الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيـة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمـــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations différentielles et modélisation
Thème

DISTRIBUTIONS PERIODIQUES ET SES APPLICATIONS

Présenté Par :
1) Melle BENABDELMOULA BOUCHRA

Devant le jury composé de :

Dr. SAKHI Hanane	M.C.B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. BENIANI Abderrahmane	M.C.A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. KHIAR Hamid	M.C.B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2022/2023

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

A Abi et Oumi qui m'ont soutenu et encouragé durant ces années d'études.

A mes soeurs Meriem, Hafsa, Fatima et Assmaa pour l'amour qu'elles me donnent.

A mon support dans ma vie, mon frère Reda.

A mes neveux Ilyes, Doulfikar, Hadjer, Zeineb, Adem, Hachemi et Djamila.

A tout mes amis, et surtout Djihane, Aichouch, Safaa et Malek.

A tout mes collegues particuliérement Seif Eddine, Mohammed, Ahlem et Amel.

Et à tous ceux qui ont contribué de loin, pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Remerciement

Tout d'abord je tiens à remercier **"ALLAH"** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme ma formation et pourvoir réaliser ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de monsieur **KHIAR Hamid**, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Je suis sensible à l'honneur que me fait madame **SAKHI Hanane**, en présidant le jury de cette thème. Je rends hommage à ses qualités et scientifiques. Je lui adresse mes vifs remerciements.

Je suis heureux également de remercier, monsieur **BENIANI Abderrahmane**, d'avoir acceptée d'examiner cette thème et de participer au jury. Je sensible à sa générosité qu'elle me témoigné.

Nos remerciement s'adresse également à tout nos professeurs pour leur générosité et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ce parcours universitaire.

Je remercie particulièrement mes parents mes soeurs et mon frère qui m'ont stimulée et encouragée pendant la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

0.1 Notations générales 5

1 Préliménaire **8**
1.1 Rappel sur les espaces topologiques 8
1.1.1 Espaces topologiques : 8
1.1.2 Espace vectorielle topologique : 8
1.1.3 Espace vectoriel topologique localement convexe : 9
1.1.4 Les espaces $C^k(\Omega)$ 10
1.1.5 Les espaces $C_0^k(\Omega)$ 11
1.2 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ de fonctions tests : 11
1.2.1 Notion de fonction test 11
1.2.2 La Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ 13
1.2.3 Dérivation dans $\mathcal{D}(\Omega)$ 14
1.3 L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions 15
1.3.1 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (convergence faible) 15
1.3.2 Le Théorème de Banach-Steinhaus 16
1.3.3 Dérivation des distributions 18
1.3.4 Les distributions régulières T_f 19
1.3.5 Exemple des Distributions non-régulières 21

2 Distrubitions Périodiques **22**
2.1 Définitions et propriétés élémentaires 22
2.2 Fonction p-périodiques ; 23
2.3 Transformée de Fourier 25
2.3.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 25
2.3.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 26
2.3.3 L'espace $S'(\mathbb{R}^n)$ 26
2.3.4 Transformée de Fourier des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 26
2.4 Distributions p-périodiques sur $\mathbb{R}$ 27
2.4.1 Peigne de Dirac 27
2.5 Distributions tempérées 29
2.5.1 Conclusion 31
2.6 Distributions Périodiques sur $\mathbb{R}^n$ 32
2.7 Développement en série de Fourier des distributions périodiques 32
2.7.1 Motifs générateurs de l'unité indéfiniment dérivables 33
2.7.2 Définition des coefficients de Fourier et de la série de Fourier 34
2.7.3 Coefficients de Fourier d'une distribution 35

2.7.4 Distribution périodique considérée comme répétition périodique 36
2.7.5 Développement en série de Fourier d'un peigne de Dirac 37
2.7.6 Développement d'une distribution périodique quelconque 39

3 Applications **41**
3.1 Formule de Poisson 41
3.1.1 Formule de Poisson classique 42
3.1.2 Formule Sommatoire de Poisson 42
3.1.3 Formule de Poisson "à pas variable" 46
3.2 Noyau de Dirichlet, Interférences et Diffraction 47
3.3 Développement de Fourier des fonctions de Bernoulli périodiques $B_r(x,\lambda)$ 48

Bibliographie **50**

0.1 Notations générales

Soient E, X deux ensembles, et A, B sous-ensembles de X.

$\emptyset$:	l'ensemble vide
$\mathbb{C}$:	l'ensemble de nombres complexes
$\mathbb{R}$:	l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$:	l'ensemble des nombres naturelles
$\mathbb{Z}$:	l'ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathcal{D}$:	l'espace des fonctions test
$\mathcal{D}'$:	Dual topologique de $\mathcal{D}$ l'espace des distributions
$\mathcal{E}'(\mathbb{R})$:	l'espace des distributions à support compact
$\mathcal{S}$:	l'espace de Scwartz
$\mathcal{S}'$:	Dual topologique de $\mathcal{S}$ l'espace des distribution tempérées
$A \subset X$:	$\{\forall x \in A, x \in X\}$
$A \cap B$:	$\{x \in A$ tel que $x \in B\}$
$A \cup B$:	$\{x \in A$ ou $x \in B\}$
$X + Y$:	$\{x + y; x \in X, y \in Y\}$
$X \times Y$:	$\{(x, y); x \in X, y \in Y\}$
$C(X, Y)$:	$\{f : X \longrightarrow Y$ t.q $: f$ est continue $\}$
$C(X)$:	$\{f : X \longrightarrow X$ t.q $: f$ est continue $\}$
$P(X)$:	l'ensemble des parties de X
$V(x)$:	un système de voisinages
III :	Pigne de Dirac

Objectif

L'étude des distributions périodiques a pour objectif d'analyser les phénomènes qui se répètent de manière régulière dans le temps. Ces phénomènes périodiques se retrouvent dans de nombreux domaines scientifiques tels que les mathématiques, la physique, l'ingénierie, l'économie, la biologie, etc..
L'un des principaux objectifs de l'étude des distributions périodiques est de décrire et de caractériser les motifs récurrents présents dans les données. Cela permet de comprendre les comportements périodiques et d'extraire des informations utiles sur les systèmes étudiés.
Les distributions périodiques sont souvent analysées à l'aide de la transformée de Fourier, qui permet de décomposer une fonction périodique en une série de sinus et de cosinus. Cette analyse fréquentielle permet de mettre en évidence les composantes périodiques et de quantifier leur amplitude, leur phase et leur fréquence. L'étude des distributions périodiques trouve des applications dans de nombreux domaines. Par exemple, en physique, elle permet d'analyser les signaux périodiques tels que les ondes électromagnétiques, les vibrations des systèmes mécaniques ou les phénomènes périodiques en physique quantique. En économie, elle peut être utilisée pour étudier les fluctuations périodiques des marchés financiers. En biologie, elle peut servir à analyser les rythmes biologiques tels que les cycles circadiens.
En résumé, l'objectif de l'étude des distributions périodiques est de comprendre et de caractériser les phénomènes périodiques dans divers domaines scientifiques, ce qui permet d'obtenir des informations précieuses sur les systèmes étudiés et d'ouvrir la voie à de nouvelles découvertes et applications.

Introduction

Les distributions sont utilisées depuis longtemps par les physiciens. C'est la théorie la plus adaptée à l'étude de nombreux systèmes physiques et notamment à celle des systèmes linéaires continus. Les distributions sont des outils mathématiques utilisés pour représenter des phénomènes physiques que les fonctions classiques s'avèrent incapables de transcrire.
La théorie des distributions fut construite par le mathématicien L. Schwartz entre 1944 et 1950 et lui valut la médaille Fields en 1950. Comme la plupart de grandes découvertes scientifiques, la théorie de distributions est construite sur des bases provenant de travaux effectués par de nombreux chercheurs : Heaviside en 1893, Wiener en 1925, Dirac en 1926-27, Hadamard en 1932, Bochner en 1932, Leray en 1934, Sobolev en 1936, Carleman en 1944, etc. L'objectif a été de généraliser la notion de fonction, afin de donner un sens mathématique correct à des objets manipulés par les physiciens et les ingénieurs.
La théorie des distributions est importante aussi bien en mathématiques que dans plusieurs disciplines scientifiques. Elle s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement, entre autres, à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires. La théorie assure un certain nombre d'opérations indispensables aux quelles les fonctions ne se prêtent pas toujours et a apporté les outils mathématiques dont les physiciens et les ingénieurs avaient tant besoin. L'exemple le plus célèbre de distribution est l'impulsion de Dirac, indispensable aussi bien pour la formulation de la mécanique quantique qu'en analyse harmonique et en traitement du signal.

Chapitre 1

Préliménaire

Ce chapitre est composé de deux sections, dans la première on donne un petit rappel sur la topologique et dans la deuxième nous rappellons quelques notions de base et l'espace des fonctions tests et l'espace des distribution.

1.1 Rappel sur les espaces topologiques

1.1.1 Espaces topologiques :

Définition 1.1.1 *Une topologie sur un ensemble E est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de E, i.e.$\mathcal{T} \subset P(E)$,vérifiant les propriétés suivantes, appelées axiomes des ouverts.*

1. *L'ensemble vide $\emptyset$, et l'ensemble E appartiennent à $\mathcal{T}$.*
2. *si $u, v \in \mathcal{T}$ alors $u \cap v \in \mathcal{T}$*
3. *Si $(u_{i\in I})$ est une famille de parties de E appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\cup_{i\in I}(u_i) \in \mathcal{T}$ (où I est un ensemble d'indices quelconque).*

L'ensemble E, muni de la topologie $\mathcal{T}$, est appelé espace topologique.
On notera quelques fois $(E, \mathcal{T})$ un tel espace. Les parties de E qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont dites parties ouvertes ou ouverts de E. Les éléments de E sont généralement appelés points. Et en appelant les éléments de $\mathcal{T}$ des ouverts.

1.1.2 Espace vectorielle topologique :

On appelle espace vectoriel topologique un ensemble E, muni d'une part d'une structure d'espace vectoriel sur le corps K des réels ou des complexes, d'autre part d'une topologie, telles que :

1. l'addition $(x, y) \to x + y$ de $E \times E$ dans E
2. la multiplication par les scalaires $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ dans E soient continues,ou K est muni de sa topologie naturelle.

On dit encore que la structure topologique et la structure vectorielle sont compatibles. Si

$$\begin{cases} x_n \to x, \\ y_n \to y, \\ \lambda_n \to \lambda \quad \lambda \in K \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} x_n + y_n \to x + y, \\ \lambda_n x_n \to \lambda x \end{cases}$$

Exemple 1.1.1 *On définit l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\Omega)$ par*

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurables sur } \Omega, \int_\Omega |f| < +\infty \right\}$$

Exemple 1.1.2 *Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace de Lebesgue est noté et défini par $L^p(\Omega), p \in [1, +\infty[$, on note*

$$||f||_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

1.1.3 Espace vectoriel topologique localement convexe :

Nous allons étudier une catégorie particulière d'espace vectoriel topologique, les espaces localement convexes. Les espaces fonctionnels utilisés dans la pratique, en particulier ceux qu'on rencontre dans la théorie des distributions, ne sont pas toujours des espaces normés ; par contre, ce sont toujours des espaces localement convexes. Il s'agit donc d'une classe particulièrement importante d'espace vectoriel topologique et les considérations qui suivent constituent une introduction à l'analyse fonctionnelle moderne.

Définition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel, l'application $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}_+$ est dite semi norme si elle vérifie les assertions suivantes :*

1. $\mathcal{N}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0; x \in E,$
2. $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
3. $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y), \forall x, y \in E$

Définition 1.1.3 *On appelle voisinage d'un point x de E toute partie de E contenant au moins un ouvert contenant lui-même x. On désignera souvent par $B(x)$ l'ensemble des voisinages de x*

Propriétés 1.1.1 *Les voisinages d'un point x possèdent les propriétés suivantes :*

1. *Toute partie qui contient un voisinage de x est un voisinage de x.*
2. *Toute intersection d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x.*

Définition 1.1.4 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in E$.*
On appelle base de voisinage de x, toute famille $B(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $\omega \in B(x)$ tel que $\omega \subset V$. Notons que si $B(x)$ est une base de voisinages de x, alors on a :

$$V(x) = V \in E; \text{ il existe } \omega \in B(x) \text{ avec } \omega \in V.$$

Autrement dit, $V(x)$ est l'ensemble des parties de E contenant un élément de $B(x)$. Ainsi, on obtient $V(x)$ à partir de $B(x)$.

Définition 1.1.5 *On appelle espace vectoriel topologique localement convexe un espace vectoriel E muni d'une topologie $\mathcal{T} \subset P(E)$ telle que*

1. *$\mathcal{T}$ est compatible avec la structure d'espace vectorielle :*
   (a) *$X \times X \to X, (x, y) \to x + y$ est continue.*
   (b) *$\mathbb{R} \times X \to X, (\lambda, x) \to \lambda x$ est continue.*
2. *$\mathcal{T}$ est localement convexe, i.e. admet une base de voisinages convexes : $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{T}, x \in U$, il existe $V \in \mathcal{T}$ convexe (i.e.$\forall \alpha, \beta \in V : t\alpha + (1_t)\beta \in V$) tel que $x \in V \subset U$.*

Exemple 1.1.3 *Soit F un fermé non compact de $\mathbb{R}^n$, il existe alors un entier $n_0 \in \mathbb{N}_0$*

$$F \cap \{x : |x| \leq n_0\} \neq \varnothing$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad k_n = x \in F : |x| \leq n + n_0$$

Cela étant

$$\begin{array}{lll} p_n & : \mathbb{C}_0(F) & \to \mathbb{R} \\ & f & \to \sup|f(x)| : x \in F : |x| \leq n + n_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p_n : \mathbb{C}_0(F) \to \mathbb{R} \\ \qquad f \to \sup|f(x)| : x \in F : |x| \leq n + n_0 \end{array}$$

$$p_n : \mathbb{C}_0(F) \to \mathbb{R} f \to \sup|f(x)| : x \in F : |x| \leq n + n_0$$

est une semi-norme sur $\mathbb{C}_0 F, P = p_n; n \in \mathbb{N}_0$, est un système de semi-normes sur (Il convient de remarquer que, chacun des K_n est une partie compacte de F et que, pour tout compact K inclus dans F, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_m$). L'espace $\mathbb{C}_0 F$ est l'espace localement convexe ($\mathbb{C}_0 F, P$) On dit qu'on a muni l'espace $\mathbb{C}_0 F$ de la convergence compacte.

