

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib  
Faculté des Sciences et de Technologie  
Département des Mathématiques et de l'Informatique



Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques  
Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisations  
Thème

## Stabilité des systèmes dynamiques avec applications

Présenté Par :

Melle. BENSLIMANE Rachida

Devant le jury composé de :

Dr. KHIAR HAMID	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. BENTOUT Soufiane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Dr. BOUKHALFA Fatema	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

*Année Universitaire 2022/2023*

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>3</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Notations et définitions . . . . .	1
1.1.1 Existence et unicité des solutions . . . . .	2
1.2 Notions sur la stabilité des points d'équilibres . . . . .	3
<b>2 Stabilité des systèmes dynamiques</b>	<b>5</b>
2.1 Etude qualitative des systèmes linéaires . . . . .	5
2.1.1 Étude de stabilité par l'analyse des valeurs propres . . . . .	5
2.1.2 Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr, det) . . . . .	13
2.1.3 Étude de stabilité par le signe de discriminant . . . . .	13
2.2 Etude qualitative des systèmes non linéaires . . . . .	14
2.2.1 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre . . . . .	14
2.3 Stabilité au sens de Lyapounov . . . . .	15
2.4 Théorie de bifurcation . . . . .	16
2.4.1 Définition de bifurcation . . . . .	17
2.4.2 Diagramme et portrait de phase de bifurcation . . . . .	17
2.4.3 Types de bifurcation . . . . .	17
2.5 Les bases de modélisations en systèmes dynamiques . . . . .	21
2.5.1 Modèle Malthusien . . . . .	21
2.5.2 Le modèle logistique de Verhulst . . . . .	22
<b>3 Applications en dynamiques de populations</b>	<b>24</b>
3.1 Modèles à deux espèces . . . . .	24
3.1.1 Le modèle de LOTKA-VOLTERRA . . . . .	24
3.1.2 la réponse fonctionnelle . . . . .	27
3.2 Le modèle de LOTKA-VOLTERRA avec réponse fonctionnelle de Holling type II . . . . .	31
3.3 Le modèle de LOTKA-VOLTERRA avec croissance logistique des proies . . . . .	33
3.4 Application au modèle de Rosenzweig-MacArthur . . . . .	35
3.4.1 Présentation du modèle de Rosenzweig-MacArthur . . . . .	35
3.4.2 Etude qualitative du modèle de Rosenzweig-MacArthur . . . . .	36

Conclusion

41

# Table des figures

1.1	Cycle limite.	2
2.1	Un nœud instable	6
2.2	Un nœud stable	7
2.3	un point selle (col)	7
2.4	étoile instable	8
2.5	étoile stable	9
2.6	Un nœud dégénéré instable	10
2.7	Un nœud dégénéré stable	10
2.8	Un foyer répulsif	11
2.9	Un centre	12
2.10	Un foyer attractif	12
2.11	Résumé des différents portraits de phase possibles du système $\dot{X} = AX$ , en fonction du signe de la trace et du déterminant de la matrice $A$	13
2.12	Diagramme de bifurcation Selle-Nœud	18
2.13	Diagramme de bifurcation transcritique	18
2.14	Diagramme de l'exemple (2.4.2)	19
2.15	Diagramme de bifurcation super- critique	19
2.16	Diagramme de bifurcation sous- critique	20
2.17	Diagramme de bifurcation de Hopf	21
2.18	la loi de la croissance malthusienne [36]	22
2.19	Fonction de croissance logistique [36]	23
2.20	La loi de la croissance logistique [36]	23
3.1	Quelques orbites fermés de (3.2) [36]	27
3.2	Une solution périodique de (3.2) [36]	27
3.3	Rp. fonctionnelle de VOLTERRA	28
3.4	Rp.fonctionnelle de GAUSS	29
3.5	Les 3 réponses fonctionnelles de Holling [36]	31
3.6	Coexistence des deux populations [36]	35
3.7	Isoclines du systèmes (3.10)	39
3.8	Plan de phase du système (3.10)	40

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour continuer mon chemin et ne pas baisser les bras.

Je remercie *M<sup>me</sup>* **BOUKHALFA Fatema** mon encadrant pour le privilège qu'elle m'a fait en acceptant de diriger ce travail, sa gentillesse, sa modestie, et sa riche expérience et ses conseils directives tout au long de la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur **KHIAR HAMID** qui m'a fait l'honneur de vouloir accepté la présidence de ce jurys. Je le remercie encore une fois pour son soutien tout au long de mon cursus universitaire.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur **BENTOUT SOUFIANE** d'avoir accepter d'examiner ce travail, mais aussi pour tout ce qu'il m'a appris pendant mes années d'études et les efforts déployés pour ma formation.

Chère *M<sup>elle</sup>* **Rahou Wafaa**, je tiens à vous exprimer ma profonde gratitude pour tout ce que vous avez fait pour moi. Votre impact dans ma vie et dans la réussite de mon mémoire restera à jamais gravé dans ma mémoire. Je suis honorée d'avoir eu la chance de vous connaître et de bénéficier de votre mentorat.

Je remercie aussi mes parents pour leur grand sacrifice et leur développement pour mon bonheur, ils m'ont toujours soutenu dans les meilleurs moments comme dans les pires.

Chère **moi même**, je te remercie du fond du coeur pour cette réalisation exceptionnelle. Ce mémoire est le fruit de ton travail acharné, de ta persévérance et de ta passion.

# Dédicaces

*Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.  
Je dédie ce travail...*

***A mon très chère père Mohamed Benslimane,***

*Tu as toujours été pour moi un exemple du père respectueux, honnête, de la personne méticuleuse, je tien à honorer l'homme que tu es.  
Je voudrais te remercier pour ton amour, ta générosité, ta compréhension... Ton soutien fut une lumière dans tous mon parcours. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours eu pour toi.  
Je t'aime papa et j'implore le tout-puissant pour qu'il t'accorde une bonne santé et une vie longue de heureuse.*

***A ma très chère maman,***

*Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect et la reconnaissance que je dois pour toi. Ton amour et ta patience m'ont accompagné à chacun de mes pas. Mon admiration pour la femme si courageuse que tu es, et sans limite. Je te promets de faire de mon mieux pour rendre tes sacrifices et ton amour précieux dignes de toi.  
Je t'aime de tout mon cœur et je suis honorée de te dédier ce mémoire.*

***A mes très chères sœurs YAMINA et SARRA,***

*Vous êtes mes complices, mes confidentes et mes meilleures amies. A travers les hauts et les bas de la vie, vous avez toujours été là, me soutenant de tout cœur. Je suis fière de vous appeler mes sœurs et je sais que notre relation durera toute une vie.*

***A mes très chères frères IBRAHIM, MAROUAN et ABED EL HAFID,***

*Vous êtes des hommes exceptionnels, dotés d'une force intérieure et d'une détermination inspirantes. Votre soutien constant et votre encouragement m'ont donnée la force et la confiance nécessaires pour poursuivre mes aspirations. Merci d'être les merveilleux frères que vous êtes. Je vous aime de tout mon cœur.*

***A la mémoire de ma grande-mère BOULFDAOUI YAMINA,***

*Tu étais une femme exceptionnelle, remplie de sagesse, de gentillesse et générosité. Tu as toujours été là pour moi, me prodiguant des conseils précieux et m'encourageant à poursuivre mes rêves. Même si tu n'es pas plus physiquement présente, tu resteras à jamais dans nos cœurs et ta mémoire continuera d'illuminer notre chemin "MA YAMINA" ALLH YRAHMEK et sache que ton héritage perdurera à travers moi.*

***A moi même***

*Ce chemin n'était pas facile, mais j'ai surmonté chaque obstacle avec résilience et détermination. Je suis fière de moi et de tout le travail que j'ai accompli pour parvenir jusqu'ici. Ce mémoire est le résultat de ma passion, de ma curiosité, et de mon engagement envers l'apprentissage.*

*A moi-même, je dis bravo et merci pour tout le travail accompli.*

*M<sup>elle</sup> RACHIDA.B*

*Proverbe*

*“Je suis mathématicien. Les mathématiques  
ont rempli ma vie.”*

*Laurent Schwartz*

# Introduction Générale

La vie, considéré comme la technologie la plus complexe sur notre planète, c'est aussi la plus puissante [29]. L'homme a toujours cherché à découvrir son environnement et comprendre les phénomènes qui l'entourent afin d'améliorer les différents aspects de sa vie quotidienne, en termes de nutrition, de santé, de transport et de protection. De plus, il fait face à des problèmes environnementaux et de santé publique les difficiles et il a essayé de les expliquer et bien les exploiter pour son meilleur intérêt. L'un parmi les domaines de recherches les plus fertiles est celui de la biologie mathématique qui semble avoir récemment intéressé de nombreux mathématiciens et écologistes qui essaient d'utiliser différents techniques et outils mathématiques, y compris théoriques et appliqués, pour modéliser et comprendre les phénomènes biologiques.

Ces phénomènes biologiques sont souvent décrits par des équations différentielles, qui historiquement ont été le sujets de nombreuses recherches [30, 31, 32, 33]. Ces équations, qu'elles soient linéaires ou non linéaires, décrivent des systèmes dynamiques. Au cours de la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle, des avancés significatives ont été réalisées dans le développement de méthodes mathématiques destinée à la modélisation des systèmes dynamiques. Ce domaine de recherche est devenu d'une grande importance dans diverses disciplines scientifiques. L'objectif principal est de mieux comprendre les phénomènes étudiés afin de pouvoir prédire l'évolution future de ces systèmes.

L'une des principales questions abordées dans l'étude des systèmes dynamiques est la stabilité. Il s'agit d'évaluer la capacité d'un système à maintenir un état d'équilibre ou à revenir vers cet état après avoir perturbé. Comprendre la stabilité d'un système est crucial pour prédire son comportement à long terme et prendre des décisions éclairées. Les outils mathématiques utilisés pour l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques sont plus avancés et comprennent plusieurs approches et concepts. Parmi ces outils, on peut citer la théorie de la stabilité de Lyapunov, les bifurcations, la méthode de linéarisation et l'analyse des valeurs propres.

La théorie de de la stabilité de Lyapounov, nommée en l'honneur du mathématicien russe *Alexsander Lyapounov* [3, 8], est largement utilisée pour évaluer la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires, elle se base sur les fonctions de Lyapounov, qui permettant de mesurer la variation de l'énergie ou de la distance entre les trajectoires du système.

L'analyse de de stabilité de Lyapounov fournit des informations sur les comportements qualitatifs des systèmes dynamiques, tel que la convergence vers un point d'équilibre, l'oscillation...etc.

Les bifurcations sont également des concepts clés dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques, elles se produisent lorsque les paramètres du système sont modifiés, entraînant des changements qualitatifs dans son comportement. Différents types de bifurcations peuvent se produire, chacun ayant été déterminé par des savants renommés [9]. Lors d'une bifurcation, de nou-

veaux états d'équilibre peuvent émerger, conduisent le système d'un comportement stable à des oscillations périodiques. Par exemple, la bifurcation de Hopf, nommé d'après *Ernst Hopf*.

La méthode de linéarisation consiste à approximer localement un système dynamique non linéaire par un système linéaire, ce qui simplifie son analyse. Cette approximation linéaire permet d'utiliser des outils mathématiques spécifiques aux systèmes linéaires pour évaluer leur stabilité. Cependant, il convient de noter que cette méthode n'est valide que dans le voisinage des points d'équilibre du système.

Les modèles mathématiques tels que le modèle de *LOTKA-VOLTERRA* où bien le modèle qui est connu sous le nom (proie-prédateur) [14], les modèles logistique et malthusien, ainsi que le modèle de *Rosenzweig-MacArthur* [22] sont des exemples d'applications dans la dynamique de population, la biologie et l'écologie. Ces modèles permettant de représenter et d'étudier les interactions complexes entre les espèces, la croissance des populations et l'évolution des écosystèmes. Ils offrent des outils pour comprendre comment les facteurs tels que la prédation, la compétition, la disponibilité des ressources et d'autres variables influencent la dynamique des populations. L'analyse de stabilité de ces modèles est essentielle pour déterminer les comportements qualitatifs des populations tels que la convergence vers un équilibre stable, l'oscillation périodique...etc. Elle permet généralement d'étudier les points d'équilibres et leur stabilité en fonctions des paramètres du modèle ce qui est l'objet de ce mémoire.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

**le premier chapitre**, on a donné des notions fondamentales sur les équations différentielles ordinaires et des définitions relatives à la stabilité des systèmes dynamiques (stable, instable, asymptotiquement stable).

Dans **le deuxième chapitre**, on a donné des notions générales sur la stabilité des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, ainsi que les méthodes d'analyse de stabilité (méthode de Lyapounov, linéarisations...etc), avec quelques notions sur la bifurcation(Hopf, transcritique, noeud-sel...etc )

**Le troisième chapitre** est consacré à l'application de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques à la dynamique de population, on va examiner différents modèles mathématiques de la dynamique de population, tels que le modèle de *LOTKA-VOLTERRA*, le modèle logistique, malthusien et le modèle de *Rosenzweig-MacArthur*.

A la fin on a terminé avec une conclusion et quelques bibliographies.

# Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et théorèmes nécessaires pour l'élaboration de ce travail.

## 1.1 Notations et définitions

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue.

