الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيـة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمــــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Mathématique et Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Équations différentielles et Modélisation

Thème

Espaces de Sobolev et Applications

Présenté par

ATTAR Ahlem

Devant le jury composé de :

Dr. GAOUAR Soumia	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Présidente
Pr. HAMMOUDI Ahmed	Pr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. TCHOUAR Fatima Zahra	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire : 2022-2023

Dédicaces

À ma très chère mère,

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai jamais te remercier comme il se doit. Ton amour et ton soutien inconditionnel m'ont toujours enveloppé. Ta présence à mes côtés a été ma force pour surmonter les obstacles qui se sont présentés à moi.

À mon très cher père,

Je souhaite que ce travail puisse exprimer toute ma gratitude et mon affection envers toi. Tes conseils m'ont toujours aidée.

À mes très chères sœurs Fatima Zohra et Meriem,

Votre présence dans ma vie a été un cadeau précieux, et je vous suis reconnaissante pour votre soutien constant.

À mes chers amis,

Je tiens à exprimer ma gratitude pour votre aide et votre soutien durant les moments difficiles.

À toute ma famille,

Je vous remercie du fond du cœur pour votre amour, votre soutien et vos encouragements constants.

Et enfin, à tous ceux que j'aime,

Merci pour votre présence et vos encouragements tout au long de ce parcours. Votre amour et votre soutien ont été essentiels pour moi.

Merci à tous !

Remerciements

Ce n'est pas seulement par tradition que cette page se trouve dans ce travail, mais parce que les personnes auxquelles mes remerciements sont adressés les méritent réellement.

Tout d'abord, mes remerciements vont à **Allah** qui m'a donné la force de mener à bien ce travail de recherche.

J'exprime ma profonde gratitude envers mon encadrante, Madame

TCHOUAR Fatima Zahra,
pour son soutien inconditionnel, sa disponibilité, ses conseils précieux, son apport dans le projet et son aide permanente.

Je remercie chaleureusement Madame **Gaouar Soumia**
pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes sincères remerciements vont également à Monsieur **Hammoudi Ahmed** pour avoir accepté d'examiner ce travail. Je lui exprime ici toute ma considération.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les professeurs du Département de Mathématiques et Informatique, ainsi qu'envers le personnel administratif, pour leur précieux soutien et leur contribution à mon parcours académique.

Enfin, je souhaite remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont aidé par leurs conseils, leurs critiques constructives et leurs encouragements.

Merci à vous tous
pour votre contribution et votre soutien précieux.

Table des matières

Introduction

Le concept d'espace de Sobolev est fondamental dans l'étude des fonctions et des phénomènes mathématiques qui impliquent des dérivées. L'idée clé de ces espaces est de considérer des fonctions qui peuvent ne pas être régulières, mais qui possèdent des dérivées généralisées, appelées distributions. Ces espaces généralisent les espaces de fonctions classiques en incluant des fonctions qui présentent des singularités ou des discontinuités.

Lorsque l'on considère des EDP, il n'est pas toujours possible de trouver des solutions "classiques", c'est-à-dire suffisamment régulières pour satisfaire toutes les conditions requises. C'est là que les solutions faibles entrent en jeu et ces espaces fournissent un cadre naturel pour définir et étudier ces solutions faibles.

Dans ce mémoire, on examinera les propriétés fondamentales des espaces de Sobolev, y compris leurs définitions et leurs normes. On verra que les fonctions appartenant aux espaces de Sobolev peuvent être généralement difficiles à manipuler directement. Cependant, il est souvent possible d'approcher ces fonctions par des suites de fonctions classiques, telles que les fonctions à support compact. On explorera aussi des théorèmes importants associés aux espaces de Sobolev, tels que le théorème d'injection, le théorème de compacité et le théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Le mémoire est structuré en trois chapitres afin de fournir une compréhension progressive du sujet. Le premier chapitre présente les préliminaires et les outils mathématiques nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Dans le deuxième chapitre, on aborde les propriétés fondamentales de ces espaces, on examinera en détail leurs propriétés. Les preuves des théorèmes clés sont présentées de manière détaillée pour faciliter la compréhension. Le dernier chapitre se concentre sur l'application pratique des espaces de Sobolev à la résolution des EDP. On offre une brève perspective sur la manière dont les notions développées dans les chapitres précédents peuvent être utilisées pour résoudre les EDP.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces vectoriels normés

Dans cette section, on va présenter quelques notions générales d'analyse fonctionnelle, pour plus de détails, voir [1] et [5].