Exemple 1.1.4 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert on considère $\mathbb{C}_0(\Omega)$ et pour tout K compact inclus dans Ω, on pose*

$$p_k(x) = \sup_{x \in k} |f(x)|$$

et on munit $\mathbb{C}_0(\Omega)$ de la topologie définie par les $p_k >$ La convergence pour cette topologie est équivalente à la convergence sur tout compact...

1.1.4 Les espaces $C^k(\Omega)$

Définition 1.1.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désignera par $C^0(\Omega)$ (resp. $C^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (resp. continûment différentiables) sur Ω à valeurs complexes puis, pour $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, on pose,*

$$C^k(\Omega) = \left\{ u \in C^{k-1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}.$$

C'est l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$. On notera enfin

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

1.1.5 Les espaces $C_0^k(\Omega)$

Définition 1.1.7 1. *Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, C_0^k(\Omega)$ désigne l'ensemble des $u \in C^k(\Omega)$ tels que supp u est un compact contenu dans Ω.*

2. *Si K est un compact de $\Omega, C_0^k(K)$ désigne l'ensemble des éléments u de $C_0^k(\Omega)$ tels que* $\operatorname{supp} u \subset K$.

1.2 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ de fonctions tests :

Définition 1.2.1 *On définit le support d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ par*

$$Supp(f) = \overline{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \neq 0.}$$

c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des x tels que $f(x)$ est non identiquement nulle.

Rappel :

a) l'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant cet ensemble.

b) les parties comapctes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées

Le support de f est donc un compact en dehors du quel f est nulle.

Exemple 1.2.1 *Soit $x = (x_1, x_2 ..., X_n) \in \mathbb{R}^n, r = \| x \| = \sqrt{x_1^2 + ...x_n^2}$. On pose*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}} & , \; si \quad r < 1 \\ 0 & , \; si \quad r \geqslant 1. \end{cases}$$

On a $suppf = x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leqslant 1$; la boule de centre 0 et de rayon 1.

Les distributions sont des fonctionnelles linéaires particulières sur l'espace des fonctions tests. Commençons par définir ces fonctions tests :

1.2.1 Notion de fonction test

Définition 1.2.2 *On appelle fonction test, ou fonction de base, une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à support borné, c'est-à-dire nulle en dehors d'un segment $[a, b]$, dépendant de φ.*

Propriétés 1.2.1 1. *Si φ est une fonction test, il en est de même de φ'.*

2. *Si φ est une fonction-test de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), f \circ \varphi$ est une fonction test.*

3. *Toute fonction test φ s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi(x) = \psi(x) + x.\phi(x)$, où ψ et ϕ sont des fonctions tests paires. Il suffit de noter que :*

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2} \\
&= \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + x\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x}, \\
&= \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x} \\
&= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{+x} \varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi(xu)du
\end{aligned}$$

Exemples des fonctions tests

Exemple 1.2.2 *Considérons la fonction :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\frac{1}{x^2-1} & , \ si \quad |x| < 1 \\ 0 & , \ si \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Elle est paire, continue, croissante sur $[-1, 0]$, décroissante sur $[0, 1], \varphi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car :

$$\varphi = f_{\mathrm{h}}, \text{ où } h(x) = 1 - x^2$$

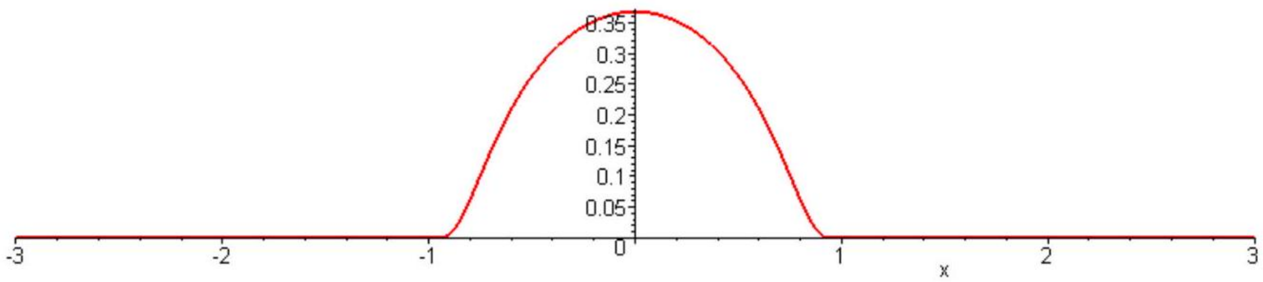
On a aussi

$$\begin{aligned}
\exp\frac{1}{x^2-1} &= \exp\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2}\right) \\
&= f(2x+2)f(2-2x)
\end{aligned}$$

On vérifie sans peine que, pour tout x,

$$\varphi(x) = f_0(2x+2).f_0(2-2x)$$

.



Exemple 1.2.3 *Plus généralement,si $a < b$*

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{(x-a)(x-b)} & , \quad si \quad a < x < b \\ 0 & , \quad si \quad x \notin]a, b[. \end{cases}$$

est une fonction test, dont le support est $[a, b]$.

Exemple 1.2.4 *La fonction H définie par :*

$$H(x, y) = \begin{cases} \exp \frac{1}{x^2+y^2-1} & , \quad si \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad si \quad x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

est une fonction-test

L'espace vectoriel $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions tests $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est muni de la notion de convergence suivante.

1.2.2 La Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.2.3 ***(Dans** $\mathbb{R}^n$**)** : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ, et on note :

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \qquad dans\ \mathcal{D}(\Omega)$$

SSi :

$$\begin{cases} 1) \exists K \subset \Omega, K \text{ compact, tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K, \\ 2) \forall k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \left\| \frac{\partial^{|k|}\varphi_n}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial^{|k|}\varphi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Donc les φ_n ont toutes un support inclus dans un même compact K, et convergent uniformément ainsi que toutes leurs dérivées.

Définition 1.2.4 ***(Dans** $\mathbb{R}$ **:)** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ, et on note :

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \qquad dans\ \mathcal{D}(\Omega)$$

ssi :

$$\begin{cases} 1)\ \exists K \subset \Omega, K \text{ compact, tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K, \\ 2)\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\| \varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)} \right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Donc les φ_n ont toutes un support inclus dans un même compact K, et convergent uniformément ainsi que toutes leurs dérivées.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|k| = k_1 + \ldots + k_n$

Propriétés 1.2.2 *Cette notion de convergence possède les propriétés suivantes :*

a) Si φ est un élément de $\mathcal{D}$, la suite constante égale à φ converge vers φ.

b) Si (φ_k) et (ψ_k) sont deux suites d'éléments de $\mathcal{D}$ tendant resp. vers φ et ψ, la suite $(\lambda.\varphi_k + \psi_k)$ converge vers $\lambda.\varphi + \psi$.

c) Si (φ_k) converge vers φ, toute suite extraite converge vers φ.

d) Si (φ_k) converge vers φ, la suite $\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right)$ converge vers $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$. Les dérivations partielles de tous ordres sont donc des endomorphismes (séquentiellement) continus de $\mathcal{D}$.

Dans la suite, pour simplifier les écritures, on regardera essentiellement le cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, donc la convergence donnée en (1.2).

Proposition 1.2.1 *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit K le compact dans (1.2), alors :*

$$\operatorname{supp}\varphi \subset K$$

Preuve :
On a $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$: soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N, \|\varphi - \varphi_n\|_\infty < \varepsilon$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R} - K$, comme alors $\varphi_n(x) = 0$, on a :

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \text{ Vrai pour tout } \varepsilon.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} - K$ on a $\varphi(x) = 0$. Donc $\{x : \varphi(x) \neq 0\} \subset K$ Alors :

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \bar{K} = K$$

.

1.2.3 Dérivation dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.2.5 *Si φ est une fonction de $\mathcal{D}$ et si $a = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, on pose*

$$D^\alpha\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1})^{\alpha_1}...(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n})^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}},$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Proposition 1.2.2 *Soient φ une fonction test, f une fonction réglée à support borné. Leur convolée $\varphi * f$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)f(t)dt \text{ est une fonctiontest.}$$

Preuve :
Supposons le support de φ inclus dans $[a, b]$, celui de f dans $[c, d]$.

$$(\varphi * f)(x) = \int_c^d \varphi(x-t)f(t)dt$$

est C^∞ en vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur les segments, et nulle hors de $[a + c, b + d]$.

1.3 L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions

On appelle dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, l'espace des formes linéaires continues T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définies par

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{D}(\Omega) & \longmapsto & \mathbb{C} \\ & \varphi & \longmapsto & < T, \varphi > \end{array},$$

Définition 1.3.1 *On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$.*
Par définition, T est une fonctionnelle sur $\mathcal{D}$ donc T associe à toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ un complexe noté :

$$< T; \varphi > \quad \textit{ou parfois} \quad T(\varphi)$$

La définition d'une distribution implique les deux points suivants :

1. ***Linéarité :*** *Pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ On a :*

$$< T, \varphi + \lambda\psi >=< T, \varphi > +\lambda < T, \psi >$$

2. ***Continuité :*** *Si $(\varphi_k)_{k>0}$ converge dans $\mathcal{D}$ ver φ, alors la suite $(\langle T, \varphi_k\rangle)_{k>0}$ converge au sens usuel vers $\langle T, \varphi\rangle$, i.e*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que, } \forall k > N, |\langle T, \varphi\rangle - \langle T, \varphi_k\rangle| \leq \epsilon.$$

Les éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont appelés distributions.

Exemple 1.3.1 *L'application*

$$T : \varphi \in \mathcal{D} \to \int \ldots \int_{R^n} \varphi(x)dx \in \mathbb{C} \textit{ est une distribution.}$$

Plus généralement, pour toute fonction localement intégrable f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$,

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D} \to \int \ldots \int_{R^n} f(x) \cdot \varphi(x)dx \in \mathbb{C} \textit{ est une distribution.}$$

1.3.1 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (convergence faible)

Définition 1.3.2 *On dit qu'une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge ssi elle converge simplement, i.e. ssi elle converge en tout point, i.e. ssi quelque soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, notant $r_n = \langle T_n, \varphi\rangle$, la suite de réels $(r_n)_\mathbb{N}$ converge dans $\mathbb{R}$:*

$$(T_n)_\mathbb{N} \textit{ converge} \iff \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \exists r \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = r \overset{\textit{noté}}{=} T(\varphi).$$

Cela définit alors la fonctionnelle $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ appelée limite de la suite (T_n) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et noté

$$T \overset{\textit{noté}}{=} \lim_{n\to\infty} T_n$$

Cette notion de convergence possède les mêmes propriétés que la convergence dans $\mathcal{D}$:

Propriétés 1.3.1 *a) Si T est un élément de $\mathcal{D}'$, la suite constante égale à T converge vers T.*

b) Si (T_n) et (ψ_n) sont deux suites d'éléments de $\mathcal{D}'$ tendant resp. vers T et ψ, la suite $(\lambda \cdot T_n + \psi_n)$ converge vers $\lambda.T + \psi$.

c) Si (T_n) converge vers T, toute suite extraite converge vers T.

1.3.2 Le Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 1.3.1 *Soient $\left(E, (p_\ell)_{\ell \in \Lambda_1}\right), \left(F, (q_k)_{k \in \Lambda_2}\right)$ deux espaces localement convexes. On suppose que E est métrisable et complet. Soit $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Supposons que*

$$\forall k \in \Lambda_2, \quad \forall x \in E, \quad \exists C_{k,x} > 0 : q_k\left(T_\lambda x\right) \leq C_{k,x}, \quad \forall \lambda \in \Lambda \tag{1.3}$$

Alors,

$$\forall k \in \Lambda_2, \exists \ell \in \Lambda_1, \exists C > 0 : q_k\left(T_\lambda x\right) \leq C p_\ell(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in \Lambda \tag{1.4}$$

Corollaire 1.3.1 *Dans le cadre du théorème (1.3.1), soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F telle que*

$$\forall x \in E, \exists \alpha_x \in F : \lim_{j \to +\infty} T_j x = \alpha_x, \text{ dans } F. \tag{1.5}$$

Posons $T\,x = \alpha_x$ pour $x \in E$. Alors,
(i) T est linéaire continue,
(ii) pour tout compact K de E et tout $k \in \Lambda_2$,

$$\lim_{j \to +\infty} \sup_{x \in K} q_k\left(T_j x - T x\right) = 0$$

En particulier,
(ii) si $(x_j) \to x$ dans E, alors $(T_j x_j) \to T x$ dans F.