**Définition 1.1.1.** [1] Une équation différentielle ordinaire du premier ordre (EDO) sur  $U$  est une relation de type :

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \tag{1.1}$$

où  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  avec  $x \in C^1(\mathbb{R}^n)$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.1.1.** On distingue deux types d'équations différentielle :

1. Si  $n = 1$  on parle d'équation différentielle scalaire.
2. Si  $n > 1$  on parle d'équation différentielle vectorielle.

**Définition 1.1.2.** (Le problème de Cauchy)[2] L'équation différentielle (1.1) avec une condition initiale s'appelle problème de Cauchy qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

avec  $(t_0, x_0) \in I \times U$  donné, une solution du problème (1.2) est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.

**Définition 1.1.3.** Soit  $x$  une fonction d'une partie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . La fonction  $x$  est dite solution de l'équation (1.2) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  si elle est définie et continûment dérivable sur  $I$ , si  $(t, x(t)) \in U$ , et si  $x$  satisfait la relation (1.2) sur  $I$ .

### 1.1.1 Existence et unicité des solutions

**Théorème 1.1.1.** [34] (*Existence*)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Pour tout  $(t_0, x_0) \in U$  le problème (1.2) admet au moins une solution.

**Définition 1.1.4.** [5] Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction. On dit que  $f = f(t, x)$  est localement lipschitzienne en  $x$  si pour toute fermé et borné (compact)  $K$  dans  $U$ , il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

pour tout  $(t, x_1)$  et  $(t, x_2)$  dans  $K$ .

**Théorème 1.1.2.** [5] (*Unicité*)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , si la fonction  $f = f(t, x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et localement lipschitzienne en  $x$  pour toute  $(t_0, x_0) \in U$  le problème (1.2) admet une solution unique.

**Définition 1.1.5. Un champ de vecteurs :**

Un champ de vecteurs  $X$  sur un ouvert  $U \in \mathbb{R}^2$  est définie par la donnée de deux applications  $f$  et  $g$  auxquelles on associe le système d'équations différentielles ordinaires :

$$X := \begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases}$$

**Définition 1.1.6. Un flot**

On appelle flot sur l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , une application continûment différentiable :

$$\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U,$$

tel que :

1.  $\varphi(0, x) = x = Id, \forall x \in U,$
2.  $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x), \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in U.$

**Définition 1.1.7. une orbite**

Orbite ou trajectoire de  $X$  passant par  $p \in U$  est l'ensemble  $O(p) = \{\varphi_t(p), t \in \mathbb{R}\}$  où  $\varphi_t : U \rightarrow U$  est le flot associé à  $X$  pour  $t$  fixé.

**Définition 1.1.8. (cycle limite)[7]**

Un cycle limite est une trajectoire périodique fermée isolée.

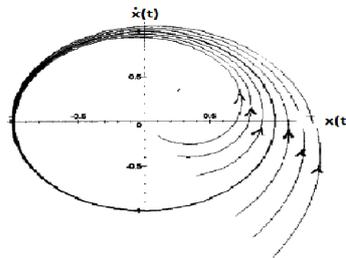


FIGURE 1.1 – Cycle limite.

Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle est dit stable, sinon, il est dit instable.

**Définition 1.1.9.** *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interactions, d'où on distingue deux cas :*

1. *le cas continu* : il s'écrit sous la forme :

$$\dot{x} = f(x(t)). \quad (1.3)$$

2. *le cas discret* qui est représenté par l'équation suivante :

$$x_{k+1} = f(x_k).$$

**Définition 1.1.10.** *Lorsque le champ de vecteurs  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome, et on a :*

$$\dot{x} = f(x).$$

## 1.2 Notions sur la stabilité des points d'équilibres

On s'intéresse dans notre étude sur les systèmes dynamiques dans le cas continue (1.3).

**Définition 1.2.1.** [3] *Un point  $x^* \in D$  est appelé point d'équilibre ( ou point stationnaire, solution stationnaire, point critique) de l'équation (1.3) si  $f(x^*) = 0$ , autrement dit,  $x^*$  est une solution constante de l'équation (1.3)*

**Définition 1.2.2.** [4] *Un équilibre  $x^*$  de (1.3) est dit stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.3) on a :*

$$\|x_0 - x^*\| < \eta \implies \forall t \geq 0, \|x(t) - x^*\| < \varepsilon.$$

**Définition 1.2.3.** [4] *Un équilibre  $x^*$  de (1.3) est dit instable, s'il existe  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\eta > 0$ , tel que pour tout solution  $x(t)$  de (1.3) on a :*

$$\|x_0 - x^*\| < \eta \implies \forall t \geq 0, \|x(t) - x^*\| \geq \varepsilon.$$

**Définition 1.2.4.** [4] *On dit que  $x^*$  est asymptotiquement stable s'il est stable et il existe  $\eta > 0$ , tel que pour tout solution  $x(t)$  de (1.3) on a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

**Définition 1.2.5. Portrait de phase :** [5] *Un portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.*

*Dans la pratique, tracer le portrait de phase d'un système de dimension deux, c'est tracer dans le plan  $(x, y)$ , suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.*

*Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.4)$$

*Le point d'équilibre associée à ce système est définie par  $(x^*, y^*)$ .*

**Définition 1.2.6. (Isocline verticale)** Soit  $(x^*, y^*)$  un point de  $J$ , on appelle isocline verticale l'ensemble  $J$  des points tels que  $f(x, y) = 0$ .

Les trajectoires passant par  $(x^*, y^*)$  a une tangente verticale, elle est parcourue de bas en haut si  $g(x, y) > 0$ , de haut en bas si  $g(x, y) < 0$ .

L'ensemble  $J$  constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions.

**Définition 1.2.7. (Isoclines horizontale)** Soit  $(x^*, y^*)$  un point de  $I$ , on appelle isocline horizontale l'ensemble  $I$  des points tels que  $g(x, y) = 0$ .

Les trajectoires passant par  $(x^*, y^*)$  a une tangente horizontale, elle est parcourue de gauche à droite si  $f(x, y) > 0$ , de droite à gauche si  $f(x, y) < 0$ .

L'ensemble  $I$  est constitué en générale d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions.

**Remarque 1.2.1.** Les points d'équilibres de (1.4) se trouvent à l'intersection de  $I$  et de  $J$ .

**Définition 1.2.8. le portrait de phase local** de  $X_0$  est la réduction du portrait de phase global au voisinage de  $X_0$ .

**Définition 1.2.9. [6]** Une fonction différentiable  $H(x, y)$  est une intégrale première du système différentiel (1.4) s'ils existent deux fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et si :

$$f(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

**Définition 1.2.10.** Un système différentiel défini sur un domaine du plan est dit conservatif s'il possède une intégrale première sur ce domaine. Dans le cas contraire le système est dit dissipatif.

**Remarque 1.2.2.** Pour montrer qu'un système est un système conservatif, il suffit de montrer la régularité de l'intégrale première.

# Stabilité des systèmes dynamiques

Ce chapitre vise à explorer les concepts fondamentaux et les méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques, dans le but d'assurer un fonctionnement sûr, fiable et performant des systèmes étudiés.

## 2.1 Etude qualitative des systèmes linéaires

On considère le système (1.4) où  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $C^1$  linéaires (Voir[7]) des variables  $x$  et  $y$ . On parle encore de système différentiel, ou de système dynamique.

En utilisant la notation matricielle, on peut aussi écrire :  $\dot{X} = \Phi(X)$ .

$X = (x, y)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Phi(X) = (f(x, y), g(x, y))$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Une solution de ce système est un couple de fonctions  $(x(t), y(t))$ ,  $t \subseteq \mathbb{R}$ , qui satisfait le système (1.4).

Le système (1.4) se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \iff \dot{X} = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On se limite ici au cas où  $A$  est inversible c'est à dire :  $\det(A) \neq 0$  et on a pas des valeurs propres nulles puisque  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ .

L'unique solution de  $AX = 0$  est alors  $X = 0$  d'où le système admet un seul point d'équilibre à l'origine du plan de phase [35].

### 2.1.1 Étude de stabilité par l'analyse des valeurs propres

#### A. Deux valeurs propres réelles distincts : $\lambda_1$ et $\lambda_2$

Le système  $\dot{X} = AX$  se transforme alors en un système canonique  $\dot{Y} = JY$  avec  $Y = (w, z)$  :

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \dot{w} = \lambda_1 w \\ \dot{z} = \lambda_2 z \end{cases} \implies \begin{cases} w(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ z(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes positives.

1. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux valeurs propres réelles distincts strictement positives, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est appelé un nœud : toutes les trajectoires partant du point d'équilibre s'en éloignent, on a **un nœud instable** et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

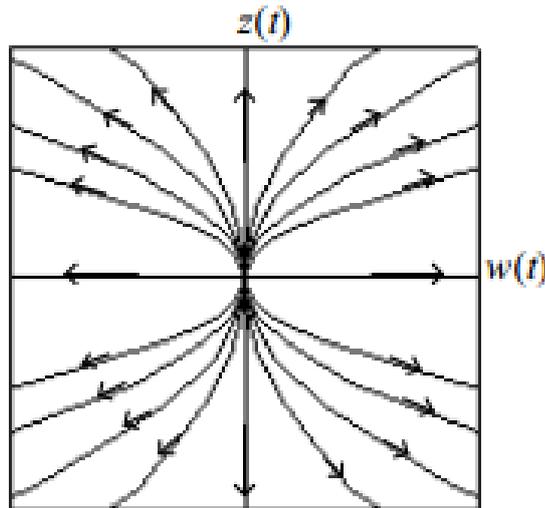


FIGURE 2.1 – Un nœud instable

2. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux valeurs propres réelles distincts strictement négatives, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

donc l'origine est **un nœud stable** et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

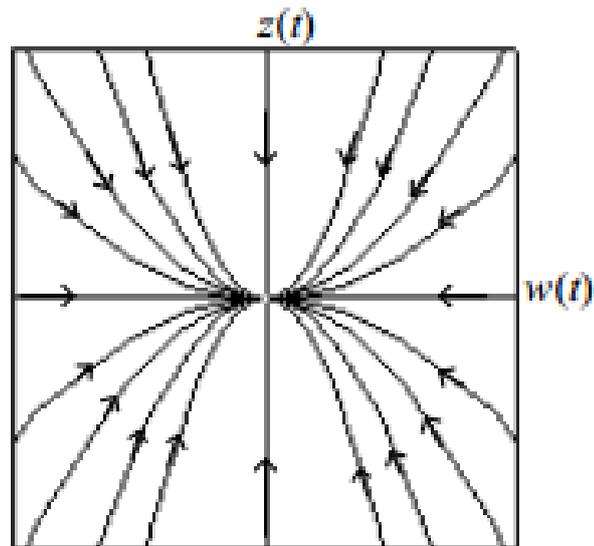


FIGURE 2.2 – Un nœud stable

3. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe opposé, c'est à dire :  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$  où bien  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est appelé **point selle** où les droites de plan  $(w, z)$  se séparent en quatre "flots" de trajectoires différents.

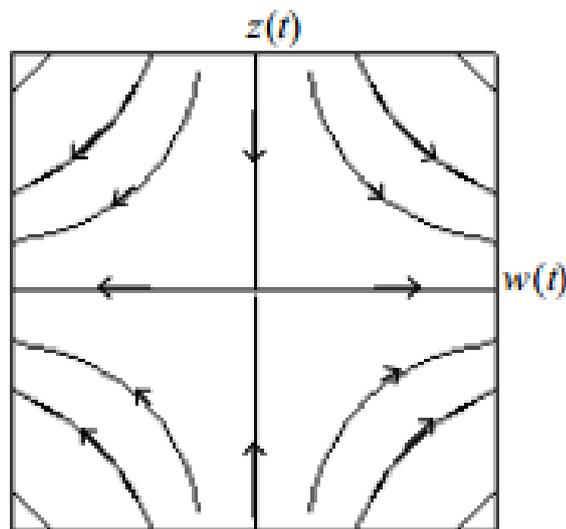


FIGURE 2.3 – un point selle (col)

**B. Une valeur propre double  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  :**

i) Dans le cas où  $A$  est diagonalisable, le système canonique s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \iff \begin{cases} w = C_1 e^{\lambda_0 t} \\ z = C_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$$

1. Si  $\lambda_0 > 0$  alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$$

Le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est une **étoile instable**, qu'est représentée par la figure suivante :

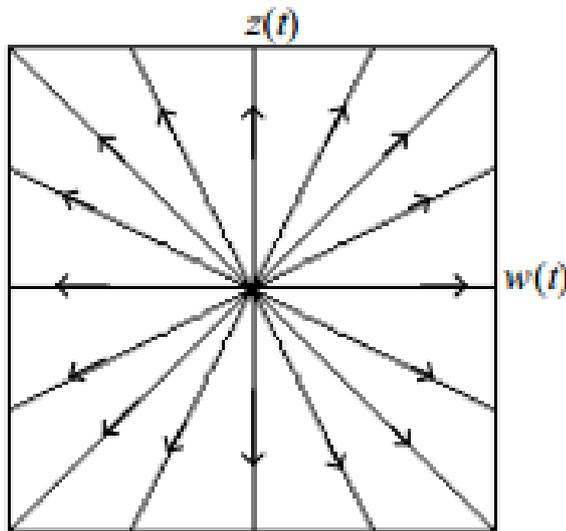


FIGURE 2.4 – étoile instable

2. Si  $\lambda_0 < 0$  alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est une **étoile stable** et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

