne peut pas déterminer ni la stabilité du point d'équilibre  $E^*(r_0)$  ni l'existence d'une branche de solutions périodiques.

---

## Conclusion

Tout au long de ce travail, nous avons considéré des équations différentielles à retard. Notre but était d'introduire des définitions générales ainsi que des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour ces équations à retard.

Après un bref aperçu historique sur la théorie des équations différentielles à retard notamment quelques notions de base et certains résultats de la théorie d'existence et d'unicités des solutions, nous avons étudié un cas particulier de ces équations où on a considéré le retard constant, et on a présenté une méthode d'intégration connue sous le nom "Méthode des étapes" .

Enfin, nous avons étudié quelques applications des équations différentielles à retard en biologie, nous avons commencé par un modèle à une espèce qui est le modèle de Malthus, et un modèle à deux espèces qui un modèle d'hématopoïèse. On a déterminé les points d'équilibre et étudié leur stabilité.

# Bibliographie

- [1] Auger ,P., Lett ,C.,And Poggiale ;J. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés.*
- [2] Bemard, S., Bélair, J., Mackey, M.C., *Bifurcations in a model of blood cell production, accepté en juin 2003 pour publication dans C. R. Biologies.*
- [3] J.P. Demailly "*Analyse Numérique et Equations Différentielles* ". *Collection Grenoble Sciences, 2006.*
- [4] J.Hale, *Ordinary differential equations, Springer. New York 1969.*
- [5] Kenneth L Cooke and Wenzhang Huang. *On the problem of linearization for statedependent delay differential equations. Proceedings of the American Mathematical Society, pages 1417-1426, 1996.*
- [6] LASALLE, J. *Stability theory for ordinary differential equation. J Differ. Equations 1968.*
- [7] *L. E. EL'sgol'ts, S. B. Norkin, Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with deviating Argument, Mathematics in science and Engineering, Vol. 105. Academic Press, 1973).*
- [8] M. Lakrib, *Strobocopie et moyennisation dans les équations différentielles fonctionnelles à retard. Thèse en Mathématiques, Université de Haut Alsace-Mulhouse, 2004.*
- [9] Mohamed Yahiaoui. *Les différentielles à retard dépendant de l'état. PhD thesis, 2014.*



- 
- [10] Moulay, E. Stabilité des équations différentielles ordinaires. PhD thesis, 2005 .
- [11] O.Diekman, S.A.Van Gils, S.M.Verdayn Lunel et H.O.Wather, Delay Equation : Functional, complex, and Nonlinear Analysis, Springer-Verlag, New York (1995).
- [12] R.Bellman, K. Cooke, Differential-Difference Equations, Academic Press,1963
- [13] V. Volterra, Sur la Théorie Mathématiques des phénomènes héréditaires, J.de Mathématiques 7 (1928), 249-298.
- [14] X. LIAO , L. WANG , P.YU, Stability of Dynamical Systems. Elsevier , première edition , 2007.
- [15] Y. Kung, Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics. Academic Press 1993.