Preuve :

a) La linéarité de T est évidente.

b) Montrons la continuité : Comme dans F, toute suite convergente est bornée, l'hypothèse (1.5) implique (1.3), donc (1.4), d'après le théorème 1.3.1, i.e.

$$\forall k \in \Lambda_2, \exists \ell \in \Lambda_1, \exists C > 0 : q_k\left(T_j x\right) \leq C p_\ell(x), \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in E. \tag{1.6}$$

D'après (1.5), $q_k\left(T_j x\right) \to q_k(T x)$ dans $\mathbb{C}$. Donc (1.6) est aussi vraie pour T, ce qui prouve que T est continue.

c) Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$; nous devons prouver que, pour toute semi-norme q_k

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall j \geq N_0, \quad q_k\left(T_j x - T x\right) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K. \tag{1.7}$$

À l'indice k correspondent ℓ et C vérifiant (1.6). Recouvrons K par un nombre fini de p_ℓ-boules de rayon $\frac{\varepsilon}{3C}$ et de centres $y_1, \ldots, y_M$. Pour tout $x \in K$, il existe $m_x \in \{1, 2, \ldots, M\}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} q_k\left(T_j\left(x - y_{m_x}\right)\right) \leq C p_\ell\left(x - y_{m_x}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ q_k\left(T\left(x - y_{m_x}\right)\right) \leq C p_\ell\left(x - y_{m_x}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \end{array}\right. \tag{1.8}$$

ce qui résulte de (1.6) appliqué à T_j et à T.
D'autre part, pour $m \in \{1,\ldots,M\}$ on a, $\lim_{j\to+\infty} q_k(T_jy_m - Ty_m) = 0$. Il existe donc N_0 tel que pour $j \geq N_0$, on ait $q_k(T_jy_m - Ty_m) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $m \in \{1,2,\ldots,M\}$. Alors, pour $j \geq N_0$ et tout $x \in K$ on a,
$q_k(T_jx - Tx) \leq q_k(T_jx - T_jy_{m_x}) + q_k(T_jy_{m_x} - Ty_{m_x}) + q_k(Ty_{m_x} - Tx) \leq \varepsilon$, ce qui prouve (1.7). Montrons (ii)' : l'ensemble $K = \{x_j\}_j \cup \{x\}$ est un compact de E. Soit q_k une semi-norme de F et $\varepsilon > 0$; soit ℓ et C satisfaisant à (1.6). Il existe N_0 tel que pour $j \geq N_0$, on ait (d'après (ii) et l'hypothèse de (ii)')

$$\sup_{y\in K} q_k(T_jy - Ty) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad p_\ell(x_j - x) \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Alors (1.6) implique que pour $j \geq N_0$,

$$\begin{aligned} q_k(T_jx_j - Tx) &\leq q_k(T_jx_j - Tx_j) + q_k(Tx_j - Tx) \\ &\leq \sup_{y\in K} q_k(T_jy - Ty) + Cp_\ell(x_j - x) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème (1.3.1) :
Soit q_k une semi-norme dans F. Pour $N \in \mathbb{N}$ posons

$$F_N = \{x \in E : q_k(T_\lambda x) \leq N, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

a) F_N est fermé car toute semi-norme est continue.
b) $\bigcup_{N=1}^{+\infty} F_N = E$, par hypothèse.
c) Si $x \in F_N, -x \in F_N$ car $q_k(T_\lambda(-x)) = q_k(T_\lambda x)$.
d) F_N est convexe car si $x, y \in F_N$ et $t \in [0,1]$ on a,

$$q_k(T_\lambda(tx + (1-t)y)) \leq tq_k(T_\lambda x) + (1-t)q_k(T_\lambda y) \leq tN + (1-t)N = N$$

donc $tx + (1-t)y \in F_N$.
L'espace E étant métrique et complet, il est de Baire. D'après a) et b) il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F}_{N_0} \neq \emptyset$. Il existe donc $x_0 \in F_{N_0}$, une semi-norme p_ℓ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que,

$$B_0 = \{x \in E : p_\ell(x - x_0) < \varepsilon_0\} \subset \overset{\circ}{F}_{N_0}.$$

Nous allons montrer que cela entraîne,

$$B_1 = \left\{x \in E : p_\ell(x) < \frac{\varepsilon_0}{2}\right\} \subset F_{N_0}. \tag{1.9}$$

En effet, si $x \in B_1$ on écrit $x = \frac{1}{2}((x_0 + 2x) - x_0)$; on a $x_0 \in F_{N_0}$ donc (d'après c)) $-x_0 \in F_{N_0}$; ensuite, $x_0 + 2x \in B_0$ car $p_\ell(x_0 + 2x - x_0) = 2p_\ell(x) < \varepsilon_0$, donc $x_0 + 2x \in F_{N_0}$; enfin, d'après d), $x \in F_{N_0}$. On déduit de (2.7).ét de la définition des F_N que

$$p_\ell(x) < \frac{\varepsilon_0}{2} \Longrightarrow q_k(T_\lambda x) \leq N_0, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Soit $x \in E$ quelconque ; posons, pour $\delta > 0, \tilde{x} = \frac{x}{p_\ell(x)+\delta}\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors $p_\ell(\tilde{x}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ donc $q_k(T_\lambda \tilde{x}) \leq N_0$ ce qui s'écrit

$$q_k\left(T_\lambda x\right) \leq \frac{2}{\varepsilon_0} N_0\left(p_\ell(x)+\delta\right), \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Il suffit de faire tendre δ vers zéro pour obtenir (1.4).

Théorème 1.3.2 *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui est convergente. Alors la limite T est une distribution sur Ω.*

Preuve :

1. ***la linéarité :***
   Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a (égalités dans $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi+\lambda\psi\rangle &\overset{déf}{=} \lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi+\lambda\psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\langle T_n,\varphi\rangle + \lambda\langle T_n,\psi\rangle\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle + \lambda\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\psi\rangle = \langle T,\varphi\rangle + \lambda\langle T,\psi\rangle,\end{aligned}$$

   d'où la linéarité.

2. ***Continuité :** soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
   Soit (φ_k) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\lim_{k\to\infty}\langle T,\varphi_k\rangle = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi_k\rangle.$$

   On admet qu'on peut inverser les signes limites (Théorème de Banach-Steinhaus (1.3.1)). D'où

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\langle T,\varphi_k\rangle &= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\langle T_n,\varphi_k\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\langle T_n, \lim_{k\to\infty} \to \infty\varphi_k\right\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle\\ &= \langle T,\varphi\rangle\end{aligned}$$

   On note alors (convergence faible) :

$$T_n \underset{n\to\infty}{\to} T \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

   Donc : $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_n,\varphi\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle T,\varphi\rangle \qquad \textit{dans } \mathbb{R}$$

   i.e. ssi, pour φ quelconque (fixé), $|T_n(\varphi) - T(\varphi)| \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

1.3.3 Dérivation des distributions

Définition 1.3.3 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, on définit alors la dérivée T' de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :*

$$\langle T',\varphi\rangle \overset{déf}{=} -\langle T,\varphi'\rangle, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

Et plus généralement, on définit pour $m \in \mathbb{N}$, notant $T^{(m)} = \left(T^{(m-1)}\right)'$:

$$\left\langle T^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle T, \varphi^{(m)} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

appelée dérivée d'ordre m de T.

Définition 1.3.4 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on note $f' =$ déf $(T_f)'$ sa dérivée au sens des distributions : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:*

$$\langle f', \varphi \rangle \overset{déf}{=} \left\langle (T_f)', \varphi \right\rangle \quad \left(= - \langle T_f, \varphi' \rangle \overset{noté}{=} - \langle f, \varphi' \rangle \right)$$

Proposition 1.3.1 *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (est une distribution), ainsi que $T^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Autrement dit, une distribution est dérivable à tout ordre.*

Preuve :

1. *Linéarité immédiate.*
2. *Continuité car si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\varphi^{(m)} \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Définition 1.3.5 *Dans $\mathbb{R}^n$: soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit sa i-ème dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ par, pour $i = 1, \ldots, n$:*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \overset{déf}{=} - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Et on vérifie immédiatement que cela fait bien de $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ une distribution pour tout i et que T est infiniment dérivable.

Exemple 1.3.2 *Montrons que la formule de Schwarz :*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{est toujours vraie au sens des distributions.}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial x_i}}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \left\langle T, \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle T, \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\partial x_j} \right\rangle \qquad \text{Car } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ donc } \varphi \in C^2.
\end{aligned}$$

1.3.4 Les distributions régulières T_f

Définition 1.3.6 *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On appelle distribution régulière associée à f : la fonctionnelle $T =^{noté} T_f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_f, \varphi \rangle \overset{déf}{=} \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

Proposition 1.3.2 *Pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la fonctionnelle T_f définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \qquad \text{est une distribution.}$$

Preuve :

1. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a*
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)1_{\operatorname{supp}\varphi}(x)dx.$$
La fonction $f\varphi 1_{supp\ \varphi}$ est dominée par la fonction intégrable $\|\varphi\|_\infty f 1_{\operatorname{supp}\varphi}$ (car $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *et* $\operatorname{supp}\varphi$ *est compact dans Ω).*
2. *La linéarité est trivial.*
3. ***Continuité de** T_f :*
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $(\varphi_n)_\mathbb{N}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
On a avec K compact :
$$\begin{aligned} |T(\varphi) - T(\varphi_n)| &= \left| \int_\Omega f(x)(\varphi - \varphi_n)(x)dx \right| \\ &= \left| \int_K f(x)(\varphi - \varphi_n)(x)dx \right| \\ &\leqslant \|\varphi - \varphi_n\|_\infty \int_K |f(x)|dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0, \ \text{car} \ \|\varphi - \varphi_n\|_\infty \to 0 \text{ et } f \in L^1(K) \end{aligned}$$
Donc T_f est continue en φ, vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.3.7 *(Généralisation) : Soit $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on appelle distribution régulière T_f la distribution donnée par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

(En particulier vrai pour $f \in L^2_{loc}(\Omega)$.)

Proposition 1.3.3 *Pour $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ où $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la fonctionnelle T_f définie en précédemment est bien une distribution.*

Exemple 1.3.3 *La fonction constante*

$$f = 1_\mathbb{R} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

Définit une distribution régulière qui à une fonction φ associe son aire sous la courbe :

$$T_{1_\mathbb{R}}(\varphi) = \int_\mathbb{R} \varphi(x)dx \overset{noté}{=} \langle 1_\mathbb{R}, \varphi \rangle .$$

Exemple 1.3.4 *La fonction de Heaviside H_0 :*

$$H_0(x) = \begin{cases} 1 & , \quad si \quad x > 0, \\ 0 & , \quad si \quad x < 0 \end{cases}$$

Définit une distribution régulière sur $\mathbb{R}$. Elle n'a pas été définie en $x = 0$ (donc définie uniquement presque partout).

Proposition 1.3.4 *Soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ où $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On a :*

$$f = 0 \quad p.p. \ sur \ ]a, b[\Longleftrightarrow T_f = 0 \quad sur \quad \mathcal{D}(]a, b[) \tag{1.10}$$

1.3.5 Exemple des Distributions non-régulières

Définition 1.3.8 *Soit $a \in \mathbb{R}$. La masse de Dirac $\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est définie par :*

$$\delta_a(\varphi) \overset{déf}{=} \varphi(a) \overset{noté}{=} \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

Plus généralement, la masse de Dirac en a est définie sur toutes les fonctions continues en a, la valeur de $\varphi(a)$ étant alors parfaitement définie (ce qui n'est pas le cas d'une fonction définie presque partout en général).

Proposition 1.3.5 *δ_a est une distribution, mais n'est pas une distribution régulière.*

Preuve :

a) *La linéarité est immédiate.*

b) ***Continuité :***
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q $(\varphi_n) \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, en particulier $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \to 0$.
Soit $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0$, en particulier $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$.
Donc $\delta_a(\varphi_n) \to \delta_a(\varphi)$, alors δ_a est continue au point $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Vrai $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Donc δ_a est une distribution.

c) *Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que*

$$\delta_a(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - \{a\})$ on aurait

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Et donc

$$f = 0 \text{ presque partout sur }]a, b[\subset \mathbb{R}^*$$

pour la mesure de Lebesgue (1.10), donc sur $\mathbb{R}$. D'où : $\delta_a = 0$ C'est faux.
Donc δ_a n'est pas régulière

Exemple 1.3.5 ***(Le peigne de Dirac)***

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Définit une distribution, mais ce n'est pas une distribution régulière.