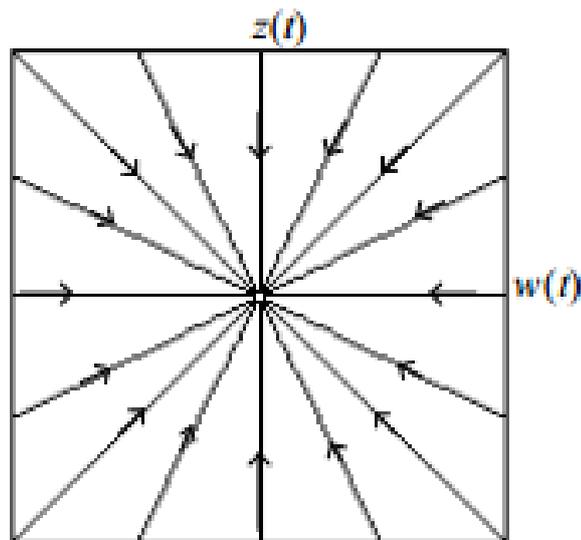


FIGURE 2.5 – étoile stable

ii) Dans le cas où  $A$  n'est pas diagonalisable, le système canonique s'écrit par :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w + z \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \iff \begin{cases} w = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_0 t} \\ z = C_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$$

1. Si  $\lambda_0 > 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$$

L'origine dans ce cas est **un nœud dégénéré instable** et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

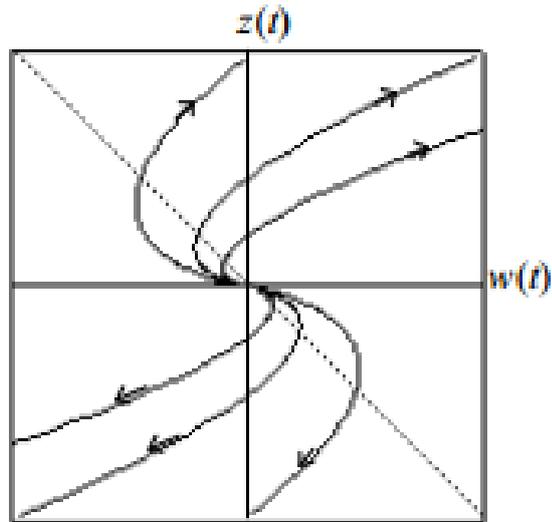


FIGURE 2.6 – Un nœud dégénéré instable

2. Si  $\lambda_0 < 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

L'origine est **un nœud dégénéré stable** et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

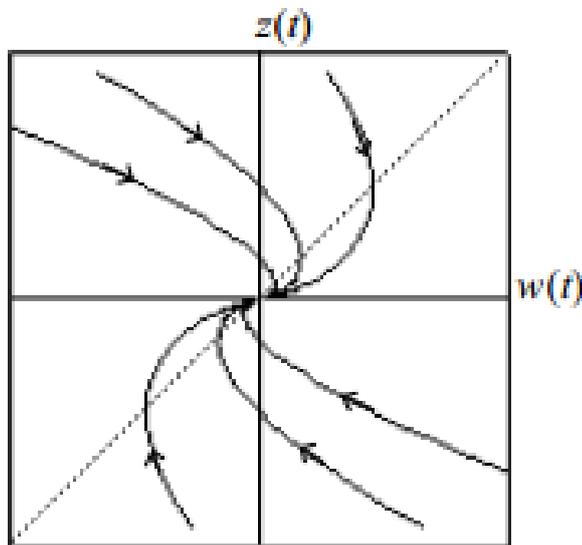


FIGURE 2.7 – Un nœud dégénéré stable

**C. Deux valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$  :**

D'après l'expression de la forme Jordan dans le cas de valeurs propres complexes conjuguées, le système canonique est :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \dot{w} = \alpha w - \beta z, \\ \dot{z} = \beta w + \alpha z. \end{cases}$$

Ce type de système se résout en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} w = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r^2 = w^2 + z^2 \\ \tan \theta = \frac{z}{w} \end{cases} \implies \begin{cases} r\dot{r} = w\dot{w} + z\dot{z}, \\ \dot{\theta} = \cos^2 \theta \left( -\frac{z}{w^2} \dot{w} + \frac{1}{w} \dot{z} \right). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0. \end{cases}$$

1. Si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , l'origine est un foyer répulsif et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est représenté par :

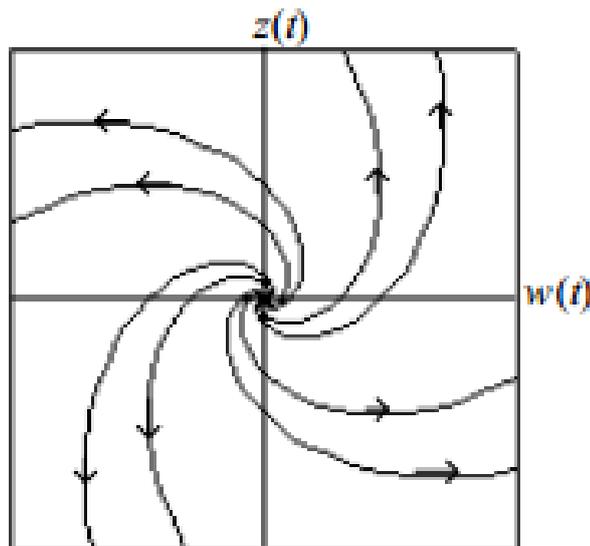


FIGURE 2.8 – Un foyer répulsif

2. Si  $\alpha = 0$  et  $\beta > 0$ , l'origine est un centre et le portrait de phase dans le plan  $(w, z)$  est le suivant :

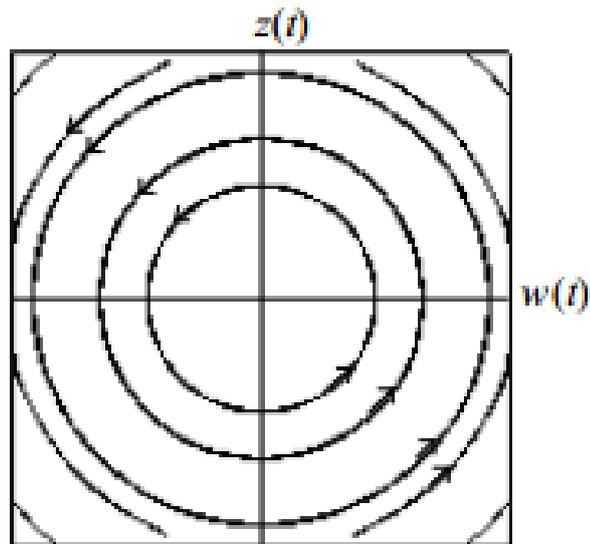


FIGURE 2.9 – Un centre

3. Si  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$ , le portrait de phase est un foyer attractif qu'est représenté par la figure suivante :

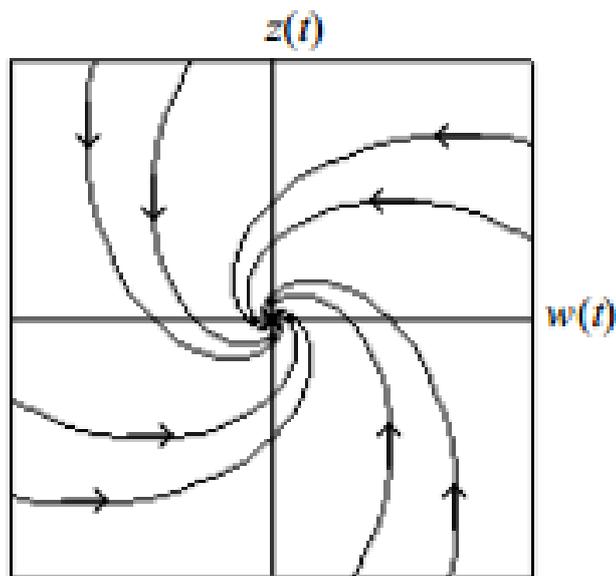


FIGURE 2.10 – Un foyer attractif

### 2.1.2 Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr, det)

la typologie des solutions des systèmes linéaires planaires est basée sur la nature des valeurs propres de la matrice du système, peut également se résumer dans un plan (tr, det).

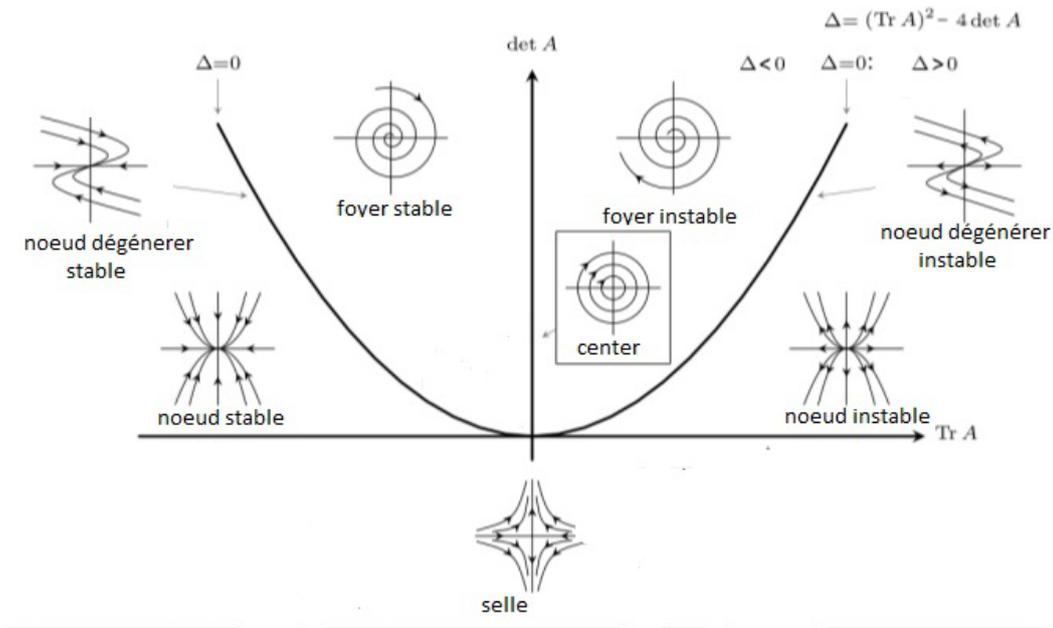


FIGURE 2.11 – Résumé des différents portraits de phase possibles du système  $\dot{X} = AX$ , en fonction du signe de la trace et du déterminant de la matrice  $A$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2, \\ \det(A) = \lambda_1 \lambda_2. \end{cases}$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant  $\Delta = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det(A)$ . Dans le plan (tr, det), l'équation  $\Delta = 0$  est celle d'une parabole passant par l'origine :

$$\det(A) = \frac{1}{4}(\operatorname{tr}(A))^2$$

Cette parabole divise le plan en deux grandes régions : au dessus de la parabole ( $\Delta < 0$ ), on trouve les portraits de phases des foyers et des centres ; en dessous ( $\Delta > 0$ ), on trouve les nœuds et les points selle.

### 2.1.3 Étude de stabilité par le signe de discriminant

#### I. Cas $\Delta = 0$

On a alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , c'est-à-dire  $\det(A) = \lambda_0^2 > 0$  et  $\operatorname{tr}(A) = 2\lambda_0$ , par conséquent :

1. si la trace est positive ( $\lambda_0 > 0$ ), on a une étoile ou un nœud dégénéré instable ;
2. si la trace est négative ( $\lambda_0 < 0$ ), on a une étoile ou un nœud dégénéré stable.

**II. Cas  $\Delta > 0$**

On a deux valeurs propres réelles distincts, on distingue alors 3 cas :

1.  $\det(A) < 0$  :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe opposé, l'origine est un point selle ;
2.  $\det(A) > 0$  et  $\text{tr}(A) > 0$  :  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , l'origine est un nœud instable ;
3.  $\det(A)$  et  $\text{tr}(A) < 0$  :  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , l'origine est un nœud stable.

**III. Cas  $\Delta < 0$**

On a deux valeurs propres complexes conjuguées,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , c'est-à-dire :

$$\det(A) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

et

$$\text{tr}(A) = 2\alpha$$

On est dans la régions au dessus de la parabole, qui se partage là encore en trois zones distincts :

1.  $\text{tr}(A) < 0$  : l'origine est un foyer stable ;
2.  $\text{tr}(A) > 0$  : l'origine est un foyer instable ;
3.  $\text{tr}(A) = 0$  : l'origine est un centre.

En résumé, le point d'équilibre est dit asymptotiquement stable lorsqu'on a :

$$\begin{cases} \det(A) > 0 \\ \text{tr}(A) < 0 \end{cases}$$

## 2.2 Etude qualitative des systèmes non linéaires

Dans cette section, on considère des systèmes d'équation différentielle ordinaire couplées non linéaires :

$$\dot{X} = \Phi(x), X \in S \subseteq \mathbb{R}^2,$$

où  $\Phi$  est une fonction non linéaire continûment différentiable de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Par rapport à ce que nous avons vu pour les systèmes linéaires, il va falloir raisonner de manière locale au voisinage des points d'équilibres (méthode de linéarisation), et nous verrons que le portrait de phase **global** n'est pas toujours une réplique exacte de portrait de phase **local** au voisinage des points d'équilibres.