Définition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace X est une application définie sur X à valeur dans $\mathbb{R}_+$ qui possède les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
2. *Pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.*
3. *Pour tous $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*
   Cette inégalité est appelée inégalité triangulaire.

Définition 1.1.2 *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$ et de la topologie associée à cette norme.*

Proposition 1.1.3 *Si $\|\cdot\|$ est une norme sur X, alors on a*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \text{ pour tous } x, y \in X. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.4 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Une partie A de X est bornée, s'il existe $M > 0$, tel que $\|x\| \leq M$, pour tout $x \in A$.*
2. *Si $r > 0$ et $x_0 \in X$.*

(*i*) *On appelle boule ouverte de centre* x_0 *et de rayon* r *le sous-ensemble de* X *défini par*

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in X,\ \|x - x_0\| < r\}\,,$$

(*ii*) *On appelle boule fermée le sous-ensemble de* X *défini par*

$$\overline{\mathcal{B}}(x_0, r) = \{x \in X,\ \|x - x_0\| \leq r\}\,.$$

Définition 1.1.5 *Si* H *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*, une forme bilinéaire* $(\cdot,\cdot)_H$ *définie sur* $H \times H$ *est appelée produit scalaire sur* H *si pour tout* $x, y, z \in H,\ a, b \in \mathbb{R}$*, on a :*

(*i*) $(x,x)_H \geq 0$ *et* $(x,x)_H = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

(*ii*) $(x,y)_H = (y,x)_H$.

L'application définie par $\|x\|_H = \sqrt{(x,x)_H}$ *est une norme sur* H*. Si de plus* H *muni de cette norme est complet, alors* H *est appelé espace de Hilbert.*

Définition 1.1.6 *Soit* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sur* X *sont dites équivalentes s'ils existent* $\alpha, \beta \geq 0$ *tels que pour tout* $x \in X$*, on ait*

$$\alpha\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\,\|x\|_1\,.$$

Définition 1.1.7 *Soit* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* X*.*

1. *On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente s'il existe* $x \in X$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$*. Autrement dit*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

2. *On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0,\ \forall p, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.8 *Un espace vectoriel normé* $(X, \|\cdot\|)$ *est un espace complet si toute suite de Cauchy de* X *est convergente dans* X*. Un tel espace est appelé espace de Banach.*

Définition 1.1.9 *Soit* $(X, \|\cdot\|_X)$ *et* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *deux espaces vectoriels normés et* u *une application de* $(X, \|\cdot\|_X)$ *dans* $(Y, \|\cdot\|_Y)$*. Soit* $x_0 \in X$*, on dit que* u *a pour limite* l *quand* x *tend vers* x_0*, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x - x_0\|_X \leq \delta \Rightarrow \|u(x) - l\|_Y \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.10 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et u une application de $(X, \|\cdot\|_X)$ dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$.*

1. *u est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \|x - x_0\|_X \leq \delta \Rightarrow \|u(x) - u(x_0)\|_Y \leq \varepsilon.$$

2. *u est continue sur $A \subset X$ si et seulement si u est continue en tout point de A.*

Définition 1.1.11 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un sous-ensemble de X, alors*

1. *On dit que K est compact si et seulement si de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.*
2. *On dit que K est relativement compact si et seulement si de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans X.*

Définition 1.1.12 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et u une application de X dans Y. On dit que u est compact si elle transforme tout borné de X en un ensemble relativement compact de Y.*

Autrement dit, toute suite $(x_n)_{x\in\mathbb{N}}$ bornée de X, admet une sous-suite qui converge vers un élément $x \in Y$.