Définition 1.3.9 *Le produit tensoriel de f et g est une application, noté $f \otimes g$ et définie par*

$$\begin{aligned} f \otimes g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f \otimes g(x, y) = f(x)g(y) \end{aligned}$$

Chapitre 2

Distrubitions Périodiques

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1.1 *Soit* $a \in \mathbb{R}$,

1. *La translatée* $\mathcal{T}_a\varphi$ *de la fonction* φ *d'une variable réelle est définie par :*

$$\mathcal{T}_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$$

2. *Cette définition se généralise aux distributions si :* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *sa translatée* $\mathcal{T}_aT$ *au est définie par :*

$$< \mathcal{T}_aT, \varphi > = < T, \mathcal{T}_{-a}\varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Propriétés 2.1.1

1. *Si* $\varphi \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$, *alors :* $\mathcal{T}_a\varphi \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$
2. *Pour une distribution régulière* T_f, *l'égalité* $\mathcal{T}_aT_f = T_{\mathcal{T}_af}$ *résulte d'un simple changement de variable ; soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
< \mathcal{T}_aT_f, \varphi > &= < T_f, \mathcal{T}_{-a}\varphi > \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+a)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y-a)\varphi(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_af(y)\varphi(y)dy \\
&= < T_{\mathcal{T}_af}, \varphi >
\end{aligned}$$

3. *Pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\quad supp(\mathcal{T}_a\varphi) = \mathcal{T}_a(supp\varphi) = supp\varphi + a$
4. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *alors* $\mathcal{T}_a\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *i.e : La translatée d'une fonction test est aussi une fonction test.*
5. $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *alors* $\mathcal{T}_aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
6. $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $\quad supp(\mathcal{T}_aT) = \mathcal{T}_a(suppT) = x + a\{x \in supp(T)\}$
   avec $\quad \mathcal{T}_a(suppT) = supp(T) + a$
7. *Pour tout* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, *on a :* $\mathcal{T}_{a_1} \circ \mathcal{T}_{a_2} = \mathcal{T}_{a_1+a_2}$

Exemple 2.1.1 *a)* $\mathcal{T}_a\delta_0 = \delta_a$. *En effet, soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*, alors :*

$$< \mathcal{T}_a\delta_0, \varphi >=< \delta_0, \mathcal{T}_{-a}\delta_0 >= (\mathcal{T}_a\delta)(0) = \varphi(0+a) = \varphi(a) =< \delta_a, \varphi >$$

b) Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$*, on a*

$$\mathcal{T}_a(\psi T) = \mathcal{T}_a\psi.\mathcal{T}_aT$$

En effet : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*,*

$$\begin{aligned} < \mathcal{T}_a\psi.\mathcal{T}_aT, \varphi > &=< \mathcal{T}_aT, \mathcal{T}_a\psi.\varphi > \\ &=< T, \mathcal{T}_{-a}(\mathcal{T}_a\psi.\varphi) > \end{aligned}$$

on prend $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{-a}(\mathcal{T}_a\psi.\varphi)(x) &= \mathcal{T}_{-a}[\psi(x-a).\varphi(x)] \\ &= \psi(x).\varphi(x+a) \\ &= \psi(x).\mathcal{T}_{-a}\varphi(x) \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{T}_{-a}(\mathcal{T}_a\psi.\varphi) = \psi.\mathcal{T}_{-a}\varphi$$

alors :

$$\begin{aligned} < \mathcal{T}_a\psi.\mathcal{T}_aT, \varphi > &=<, T\psi.\mathcal{T}_{-a}\varphi > \\ &=< \psi T, \mathcal{T}_{-a}\varphi > \\ &=< \mathcal{T}_{-a}(\psi.T), \varphi > \end{aligned}$$

2.2 Fonction p-périodiques ;

Définition 2.2.1 *On dit qu'une fonction* $f \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ *est p-périodique si :*

$$\mathcal{T}_pf = f, \ i.e\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x+p) = f(x)$$

Exemple 2.2.1 *a)* $f \equiv$ *Cste est p-périodique,*$\forall p \in \mathbb{R}^+_*$

b) Si f *est p-périodique alors* $f(\lambda x)$ *est* $\frac{p}{\lambda}$*-périodiqe* $, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$

c) Les fonctions $e^{ik\frac{2\pi}{p}x}$ *sont p-périodiqes* $\forall k \in \mathbb{Z}$

d) Les polynômes trigonométriques $\sum_{|k|\leq N} c_k e^{ik\frac{2\pi}{p}x}$ *sont p-périodiques* $.\forall k \in \mathbb{Z}$

Proposition 2.2.1 *Soit* f *une fonction p-périodique à variation bornée sur* $[0,p]$*, ce qui implique qu'en tout point* x*, elle admet une limites à droite et à gauche. Alors, pour tout* x*, la somme partielle de la série de Fourier en ce point converge vers :*

$$\frac{(f(x-0) + f(x+0))}{2}.$$

Si, en tous les points d'un intervalle fermé I*, la fonction* f *est en outre continue, la convergence précédente est uniforme sur cet intervalle.*

Lemme 2.2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ une fonction p-périodique, alors on a,*

$$\forall a \in \mathbb{R} : \int_a^{a+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx$$

Preuve :
Posons pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$F(a) = \int_a^{a+p} f(x)dx.$$

Pour simplifier les calculs, on suppose que f est continue et d'après les propriétés des fonctions définies par des intégrales, on calcule la dérivée de la fonction F par rapport à a, on obtient :

$$F'(a) = [f(x)]_a^{a+p} = f(a+p) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$$

d'où : $F(a) = \ Cste \ , \forall a \in \mathbb{R}$.
Donc $F(0) = F(a)$, d'où le résultat.

Lemme 2.2.2 *Soit $f \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ une fonction p-périodiques, alors,*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(1_{[0;p[} f)$$

i.e, Connaître f sur une période suffit à la connaître partout.

Lemme 2.2.3 ***"Structure des fonctions p-périodiques"***
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ une fonction p-périodiques,

$$f \text{ est p-periodique } \iff \exists g \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R}) \text{ à support compact tq, } f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} g$$

Preuve :
$\Longrightarrow$:
Supposons que f est p-périodique, alors d' après le lemme(2.2.2), on a :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(1_{[0;p[} f)$$

On pose

$$g = 1_{[0;p[} f.$$

Par définition, la fonction g est localement intégrable et à support compact égale à $[0, p]$.
D'où, $\exists g \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ à support compact telle que :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} g$$

$\Longleftarrow$:
soit $g \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ à support compact, telle que :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} g$$

Montrons que f est p-périodique. soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} f(x+p) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} g(x+p) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} \circ \mathcal{T}_{-p} g(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{(k-1)p} g(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} g(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

d'où f est p-périodique.

2.3 Transformée de Fourier

Définition 2.3.1 *Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de u, la fonction $\widehat{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

*Cette intégrale est bien définie puisque $\left|u(x)e^{-2\pi i\xi x}\right| = |u(x)|$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
On écrira symboliquement : $\widehat{u} = \mathcal{F}u$ ou $\widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}\{u(x)\}$.*

Définition 2.3.2 ***Transformée de Fourier de la translation :***
La transformée de Fourier d'une fonction translatée de a est donnée par :

$$\mathcal{F}(u(x-a)) = e^{-2i\pi\xi a}\mathcal{F}(u(x)) \tag{2.2}$$

2.3.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Toutes les opérations sur $\mathcal{D}'$ que nous avons étudiées ont été définies par dualité à partir de C_0^∞ ; il était important pour cela que C_0^∞ soit invariant par ces opérations. Or, comme nous le verrons plus loin, la transformée de Fourier d'un élément (non identiquement nul) de C_0^∞ n'est jamais à support compact. Il faut donc commencer par trouver un espace qui soit invariant par la transformation de Fourier. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ conviendra.

Définition 2.3.3 *L'espace $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est constitué des fonctions u appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \quad \left|x^\alpha \partial^\beta u(x)\right| \leq C_{\alpha,\beta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Toutes les dérivées d'un élément de $\mathcal{S}$ tendent vers zéro à l'infini "plus vite" (décroissance rapide) que tout polynôme. Voici des exemples.

Exemple 2.3.1 *(i) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{S}$.*
(ii) La fonction $u(x) = e^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$, appartient à $\mathcal{S}$.
(iii) Plus généralement, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, la fonction sur $\mathbb{R}^n$, $u(x) = e^{-z|x|^2}$ appartient à $\mathcal{S}$.

2.3.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.3.4 *Pour $u \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de u, que l'on note $\hat{u}$ ou $\mathcal{F}u$, est la fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie par,*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

où $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.
Cette définition a bien un sens puisque $e^{-ix\cdot\xi}u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Propriétés 2.3.1 ***Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$***
Pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a,

- *a)* $\int \hat{u}(\xi)v(\xi)d\xi = \int u(x)\hat{v}(x)dx$,
- *b)* $\int u(x)\bar{v}(x)dx = (2\pi)^{-n}\int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi$. *En particulier,* $\int |u(x)|^2dx = (2\pi)^{-n}\int |\hat{u}(\xi)|^2d\xi$,
- *c)* $u * v \in \mathcal{S}$ *et* $\mathcal{F}(u * v) = \hat{u} \cdot \hat{v}$,
- *d)* $\widehat{u \cdot v} = (2\pi)^{-n}\hat{u} * \hat{v}$
- *e)* $\widehat{D_j u} = \xi_j\hat{u}$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$,
- *f)* $\widehat{x_j u} = -D_j\hat{u}$, *où* $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$.

2.3.3 L'espace $S'(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.3.5 *$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}'$ est le dual topologique de $\mathcal{S}$, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$.*

Donc une application linéaire, $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{S}'$ si et seulement si,

$$\exists k, \ell \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq \ell}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)\right|, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}.$$

2.3.4 Transformée de Fourier des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.3.6 *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de T, notée $\mathcal{F}T$ ou $\hat{T}$, est la forme linéaire sur $\mathcal{S}$ définie par*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

En effet $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ car $|\langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle| \leq C\sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq \ell}} p_{\alpha\beta}(\mathcal{F}\varphi)$ (où les $p_{\alpha\beta}$ sont des semi-normes de $\mathcal{S}$) puisque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Propriétés 2.3.2 ***Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$***

- *a) La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec la transformation de Fourier dans $\mathcal{S})(\mathbb{R}^n)$ (définie en (2.3)) si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
  Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a,
- *b)* $\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^n\check{T}$, *où* $\langle\check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ *et* $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.
- *c)* $\mathcal{F}(D_jT) = \xi_j\mathcal{F}T, D_j = \frac{1}{i}\partial_j$
- *d)* $\mathcal{F}(x_jT) = -D_j\mathcal{F}T$.

2.4 Distributions p-périodiques sur $\mathbb{R}$

Définition 2.4.1 *On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est p-périodique, si*

$$\mathcal{T}_p T = T, \text{ ie } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) :< T, \mathcal{T}_{-p}\varphi >=< T, \varphi >$$

Exemple 2.4.1 *a) Si $f \in \mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ est p-périodique, alors T_f est aussi p-périodique,*

b) Si T est une distribution p-périodique, alors la dérivée T' l'est aussi.

c) Le Peigne de Dirac $III = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ est 1-périodique.

Définition 2.4.2 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution et soit $\lambda \in \mathbb{R}*$. On définit la distribution S par, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:*

$$\langle S, \varphi\rangle \overset{def}{=} \left\langle T, \frac{1}{\lambda}\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\right\rangle \qquad (\overset{not}{=} \left\langle T(x), \frac{1}{\lambda}\varphi(\frac{x}{\lambda})\right\rangle) \tag{2.5}$$

(On vérifie immédiatement que S est bien une distribution sur $\mathbb{R}$.) On note abusivement $S(x) = T(\lambda x)$. Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T(\lambda x), \varphi(x)\rangle \overset{def}{=} \left\langle T(x), \frac{1}{|\lambda|}\varphi(\frac{x}{\lambda})\right\rangle, \tag{2.6}$$

notation abusive ou implicitement x est le nom de la "variable d'intégration".

2.4.1 Peigne de Dirac

Définition 2.4.3 *Pour $a > 0$, on appelle peigne de Dirac de période a la distribution :*

$$\Delta_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{ka} = \ldots + \delta_{-2a} + \delta_{-a} + \delta_0 + \delta_a + \ldots$$

définie sur les fonctions φ continues en les ka pour $k \in \mathbb{Z}$ par :

$$\langle \Delta_a, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka) \overset{noté}{=} \langle \Delta_a(x), \varphi(x)\rangle_{dx} \tag{2.7}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ le membre de droite de 2.7 est une somme finie (car φ est à support compact), et Δ_a est une distribution (car est une somme fini des distribution).

Exemple 2.4.2 *Montrons pour $a > 0 : \Delta_a(x) = \frac{1}{a}\Delta_1\left(\frac{x}{a}\right)$*

$$\begin{aligned}
\left\langle \Delta_1\left(\frac{x}{a}\right), \varphi(x)\right\rangle_{dx} &= \langle \Delta_1(x), a\varphi(ax)\rangle_{dx} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a\,\langle \delta_k(x), \varphi(ax)\rangle_{dx} \\
&= a\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ax) \\
&= a\,\langle \Delta_a, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Lemme 2.4.1 ***"Décomposition de l'unité"***
Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$ *alors* $\exists \mathcal{X} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *tel que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}\mathcal{X} = 1$$

Preuve :
On choisit une fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*tel que* $\psi \geqslant 0$ *et* $\psi > 0$ *sur* $[0,p]$*, Ainsi :*

$$\mathcal{X} = \frac{\psi}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}\psi} \text{ convient.}$$

$\mathcal{X}$ *est bien définie car*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}\psi \neq 0$$

parce que si on suppose que :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}\psi = 0$$

alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}; \psi(x+kp) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

d'où pour $k = 0$ *et* $x = \frac{p}{2}$ *on a :* $\psi(\frac{p}{2}) = 0$*, ce qui contredit le fait que* $\psi(\frac{p}{2}) > 0$*.*

Lemme 2.4.2 ***"Structure des distributions p-périodiques"***

1. *Soit* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$*, alors* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}T$ *est une distribution p-périodique.*
2. *Réciproquement : Si* S *est une distribution p-périodique, alors, il existe une distribution* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$*,telle que :*

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}T$$

Preuve :
On peut prendre $T = \mathcal{X}.S$ *avec* $\mathcal{X} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}\mathcal{X} = 1$$

Définition 2.4.4 *Soit* S *est une distribution p-périodique, telle que*

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}T \text{ (d'aprés le lemme 2.4.2).}$$

On appelle coefficients de Fourier de S *les nombres complexes*

$$c_k(S) = \frac{1}{p} < T_x, e^{-2i\pi\frac{kx}{p}} >$$

Le membre droit de cette equation est bien définie, car par définition c'est la quantité $\frac{1}{p}\hat{T}(\frac{2k\pi}{p})$ *où* $\hat{T}$ *est la transformée de fourier de* T *distribution à support compact, et aussi une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$