### 2.2.1 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

Considérons le système dynamique général (1.4) où  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^2$ , définies sur  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , en admettant un point d'équilibre  $(x^*, y^*)$  solution de :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^*, y^*) = 0, \\ \dot{y} = g(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

On introduit les variables locales

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x^*, \\ v(t) = y(t) - y^*. \end{cases}$$

On se place dans un voisinage de  $(x^*, y^*)$  et on procède un développement en série de Taylor au premier ordre des fonctions  $f$  et  $g$  :

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \end{cases}$$

Chacune des fonctions  $f$  et  $g$  est cette fois approchée par l'équation d'un plan. Or  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ , d'où :

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}u + a_{12}v \\ \dot{v} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Où  $A^* = [a_{ij}]$  est la **matrice Jacobienne** calculée au point d'équilibre avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ et } A^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Le système  $\dot{U} = A^*U$  est un système linéaire qui approxime le système de départ au voisinage du point d'équilibre  $(x^*, y^*)$ . Ainsi, si un système possède plusieurs points d'équilibre, il y a aura autant de systèmes linéaires que de points d'équilibre.

## 2.3 Stabilité au sens de Lyapounov

On a vu dans la partie précédente que la méthode de linéarisation parfois ne suffit pas, dans cette partie nous introduisons la stabilité d'un système à l'aide d'une fonction convenablement choisi, appelée fonction de Lyapounov. Cette méthode, dite directe est outil pour les systèmes non linéaires et elle a l'avantage d'être applicable dans des situations non standards.

**Définition 2.3.1. (Fonction de Lyapounov)** [3] Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contient le point d'équilibre  $(x^*, y^*)$ ,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  est dite définie positive si :

1.  $V(x^*, y^*) = 0$ ,
2.  $V(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in D$  avec  $(x, y) \neq (x^*, y^*)$ .

**Théorème 2.3.1. (Lyapounov)** [8] Soit  $(x^*, y^*)$  un point d'équilibre du système (1.4), soit  $D$  un voisinage de  $(x^*, y^*)$ ,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  tel que :

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y},$$

alors

1. Si  $\dot{V} < 0$ ,  $\forall (x, y) \in D \setminus (x^*, y^*)$  alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable,
2. Si  $\dot{V} \leq 0$ ,  $\forall (x, y) \in D \setminus (x^*, y^*)$  alors le point d'équilibre est stable,
3. Si  $\dot{V} > 0$ ,  $\forall (x, y) \in D \setminus (x^*, y^*)$  alors le point d'équilibre est instable.

**Exemple 2.3.1.** La fonction suivante est définie positive sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

puisque elle est nulle à l'origine et strictement positive ailleurs.

**Exemple 2.3.2.** Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3, \\ \dot{y} = -y^3. \end{cases}$$

Cherchons les points d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^3 = 0 \\ -y^3 = 0 \end{cases}$$

D'où l'origine est l'unique point d'équilibre. La matrice Jacobienne est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3x^2 & 0 \\ 0 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne à l'origine :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, le point  $(0, 0)$  est un point non hyperbolique et la linéarisation n'apporte donc aucune information sur la stabilité de l'origine, considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{2.1}$$

qui est définie positive. Calculons la dérivée de la fonction  $V$  :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = -(x^4 + y^4)$$

qui est une fonction définie négative. De plus  $\dot{V} < 0$ , on peut donc conclure que l'origine est asymptotiquement stable. Cela veut dire que quelle que soit la condition initiale prise dans le plan, la trajectoire tend vers l'origine lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

## 2.4 Théorie de bifurcation

Considérons le système d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, \mu) \\ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2}$$

tel que  $\mu \in \mathbb{R}$  est un paramètre de contrôle, et  $x^*$  est la solution de ce système.

### 2.4.1 Définition de bifurcation

Une bifurcation est un changement qualitatif ou quantitatif de la solution  $x^*$  du système (2.2) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions [9].

### 2.4.2 Diagramme et portrait de phase de bifurcation

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

**Définition 2.4.1.** [10] *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

Nous traitons par la suite quelques types de bifurcation.

### 2.4.3 Types de bifurcation

#### Bifurcation selle-nœud

Cette bifurcation est appelé une **bifurcation selle nœud** et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibres l'un instable (un point selle) et l'autre stable (un nœud). D'une manière générale lorsque les deux isoclines, l'isocline verticale  $\dot{x} = 0$  et l'isocline horizontale  $\dot{y} = 0$ , initialement disjointes deviennent tangentes et ensuite se coupent en deux points d'équilibres puis aucun point d'équilibre, cette bifurcation se produit [9].

**Exemple 2.4.1.** *Considérons l'équation*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (2.3)$$

*Selon le signe de  $\mu$ , il faut distinguer trois cas :*

1. *Si  $\mu > 0$  dans ce cas le système admet deux points d'équilibre de coordonnées  $(\sqrt{\mu}, 0)$  et  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ .*

*La matrice jacobienne du système s'écrit par :*

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- i).** *Au point  $(\sqrt{\mu}, 0)$*

$$J(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*cette matrice admet deux valeurs propres réelles négatives  $\lambda_1 = -2\sqrt{\mu}$  et  $\lambda_2 = -1$ , d'où le point d'équilibre  $(\sqrt{\mu}, 0)$  est un nœud stable.*

- ii).** *Au point  $(-\sqrt{\mu}, 0)$*

$$J(-\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposés :  $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu}$  et  $\lambda_2 = -1$ , d'où le point d'équilibre est un point selle donc instable.*

2. Si  $\mu = 0$  le système (2.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

l'unique point critique du système est l'origine, la matrice jacobienne associée s'écrit :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc le point  $(0,0)$  est non hyperbolique pour la première équation  $x = 0$  et pour la deuxième équation  $y = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

3. Si  $\mu < 0$  dans ce cas le système (2.3) n'admet aucun point d'équilibre car  $x \in \mathbb{R}$ .

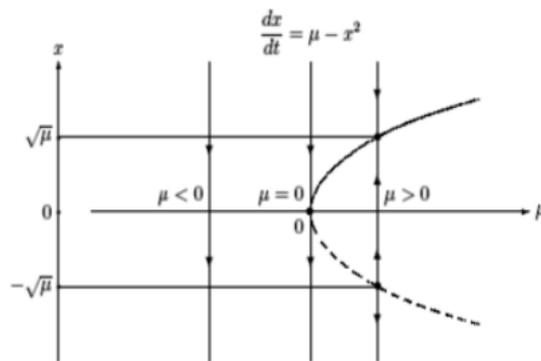


FIGURE 2.12 – Diagramme de bifurcation Selle-Nœud

### Bifurcation transcritique

Dans cette bifurcation le nombre de points d'équilibre est conservé mais leur stabilité passe de stable à instable.

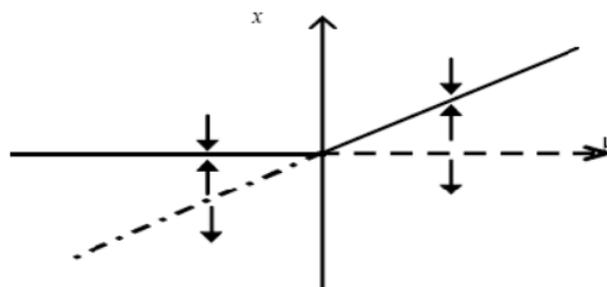


FIGURE 2.13 – Diagramme de bifurcation transcritique

### Bifurcation de fourche ou "pitchfork"

Cette bifurcation est appelée **bifurcation fourche super-critique** lorsque le nombre de point d'équilibre passe de trois à un, donc nous avons un point selle entouré de deux nœuds asymptotiquement stable.

**Exemple 2.4.2.** Soit l'équation :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \tag{2.4}$$

Recherchons les points d'équilibres :

$$\mu x - x^3 = 0 \iff x(\mu - x^2) = 0$$

D'où :

$$x = 0$$

ou

$$x = \pm\sqrt{\mu}$$

1. Si  $\mu < 0$  Un seul point d'équilibre  $x^* = 0$  et  $Df(0, \mu) = \mu < 0$  donc l'équilibre est stable.
2. Si  $\mu = 0$  le système (2.4) est réduit à :

$$\dot{x} = -x^3$$

l'équilibre est non hyperbolique.

3. Si  $\mu > 0$  On a trois points d'équilibre :  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = \sqrt{\mu}$ ,  $x_3^* = -\sqrt{\mu}$ ,  $Df(x, \mu) = \mu - 3x^2$ , alors  $Df(0, \mu) = \mu > 0$ , ce qui implique que le point d'équilibre  $x^* = 0$  est instable.  $Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu < 0$  donc les points d'équilibre  $x = \pm\sqrt{\mu}$  sont tous les deux stables.

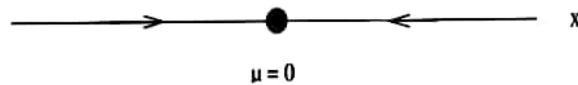


FIGURE 2.14 – Diagramme de l'exemple (2.4.2)

Nous pouvons voir que l'équilibre dans ce cas est stable. Le système a ce que l'on appelle une bifurcation de fourche à la valeur du paramètre  $\mu = 0$ .

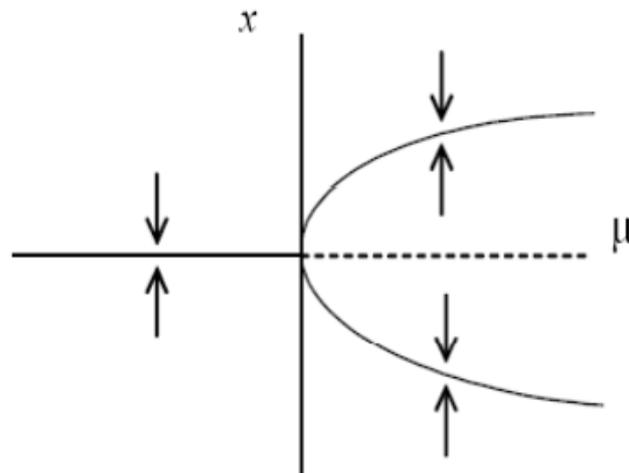


FIGURE 2.15 – Diagramme de bifurcation super-critique

**Remarque 2.4.1.** Il existe aussi une bifurcation dite sous-critique, illustrée par l'exemple suivant :  $\dot{x} = \mu x + x^3$ , après une étude similaire à l'exemple ci-dessus on conclut que cette bifurcation se caractérise par le fait que lorsqu'on traverse la valeur  $\mu = 0$ , le point d'équilibre 0 passe de stable à instable et les deux autres points d'équilibre instables pour  $\mu < 0$  disparaissent. Donc le nombre de points d'équilibres passe de trois à un contrairement à la bifurcation super-critique.

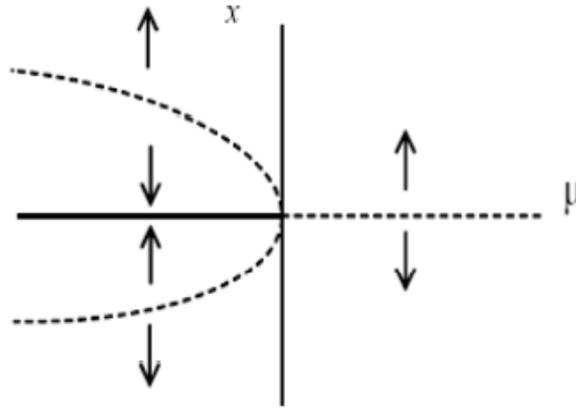


FIGURE 2.16 – Diagramme de bifurcation sous- critique

### Bifurcation de Hopf

Le système suivant : [11]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu), \\ \dot{y} = g(x, y, \mu). \end{cases} \quad (2.5)$$

Le système (2.5) admet un point d'équilibre  $(x^*(\mu), y^*(\mu))$ . Soit  $J_{(x^*(\mu), y^*(\mu))}$  la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre, et les valeurs propres complexes conjugués de la matrice Jacobienne s'écrivent sous la forme  $\lambda_{1,2} = a(\mu) + ib(\mu)$  avec  $a(\mu)$  la partie réelle et  $b(\mu)$  la partie imaginaire. Soit  $\mu^*$  une valeur particulière de paramètre  $\mu$  pour laquelle on a :

$$a(\mu^*) = 0, b(\mu) \neq 0 \text{ et } \frac{da}{d\mu}(\mu^*) \neq 0.$$

Alors si  $\frac{da}{d\mu}(\mu^*) > 0$ , il y a trois cas possibles :

1. Lorsque  $\mu = \mu^*$ , il existe des trajectoires concentriques autour de  $(x^*(\mu), y^*(\mu))$ . Le point d'équilibre  $(x^*(\mu), y^*(\mu))$  correspond à des centres, ce qui donne une bifurcation de **Hopf dégénérée**.
2. Lorsque  $\mu = \mu^*$  le point d'équilibre  $(x^*(\mu), y^*(\mu))$  est asymptotiquement stable, et  $\exists \tilde{\mu} > \mu^*$ ,  $\forall \mu$  vérifiant  $\mu^* < \mu < \tilde{\mu}$  tel qu'il existe, autour de  $(x^*(\mu), y^*(\mu))$  est instable, un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à  $\sqrt{\mu - \mu^*}$ . On parle de bifurcation **Hopf super-critique**.
3. Lorsque  $\mu = \mu^*$ , le point d'équilibre  $(x^*(\mu), y^*(\mu))$  est instable  $\exists \tilde{\mu} < \mu^*$ ,  $\forall \mu$  vérifiant  $\tilde{\mu} < \mu < \mu^*$  tel qu'il existe, autour de  $(x^*(\mu), y^*(\mu))$  qui est asymptotiquement stable, un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à  $\sqrt{|\mu - \mu^*|}$ , c'est la bifurcation de **Hopf sous-critique**.