Définition 1.1.13 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés.*

1. *On dit que X s'injecte continûment dans Y et on note $X \hookrightarrow Y$, si X est un sous-espace vectoriel de Y et s'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|x\|_Y \leq C\, \|x\|_X\,,\ \textit{pour tout } x \in X$$

2. *On dit que l'injection $X \hookrightarrow Y$ est compacte si tout borné de X est un ensemble relativement compact de Y.*
   Autrement dit, si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de X, admet une sous-suite $(u_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans Y.

Définition 1.1.14 *On appelle dual topologique de l'espace normé $(X, \|\cdot\|)$, l'espace X' des formes linéaires continues de X dans $\mathbb{K}$.*

Théorème 1.1.15 *L'espace dual X' muni de la norme $\|\cdot\|_{X'}$ définie par*

$$\|\varphi\|_{X'} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle \varphi, x\rangle|}{\|x\|},$$

est un espace de Banach.

Soit X un espace de Banach, X' son dual et X'' son bidual, c'est-à-dire le dual de X'. On a une injection canonique

$$\begin{array}{rccc} J: & X & \longrightarrow & X'' \\ & x & \mapsto & Jx \end{array}$$

définie par

$$\begin{array}{rccc} Jx: & X' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \langle Jx, u\rangle = \langle u, x\rangle \end{array}$$

Définition 1.1.16 *Soit X un espace de Banach et J l'injection canonique de X dans X''. On dit que X est réflexif si $J(X) = X''$.*

Lorsque X est réflexif, on identifie X et X'' implicitement à l'aide de l'isomorphisme J.

Proposition 1.1.17 *Soit X un espace de Banach réflexif et $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors M, muni de la norme induite par X, est réflexif.*

Définition 1.1.18 *On dit qu'un espace normé est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.*

Proposition 1.1.19 *Soit X un espace normé séparable et Y un sous-ensemble de X. Alors Y est séparable.*

Proposition 1.1.20 *Le produit d'espaces vectoriels séparables, (resp. réflexifs) est encore un espace séparable, (resp. réflexif).*

1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx et p, p' deux réels de $[1, \infty]$. On dit que p et p' sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour plus de détails, voir [1] et [5].

Définition 1.2.1

1. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont mesurables sauf sur un sous-ensemble de Ω de mesure nulle et telle que $\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty$.*
2. *Pour $p = \infty$, l'espace $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont mesurables sauf sur un sous-ensemble de Ω de mesure nulle et telle qu'il existe $C > 0$, $|u(x)| < C$ pour presque tout $x \in \Omega$.*

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme l'ensemble quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout sur Ω, c'est-à-dire c'est l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation . Par abus de notation, on utilisera le même symbole pour une fonction u et pour sa classe d'équivalence.

Pour $u \in L^p(\Omega)$, on note

$$\|u\|_p := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

où sup désigne la borne supérieure essentielle.

L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables (modulo l'égalité presque-partout) qui sont intégrables sur tout compact de Ω, autrement dit

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \ \int_K |u(x)| \, dx < \infty, \ K \subset \Omega \text{ compact} \right\}.$$

Théorème 1.2.2 *L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

On résume quelques résultats concernant les espaces $L^p(\Omega)$ qui seront utilisés dans la suite.

Proposition 1.2.3

1. *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.*
2. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Théorème 1.2.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ tels que p et p' sont conjugués.*

1. *Si $u \in L^p(\Omega), v \in L^{p'}(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et*
$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$$
Cette inégalité est appelée inégalité de Hölder.
2. *Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $u \in L^r(\Omega)$, pour $r \in [p, q]$ et*
$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha}$$
avec $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p'}$ pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$.

3. *Si* $|\Omega| < \infty$ *et* $u \in L^q(\Omega)$, *alors* $u \in L^p(\Omega)$ *et*
$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q$$
En particulier $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, *pour* $1 \leq p \leq q < \infty$.