Théorème 2.4.1 *Soit S est une distribution p-périodique, alors*

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(S) e^{2i\pi \frac{kx}{p}} \tag{2.8}$$

et pour $k \neq 0$on a, $|c_k(S)| \leqslant C|k|^r$, où r est un entier positif.
Inversement : Une suite de nombres $(c_k)_k$ satisfaisant à l'inégalité précédente est la suite des coefficients de Fourier d'une distribution p-périodique.
Preuve :
Posons :

$$S_N = \sum_{|k| \leqslant N} c_k(S) e^{2i\pi \frac{kx}{p}}$$

Donc la série du membre droit de l'équation (1) est convergente, et c'est la limite de la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ lorsque $N \to \infty$. En effet, on va considérer

$$R_N = \sum_{|k| \leqslant N, k \neq 0} \frac{c_k(S)}{k^{\beta+2}} e^{2i\pi \frac{kx}{p}}, \text{ avec } \beta \geq r$$

Les $c_k(S)$ sont à croissance lente d'après le théorème suivant :
Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}), \hat{T}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\hat{T}(\xi) =< T_x, e^{-ix\xi} >$$

De plus : $\exists r \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\partial_\xi^\alpha \hat{T}(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^r \forall \alpha \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs la suite $(R_N) \subset C^0(\mathbb{R})$. Comme

$$\frac{|c_k(S)|}{|k|^{\beta+2}} \leqslant \frac{C|k|^r}{|k|^{\beta+2}} \leqslant \frac{C}{k^2}$$

Cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vers une fonction continue R. Alors $((\frac{d}{dx})^{\beta+2} R_N)$ converge, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vers $R^{(\beta+2)}$. Mais

$$R_N^{(\beta+2)} = \sum_{|k| \leqslant N, k \neq 0} i^{\beta+2} c_k(S) e^{2i\pi \frac{kx}{p}} = i^{\beta+2}(S_N - c_0(S))$$

donc (S_N) converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vers $c_0 + i^{-(\beta+2)R^{\beta+2}}$

2.5 Distributions tempérées

Les semi-normes $p_{k,\ell}$, données par $p_{k,\ell}(\varphi) = \sum_{\alpha \leqslant k, \beta \leqslant \ell} \left\| x^\alpha \varphi^{(\beta)} \right\|_\infty$, définissent une topologie sur $\mathcal{S}$, donc sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de cette topologie.

Définition 2.5.1 *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite tempérée ssi T est également continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par $\mathcal{S}$, i.e. ssi la distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifie (image bornée par un antécédent) :*

$$\exists C > 0, \quad \exists k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C p_{k,\ell}(\varphi)$$

où $p_{k,\ell}$ est défini au dessus.
On note $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées.

Exemple 2.5.1 *Toute fonction polynôme définit une distribution tempérée :* $\left\langle x^k, \varphi \right\rangle \leqslant p_{k,0}(\varphi)$ *pour* $\varphi \in \mathcal{S}$.

Exemple 2.5.2 *Soit* f *donnée par* $f(x) = e^{x^2}$. *On a* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, *donc définit la distribution* T_f. *Mais* T_f *n'est pas une distribution tempérée. soit* $\varphi \in \mathcal{D}$ *définie par* $\varphi(x) = e^{-x^2}$ *on a* $\varphi \in \mathcal{S}$; *et* $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} dx = \infty$, *donc :*

$$\forall C > 0, \quad \forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \langle T_f, \varphi \rangle \geqslant C p_{k,\ell}(\varphi)$$

Exemple 2.5.3 *Le peigne de Dirac est une distribution tempérée.*
Pour $\varphi \in \mathcal{S}$ *on a*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \right| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + k^2\right) \varphi(k) \frac{1}{1 + k^2} \right| \\ &\leqslant \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \left(1 + x^2\right) \varphi(x) \right| \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + k^2}, \end{aligned}$$

et donc $\langle \Delta_1, \varphi \rangle \leqslant C p_{20}(\varphi)$ *où* $C = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}$: Δ_1 *est tempérée. Même démarche pour* Δ_a.

Proposition 2.5.1 *Toute primitive d'une distribution tempérée* T *est encore tempérée*

Proposition 2.5.2 *Toute distribution périodique sur* $\mathbb{R}$ *est tempérée.*
Preuve : *On sait que toute fonction continue périodique est nécessairement bornée sur* $\mathbb{R}$. *Pour le cas des distributions, notre proposition va dans le même sens.*
Nous aurons besoins d'une fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(x + k) = 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, *ou simplement*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_k \psi = 1$$

Soit T *une distribution périodique de période 1 sur* $\mathbb{R}$, *on a :*

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_k \psi . T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_k \psi . \mathcal{T}_1 T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_k \psi . \mathcal{T}_k T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_k (\psi T)$$

Pour toute fonction $\varphi \in S(\mathbb{R})$, *on a :*

$$< T, \varphi >= \sum_{k \in \mathbb{Z}} < \mathcal{T}_k(\psi T), \varphi >= \sum_{k \in \mathbb{Z}} < \psi T, \mathcal{T}_{-k} \varphi >$$

Comme ψT *est une distribution à support compact, alors elle est tempérée, donc elle vérifie :*$\exists l, m \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ *tels que :*

$$| < \psi T, \mathcal{T}_{-k} \varphi > | \leqslant C \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} sup_{x \in \mathbb{R}} | x^\alpha (\mathcal{T}_{-k} \varphi)^{(\beta)}(x) | \leqslant C \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} sup_{x \in \mathbb{R}} | (x + k)^\alpha \varphi^{(\beta)}(x) |$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
D'où :

$$|<T,\varphi>| \leqslant C \sum_{|k|\leq N} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} sup_{x\in\mathbb{R}}|(x+k)^{\alpha}\varphi^{(\beta)}(x)|$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *alors* $|(x+k)^{\alpha}\varphi^{(\beta)}(x)| \to 0$ *pour* $|x+k|$ *assez grand, donc le membre droit de l'inégalité ci-dessus est une sommation finie.*
D'où, $\exists N \in \mathbb{N}$*tel que :*

$$\begin{aligned}
|<T,\varphi>| &\leq C \sum_{|k|\leq N} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} sup_{x\in\mathbb{R}}|(x+k)^{\alpha}\varphi^{(\beta)}(x)| \\
&\leq C \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} [\sum_{|k|\leq N} sup_{x\in\mathbb{R}}|(x+k)^{\alpha}\varphi^{(\beta)}(x)|] \\
&\leq C \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} sup_{x\in\mathbb{R}}[\sum_{|k|\leq N} |(x+k)^{\alpha}\varphi^{(\beta)}(x)|] \\
&\leq C.C_N \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} sup_{x\in\mathbb{R}}|x^{\alpha}\varphi^{(\beta)}(x)|
\end{aligned}$$

Posons $C'' = C.C_N$.
Alors, $\exists l, m \in \mathbb{N}, \exists C'' > 0$, *tels que :*

$$|<T,\varphi>| \leq C''||\varphi||_{\alpha,\beta}$$

Avec,

$$||\varphi||_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} sup_{x\in\mathbb{R}}|x^{\alpha}\varphi^{(\beta)}(x)|$$

où $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *muni des semi-normes* $||.||_{\alpha,\beta}$ *est un espace vectoriel métrisable et complet. D'où* T *est une distribution tempérée.*
Deuxième preuve de la proposition :
On peut utiliser le théorème (2.4.1) pour démontrer la proposition (2.5.2) En effet, on a vu que S *admet un développement en série de Fourier*

$$S = \sum_{|k|\leqslant N} c_k e^{2i\pi\frac{kx}{p}}$$

avec convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *En fait la convergence vaut encore dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *car :*

1. *les* c_k *sont à croissance lente, et*
2. $(<e^{2i\pi\frac{kx}{p}}, \varphi>)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est à décroissance rapide pour* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.5.1 Conclusion

C'est pour cette raison, la théorie des séries de Fourier pour les fonctions continues périodiques s'inscrits dans le cadre de la transformation de fourier des distributions tempérées ; l'un des avantages du cadre des distribution tempérées pour y étudier la transformation de Fourier est que ce cadre est commun à la théorie des séries et des intégrales de Fourier ce qui est n'est pas le cas si on étudie la transformation de Fourier sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, car une fonction continue périodique n'appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ que si elle est identiquement nulle ; Cette difficulté n'existe pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ car toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et définit par conséquent une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

2.6 Distributions Périodiques sur $\mathbb{R}^n$

Tout ce que nous avons vu précèdement sur les distributions périodiques sur $\mathbb{R}$, se généralise sur $\mathbb{R}^n$.

Les fonctions continues périodiques de période $p > 0$ sur $\mathbb{R}$, sont en bijection avec les fonctions définies sur le cercle de longueur p,

$$\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, |x| = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{\omega} \right\}$$

Nous pouvons donc identifier ces deux espaces.

De la même façon nous pouvons introduire l'espace $\mathcal{D}_p$ des fonctions test périodiques de période p, qui est identique à celui des fonctions définies sur le cercle de longueur p de classe C^∞. Plus généralement sur $\mathbb{R}^n$ nous pouvons définir le tore $\mathcal{T}^n$ comme le produit de n copies de cercles de longueur respectives $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$. Une fonction sur $\mathbb{R}^n$ périodique de période $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ peut alors être de la même façon considérée comme une fonction définie sur ce tore. On définit ainsi l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{T}^n)$ des fonction test sur le tore, qui est identiques à celui des fonctions test sur $\mathbb{R}^n$ périodiques de période $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de réclamer une propriété de support compact pour les fonctions de ces espaces puisque le cercle et le tore déjà compacts. L'espace $\mathcal{D}'_\tau$ des distributions sur le cercle et plus généralement $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}^n}$ des distributions sur le tore, n'est autre que le dual de ces espaces $\mathcal{D}_\tau$ ou $\mathcal{D}(\mathcal{T}^n)$ des fonctions C^∞ sur le cercle ou le tore. Remarquons qu'il n'est plus nécessaire d'avoir des propriétés de support pour pratiquer la convolution dans ces espaces.

2.7 Développement en série de Fourier des distributions périodiques

Le but principal du paragraphe actuel est de prouver que toute distribution périodique est la somme de sa série de Fourier. Auparavant, il nous faut définir les coefficients de Fourier d'une distribution. On débute en montrant que les distributions p-périodiques sont des formes linéaires continues sur l'espace des fonctions p-périodiques de classe C^∞.

Définition 2.7.1 *soit f une fonction périodique de période p, on dit qu'une fonction g est un motif générateur de f si le support de g est borné et si, d'autre part on a*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} g$$

Remarque :
On remarque d'abord que si g est un motif générateur de f, une translatée d'indice np ou n

est un relatif quelconque est encore un motif générateur. On remarque aussi qu'une translatée $\mathcal{T}_k f$ admet pour un de ses motifs générateurs le translaté $\mathcal{T}_k g$ d'un motif g de f.

Exemple 2.7.1 ***Exemples de générateurs***
Soit $\bar{f}$ la restriction de f la fonction périodique de période p à $[0, p[$, c'est donc un générateur de f. Si g est un générateur quelconque de f, on a $\sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(\bar{f} - g) = 0$, la somme étant finie puisque les supports sont bornés.
Prenons un point $t_0 \in [0, p[$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Alors, la relation précédente s'écrit

$$f(t_0) = \mathcal{T}_{t_0 - kp} g.$$

En divisant par $f(t_0)$, on obtient $1 = \sum_{\mathbb{Z}} (f(t_0))^{-1} g(t_0 - kp)$, autrement dit, en posant $\theta = \frac{g}{f}$, On a $\sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} \theta(t_0) = 1$. Supposons maintenant θ continue, alors la relation précédente devient :

$$\sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} \theta(t) = 1 \text{ pour tout } t \text{ du support de } \bar{f}.$$

On est ainsi amené à considérer une fonction continue à support borné θ telle que, sur $\mathbb{R}$, elle vérifie $\sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} \theta = 1$. Alors, le produit θf est aussi à support borné, ce qui donne un sens, pour tout t, à $h(t) = \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} \theta f(t)$. On peut supposer, sans restreindre la généralité que $\operatorname{supp}\theta \subset [0, mp]$ avec $m > 1$ (sinon la fonction θ serait égale à 1 sur son support et ne pourrait être continue). Supposons en outre que $\operatorname{supp}\theta \supset [0, p]$. Alors :

$$t \in [0, p[\implies h(t) = \sum_{k=0}^{k=m-1} \theta(t + kp) f(t) = f(t) \sum_{k=0}^{k=m-1} \theta(t + kp) = f(t).$$

Puisque f et h sont p-périodiques, on en déduit $f = h$ et, par conséquent, θf est un motif générateur de f.