**Remarque 2.4.2.** Si  $\frac{da}{d\mu}(\mu^*) < 0$ , il faut inversé les conclusions, c'est-à-dire le cycle limite stable (respectivement instable) apparait pour des valeurs du paramètre inférieur (respectivement supérieur) à  $\mu$ .

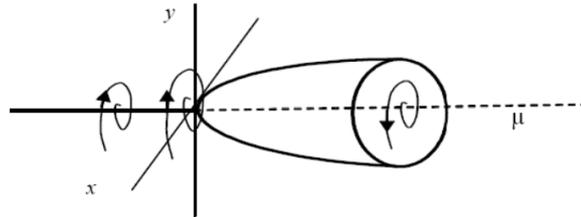


FIGURE 2.17 – Diagramme de bifurcation de Hopf

## 2.5 Les bases de modélisations en systèmes dynamiques

Dès le début du XXe siècle, l'étude des systèmes et des structures biologiques a été effectuée à la fois par des expériences et par des modèles mathématiques. D'une manière générale, les modèles mathématiques constituent des outils de compréhension du fonctionnement de systèmes naturels, et de prédiction de leurs évolutions.

### 2.5.1 Modèle Malthusien

Les fondements modernes de la dynamique des populations sont clairement attribués à l'économiste anglais Thomas Robert Malthus [12]. En 1798, Malthus a introduit son célèbre énoncé : "Population, when unchecked, increase in a geometrical ratio", connu aujourd'hui sous le nom de "croissance malthusienne". Il a considéré une population idéale composée d'une seule espèce animale homogène, en négligeant les variations d'âge, de taille et de périodicité éventuelle pour la natalité ou la mortalité. Il a également supposé que cette population vit seule dans un environnement invariable ou coexiste avec d'autres espèces sans influence directe ou indirecte, ce qui traduit par l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = rN(t), \quad (2.6)$$

où  $r$  est le taux de croissance, en intégrant l'équation (2.6) on obtient la loi de la croissance exponentielle ou la loi de la croissance malthusienne :

$$N(t) = N(0) \exp(rt)$$

1. Si  $r < 0$ , la population est en extinction exponentielle :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$ .
2. Si  $r = 0$ , la population est en équilibre démographique :  $N(t) = N(0)$ .
3. Si  $r > 0$ , la population est en croissance exponentielle :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$  (2.18)

On est donc amené à conclure que la loi exponentielle reste valable tant que la densité de la population ne sature pas le milieu.

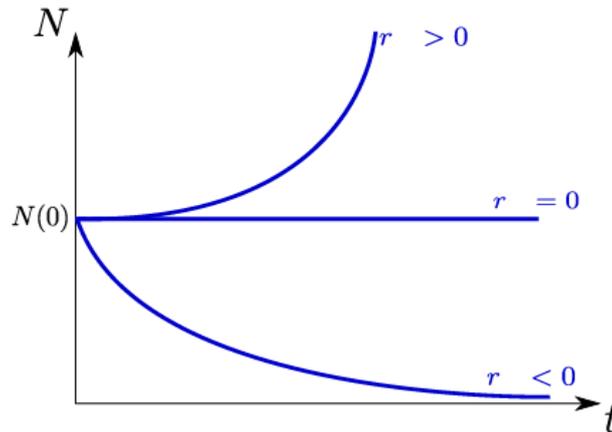


FIGURE 2.18 – la loi de la croissance malthusienne [36]

### 2.5.2 Le modèle logistique de Verhulst

Le biologiste belge Pierre-François Verhulst [13], en 1837, propose un modèle appelé le modèle logistique, qui prend en compte la limitation imposée par la croissance de la population  $N$ . Son idée est que les taux de croissance doivent varier en fonction de la densité de la population, ce qui conduit à une limitation de la croissance, cela se traduit par une équation différentielle suivante :

$$N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad (2.7)$$

où  $r$  est le taux de croissance de la population  $N$  est très petit et  $K$  appelé "carrying capacity" en anglais, représente la capacité du milieu à soutenir la croissance de la population.

Le modèle (2.7) est appelé modèle logistique, son étude qualitative peut se faire graphiquement on représente  $N'(t)$  en fonction de  $N$ . Le graphe est une parabole qui coupe l'axe des  $N$  en deux points d'équilibres  $0$  et  $K$  où  $N'(t)=0$ .

L'évolution de  $N(t)$  est connue par le signe de sa dérivée :  $0$  est instable (point rouge) et  $K$  est asymptotiquement stable (point vert) (2.19).

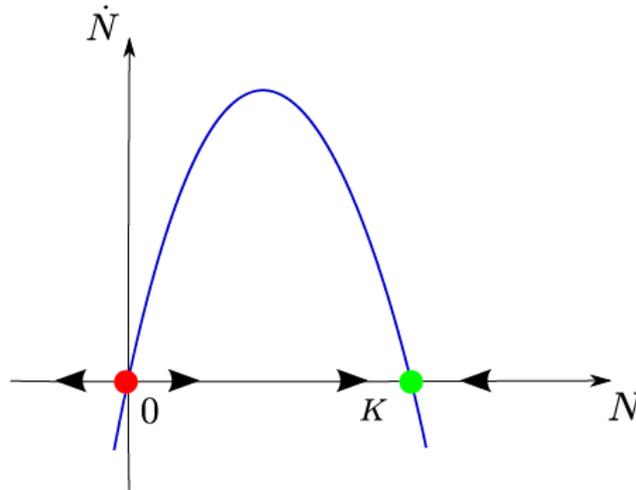


FIGURE 2.19 – **Fonction de croissance logistique** [36]

En intégrant l'équation (2.7) par la méthode de séparation des variables, on obtient la loi de croissance appelée logistique par Verhulst :

$$N(t) = \frac{KN(0)}{N(0) + (K - N(0)) \exp(-rt)}$$

L'expression de  $N(t)$  correspond à une courbe sigmoïde (2.20).

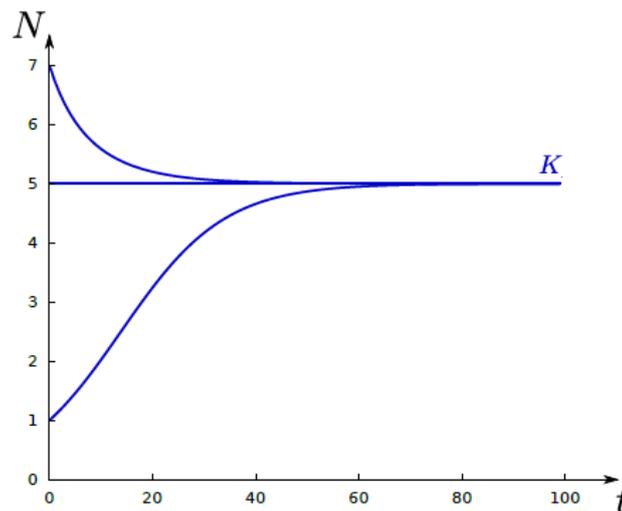


FIGURE 2.20 – **La loi de la croissance logistique** [36]

Si  $N(0) = 0$ ,  $N(t) = 0$ , pour tout  $t$ . Par ailleurs, si  $N(0)$  est différent de 0,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$ . Cette loi est radicalement de celle de Malthus en ce sens qu'elle impose une valeur limite à la population (2.19).

# Applications en dynamiques de populations

Dans ce chapitre, nous présenterons la modélisation de base des systèmes dynamiques continus et déterministes, régis par des équations différentielles ordinaires, outils mathématiques qui les illustrent de façon simple et accessible. Ces modèles sont essentiellement utilisés dans le cadre d'études de dynamique des populations et des écosystèmes.

## 3.1 Modèles à deux espèces

Tout au long de cette section, nous identifierons dans nos modèles la population de prédateurs par  $T$  et celle de sa proie par  $S$ .

La modélisation des systèmes proies-prédateurs consiste ainsi en l'expression couplée des deux variables dynamiques  $S$  et  $T$  qui forme un système dynamique définie pour  $S$  et  $T$  positifs, c'est-à-dire dans le premier quadrant du plan  $\mathbb{R}_+^2$ , par :

$$\begin{cases} S'(t) = Sg(S) - TF(S, T), \\ T'(t) = TQ(S, T). \end{cases} \quad (3.1)$$

Les fonction  $g(S)$ ,  $F(S, T)$  et  $Q(S, T)$  sont appelées respectivement la croissance de la proie, la réponse fonctionnelle et la réponse numérique du prédateurs qui seront explicitées plus bas.

### 3.1.1 Le modèle de LOTKA-VOLTERRA

Dans les années 1920, une querelle de priorité a éclaté entre Alfred J. Lotka et Vito Volterra concernant le premier modèle de type proie-prédateur. Lotka s'intéressait initialement aux oscillations dans les réactions chimiques, tandis que Volterra s'est intéressé aux déséquilibres observés dans les écosystèmes marins. Les données statistiques sur la pêche dans la mer Adriatique ont confirmé l'impact de la pêche sur l'équilibre des espèces. À la demande de son beau-fils, Umberto d'Ancona, Volterra a développé le célèbre modèle proie-prédateur, connu sous le nom de modèle Lotka-Volterra. Ce modèle décrit l'interaction[14] entre une proie et un prédateur à l'aide d'un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} S'(t) = S(a - bT), \\ T'(t) = T(cS - d), \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des constants positives.

**Interprétation du modèle**

- $a$  : le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur.
- $b$  : le taux de prédation du prédateur sur la proie du fait de sa prédation ;
- $c$  : le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation,
- $d$  : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie,

**Interprétation des hypothèses de ce modèle**

1. Dans l'absence de toute prédation, la proie croit par loi malthusienne, il s'agit du terme  $aS$  dans (3.2) .
2. L'effet de la prédation est de réduire le taux de croissance de la proie par un terme proportionnel à la population de la proie et du prédateur ; il s'agit du terme  $-bST$ .
3. Dans l'absence de toute proie pour subsistance le prédateur décroît exponentiellement ; il s'agit du terme  $-dT$  .
4. La contribution des proies au taux de croissance des prédateur est le terme  $cST$  ; qui est proportionnel à la population de la proie et du prédateur.

Le modèle (3.2) est dit modèle de LOTKA-VOLTERRA puisque les mêmes équations de (3.2) sont obtenus par Alfred J.Lotka (voir [15],[16])

**Analyse de la stabilité du modèle de LOTKA-VOLTERRA**

Avant d'analyser la dynamique du modèle de LOTKA-VOLTERRA (3.2) et afin de réduire le nombre des paramètres ; on redimensionne le système (3.2) (voir [17]) ;

$$\tau = at; u(\tau) = \frac{cS(t)}{d}; v(\tau) = \frac{bT(t)}{a} \text{ et } \alpha = \frac{d}{a}$$

alors (3.2) devient :

$$\begin{cases} u'(\tau) = u(1 - v) \\ v'(\tau) = \alpha v(u - 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

**Les points d'équilibres du modèle (3.3)**

On cherchons les points d'équilibres :

$$\begin{cases} u'(\tau) = 0 \\ v'(\tau) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u(1 - v) = 0 \\ \alpha v(u - 1) = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} u = 0 \cup 1 - v = 0 \\ v = 0 \cup u - 1 = 0 \end{cases}$$

Don (3.3) admet deux points d'équilibres l'origine  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$

**Stabilité des points d'équilibres du modèle (3.3)**

Pour introduire le système linéarisé de (3.3), on calcule sa matrice Jacobienne, on a :

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - v & -u \\ \alpha v & \alpha(u - 1) \end{pmatrix}$$

1. Pour (0, 0) on a :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

alors on a deux valeurs propres réels de signe opposés sont :  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -\alpha$ , alors (0,0) est un point selle qui est instable.

2. Pour (1, 1) on a :

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = -i\sqrt{\alpha}$  et  $\lambda_2 = +i\sqrt{\alpha}$ , toutes deux imaginaires pures, alors (1,1) est un centre. Le principe de linéarisation ne s'applique pas.

Soit  $H$  une intégrale première définie par :

$$H(u, v) = \alpha u + v - \ln u^\alpha v - \alpha - 1$$

En effet ;

$$\begin{aligned} \dot{H}(u, v) &= \dot{u} \frac{\partial H}{\partial u}(u, v) + \dot{v} \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) \\ \dot{H}(u, v) &= u(1 - v) \frac{\partial H}{\partial u}(u, v) + \alpha v(u - 1) \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) = 0 \end{aligned}$$

et

$$H(u, v) \geq 0 \text{ nul seulement pour } (u, v) = (1, 1).$$

D'après la stabilité au sens de Liapunov , on conclut que (1,1) est un centre stable.