Proposition 1.2.5 (Inégalité de Jensen) *Si* $u \in L^1(\Omega)$ *et si* ϕ *est une fonction convexe définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$. *Alors*
$$\phi\left(\int_\Omega u(x)\,dx\right) \leq \int_\Omega \phi(u(x))\,dx.$$

Proposition 1.2.6 *[6] Soit* Ω *et* Ω' *des ouverts bornés,* γ *une fonction définie sur* Ω' *à valeurs dans* Ω, *continue et bijective. Si* γ^{-1} *est une fonction lipschitzienne, alors pour tout* $u \in L^p(\Omega)$, $u \circ \gamma \in L^p(\Omega')$ *et il existe une constante* $C > 0$ *telle que*
$$\|u \circ \gamma\|_{L^p(\Omega')} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

On rappelle un critère de compacité pour les fonctions de $L^p(\Omega)$, c'est le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Théorème 1.2.7 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$ *et* $\mathcal{F}$ *un sous ensemble borné de* $L^p(\Omega)$. *Si* ω *est un sous-ensemble ouvert d'adhérence compacte dans* Ω *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\delta < d(\omega, \partial\Omega)$ *de sorte que pour tout* $h \in \mathbb{R}^N$ *où* $|h| < \delta$ *et* $u \in \mathcal{F}$, *on a*
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \text{ et } \|u\|_{L^p(\Omega \backslash \overline{\omega})} < \varepsilon.$$
Alors $\mathcal{F}$ *est relativement compact dans* $L^p(\omega)$.
En prolongeant u *par* 0 *hors de* Ω, *on peut remplacer* ω *par* Ω *dans la première condition.*

Rappelons le dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.2.8 (Représentation de Riesz) *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et* $1 < p' \leq \infty$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Pour toute forme linéaire continue* ϕ *sur* $L^p(\Omega)$, *il existe un unique* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *telle que*
$$\phi(u) = \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx \text{ pour tout } u \in L^p(\Omega).$$
De plus, on a $\|v\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p)'}$.

Ce théorème est trés important et permet d'identifier le dual de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$, c'est-à-dire
$$(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega).$$

1.3 Espaces des fonctions régulières

Dans cette section, on va rappeler quelques définitions et notations qui concernent les espaces des fonctions régulières. Pour plus de détails, voir [1].

On va désigner par Ω un ouvert non vide de l'espace $\mathbb{R}^N$. Un point de $\mathbb{R}^N$ est noté généralement par $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$, sa norme est définie par $|x| = \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Le produit scalaire de deux points x et y dans $\mathbb{R}^N$ est donné par $x \cdot y = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, où α_j sont des entiers non négatives, alors α est appelé un multi-indice, sa longueur est donnée par $|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$ et on note par $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}$.

Si α et β sont deux multi-indices, on dit que $\beta \leq \alpha$ si $\beta_j \leq \alpha_j$ pour tout $1 \leq j \leq N$. La somme de α et β est définie par

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_N + \beta_N).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ dont les dérivées partielles d'ordre $\leq m$ existent et sont continues. $\mathcal{C}^0(\Omega)$ est également désigné par $\mathcal{C}(\Omega)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ avec $|\alpha| \leq m$, on note aussi

$$\mathrm{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

où $D^{(0,\cdots,0)} u = u$.

Si Ω est un compact de $\mathbb{R}^N$, on sait que toute fonction u continue sur Ω est bornée et atteint ses bornes, ce qui permet de définir la norme uniforme de la fonction u en posant

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Muni de cette norme, $\mathcal{C}(\Omega)$ est un espace de Banach.

On note par $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ l'espace vectoriel des éléments de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont bornées sur Ω. Cet espace muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}_b^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\mathrm{D}^\alpha u(x)|.$$

est un espace de Banach.

On note par $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ l'intersection de tous les espaces $\mathcal{C}^{m}(\Omega)$, c'est l'espace des fonctions qui sont indéfiniment dérivables et continues.

Pour $\alpha \in]0,1]$, une fonction $u \in L^{\infty}(\Omega)$ est dite fonction de Hölder d'exposant α ou α-höldérienne, si elle vérifie

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha} \text{ pour tous } x, y \in \Omega \tag{1.2}$$

On note par $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions α-höldériennes sur Ω. Cet espace muni de la norme définie par

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} = \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

est un espace de Banach.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note par $\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^{m}(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont des fonctions α-höldériennes sur Ω.