Propriétés 2.7.1 *Soit θ une fonction continue borné et vérifiant sur $\mathbb{R}$, $\sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp} \theta = 1$ Alors, quelle que soit f p-périodique, non réduite à 0, θf est un motif générateur de f. Une telle fonction θ est dite un p-motif générateur de l'unité.*

2.7.1 Motifs générateurs de l'unité indéfiniment dérivables

Soit une fonction quelconque $\psi \in \mathcal{D}$, de support $[-p, p]$, qui reste strictement positive sur $]-p, p[$. La somme $\sum_{\mathbb{Z}} \psi(t + kp)$ ne comporte, au plus, que deux termes non nuls.
Par exemple, pour $t = p/2$, seuls $\psi(p/2)$ et $\psi(-p/2)$ sont non nuls et, pour $t = 0$, seul $\psi(0)$ est non nul. Il en résulte que cette somme, que l'on note $\sigma(t)$, est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est strictement positive et qu'elle est, d'après sa définition, p-périodique.
Posons alors $\theta(t) = \frac{\psi(t)}{\sigma(t)}$. Cette fonction θ est bien définie sur $\mathbb{R}$, son support est celui de ψ , donc borné, et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{+\infty} \theta(t + kp) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t + kp)}{\sigma(t + kp)} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t + kp)}{\sigma(t)} \\
&= \frac{\sigma(t)}{\sigma(t)} = 1
\end{aligned}$$

Remarque :
Cette construction de θ peut être faite en prenant ψ de classe C^m , elle aboutit à un motif de même classe. Par ailleurs, l'intervalle $[-p,p]$ de départ peut être remplacé par $[-kp,kp]$ Lorsque ψ est polynomiale par morceaux, θ est rationnelle par morceaux.

2.7.2 Définition des coefficients de Fourier et de la série de Fourier

Les coefficients de Fourier de f p-périodique, appartenant à $\mathcal{L}^1_{Loc}(\mathbb{R})$ peuvent s'écrire :

$$c_n(f) = p^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(t)\exp(-in(\pi/p)t)dt \text{ ou encore } c_n(f) = p^{-1}\left\langle [\bar{f}], w_{p,-n}\right\rangle$$

avec $w_{p,n} : t \to \exp(2i\pi nt/p)$ fonction exponentielle p-périodiques de classe $c^\infty \forall n \in \mathbb{N}$.
car $[\bar{f}]$ est à support borné et définit donc une action sur toute fonction C^∞. On peut, de plus, remarquer que ces coefficients apparaissent comme des valeurs aux points n/p de la transformée de Fourier de cette distribution (laquelle est une fonction), à savoir :

$$c_n(f) = p^{-1}\mathcal{F}([\bar{f}])(n/p).$$

En fait, cette dernière formule est encore valable en remplaçant $[\bar{f}]$ par un générateur $g = \theta f$ ou θ est, par exemple, continu, à savoir :

$$c_n(f) = p^{-1}\left\langle [\bar{f}], w_{p,-n}\right\rangle = p^{-1}\mathcal{F}([\theta f])(n/p).$$

Supposons en effet le support de θ contenu dans $[0,mp]$. Alors, lorsque $u \in [0,p[$, la somme $\sum_{\mathbb{Z}}\theta(u+kp)$ se réduit à $\sum_0^{m-1}\theta(u+kp)$ et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\langle[\theta f], w_{p,-n}\rangle &= \int_0^{mp}\theta(t)f(t)w_{p,-n}dt\\
&= \sum_0^{m-1}\int_{kp}^{(k+1)p}\theta f w_{p,-n}dt\\
&= \sum_0^{m-1}\int_0^{p}\theta(u+kp)f(u)w_{p,-n}du\\
&= \int_0^{p} f(u)w_{p,-n}(u)\sum_0^{m-1}\theta(u+kp)du\\
&= \int_0^{p} f(u)w_{p,-n}(u)du\\
&= pc_n.
\end{aligned}$$

Supposons que T soit la répétition p-périodique d'une distribution S à support compact inclus dans $[0,p[$ Alors S, qui joue le rôle d'une restriction dans le cas d'une fonction, est un motif générateur de T par définition. Dans ce cas, il est naturel, par analogie avec le cas des fonctions, de définir l'action de T sur les fonctions p-périodiques par $\langle S,\varphi\rangle$ sans l'intermédiaire donc d'un a-motif de l'unité. En effet :

$$\begin{aligned}\left\langle \theta \sum_{\mathbb{Z}} S_{ka}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \sum_{\mathbb{Z}} S_{ka}, \theta\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle S, \sum_{\mathbb{Z}} (\theta\varphi)_{ka} \right\rangle \\ &= \left\langle S, \varphi \sum_{\mathbb{Z}} (\theta)_{ka} \right\rangle \\ &= \langle S, \varphi \rangle .\end{aligned}$$

Prenons l'exemple du peigne III_p qui est la répétition p-périodique de δ.

2.7.3 Coefficients de Fourier d'une distribution

Définition 2.7.2 *On peut définir les coefficients de Fourier de la distributions p-périodique T par les formules*

$$c_n(T) = 1/p \,\langle \theta T, \omega_{p,-n} \rangle \qquad \textit{avec } \omega_{p,n} : t \to \exp(-2i\pi nt/p)$$

Dans le cas donné ci-dessus de la répétition périodique de S, cette définition coïncide avec $c_n(T) = p^{-1} \langle S, \omega_{p,-n} \rangle$ Ainsi pour le pigne III_p

$$c_n(III_p) = p^{-1} \langle S, \omega_{p,-n} \rangle = p^{-1}$$

Remarque : Rappelons que la transformée de Fourier d'une distribution T à support borné est une fonction telle que

$$\mathcal{F}(T)(\lambda) = \langle T, exp(-2i\pi t) \rangle$$

Ces coefficients de Fourier peuvent donc, comme pour les fonctions, se calculer à l'aide dela transformée de Fourier de θT, puisque :

$$c_n(T) = p^{-1}\mathcal{F}(\theta T)(n/p).$$

Propriétées de ces coefficients de Fourier :

On a vu que les coefficients de Fourier d'une fonction p-périodique, par exemple localement sommable, tendent vers 0 à l'infini. Pour une distribution périodique, ce n'est plus vrai mais :

Proposition 2.7.1 *La suite des coefficients de Fourier d'une distribution périodique est à ceoissance lente*

Preuve :

On peut se servir de la formule précédente exprimant qu'un tel coefficient est une valeur de la fonction transformée de Fourier de la distribution à support borné $U = \theta T$. Le résultat et alors obtenu par la proposition (2.5.1) Notons la réciproque

Proposition 2.7.2 *soit (c_n) une suite de complexes à coroissance lente. Alors, il existe une unique distribution T p-périodique telle que $c_n(T) = c_n$*
Preuve :
Montrons que T défini par

$$T = \sum_{\mathbb{Z}} c_n \exp(2i\pi xn/p)$$

est une distribution p-périodique.

1. *Montrons d'abord la convergence de la série définissant $< T, \varphi >$. Par hypothèse de croissance lente, il existe K tel que $|c_n| \leq C^K_{|n|}$. Par ailleurs, $K + 2$ intégrations par parties dans l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)exp(2i\pi xn/p)dx$ montrent que ces nombres sont majorés par*
$$C'|n|^{-(K+2)\sup|\varphi^{K+2}|}$$
Le terme général de la série est donc majoré uniformément par H/n^2 d'où la convergence de la série.
2. *La linéarité est évidente.*
3. *Pour la continuité, on remarque que le nombre H de la majoration précédente est du type $C'C\sup|(\varphi^{K+2})|$ ce qui entraînera la convergence vers 0 de $< T, \varphi_K >$ lorsque la suite $(\varphi_K) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ puisqu'alors on aura*
$$|\langle, \varphi_K\rangle| \leq C'C\sup|(\varphi_K^{K+2})\sum n^{-2}|.$$
4. *Montrons que les coefficients de Fourier de T sont les c_n, autrement dit que $< \theta T\omega_{p,-n} >= pc_n$, en choisissant θ à support dans $[-p, p]$. Cela résulte des égalités qui suivent, où l'on utilise pour $x \in [0, p]$ la relation $\theta(x-p)+\theta(x) = 1$, égalités dans lesquelles on permute, en raison de la convergence uniforme vue précédemment ; une sommation et une intégration :*

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbb{Z}} c_k \int_{-p}^{p} \theta(x)e^{-2i\pi x(n-k)/p}dx &= \sum_{\mathbb{Z}} c_k(\int_{-p}^{0} \theta(x)e^{-2i\pi x(n-k)/p}dx + \int_{0}^{p} \theta(x)e^{-2i\pi x(n-k)/p}dx) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}} c_k(\int_{0}^{p} \theta(x-p)e^{-2i\pi x(n-k)/p}dx + \int_{0}^{p} \theta(x)e^{-2i\pi x(n-k)/p}dx) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}} c_k \int_{0}^{p} (\theta(x-p) + \theta(x))e^{-2i\pi x(n-k)/p}dx \\
&= \sum_{\mathbb{Z}} c_k(\int_{0}^{p} e^{-2i\pi x(n-k)/p}dx \\
&= pc_n
\end{aligned}$$

Remarque : Cet énoncé est optimal car le produit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)exp(2i\pi xn/p)dx$ peut ne pas tendre vers 0 si (c_n) n'est pas à croissance lente.

2.7.4 Distribution périodique considérée comme répétition périodique

Soit une distribution T qui est p-périodique. Le choix d'une fonction θ du type précédent étant fait, on considère encore la distibution θT. C'est une distribution à support borné puisque

θ est à support borné. elle s'applique donc sur les fonctions de classe C^∞ mais, bien entendu, le calcul précédent le prouve, cette action n'est indépendante du choix de θ que sur les fonctions p-périodique de classe C^∞.
Nous allons montrer que, comme pour les fonctions, $T = \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(\theta T)$.
Cette vérification est immédiate car, pour toute fonction φ, élément de $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(\theta T), \varphi \right\rangle &= \sum_{\mathbb{Z}} \langle \mathcal{T}_{kp}(\theta T), \varphi \rangle \\
&= \sum_{\mathbb{Z}} \langle \mathcal{T}_{kp}(\theta) T, \varphi \rangle \\
&= \sum_{\mathbb{Z}} \langle T, \varphi \mathcal{T}_{kp}(\theta) \rangle \\
&= \left\langle T, \varphi \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(\theta) \right\rangle \\
&= \langle T, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Proposition 2.7.3 *Soit T une distribution p-périodique. Il existe des distributions à support borné jouant le rôle de motifs générateurs de T. Elles sont du type θT où θ est une fonction de $\mathcal{D}$ vérifiant, pour tout réel t, $\sum_{\mathbb{Z}} \theta(t + kp) = 1$ La répétition p-périodique d'un quelconque de ces motifs fournit T, c'est-à-dire que l'on a*

$$Rep_p(\theta T) = \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(\theta T) = T$$

Corollaire 2.7.1 *D'après ce qui a été déjà remarqué sur les répétitions périodiques, θT étant à support borné, le résultat précédent peut aussi s'écrire :*

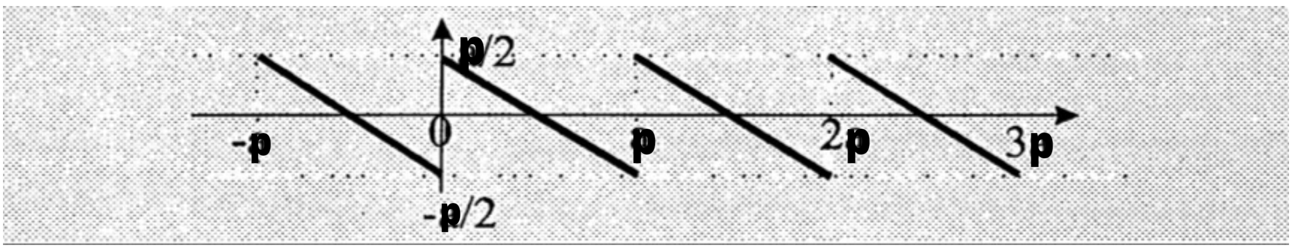
$$T = \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{kp}(\theta T) = (\theta T) * III_p.$$

2.7.5 Développement en série de Fourier d'un peigne de Dirac

Pour développer une distribution périodique quelconque, une méthode classique consiste à développer d'abord en série de Fourier le peigne de Dirac de période p. Le développement du peigne est l'objet de deux démonstations, la première utilisant les résultats de la théorie sur les fonctions.