Dans le plan de phase de  $u$  et  $v$ , en séparant les variable dans (3.3) on obtient :

$$\frac{\alpha(u - 1)}{u} u' = \frac{1 - v}{v} v' \tag{3.4}$$

En intégrant les deux cotés de (3.4) ; on obtient les orbites d'équation :

$$\alpha u + v - \ln u^\alpha v = C_0 \tag{3.5}$$

où  $C_0$  est une constante donnée par  $C_0 = \alpha u_0 + v_0 - \ln u_0^\alpha v_0$  tel que  $u_0 = u(0)$  et  $v_0 = v(0)$ . Pour chaque  $C_0$  donné, les orbites (3.5) sont fermées dans le plan de phase de  $u$  et  $v$  (voir (3.1))

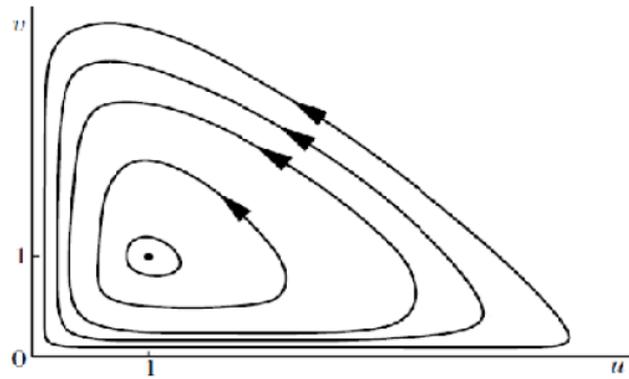


FIGURE 3.1 – Quelques orbites fermés de (3.2) [36]

D'où la solution de (3.5) sont des fonctions périodiques (voir (3.2))

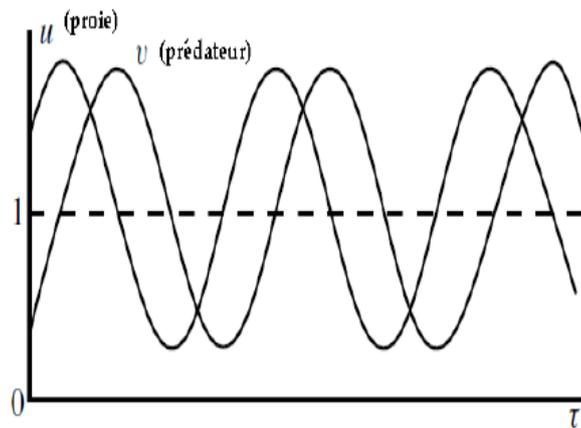


FIGURE 3.2 – Une solution périodique de (3.2) [36]

### 3.1.2 la réponse fonctionnelle

Le modèle de LOTKA-VOLTERRA a pour but de transcrire différents types de comportement animaux par des fonctions mathématiques. Parmi ces fonctions mathématiques, la réponse fonctionnelle du prédateur.

**Définition 3.1.1.** *On appelle réponse fonctionnelle du prédateur la densité de proies consommées par unité de temps par prédateur.*

Elle décrit le comportement du prédateur vis à vis ses proies, c'est à dire : elle est liée à la croissance de la population des prédateurs causée par la prédation. Pour le système proie-prédateur générale (3.1), il s'agit de la fonction  $F(S, T)$ .

Depuis le milieu des années vingt, ces réponses fonctionnelles on fait l'objet de nombreuses recherches et développement visant à rendre plus réaliste la représentation du comportement du prédateur par une fonction mathématique.

### La réponse fonctionnelle de VOLTERRA

La réponse fonctionnelle choisie par Volterra pour décrire la prédation dans le modèle de Lotka-Volterra est une fonction linéaire, où la prédation est proportionnelle au produit du nombre d'individus de chaque espèce. Cette fonction est représentée par  $F(S, T) = bS$ , où  $b$  représente le taux de prédation du prédateur sur la proie (3.3). Ainsi, le terme de prédation dans le modèle s'écrit  $TF(S, T) = bST$ , ce qui signifie que la prédation augmente ou diminue proportionnellement avec le taux de rencontre entre le prédateur et la proie.

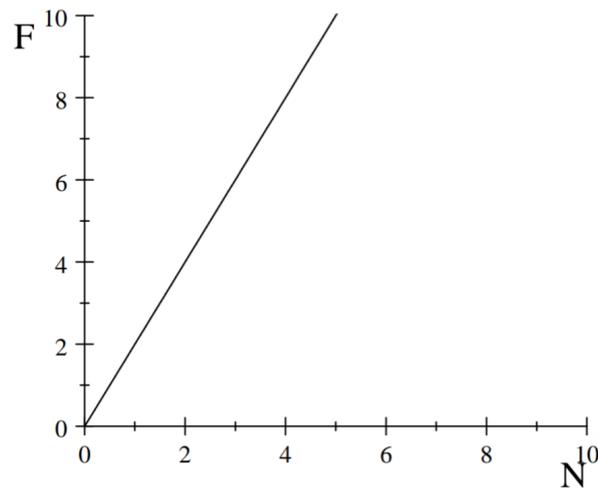


FIGURE 3.3 – Rp. fonctionnelle de VOLTERRA

### La réponse fonctionnelle de Gauss

Quelques années plus tard, le zoologiste russe G.F. Gauss [18] a effectué des vérifications expérimentales du modèle de Lotka-Volterra. Dans ses travaux, il a proposé une autre forme de réponse fonctionnelle pour décrire la prédation. Cette nouvelle réponse fonctionnelle était basée sur une certaine satiété du prédateur vis-à-vis de ses proies, il s'agit de la branche du parabole  $F(S, T) = S^\alpha$  avec  $0 < \alpha \leq 1$  (3.4).

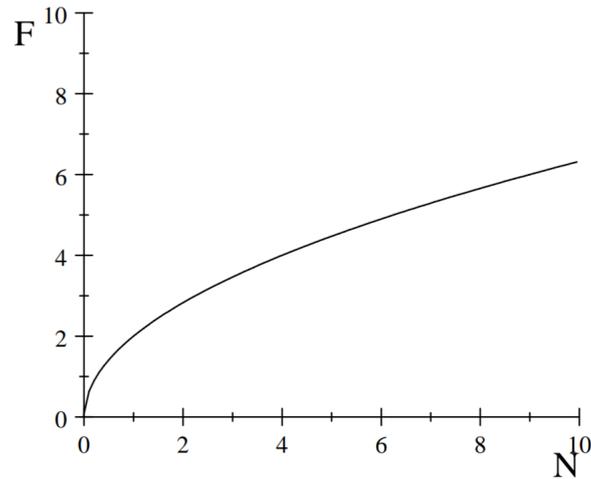


FIGURE 3.4 – Rp.fonctionnelle de GAUSS

### La réponse fonctionnelle de Holling

A la fin des années cinquante, l'entomologiste<sup>1</sup> C.S.Holling [19, 20, 21] et selon les densités et les caractéristiques des proies et du prédateurs élaborera trois principaux types de réponse fonctionnelle qui ont gardé son nom, visant à transcrire une certaine saturation du prédateur vis-à-vis de ses proies : la fonction de Holling de type I , II et III.

#### — Holling de type I

La réponse fonctionnelle de Holling de type I correspond à une croissance linéaire, c'est-à-dire, le nombre de proies tuées est proportionnelle à leur densité. Holling suggère que :

1. les prédateurs peuvent chercher aléatoirement leurs proies. Le temps de recherche est négligeable.
2. le taux de recherche est constant quelle que soit la densité de proies présentes.

Un niveau de saturation peut être atteint si le prédateur ne peut plus ingérer d'avantage d'individus :

$$F(S, T) = \begin{cases} bS, & \text{si } S < \bar{S} \\ b\bar{S}, & \text{si } S \geq \bar{S} \end{cases}$$

La représentation graphique de la réponse fonctionnelle de Holling de type I est illustrée sur la figure (3.5.A). Ce type de réponse fonctionnelle a été observé dans les études de Ricker [22] sur des espèces de poissons consommant du saumon rouge.

#### Réponse fonctionnelle de Holling de type II et III

Pour les types II et III Holling suppose que le prédateur divise son temps en deux sortes d'activités : la recherche de sa proie et sa capture, il suppose :

- le temps total dédié à l'alimentation est la somme du temps de recherche  $t_R$  et du temps de capture  $t_H$ .

---

1. Zoologiste qui s'occupe de l'étude des insectes.

- Le temps  $t_H$  de capture de chaque proie qui comprend le temps mis pour la chasser, la tuer, la dévorer et la digérer est une constante. Soit  $a$  le taux d'attaques réussies, c'est à dire : le nombre de proies consommées par prédateur et par unité de temps de recherche.

Ceci se traduit la forme mathématique :

$$F = \frac{\text{Nombre de proies consommées par prédateur}}{\text{Temps total d'alimentation}}$$

Par une écriture mathématique, on aura :

$$F = \frac{at_R}{t_R + at_R.t_H}$$

D'où

$$F = \frac{a}{1 + at_H}$$

où  $F$  est la réponse fonctionnelle du prédateur et  $a$  s'exprime par plusieurs façons en fonction de  $S$  (Yodzis [23], Begon et col.[24]).

**Holling de type II**

Concernant le type II de Holling, la saturation des proies apparaît progressivement : l'augmentation de la densité de proies s'accompagne d'une rapide augmentation du nombre de proies attaquées  $a = bS$ , par le prédateur, qui finit par ralentir et stagner à une valeur fixe. La fonction de Holling type II (3.5.B) est représentée par :

$$F(S, T) = \frac{bS}{1 + bt_H S} \tag{3.6}$$

(3.6) peut aussi s'écrire :

$$F(S, T) = \frac{AS}{B + S}$$

où  $A = \frac{1}{t_H}$  et  $B = \frac{1}{bt_H}$  qui sont des constantes positives, ce type de réponse est observé chez une large variété de prédateurs [25] notamment chez les insectes, les acariens, le mollusques, les poissons, etc. Par ailleurs, ce modèle correspond également au modèle de (Monod [26]), proposé pour décrire la croissance de micro-organismes consommant des substrats, et au modèle de Michaelis-Menten (Menten and Michaelis [27]), où cette fonction est proposée en 1913 pour la première fois pour décrire la cinétique des enzymes agissant sur un substrat.

**Holling de type III** : (sigmoïde admet un point d'inflexion) Est une réponse fonctionnelle dans laquelle le taux d'attaque  $a = bS^2$  du prédateur augmente tout d'abord lorsque le nombre de proies est faible puis ralentit lorsque le prédateur atteint la saturation. Ainsi, les réponses fonctionnelles sigmoïdes sont typiques des prédateurs généralistes qui passent d'une espèce de proie à une autre et qui concentrent leur activité dans des régions où les ressources sont en abondance. La fonction de Holling type III (3.5.C) est représenté par :

$$F(S, T) = \frac{bS^2}{1 + bt_H S^2} \tag{3.7}$$

(3.7) peut aussi s'écrire :

$$F(S, T) = \frac{AS^2}{B + S^2}$$

où  $A = \frac{1}{t_H}$  et  $B = \frac{1}{\sqrt{bt_H}}$  sont des constantes positives.

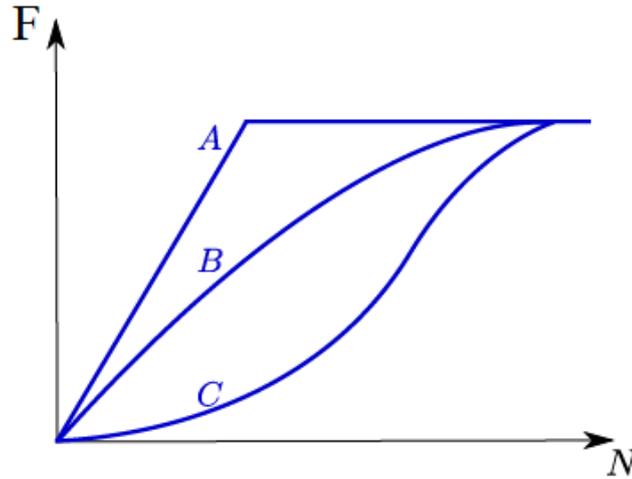


FIGURE 3.5 – Les 3 réponses fonctionnelles de Holling [36]

Dans (3.5), on distingue les trois réponses fonctionnelles du prédateur, en fonction de la densité des proies : (A) Holling de type I, (B) Holling de type II et (C) Holling de type III.

### 3.2 Le modèle de LOTKA-VOLTERRA avec réponse fonctionnelle de Holling type II

La première modification du modèle de Lotka-Volterra est due à Holling qui a remplacé la réponse fonctionnelle linéaire de type I par celle de type II, il s’agit du système :

$$\begin{cases} S'(t) = rS - \frac{aST}{b+S} \\ T'(t) = T\left(\frac{\mu S}{b+S} - d\right) \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $a, b, \mu, d$  et  $r$  sont des constantes positives.

#### Interprétation du modèle

- $r$  : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l’absence de prédateur,
- $a$  : le taux de prédation (d’attaque) maximale du prédateur sur la proie,
- $b$  : la constante de demi saturation pour le prédateur, qui est la densité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est moitié maximale.
- $\mu$  : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs,
- $d$  : le taux de mortalité du prédateur en l’absence de proie.

### Les points d'équilibres

Cherchons les points d'équilibres du systèmes (3.8) :

$$\begin{cases} S'(t) = 0 \\ T'(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} rS - \frac{aST}{b+S} = 0 \\ T(\frac{\mu S}{b+S} - d) = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} S(r - \frac{aT}{b+S}) = 0 \\ T(\frac{\mu S}{b+S} - d) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} S = 0 \cup r - \frac{aT}{b+S} = 0 \dots (1) \\ T = 0 \cup \frac{\mu S}{b+S} - d = 0 \dots (2) \end{cases}$$

Alors, on a deux points d'équilibres sont :  $Y_0 = (0, 0)$  et  $Y^* = (S^*, T^*)$  tel que  $S^* = \frac{bd}{\mu - d}$  et  $T^* = \frac{r}{a}(b + S^*)$ .

Ce dernier point existe dans le quadrant positive si et seulement si  $\mu > d$ .