Proposition 1.3.1 *Si $u, v \in C^{m}(\Omega)$, alors $uv \in C^{m}(\Omega)$ et on a la formule de Leibniz suivante*

$$\mathrm{D}^{\alpha}(uv) = \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \mathrm{D}^{\gamma}u\ \mathrm{D}^{\alpha}v$$

où $\binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}$.

Si $u \in C^{1}(\Omega)$, on note ∇u le gradient de la fonction u défini par le vecteur

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq N}.$$

On présente ci-dessous l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 1.3.2 *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^{N}$ et u une fonction de $\mathcal{C}^{1}(\Omega)$. On a alors pour tous $x, y \in \Omega$*

$$|u(x)-u(y)| \leq |\nabla u((1-c)\,x + cy)|\ \ |x-y|\,,\ \ c \in \,]0,1[\,.$$

Rappelons un résultat d'intégration par partie sur $\mathbb{R}^{N}$, sachant que la mesure de la boule est donnée par

$$|\mathcal{B}(0,r)| = \omega_N r^N \text{ avec } \omega_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\gamma(\frac{N}{2}+1)}$$

où γ est la fonction gamma.

Proposition 1.3.3 *Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors*

1. $$\int_{B(0,r)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x)dx = \int_{S_{N-1}(r)} u(x)v(x)\frac{x_i}{r}d\sigma_r - \int_{B_N(r)} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx.$$
   où $\frac{x_i}{r}$ est le vecteur normal extérieur de $S_{N-1}(r)$.
2. $$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\vartheta_i d\sigma - \int_{\Omega} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx.$$
   où ϑ_i est le vecteur normal extérieur.

Rappelons quelques résultats utiles.

Définition 1.3.4 *Une partie H de $\mathcal{C}(\Omega)$ est dite équicontinue en un point x_0 de Ω si elle satisfait la condition suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{x_0} > 0,\ \forall x \in \Omega,\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow \forall h \in H,\ |h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.3.5 (Ascoli-Arzela.) *Soit Ω un compact de $\mathbb{R}^N$. Une partie H de $\mathcal{C}(\Omega)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\Omega)$ si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue.*

Si u est une fonction définie sur Ω, on définit le support de u par

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}\ .$$

Définition 1.3.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une collection d'ouverts de $\mathbb{R}^N$, I étant un ensemble d'indices. On dit que $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de Ω si $\Omega \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.*

Si I contient un nombre fini d'indices, alors ce recouvrement ouvert est dit recouvrement fini. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on utilisera dans ce qui suit un recouvrement par certaine famille d'ouverts à laquelle on peut lui associer une famille de fonctions dite partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, comme ceci est mentionné dans le théorèrme suivant, voir [1].

Théorème 1.3.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^N$ qui recouvre Ω. Alors, il existe une famille de fonctions $(\varphi_i)_{i\in I} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout i et $x \in \mathbb{R}^N$, $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$.*
2. *Sur tout compact K de Ω, toutes les fonctions φ_i sauf un nombre fini s'annulent identiquement sur K.*
3. *Pour tout i, il existe Ω_i tel que $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset \Omega_i$.*
4. *Pour tout $x \in \Omega$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i\left(x\right) = 1$.*

Introduisons la définition d'une suite régularisante.

Définition 1.3.8 *On appelle suite régularisante sur $\mathbb{R}^N$, toute suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ qui vérifie :*

1. $\rho_\varepsilon(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall \varepsilon > 0$.
2. $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{\mathcal{B}(0,\varepsilon)}$.
3. $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$.

Pour construire un exemple de suite régularisante, on utilise la fonction définie par

$$\rho\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} k\ e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{si} & |x| < 1 \\ 0 & \text{si} & |x| \geq 1 \end{array} \right. .$$

On a bien $\rho \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\rho(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \operatorname{supp}(\rho) \subset \overline{\mathcal{B}\left(0,1\right)}$ et on peut choisir k de façon à avoir la condition $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx = 1$. Ainsi si on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho(\frac{x}{\varepsilon}),\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } \varepsilon > 0,$$

alors on peut vérifier que cette suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bien une suite régularisante.