Première preuve

Le principe est le suivant : On utilise la fonction f p-périodique représentée ci-dessous



Elle est définie sur $]0,p[$ par $f(t) = (p/2) - t$ donc possède des discontinuités aux points d'abscisses np avec des sauts finis égaux à p.
La dérivée de cette fonction au sens de $\mathcal{D}'$ fait intervenir le peigne $p\mathrm{III}_p$ donc, en dérivant la série de Fourier de f, on obtient un développement de III_p.
Par dérivation :

$$[f]' = [f'] + p\mathrm{III}_p = -[1] + p\mathrm{III}_p.$$

Par ailleurs, le calcul des coefficients de Fourier fournit :

$$c_n(f) = -ip(2\pi n)^{-1} \text{ et } c_0(f) = 0. \text{ En posant } f(np) = 0$$

La proposition (2.2.1) permet d'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = -ip \sum_{n\neq 0} (2\pi n)^{-1} \exp(2i\pi(n/p)t).$$

Mais cette convergence est aussi vraie au sens de $\mathcal{L}^2$ donc au sens de $\mathcal{D}'$.
On peut donc dériver terme à terme cette série dans $\mathcal{D}'$, ce qui donne

$$[f]' = \sum_{n\neq 0} [\exp(2i\pi(n/p)t)].$$

En ajoutant le terme manquant [1] pour compléter la série, on obtient alors :

$$\mathrm{III}_p = p^{-1} \sum_{n\neq 0} [\exp(2i\pi(n/p)t)].$$

Deuxième preuve

Cette deuxième preuve peut être laissée en première lecture. La série de distributions $\sum_{\mathbb{Z}} \delta_{np}$ est convergente dans l'espace $\mathcal{S}'$. Puisque la transformation de Fourier est continue sur cet espace $\mathcal{S}'$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathrm{III}_p) &= \mathcal{F}(\sum_{\mathbb{Z}} \delta_{np}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\delta_{np}) \\
&= \sum_{\mathbb{Z}} [\exp(-2i\pi npt)]
\end{aligned}$$

Le résultat noté U est une distribution p^{-1}-périodique définie par une série de Fourier dont tous les coefficients sont égaux à 1. En multipliant U par la fonction $\exp(2i\pi pt)$ de classe C^∞, on retrouve U (par translation d'une unité de l'indice de sommation) d'où :

$$(\exp(2i\pi pt) - 1)U = 0.$$

La fonction $(\exp(2i\pi pt) - 1)$ est une fonction de classe C^∞ qui n'admet comme zéros que les nombres np^{-1}, points sur lesquels la dérivée ne s'annule pas. Lorsque $t \to np^{-1}$, le quotient de $(\exp(2i\pi pt) - 1)$ par $t - np^{-1}$ tend vers $2i\pi p \neq 0$. Donc, si $P_m(t) = \prod_{-m\leq n\leq m}(t - np^{-1})$, le quotient $\psi_m(t) = (\exp(2i\pi pt) - 1)(P_m(t))^{-1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. Il existe

m tel que $supp\varphi \subset [-mp^{-1}, mp^{-1}]$ et on peut poser, puisque $\psi_m \neq 0$ sur ce segment, $\varphi = \psi_m\psi$ avec $\psi \in \mathcal{D}$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}\langle P_m\psi_m U, \psi\rangle &= \langle P_m U, \psi_m\psi\rangle \\ &= \langle P_m U, \varphi\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent, ceci étant vrai quel que soit m, on en déduit que U est une combinaison linéaire indexée sur $\mathbb{Z}$ de distributions de Dirac, à savoir $U = \sum_{\mathbb{Z}} p_n\delta_{n/p}$. En utilisant la périodicité de U, on prouve que ces p_n, sont égaux à une même constante C. En effet, si on prend $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que

$$\varphi(np^{-1}) = 1 \text{ et } \forall k \neq n, \varphi(kp^{-1}) = 0, \text{ on a } < U, \varphi >=< \tau_{p^{-1}}U, \varphi >= p_{n-1}\text{et} < U, \varphi >= p_n.$$

Il reste à calculer cette constante. Pour cela, nous appliquons les deux membres de l'égalité obtenue sur la fonction $t \to \exp(-\pi(pt)^2)$ qui est dans $\mathcal{S}$ et dont la transformée de Fourier est la fonction

$$\lambda \to p^{-1}\exp(-\pi(p)^2).$$

Comme le symbole $\langle[\exp(-2i\pi npt)]\rangle, \exp(-\pi p^2t^2)$ est la valeur de cette transformée de Fourier en $\lambda = np$, on en déduit $C = p^{-1}$ puisque :

$$\begin{aligned}C\sum_{\mathbb{Z}}\exp(-\pi n^2) &= \sum_{\mathbb{Z}}\left\langle[\exp(-2i\pi npt)], \exp(-\pi p^2t^2)\right\rangle \\ &= p^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\pi(np/p)^2\right).\end{aligned}$$

La transformée du peigne est donc le peigne $p^{-1}\text{III}_{p^{-1}}$ et l'égalité de départ exprime que ce dernier peigne admet le développement de Fourier

$$\sum_{\mathbb{Z}}[\exp(-2i\pi npt)].$$

Proposition 2.7.4 *le pigne III_p est la somme dans l'espace $\mathcal{S}'$ de la série de Fourier, à savoir*

$$III_p = p^{-1}\sum_{\mathbb{Z}}[\exp(-2i\pi(n/p)t)]$$

De plus, la transformée de Fourier du pigne vérifie $\mathcal{F}(III_p) = p^{-1}III_{p-1}$

2.7.6 Développement d'une distribution périodique quelconque

Du développement du peigne, on va en déduire le développement en série de Fourier d'une distribution quelconque de période p en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier de la convolution.
Appliquons aux deux membres de l'égalité $T = (\theta T) * \text{III}_p$, trouvée dans le corollaire (2.7.1), la transformation de Fourier. D'après la transformée de ce produit convolutif est le produit multiplicatif des transformées. En utilisant le résultat précédent, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T) &= \mathcal{F}(\theta T), \\ \mathcal{F}(\text{III}_p) &= (p^{-1})\mathcal{F}(\theta T)\text{III}_{p^{-1}}\end{aligned}$$

Mais on sait que le produit d'un peigne par la fonction $\mathcal{F}(\theta T)$ (qui est de classe C^∞) est encore un peigne généralisé, à savoir ici :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T) &= 1/p\sum_{\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\theta T)(n/p)\delta_{n/p}\\ &= \sum_{\mathbb{Z}} c_n(T)\delta_{n/p}\end{aligned}$$

Or, il a été vu que le peigne généralisé ainsi obtenu est à croissance lente et la convergence des sommes partielles de cette série a lieu au sens de S'. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}T &= \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(T))\\ &= \sum_{\mathbb{Z}} c_n(T)\bar{\mathcal{F}}(\delta_{n/p})\\ &= \sum_{\mathbb{Z}} c_n(T)\left[\exp(2i\pi(n/p)t)\right].\end{aligned}$$

D'où la proposition importante suivante

Proposition 2.7.5 *a) Toute distribution p-périodique T est développable dans $\mathcal{D}'$ en série de Fourier selon la formule*

$$T = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(T)\exp(2i\pi(n/p)t)$$

Les coefficients de Fourier vérifiant $c_n(T) = p^{-1}\mathcal{F}(\theta T)(n/p)$ où θ est un p-motif de classe C^∞ De plus, la transformée de Fourier de T est un pigne généralisé défini par

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n(T)\delta_{n/p}}$$

b) Si U est une distribution à support borné et p un réel strictement positif quelconque, la distribution $T = U * III_p = \sum_{\mathbb{Z}}\mathcal{T}_{kp}(U)$ est une distribution p-périodique dont U est un motif générateur. Les coefficients de Fourier précédents sont alors $c_n(T) = p^{-1}\mathcal{F}(U)(n/p)$ et, dans ce cas, on a la formule de Poisson

$$\sum_{\mathbb{Z}}\mathcal{T}_{kp}(U) = p^{-1}\sum_{\mathbb{Z}}\hat{U}(n/p)\exp(2i\pi tn/p)$$

Bien entendu, si $T = [f]$, f étant une fonction p-périodique et localement sommable, ce théorème s'applique et les coefficients de Fourier, qui sont alors obtenus à l'aide d'un motif générateur-fonction, sont bien ceux de la fonction f. Mais, les coefficients ne tendant plus vers 0 à l'infini, il peut y avoir divergence au sens des fonctions.
Dans le cas où f est une fonction, continue par morceaux et continûment dérivable par morceaux, la série de Fourier converge au sens des fonctions, convergence simple ou même convergence uniforme dans certains cas, comme l'indique la théorie classique des séries de Fourier de fonctions.

Chapitre 3

Applications

3.1 Formule de Poisson

Théorème 3.1.1 *Soit $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe ayant la propriété suivante (croissance modérée) : il existe un entier $r \geq 0$ tel que $|a_m| = O(|m|^r)$ (pour $m \to \infty$). Alors la série*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi imx/p} \tag{3.1}$$

converge dans $\mathcal{D}'$ vers une distribution p-périodique α, et on a

$$a_m = p^{-1}\int_0^p a(x)e^{-2\pi imx/p}dx \tag{3.2}$$

Réciproquement :
Si α est une distribution p-périodique, et si on définit les a_m par (3.2) (coefficients de Fourier de α), alors la suite (a_m) est à croissance modérée, et la série (3.1) converge dans $\mathcal{D}'$ vers la distribution α.
Preuve :

a) ***Partie directe :***
Supposons pour simplifier $a_0 = 0$, et posons

$$f_m = a_m\left(\frac{2\pi im}{p}\right)^{-r-2} \tag{3.3}$$

Alors $|f_m| = O(|m|^{-2})$, et la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_m e^{\frac{2\pi imx}{p}} \tag{3.4}$$

converge uniformément, donc aussi au sens des distributions, vers une fonction continue p-périodique φ : il en résulte immédiatement (par $r+2$ dérivations terme à terme de (3.4)) que (3.1) converge au sens des distributions vers $\varphi^{(r+2)}$, dérivée $(r+2)^{\text{ième}}$ de φ au sens des distributions : d'où $\alpha = \varphi^{(r+2)}$.

*b) **Partie réciproque :***
si $\alpha = \varphi$, fonction p-périodique de classe C^2, il est facile de prouver (double intégration par parties) que $|a_m| = O\left(|m|^{-2}\right)$, donc que (3.1) converge uniformément ; par ailleurs, on sait (théorème de Dirichlet, cas particulier facile du théorème de Dini-Jordan) que (3.1) converge simplement vers φ : par suite, (3.1) converge uniformément, donc aussi au sens des distributions, vers $\varphi = \alpha$: d'où la partie réciproque dans ce cas particulier. Le cas général s'en déduit en appliquant à au le fait (non trivial) que toute distribution à support compact est du type $\varphi^{(p)}$, avec φ de classe C^2, et en raisonnant comme dans la partie directe.

3.1.1 Formule de Poisson classique

On suppose ici $p = 1$.

Théorème 3.1.2 *La distribution périodique "masse-unité de Dirac en tout point entier n" admet le développement de Fourier suivant :*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m x}. \tag{3.5}$$

Preuve :
Soit α le premier membre de (3.5). D'après le théorème (3.1.1), il suffit pour prouver (3.5) de montrer que si $u(x) \in \mathcal{D}$ est une fonction 1 -unitaire et si $a_m = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) u(x) e^{-2\pi i m x} dx$, on a $a_m = 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Mais, par définition meme de α,

$$a_m = \sum_{-\infty}^{\infty} u(n) e^{-2\pi i m u} = \sum_{-\infty}^{\infty} u(n),$$

et cette dernière somme vaut effectivement 1 , puisque u est 1-unitaire.

Corollaire 3.1.1 *Si f est indéfiniment différentiable à support compact contenu dans $[a, b]$, on a :*

$$\sum_{a}^{b} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f(x) e^{2\pi i m x} dx. \tag{3.6}$$

3.1.2 Formule Sommatoire de Poisson

La formule sommatoire de Poisson (parfois appelée resommation de Poisson) est une identité entre deux sommes infinies, la première construite avec une fonction f, la seconde avec sa transformée de Fourier $\hat{f}$. Ici f est une fonction sur l'axe réel, ou plus généralement sur l'espace euclidien à n dimensions. La formule a été découverte par Siméon Denis Poisson.
Elle, et ses généralisations, sont importantes dans plusieurs domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse harmonique, et la géométrie riemannienne. L'une des façons d'interpréter la formule unidimensionnelle est d'y voir une relation entre le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur le cercle et les longueurs des géodésiques périodiques sur cette courbe. La formule des traces de Selberg, à l'interface de tous les domaines cités plus haut et aussi de l'analyse fonctionnelle, établit une relation du même type, mais au caractère beaucoup plus

profond, entre spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques sur les surfaces à courbure constante négative (tandis que les formules de Poisson en n dimensions sont reliées au Laplacien et aux géodésiques périodiques des tores, espaces de courbure nulle).
Soit f une fonction complexe sur $\mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable ; on suppose que f et ses deux premières dérivées sur $\mathbb{R}$ sont intégrables, et qu'elle satisfait l'estimation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$$

Soit $p > 0$, alors on a l'identité suivante :

$$S(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kp) = \frac{1}{p} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{2k\pi}{p}) e^{2i\pi \frac{kx}{p}}$$

L'identité ci-dessus est appelée formule sommatoire de poisson.
Le membre de gauche de cette identité est la somme d'une série de fonctions continues. L'hypothèse faite sur le comportement de f à l'infini implique que cette série converge normalement sur tout compact $[-p, p]$ de $\mathbb{R}$. Par conséquent, sa somme est une fonction continue, et la formule de définition montre qu'elle est périodique de période p (d'après ce qui précède,Lemme(2.2.1) et Lemme(2.2.2)).

Théorème 3.1.3 *Soit f une fonction intégrable et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, telle que :*

a) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(x+k)$ coverge uniformément sur $[0,1[$.

b) Il existe $x_0 \in [0,1[$, tel que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(x_0+k)$ converge.

Alors, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

Preuve :
La fonction $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(x+k)$ est definie pour tout $x_0 \in [0,1[$.
Comme elle est 1-périodique et comme la convergence de cette serie est uniforme sur $[0,1]$, la serie converge uniformement sur $[0,1]$.
D'apres les propriétés de la convergence uniforme des séries de fonctions , la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

est donc uniformement convergente sur $[0,1]$ et, si l'on note

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k),$$

on a

$$g'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(x+k).$$

Les fonctions g et g' sont continues sur $[0,1]$ et 1-périodiques, donc uniformement continues sur $\mathbb{R}$.
Donc la série de Fourier

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2i\pi kx} \text{ de } g \text{ converge normalement vers } g.$$

Or les coefficients de Fourier de g valent :

$$\begin{aligned} c_k = \int_0^1 g(x)e^{-2i\pi kx}dx &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f(x+m)e^{-2i\pi kx}dx \\ = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_m^{m+1} f(x)e^{-2i\pi kx}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi kx}dx = \widehat{f}(k) \end{aligned}$$

Donc, uniformément sur $\mathbb{R}$ on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{2i\pi kx}$$

En prenant $x = 0$ on obtient la formule annoncée.