### Stabilité des points d'équilibres

Pour introduire le système linéarisé (3.8), on calcule la matrice Jacobienne, on a :

$$J(S, T) = \begin{pmatrix} r - \frac{abT}{(b+S)^2} & \frac{-aS}{b+S} \\ \frac{\mu bT}{(b+S)^2} & \frac{\mu S}{b+S} - d \end{pmatrix}$$

1. Au point  $E_0 = (0, 0)$  on trouve :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

On a deux valeurs propres de signe opposées tel que :  $\lambda_1 = r > 0$  et  $\lambda_2 = -d < 0$ , alors le point  $E_0 = (0, 0)$  est un point selle qui est instable.

2. Au point  $E^* = (S^*, T^*)$  on obtient :

$$J(S^*, T^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{abT^*}{(b+S^*)^2} & \frac{-aS^*}{b+S^*} \\ \frac{\mu bT^*}{(b+S^*)^2} & \frac{\mu S^*}{b+S^*} - d \end{pmatrix}$$

après des calculs on trouvons :

$$J(S^*, T^*) = \begin{pmatrix} \frac{rd}{\mu} & \frac{-ad}{\mu} \\ r - \frac{rd}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons maintenant la trace et le déterminant de la matrice Jacobienne  $J(S^*, T^*)$ , d'où :

$\text{tr}(J(S^*, T^*)) = \frac{rd}{\mu} > 0$  car on a tous les paramètres  $r, d$  et  $\mu$  sont des constants positifs, passons au calcul de déterminant de  $J(S^*, T^*)$  telle que :

$$\det(J(S^*, T^*)) = -\left(\frac{-ad}{\mu}\right) \times \frac{r}{a}(\mu - d)$$

$$\det(J(S^*, T^*)) = \frac{dr}{\mu}(\mu - d) > 0$$

Alors, on calculons le discriminant  $\Delta$  tel que :

$$\Delta = (\text{tr}(J))^2 - 4 \det(J)$$

$$\Delta = \left(\frac{rd}{\mu}\right)^2 - 4\left(\frac{dr}{\mu} \times (\mu - d)\right)$$

$$\Delta = \frac{rd}{\mu^2}[rd - 4\mu(\mu - d)]$$

Le signe de discriminant est basé sur le signe de  $(\mu - d)$ , alors on distingue trois cas pour cette situation :

- (a) Si  $\mu > d$ , alors  $E^*$  est un foyer instable,
- (b) Si  $\mu < d$ , donc  $E^*$  est un nœud instable,
- (c) Si  $\mu = d$ , donc  $E^*$  est un nœud dégénéré instable.

### 3.3 Le modèle de LOTKA-VOLTERRA avec croissance logistique des proies

On considère le modèle de LOTKA-VOLTERRA modifié, en remplaçant la loi de croissance exponentielle de Malthus des proies par la croissance logistique de Verhulst, alors soit le modèle (3.1) avec :

$$g(S) = rS\left(1 - \frac{S}{K}\right), \quad F(S, T) = bS, \quad \text{et} \quad Q(S, T) = cS - d$$

Soit le système :

$$\begin{cases} S'(t) = rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - bST, \\ T'(t) = T(cS - d). \end{cases} \quad (3.9)$$

#### Les points d'équilibres

Les points d'équilibres du système (3.9) sont :  $W_0 = (0, 0)$ ,  $W_1 = (K, 0)$  et  $W^* = (S^*, T^*)$  tel que ses coordonnées sont :

$$S^* = \frac{d}{c}$$

$$T^* = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{S^*}{K}\right)$$

ce point existe si et seulement si  $S^* < K$ .

### Stabilité des points d'équilibres

La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J(S, T) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rS}{K} - bT & -bS \\ Tc & cS - d \end{pmatrix}$$

(a) Pour  $W_0$  on a :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

On a deux valeurs propres de signes opposées  $\lambda_1 = r > 0$  et  $\lambda_2 = -d < 0$ , alors  $W_0$  est un point selle qui est instable.

(b) Pour  $W_1$  on trouve :

$$J(K, 0) = \begin{pmatrix} -r & -Kb \\ 0 & cK - d \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = -r < 0$  et  $\lambda_2 = cK - d$ , d'où la nature du point  $W_1$  dépend du signe de  $\lambda_2$  tel que :

$$cK - d = 0 \iff K = \frac{d}{c} = S^*$$

Alors :

- i. Si  $K > S^*$  on a un point selle qui est instable ;
- ii. Si  $K < S^*$  on a un nœud asymptotiquement stable.

Pour que l'équilibre  $(S^*, T^*)$  soit au quadrant positif, on suppose dans tout ce qui suit que  $S^* < K$ .

(c) Pour  $W^*$ , on a

$$J(S^*, T^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rS^*}{K} - bT^* & -bS^* \\ T^*c & cS^* - d \end{pmatrix}$$

$$J(S^*, T^*) = \begin{pmatrix} -\frac{rd}{cK} & -\frac{bd}{c} \\ \frac{rc}{b}\left(1 - \frac{d}{cK}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$J(S^*, T^*) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{K}S^* & -bS^* \\ cT^* & 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la stabilité du point  $W^*$ , on doit calculer la trace et le déterminant de la matrice  $J(S^*, T^*)$  telle que :

$$\text{tr}(J) = \frac{-r}{K}S^* < 0$$

et

$$\det(J) = bS^*cT^* > 0$$

alors  $W^* = (S^*, T^*)$  est un foyer asymptotiquement stable. Dans ce cas il y a coexistence des deux populations. (voir (3.6))

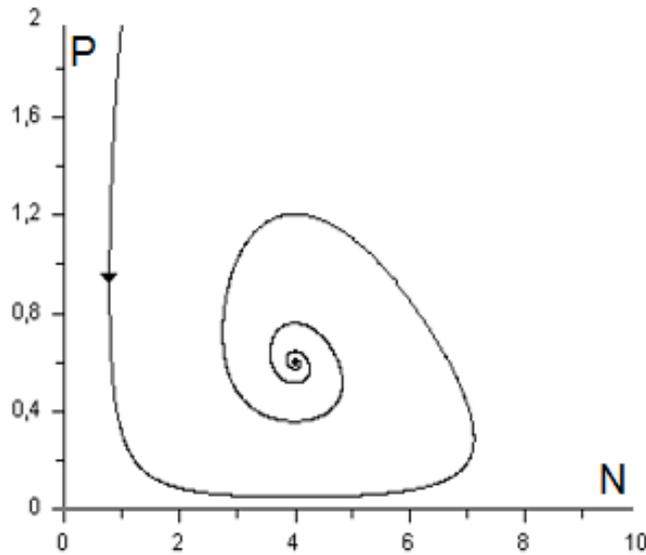


FIGURE 3.6 – Coexistence des deux populations [36]

### 3.4 Application au modèle de Rosenzweig-MacArthur

Dans cette section, nous allons étudier le modèle dynamique connu sous le nom de Rosenzweig-MacArthur. Ce modèle est utilisé pour étudier les interactions entre les populations de proies et de prédateurs dans les environnements naturels.

#### 3.4.1 Présentation du modèle de Rosenzweig-MacArthur

En 1963, les écologues américains Robert MacArthur (1930-1972) et Michael L. Rosenzweig (1941) [28] ont modifié le modèle de LOTKA-VOLTERRA en introduisant une nouvelle forme d'interaction entre les proies et les prédateurs. Cette modification visait à mieux représenter la réalité des interactions écologiques en introduisant une fonction non linéaire pour décrire l'interaction entre les deux populations. Au lieu d'être simplement proportionnelle au produit des populations de proies et de prédateurs, le terme d'interaction a été modifié pour tenir compte de la saturation des interactions et de la réponse fonctionnelle des prédateurs envers les proies. Cette modification a conduit au modèle de Rosenzweig-MacArthur, qui permet une meilleure compréhension des dynamiques des populations dans les écosystèmes réels, il s'agit du système(3.1) avec :

$$g(S) = rS\left(1 - \frac{S}{K}\right), \quad F(S, T) = \frac{aS}{b + S}, \quad \text{et} \quad Q(S, T) = \frac{cS}{b + T} - d$$

soit le célèbre modèle

$$\begin{cases} S'(t) = rS(1 - \frac{S}{K}) - \frac{aST}{b+S}, \\ T'(t) = T(\frac{cS}{b+S} - d), \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $a, b, c, d$  et  $r$  sont des constante positives.

### Interprétation du modèle

- $r$  : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur,
- $a$  : le taux de prédation maximale du prédateur sur la proie,
- $b$  : la constante de demi-saturation pour le prédateur, qui est la densité de proie au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale, appelée aussi constant Michaelis-Menten.
- $c$  : le taux de conversion de la biomasse de proie en prédateurs,
- $d$  : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie,
- $K$  : la capacité de portée du milieu en proies.

### 3.4.2 Étude qualitative du modèle de Rosenzweig-MacArthur

#### Isoclines du système (3.10)

Dans ce modèle, le cadran positif est de nouveau positivement invariant. Afin de trouver les équilibres du Modèle de Rosenzweig -Mac Arthur, recherchons les isoclines zéros :

#### Les isoclines verticales

$$S'(t) = 0 \iff S[r(1 - \frac{S}{K}) - \frac{aT}{b+S}] = 0$$

d'où

$$S = 0 \cup T = \frac{r}{aK}(K - S)(b + S)$$

alors, l'isocline verticale du système (3.10) est constituée de la réunion de l'axe  $S = 0$  avec la courbe d'équation :

$$T = \frac{r}{aK}(K - S)(b + S)$$

#### Les isoclines horizontales

$$T'(t) = 0 \iff T(\frac{cS}{b+S} - d) = 0$$

alors

$$T = 0 \cup S = \frac{db}{c-d}$$

Et donc, l'isocline horizontale du système (3.10) est constitué de la réunion de l'axe des abscisses  $T = 0$  avec la droite d'équation :

$$S = \frac{db}{c-d}$$

### Les points d'équilibres

Les points d'équilibres sont les intersections des isoclines zéros, et par conséquence, deux cas sont possibles :

- (a)  $\frac{db}{c-d} < K$  dans ce cas, il y a trois points d'équilibres biologiques  $(0,0)$ ,  $(K,0)$  et  $(S^*, T^*)$  tel que :

$$\begin{cases} S^* = \frac{db}{c-d} \text{ avec } c > d, \\ T^* = \frac{r}{Ka}(b + S^*)(K - S^*). \end{cases}$$

- (b)  $\frac{db}{c-d} > K$ , il y a deux points d'équilibres  $(0,0)$  et  $(K,0)$  d'intérêt pour le modèle.

### Stabilité des points d'équilibres

Pour étudier la stabilité des points d'équilibres on calculons la matrice Jacobienne du système (3.10) :

$$J(S, T) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2S}{K}) - \frac{abT}{(b+S)^2} & -\frac{aS}{b+S} \\ \frac{Tcb}{(b+S)^2} & \frac{cS}{b+S} - d \end{pmatrix}$$

#### premier point d'équilibre $(0,0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

On a deux valeurs propres de signes opposées sont :  $\lambda_1 = r > 0$  et  $\lambda_2 = -d < 0$ , d'où  $(0,0)$  est un point selle qui est instable.

#### second point d'équilibre $(K,0)$

$$J(K,0) = \begin{pmatrix} -r & \frac{-aK}{b+K} \\ 0 & \frac{cK}{b+K} - d \end{pmatrix}$$

d'où, les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = -r < 0$  qui est toujours négative et  $\lambda_2 = \frac{cK}{b+K} - d$ , dont le signe dépend des valeurs des paramètres, selon les cas précédents :

- (a)  $\frac{db}{c-d} < K$ , alors  $\lambda_2 > 0$  et l'équilibre  $(K, 0)$  est un point selle qui est instable.
- (b)  $\frac{db}{c-d} > K$ , alors  $\lambda_2 < 0$  et l'équilibre est un nœud asymptotiquement stable.