Corollaire 1.3.9 *Soit $p \geq 1$, $u \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $v \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto u(x-y)v(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.*
2. *La fonction $u * v \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$, où*

$$\left(u * v\right)\left(x\right) := \int_{\mathbb{R}^N} u\left(y\right) v\left(x-y\right) dy = \left(v * u\right)\left(x\right).$$

On a aussi

$$\left\|u * v\right\|_p \leq \left\|u\right\|_1 \left\|v\right\|_p.$$

On note par $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ à support compact.

Théorème 1.3.10 *Soit $u \in \mathcal{C}_0^m\left(\mathbb{R}^N\right)$, $v \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et α un multi-indice tel que $|\alpha| \leq m$. Alors*

1. $u * v \in \mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $\mathrm{D}^{\alpha}(u * v) = (\mathrm{D}^{\alpha} u) * v$
2. *si* $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $v \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *alors* $u * v \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
3. *Si* $u \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $k \geq 1$, *alors* $\rho_k * u \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $\mathrm{D}^{\alpha}(\rho_k * u) = (\mathrm{D}^{\alpha}\rho_k) * u$.

Corollaire 1.3.11 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et u une fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ qui s'annule identiquement en dehors de Ω. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *Si* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *alors* $\rho_k * u \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
2. *Si de plus* $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, *alors* $\rho_k * u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *pour* $\varepsilon < d(\operatorname{supp} u, \partial\Omega)$.
3. *Si* $u \in L^p(\Omega)$ *avec* $1 \leq p < \infty$, *alors* $\rho_k * u \in L^p(\Omega)$. *De plus*

$$\left\|\rho_k * u\right\|_p \leq \|u\|_p \ \text{ et } \lim_{k \to \infty} \left\|\rho_k * u - u\right\|_p = 0. \tag{1.3}$$

4. *Si* $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ *et* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *alors* $\lim_{k\to\infty} \rho_k * u(x) = u(x)$ *uniformément sur* Ω'.
5. $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$, *pour* $1 \leq p < \infty$.

1.4 Espaces des distributions

Les espaces de Sobolev requièrent quelques notions clés et techniques de la théorie des distributions de Schwartz. Sans trop de détails, nous introduirons le concept de dérivée au sens des distributions ou faible ainsi que les espaces de distributions. Pour plus de détails, voir [1]

Définition 1.4.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est dite convergente au sens de l'espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ vers la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Il existe* $K \subset\subset \Omega$ *tel que* $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathrm{D}^{\alpha}\varphi_n(x) = \mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x)$ *uniformément sur* K, *pour tout multi-indice* α, *c'est-à-dire*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in K} \left|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi_n(x) - \mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x)\right| = 0.$$

Définition 1.4.2 *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie la propriété de continuité suivante :*
Pour tout compact K de Ω , il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$, tels que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ où $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq l \leq k} \sup_{x \in K} \left| \varphi^{(l)}(x) \right| .$$

L'espace des distributions, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 1.4.3 *Pour tout $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, il existe une distribution $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

On identifie dans la suite une fonction u de $L^1_{loc}(\Omega)$ et sa distribution associée T_u.

Proposition 1.4.4 *Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $u = 0$ sur Ω.*

Vu que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'annule identiquement en dehors d'un sous-ensemble compact de Ω, il est clair, grâce à une intégration par parties, que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ la relation suivante est vérifiée :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, u(x)\, dx, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N.$$

De même, pour tout multi-indice α, par intégration par parties $|\alpha|$-fois on a

$$\int_\Omega \varphi(x)\, \mathrm{D}^\alpha u(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\, \mathrm{D}^\alpha \varphi(x)\, dx.$$

Ces résultats motivent ainsi la définition de la dérivée partielle au sens des distributions, appelée également dérivée faible.