Proposition 3.1.1 *La distribution :*

$$T = III = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$$

appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier est

$$\hat{T} = \widehat{III} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\xi} = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$$

est aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Preuve :

La distribution T est 1-périodique, c'est le peigne de Dirac et d'après la proposition(2.5.2), la distribution est tempérée. Montrons que

$$\hat{T} = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$$

La distribution T vérifie $\mathcal{T}_1 T = T$ alors $\widehat{\mathcal{T}_1 T} = e^{i\xi}\cdot\widehat{T} = \widehat{T}$
Ce qui montre que $supp\widehat{T} \subset \text{supp}\left(e^{i\xi}\right) \subset 2\pi\mathbb{Z}$.
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi|_{[\frac{-\pi}{8},\frac{\pi}{8}]} \equiv 1$ et $\text{supp}(\phi) \subset]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$
Alors

$$\hat{T} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(\cdot - 2k\pi)\cdot\widehat{T}$$

D'autre part :

$$0 = \left(e^{i\xi} - 1\right)\cdot\phi(\cdot - 2k\pi)\cdot\widehat{T}$$

$$= (\xi - 2k\pi)\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2k\pi}\phi(\cdot - 2k\pi)\cdot\widehat{T}$$

Ceci montre que :

$$\frac{e^{i\xi}-1}{\xi-2k\pi}\phi(\cdot-2k\pi)\cdot\widehat{T}=C\cdot\delta_{2k\pi}$$

on utilisant le fait que,

$$(x-x_0)^m\,T=0\Rightarrow T=\sum_{k=0}^{m-1}c_k\delta_{x_0}^{(k)}\text{ où }x_0=2k\pi.$$

Ou encore de manière équivalente

$$\phi(\cdot-2k\pi)\cdot\widehat{T}=c_k\delta_{2k\pi},$$

Puisque $\frac{e^{i\xi}-1}{\xi-2k\pi}\longrightarrow i$ lorsque $\xi\longrightarrow 2k\pi$.
On en déduit que

$$\widehat{T}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\delta_{2k\pi}$$

Calculons les coefficients c_k. Observons que $e^{2i\pi x}T=T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, de sorte que d'après : $\widehat{e^{-iax}T}=\tau_a\widehat{T}$, on a $\tau_{2\pi}\widehat{T}=\widehat{T}$, en confrontant cette identité avec la formule

$$\widehat{T}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\delta_{2k\pi},$$

On conclut qu'il existe une constante $c\in\mathbb{C}$ telle que $c_k=c,\forall k\in\mathbb{Z}$.
Autrement dit :

$$\widehat{T}=c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2k\pi}$$

Identifions maintenant la constante c. Pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2k\pi+y)&=<\widehat{T},\varphi(\cdot+y)>\\&=<T,\widehat{\varphi(\cdot+y)}>\\&=<T,e_y\widehat{\varphi}>\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)e^{iky}\end{aligned}$$

où en note $e_y:x\longmapsto e^{ixy}$
Intégrant chaque membre de l'identité ci-dessus par rapport à y sur $[0,2\pi]$ On trouve :

$$\begin{aligned}c\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx&=c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi}\varphi(2k\pi+y)dy\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)\int_0^{2\pi}e^{iky}dy\\&=2\pi\widehat{\varphi}(0)\\&=2\pi\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx\end{aligned}$$

d'où : $c = 2\pi$.

L'interversion intégrale-série se justifie sans difficulté, par exemple par convergence dominé, car les suites $(\widehat{\phi}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ainsi que $(Sup_{y\in[0,2\pi]} \mid \varphi(y+2k\pi)|)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont convergentes puisque $\varphi($ et donc $\widehat{\varphi})$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On peut vérifier facilement que

$$\widehat{T} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\xi},$$

En effet, on a :

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_k\delta$$

d'après le théorème (2.4.1) et par conntinuité de $\mathcal{F}$ on obtient,

$$\widehat{T} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\tau_k\delta} \quad \text{Or :} \quad \widehat{\tau_k\delta} = e^{ik\xi}\widehat{\delta} = e^{ik\xi}$$

d'où :

$$\hat{T} = \widehat{U} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\xi}$$

Et de la bijectivité de $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans lui-même, on conclut que $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Généralisation

1. sur $\mathbb{R}^n$, supposons que si $f \in \mathcal{S}(R^n)$, alors on a :

$$\sum_{v\in\mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{v\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(v)$$

   où $\mathbb{Z}^n$ désigne le réseau des points à coordonnées entières dans $\mathbb{R}^n$
2. Une autre manière d'exprimer la formule sommatoire de Poisson est de dire que la distribution tempérée $\sum_{v\in\mathbb{Z}^n} \delta_v$ est égale à sa propre transformée de Fourier.

Remarques :

a) Dans la résolution des E.D.P, la formule sommatoire de Poisson fournit une justification rigoureuse pour la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

b) La formule sommatoire de Poisson fournit un raccordement entre l'analyse de Fourier sur les espaces euclidiens et sur les tores des dimensions correspondantes.

3.1.3 Formule de Poisson "à pas variable"

soient à nouveau $p > 0$ un nombre réel fixé, $q \geq 1$ un nombre entier, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_q$ une suite de coefficients complexes, et $a_1, a_2, \ldots, a_q$ une suite de nombres réels qu'on pourra, sans diminuer la généralité, supposer tels que

$$0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_q < p$$

Soient $\beta(x)$ la distribution $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \delta\left(x-a_j\right)$, $\alpha(x)$ la distribution p-périodique $\sum_{-\infty}^{\infty} \beta(x-np)$, et posons pour tout $m \in \mathbb{Z}$

$$\hat{\lambda}_m = p^{-1} \sum_{j=1}^{q} \lambda_j e^{-2\pi i m a_j/p} \tag{3.7}$$

Alors :

Théorème 3.1.4 *La distribution périodique α admet le développement de Fourier*

$$\alpha = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}_m e^{2\pi i m x/p} \tag{3.8}$$

Preuve : *Il suffit d'appliquer comme ci-dessus le théorème (3.1.1).*

Corollaire 3.1.2 *Si f est indéfiniment différentiable à support compact contenu dans $[a,b]$, on a la formule sommatoire*

$$\sum_j \sum_n \lambda_j f\left(a_j+np\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}_m \int_a^b f(x) e^{2\pi i m x/p} dx. \tag{3.9}$$

3.2 Noyau de Dirichlet, Interférences et Diffraction

revenons à la formule (3.5) : elle a été démontrée de gauche à droite : approcher du discret par du continu. Il est ce-pendant plus naturel de la lire de droite à gauche : elle admet alors en effet diverses interprétations intuitives donc voici les plus connues :

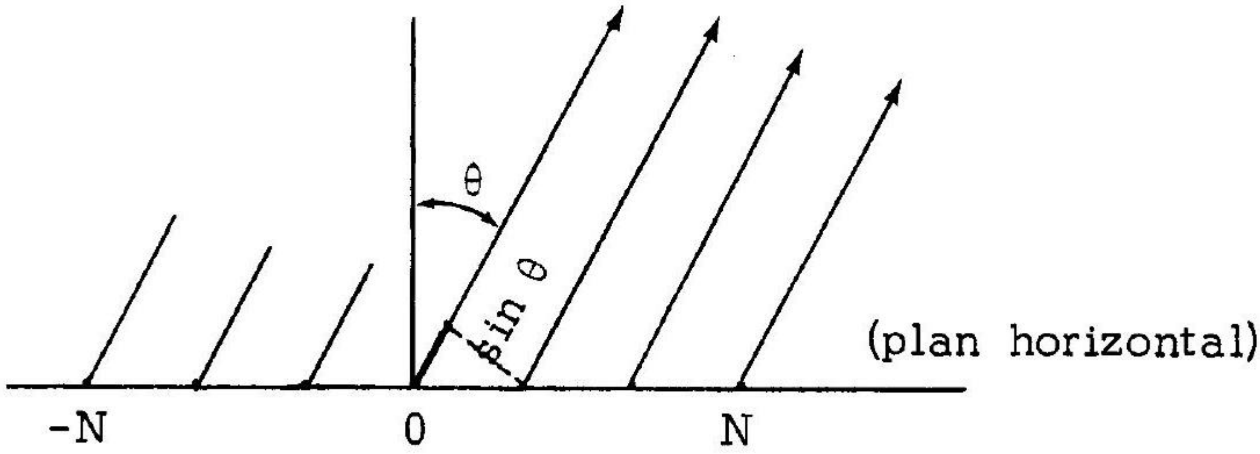
1. **Noyau de Dirichlet :**
   Posons $D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{2\pi i m x}$ .On a $D_N(x) = \sin(2N+1)\pi x/\sin \pi x$; le graphe de $D_N(x)$ présente donc essentiellement un pic de hauteur $2N+1$, de largeur $2/(2N+1)$ et d'aire voisine de 1 en chaque point entier m ; un tel pic est une approximation de $\delta(x-m)$, et on arrive ainsi intuitivement (pour $N \to \infty$) à l'égalité (3.5). Bien entendu, la relation

   $$\lim_{N\to\infty} D_N(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-m) \tag{3.10}$$

   se démontre directement sans difficulté (c'est le lemme central du théorème de Dirichlet sur les séries de Fourier) : on pourrait ainsi. éviter l'utilisation du théorème (3.1.1) .
2. **Interférences, Diffraction :**
   considérons un dispositif radioélectrique du type antenne de télévision formé (par exemple) de $2N+1$ oscillateurs harmoniques verticaux numérotés de $-N$ à N, séparés par une même distance 1 , et émettant en phase avec l'amplitude 1 sur une longueur d'onde λ petite par rapport à 1 . Si T désigne la période, le signal reçu à l'instant t, à l'infini, dans l'azimut θ (voir la figure ci-dessous) est évidemment (à un facteur constant près)

   $$\sum_{m=-N}^{N} e^{2\pi i\left(\frac{t}{T}+\frac{m}{\lambda}\sin\theta\right)} = e^{2\pi i \frac{t}{T}} D_N\left(\frac{\sin\theta}{\lambda}\right).$$

On reçoit donc (cf. Noyau de Dirichlet) un signal de grande amplitude (proportionnelle à $2N+1$) dans les azimuts mesurés en radians par $\theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots$ et un signal pratiquement nul (interférences) dans les zones séparant ces azimuts. Pour $N \to \infty$, on a ainsi une distribution azimutale d'amplitude décrite par le premier membre de (3.5). On laisse au lecteur le plaisir d'interpréter de la meme manière le phénomène optique des franges d'interférence provoqué par le passage d'un faisceau de lumière à travers un réseau plan (diffraction).



3.3 Développement de Fourier des fonctions de Bernoulli périodiques $B_r(x, \lambda)$

On en vient au but essentiel de développer en série de Fourier les $B_r(x, \lambda)$.

$$B_0(x,\lambda) = \hat{\lambda}(0) - \sum_{h=1}^{p} \lambda(h) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-h-mp);$$

d'après (3.5), et par un changement de variable évident (ou directement, par application du théorème (3.1.1))

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-h-mp) = p^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m(x-h)/p};$$

en combinant ces deux résultats, on arrive à

$$B_0(x,\lambda) = \hat{\lambda}(0) - \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^{p} p^{-1} \lambda(h) e^{-2\pi i m h/p} \right) e^{2\pi i m x/p}$$

Ou encore, en remplaçant la parenthèse par $\hat{\lambda}(m)$ et en remarquant que le terme constant disparait (ce qui correspond au fait que $B_0(x, \lambda)$ est de moyenne nulle sur une période)

$$B_0(x,\lambda) = -\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(m) e^{2\pi i m x/p}$$

Par r intégrations (au sens des distributions) et r applications de l'argument de moyenne nulle sur une période, on obtient alors le résultat cherché :

Théorème 3.3.1 *Pour toute suite p-périodique λ et tout entier $r \geq 0$, on a (au sens des distributions)*

$B_r(x,\lambda) = -r! \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(m) \frac{e^{2\pi imx/p}}{(2\pi im/p)^r}$.

(Pour $r \geq 2$, il y a en fait convergence uniforme ; pour $r = 1$, il y a convergence simple.

Bibliographie

[1] JEAN-RENÉ JOLY, Séminaire de théorie des nombres de Grenoble *Université de Grenoble, 1975-1977*

[2] Françoise DEMENGEL,Gilbert DEMENGEL,Mesures et distributions Theorie et illustration par les exemples, distributions, transformations de Fourier, distributions périodiques *Ellipses Édition Marketing S.A., 2000*

[3] Claude Zuily, Eléments de distributions et, D'équations aux dérivées partielles,Cours et problemes résolus *Centre François d'exploitafion du droit de copie (CFC, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris*

[4] Nicolas Bourbakie, Eléments de Mathématique *N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007*

[5] Ahmed Lesfari Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace *Ellipses Édition Marketing S.A., 2012*

[6] Ayman Moussa, Espaces localement convexes, Topologies faibles *Université Pierre et Marie Curie 2014-2015.*

[7] François RODDIER « Distributions et transformation de Fourier » Mac Graw-Hill 1991.

[8] « Distributions. Analyse de Fourier » 2 tomes .Vuibert 1972.

[9] « The Fourier Transform and its applications ». McGraw-Hill New York 65.

[10] Laurent SCHWARTZ «Théorie des distributions » Tomes I et II (Actualités scientifiques et industrielles) Hermann 1959.

[11] Laurent SCHWARTZ, « Méthodes mathématiques pour les sciences physiques » Hermann 1983.

[12] Norbert WIENER «The Fourier Integral and certain of its applications » Cambridge 1933

[13] K.YOSHIDA « Fonctional analysis » Springer-Verlag 1966.

[14] A.PAPOULIS « The Fourier intégral and its applications » Mac Graw-Hill 1962.