**Remarque 3.4.1.** *Pour que le point d'équilibre soit à l'intérieur du premier quadrant positif, on suppose que  $S^* < K$ .*

**troisième point d'équilibre  $(S^*, T^*)$**

$$J(S^*, T^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rS^*}{K} - \frac{abT^*}{(b+S^*)^2} & \frac{-aS^*}{b+S^*} \\ \frac{T^*cb}{(b+S^*)^2} & \frac{cS^*}{b+S^*} - d \end{pmatrix}$$

Pour simplifier cette matrice, il est utile de se rappeler des conditions qui définissent cet équilibre :

$$\begin{cases} r - \frac{rS^*}{K} - \frac{aT^*}{S^*+b} = 0 \\ -d + \frac{cS^*}{b+S^*} = 0 \end{cases}$$

Ce qui permet de simplifier la matrice comme suit :

$$J(S^*, T^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rS^*}{K} - \frac{abT^*}{(b+S^*)^2} & \frac{-aS^*}{S^*+b} \\ \frac{bcT^*}{(S^*+b)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Sous cette forme, il est clair que le déterminant est toujours positif c'est-à-dire  $S^* > 0$  et  $T^* > 0$ , car nous avons :

$$\det(J) = \frac{aS^*bcT^*}{(S^*+b)^3} > 0$$

La trace de la matrice s'écrit :

$$\text{tr}(J) = r - \frac{2rS^*}{K} - \frac{aT^*b}{(b+S^*)^2}$$

En injectant la valeur de  $T^*$ , il vient :

$$\begin{aligned} \text{tr}(J) &= r - \frac{2rS^*}{K} - \frac{rb}{S^*+b} + \frac{rbS^*}{K(S^*+b)} \\ &= \frac{rk(S^*+b) - 2rS^*(S^*+b) - rbK + rbS^*}{K(S^*+b)} \\ &= \frac{rKS^* - 2rS^{*2} - rS^*b}{K(b+S^*)} \end{aligned}$$

Ce qui donne après quelques calculs :

$$\text{tr}(J) = \frac{rS^*}{K} \times \frac{K - 2S^* - b}{(S^* + b)}$$

Pour avoir stabilité de l'équilibre  $(S^*, T^*)$  il faut que cette trace soit négative, ce qui s'écrit :

$$\text{tr}(J) < 0 \iff S^* > \frac{K - b}{2}$$

En résumé :

- (a)  $(S^*, T^*)$  est un foyer stable si  $S^* > \frac{K - b}{2}$  (3.8.a),
- (b) Foyer instable si  $S^* < \frac{K - b}{2}$  entouré par un cycle limite globalement stable (3.8.b),
- (c) Pour  $S^* = \frac{K - b}{2}$ ,  $(S^*, T^*)$  est un centre (3.8.c) qui correspond à une bifurcation de Hopf ( passage de l'état stable à l'état instable) nous avons le déterminant positif :  $\det(J) = \frac{aS^*bcT^*}{(S^* + b)^3} > 0$ , alors que la trace change de signe lorsque la droite verticale  $S = \frac{bd}{c - d}$  qui est isocline horizontale traverse le sommet de parabole  $T = \frac{r}{a}(1 - \frac{S}{k})(b + S)$  qui est isocline verticale et apparition du cycle limite.

**Représentation des équilibres et du champs de vecteurs du système (3.10) [36]**

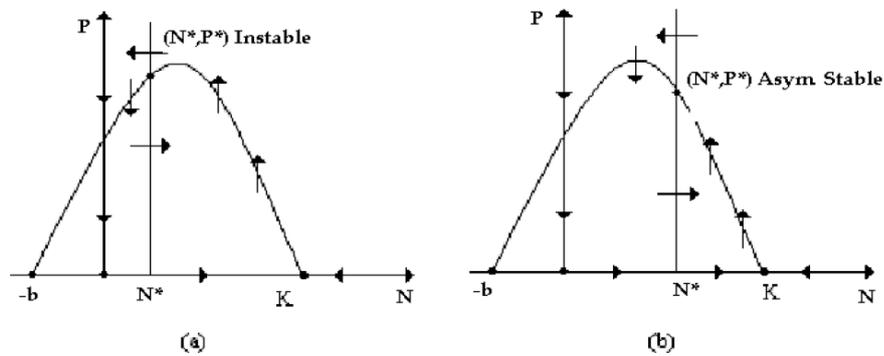


FIGURE 3.7 – Isoclines du systèmes (3.10)

## Plan de phase du système (3.10) [36]

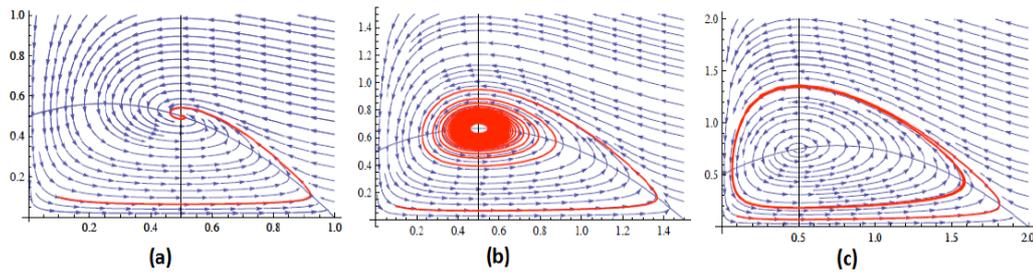


FIGURE 3.8 – Plan de phase du système (3.10)

## Le paradoxe de l'enrichissement

Si l'équilibre  $(S^*, T^*)$  est stable (c'est à dire l'isocline du prédateur est à droite du sommet de la proie ((3.8).a), on peut remarquer que pour  $K$  assez grand, l'isocline du prédateur peut assez à gauche du sommet de l'isocline de la proie ((3.8).c) et par conséquent  $(S^*, T^*)$  perd sa stabilité et des oscillations apparaissent (cycle limite). Il s'agit d'un phénomène appelé le paradoxe de l'enrichissement.

Le terme "paradoxe de l'enrichissement" a été introduit par Michael Rosenzweig en 1971 dans le domaine de l'écologie des populations pour décrire un effet observé dans les modèles proie-prédateur. Il décrit un effet dans des modèles proie-prédateurs dans lesquels l'augmentation de la nourriture disponible pour la proie cause une déstabilisation de la population du prédateur. L'exemple couramment cité est celui où une abondance de nourriture pour la proie, comme des lapins, entraîne une croissance sans limite de leur population. Cela conduit ensuite à une augmentation non durable de la population des prédateurs, tels que des lynx. Cette augmentation rapide de la population de prédateurs peut finalement causer un effondrement de leur population, voire l'extinction locale ou globale des espèces.

Le terme "paradoxe" est utilisé pour souligner l'ironie de la situation, où les efforts visant à améliorer la capacité d'un écosystème peuvent finalement le déséquilibrer de manière inattendue. Il met également en évidence la différence entre les interactions proie-prédateur modélisées dans les simulations et les interactions réelles qui peuvent être beaucoup plus complexes et dynamiques.

# Conclusion et perspectives

A la lumière de cette étude, nous voulons montrer que la stabilité des systèmes dynamiques est un concept clé en mathématiques appliquées, en physique et en écologie. Il permet de déterminer si un système va converger vers un état stable ou si au contraire. Les méthodes mathématiques et informatiques sont largement utilisées pour analyser la stabilité de ces systèmes, ce qui permet de concevoir des stratégies de contrôle et d'optimisation. Les modèles écologiques, tels que le modèle Lotka-Volterra, le modèle de Rosenzweig-MacArthur et le modèle proie-prédateur de Holling, sont des exemples d'applications de la stabilité des systèmes dynamiques en écologie. Ils permettent de mieux comprendre les interactions entre les espèces et leur impact sur l'écosystème dans son ensemble.

# Bibliographie

- [1] A. Gasri, Chaouat, *synchronisation(généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Mentouri-Constantine-1. 2018.*
- [2] Menacer, Tidjani. *Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Constantine1. 2014.*
- [3] K. Yadi. *Perturbations Singulières : Approximations, Stabilité Pratique et Applications à des Modèles de compétition, Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace de Mulhouse, 2008.*
- [4] H. AMANN. *Ordinary Differential Equation - An Introduction to Nonlinear Analysis. (Degruyter Studies in Mathematics)-Walter De Gruyter Inc, (1990).*
- [5] J. K. Hale- *Ordinary Differential Equations, Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1980.*
- [6] JACK K. HALE, H. *Dynamics and bifurcations. (Research in Criminology)-Springer-Verlag, (1991).*
- [7] DANG-VU, H., AND DELCARTE, C. *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses ; 2000.*
- [8] FRANÇOISE, J.-P. *Oscillations en biologie : analyse qualitative et modèles, vol. 46. Springer Science and Business Media, 2005.*
- [9] Fibonacci, L, *Liber abaci, reproduit dans la Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation, Springer-Verlag, New-York, (2004).*
- [10] Malthus, T.R., *An Essay on the Principle of Population, printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard, London (1798).*
- [11] Verhulst, P.F., *Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, Corresp. Math. Phys., X, 113-121, (1838).*
- [12] Lotka, A.J., *Elements of Physical Biology. Williams and Wilkins, Baltimore (1925).*
- [13] Lotka, A.J., *Undamped oscillations derived from the law of mass action. J. Amer. Chem. Soc., 42 :1595-1599 (1920).*
- [14] Murray, J.D., *Mathematical Biology. Springer Verlag, New York (1989).*
- [15] Gause, G.F., *The struggle for existence, Williams and Wilkins, Baltimore, (1935).*
- [16] Holling, C. S., *Some characteristics of simple types of predation and parasitism, Canadian Entomologist, 91, 385-398, (1959).*

- [17] Holling, C. S., *The components of predation as revealed by a study of small- mammal predation of the European pine sawy*, *Canadian Entomologist*, 91, 293-320, (1959).
- [18] Holling, C. S., *The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation*, *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, Vol. 45, 3-60 (1965).
- [19] Ricker, W. The consumption of young sockeye salmon by predaceous ?sh. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 5 : 293-313 (1941).
- [20] Begon, M., J.L. Harper, C.R. *Ecology. Individuals, populations and communities*, *Blackwell Science, Oxford*, 1068 p. Townsend, (1996).
- [21] Yodzis, P. *Predator-Prey theory and management of multiepecies sheries*. *Ecol. Appl.*, 4 (1) :51-58 (1994).
- [22] Murdoch, W. W., *The functional response of predators*. *Journal Of Applied Ecology* 10 :335-342 (1973).
- [23] Menten, L., and M. Michaelis, *Die Kinetik der Invertinwirkung*. *Biochem* 49 : 333-369 (1913).
- [24] Monod, J., *The growth of bacterial cultures*. *Annual Review of Microbiology* 3 :371 (1949).
- [25] Rosenzweig, M., and R. MacArthur, *Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions*. *The American Naturalist* 97 :209-223 (1963)
- [26] P. Auger, C. Lett, J. C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie*, *Fevier* 2010.
- [27] SOPHIE TARBOURIECH, GERMAIN GARCIA, J. M. G. D. S. J. I. Q. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. *Springer Science and Business Media*, 2011.
- [28] A. Pave, *Modélisation Mathématique des systèmes vivants : de la cellule à l'écosystème*, *Lavoisier*, 2012.
- [29] Brian, P. I. *Mathematical Modeling in Systems Biology : An Introduction*. *Cambridge, England*, 2013.
- [30] S. M. A. Bekkouche, M. F. Bendahmane, T. Benouaz. (10-12 mai 2003). *Analyse Paramétrique de la Stabilité à l'Origine d'un Modèle Ratio-Dépendant par la Dérivée Optimale*. *Première Conférence Internationale sur les Modèles et Méthodes Mathématiques et Informatiques en Dynamique de Population*.
- [31] T. Benouaz et O. Arino, (1995) . *Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique*, *Publications de l' U.A, CNRS 1204, N0.95/10*.
- [32] T. Benouaz et O. Arino, (1995) . *Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire*, 94/14 *Université de Pau, CNRS URA 1204*.
- [33] J. Hale, (1969) , *Ordinary differential equations*, *Springer Verlag*.
- [34] M. Fan, Q. Wang, X. Zou- *Dynamics of non-autonomous ratio-dependent predator prey system*, *Proceedings of the royal society of Edinburgh* , vol. 133A, p.97-118. 2003.

## [Sites]

- [35] <http://bmm.univ-lyon1.fr>.

**[Mémoires]**

- [36] Thèse Finale 2015 application au modèle proie prédateur holling, présenté par BEROUAL Nabil- Modèles Mathématiques Appliqués à la Dynamique des Populations- UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF 1.

## Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les systèmes dynamiques, à la fois linéaires et non linéaires, en utilisant des méthodes d'analyse mathématique et numérique qui permet de décrire le comportement de ces systèmes autour de leurs points d'équilibre et d'établir les conditions nécessaires pour observer un phénomène spécifique. L'objectif ultime est de faire des prédictions qualitatives et quantitatives sur le comportement d'une population en fonction des paramètres qui décrivent son état. Cette étude vise à comprendre et à prévoir les dynamiques d'une population dans différents contextes, en utilisant des outils mathématiques pour analyser et interpréter les résultats obtenus.

### Mots clés :

Équations différentielles, Stabilité locale, Fonction de Lyapounov, Asymptotiquement stable, Modèles mathématiques, Proie-prédateur, Le Paradoxe de l'enrichissement.

## Abstract

The objective of this dissertation is to study dynamical systems, both linear and nonlinear, using methods of mathematical and numerical analysis that describe the behavior of these systems around their equilibrium points and establish the necessary conditions to observe a specific phenomenon. The ultimate goal is to make qualitative and quantitative predictions about the behavior of a population based on parameters that describe its state. This study aims to understand and forecast the dynamics of a population in different contexts, using mathematical tools to analyze and interpret the obtained results.

### Key-words:

Differential equations, Local stability, Lyapounov function, Asymptotically stable, Mathematical models, Prey-Predator, The Paradox of enrichment.

## ملخص

هدف هذه الدراسة هو دراسة الأنظمة الديناميكية، سواء كانت خطية أو غير خطية، باستخدام أساليب التحليل الرياضي والعددي التي تسمح بوصف سلوك هذه الأنظمة حول نقاط التوازن الخاصة بها وتحديد الشروط اللازمة لملاحظة ظاهرة محددة. الهدف النهائي هو عمل توقعات نوعية وكمية حول سلوك سكان معين بناءً على المعلمات التي تصف حالته. تهدف هذه الدراسة إلى فهم وتوقع ديناميات سكانية في سياقات مختلفة، باستخدام أدوات رياضية لتحليل وتفسير النتائج المستخلصة.

### كلمات مفتاحية :

معادلات تفاضلية، استقرار محلي، دالة ليابونوف، ثابتة بشكل قاطع، النماذج الرياضية، فريسة-مفترس، مفارقة الثوري.