Définition 1.4.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et α un multi-indice. On dit que u admet une dérivée partielle au sens des distributions d'ordre α, s'il existe une fonction $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$T_{v_\alpha} = \mathrm{D}^\alpha (T_u)$$

En d'autres termes, $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la α-ième dérivée partielle au sens des distributions de u si

$$\int_\Omega v_\alpha(x)\, \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\, \mathrm{D}^\alpha \varphi(x)\, dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

On note alors $\mathrm{D}^\alpha u = v_\alpha$.

Chapitre 2

Espaces de Sobolev

2.1 Définitions et propriétés

On présente ici quelques notions de la théorie des espaces de Sobolev. De nombreux ouvrages sont consacrés à cette théorie. Consulter [1, 6, 7].

Tout au long de ce chapitre, on désigne par m un entier positif.

Définition 2.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ et m un entier positif, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que pour tout multi-indice α où $1 \leq |\alpha| \leq m$, les dérivées faibles $\mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Autrement dit,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq m,\ \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Remarque 2.1.2
1. *Si $m = 0$, on a clairement $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.*
2. *Si $m = 2$, on note souvent l'espace de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$.*

Proposition 2.1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour $1 \leq p \leq \infty$, l'application $\|\cdot\|_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p & si \quad 1 \leq p < \infty \\ \\ \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_\infty & si \qquad p = \infty \end{cases} \tag{2.1}$$

est une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$.

Preuve. On utilise le fait que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega)$. En effet, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$, on a :

1. $\|\lambda u\|_{m,p} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha(\lambda u)\|_p = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} |\lambda| \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p = |\lambda| \|u\|_{m,p}$.
2. $\|u\|_{m,p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p = 0 \Leftrightarrow \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p = 0,\ \forall\ 0 \leq |\alpha| \leq m$, donc pour $\alpha = 0$, on aura $\|u\|_p = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
3. $$\begin{aligned} \|u+v\|_{m,p} &= \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha u + \mathrm{D}^\alpha v\|_p \\ &\leq \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p + \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha v\|_p \leq \|u\|_{m,p} + \|v\|_{m,p}. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour $1 \leq p < \infty$, l'application $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ définie sur $W^{m,p}(\Omega)$ par*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{m,p}$.

Preuve. L'équivalence des deux normes se traduit par l'existence de deux réels C_1 et C_2 strictement positifs tels que :

$$C_1 \|u\|_{W^{m,p}} \leq \|u\|_{m,p} \leq C_2 \|u\|_{W^{m,p}},\ \forall u \in W^{m,p}(\ \Omega).$$

Pour $u \in W^{m,p}(\ \Omega)$, on a

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p^p \leq \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p \right)^p$$

donc $\|u\|_{W^{m,p}} \leq \|u\|_{m,p}$.
D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder pour la somme qui dit que pour tous $p, q > 1$ des nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et pour tous réels positifs a_i, b_i, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

on obtient,

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} \|\mathrm{D}^{\alpha} u\|_p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathrm{D}^{\alpha} u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}}.$$

Finalement, $\|u\|_{W^{m,p}} \leq \|u\|_{m,p} \leq n^{\frac{1}{q}} \|u\|_{W^{m,p}}, \ \forall u \in W^{m,p}(\ \Omega)$. ■

Théorème 2.1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall l, n \geq n_0, \ \|u_n - u_l\|_{m,p} = \sum\nolimits_{|\alpha|=0}^{m} \|\mathrm{D}^{\alpha} u_n - \mathrm{D}^{\alpha} u_l\|_p \leq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $0 \leq |\alpha| \leq m$, on a $\|\mathrm{D}^{\alpha} u_n - \mathrm{D}^{\alpha} u_l\|_p \leq \varepsilon$. Donc pour tout multi-indice α d'ordre $\leq m$, la suite $(\mathrm{D}^{\alpha} u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $L^p(\Omega)$. Par conséquent, la suite $(\mathrm{D}^{\alpha} u_n)_n$ converge dans cet espace, autrement dit, ils existent $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\|u_n - u\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } \|\mathrm{D}^{\alpha} u_n - v_\alpha\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0, \ \forall 1 \leq |\alpha| \leq m.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $v_\alpha = \mathrm{D}^{\alpha} u$ pour tout $1 \leq |\alpha| \leq m$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(x)\mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x)dx &= \int_\Omega (u(x) - u_n(x))\mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x) + \int_\Omega u_n(x)\mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x)dx. \\ &= \int_\Omega (u(x) - u_n(x))\mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x) + \qquad (2.2) \\ &\quad (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \mathrm{D}^{\alpha} u_n(x)\varphi(x)dx. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega |u(x) - u_n(x)| \, |\mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x)| \, dx \leq \|u - u_n\|_p \, \|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi\|_q \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

où q est le conjugué de p. D'autre part, on a

$$\int_\Omega |\mathrm{D}^{\alpha} u_n(x) - v_\alpha(x)| \, |\varphi(x)| \, dx \leq \|\mathrm{D}^{\alpha} u_n - v_\alpha\|_p \, \|\varphi\|_q \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Finalement, en passant à la limite dans (2.2), on aura

$$\int_\Omega u(x)\mathrm{D}^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha(x)\varphi(x)dx.$$

c'est-à-dire $\mathrm{D}^\alpha u = v_\alpha \in L^p(\Omega)$, pour tout $1 \leq |\alpha| \leq m$ et donc $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans u dans $W^{m,p}(\Omega)$. ∎

Proposition 2.1.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*

$$\langle u,v\rangle_m = \sum_{|\alpha|=0}^{m}\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u(x)\mathrm{D}^\alpha v(x)dx, \ \textit{pour tous } u,v \in H^m(\Omega).$$

Preuve. On vérifie les trois propriétés d'un produit scalaire. En effet, il est évident que $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ est bilinéaire et symétrique et pour $u \in H^m(\Omega)$, on a

$$\langle u,u\rangle_m = \sum_{|\alpha|=0}^{m}\int_\Omega (\mathrm{D}^\alpha u(x))^2 dx > 0$$

et

$$\langle u,u\rangle_m = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega (\mathrm{D}^\alpha u(x))^2 dx = 0 \Leftrightarrow \mathrm{D}^\alpha u(x)^2 = 0,$$

pour tout multi-indice α, ainsi $u = 0$.

Finalement, $W^{m,2}(\Omega)$ est complet et muni d'un produit scalaire donc c'est un espace de Hilbert. ∎

Proposition 2.1.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

1. *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.*
2. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable .*

Preuve. Soit $1 \leq p < \infty$, notons par d le nombre multi-indice α qui satisfait $0 \leq |\alpha| \leq m$ et par $L^p_d = \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_{d \text{ fois}}$, c'est un espace fonctionnel muni de la norme définie par :

$$\|u\|_{L^p_d} = \sum_{i=1}^{d}\|u_i\|_p, \ \forall u = (u_i)_{1\leq i\leq d} \subset L^p_d(\Omega).$$

Considérons l'application P linéaire définie comme suit :

$$P: \begin{array}{ccc} W^{m,p}(\Omega) & \to & L_d^p(\Omega) \\ u & \mapsto & Pu = (\mathrm{D}^\alpha u)_{0\le|\alpha|\le m} \end{array}$$

Pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$, on a

$$\|Pu\|_{L_d^p} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p = \|u\|_{m,p},$$

c'est-à-dire P est une isométrie et de plus elle est surjective, donc bijective.

1. Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réfléxif, donc $L_d^p(\Omega)$ étant le produit de ces espaces, est aussi réflexif.
   On sait que $W^{m,p}(\Omega)$ est complet, donc $P(W^{m,p}(\Omega))$ est fermé parce que c'est l'image d'un complet par une isométrie. Ainsi $P(W^{m,p}(\Omega))$ est réflexif car c'est un sous-ensemble fermé d'un réflexif $L_d^p(\Omega)$. Finalement, P est une isométrie surjective de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $P(W^{m,p}(\Omega))$ qui est réflexif, par un résultat d'analyse, on conclut que $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.
2. Pour $1 \le p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable, donc $L_d^p(\Omega)$ étant le produit de ces espaces, est aussi séparable. Par conséquent, $P(W^{m,p}(\Omega)) \subset L_d^p(\Omega)$ est séparable. En utilisant la définition d'un ensemble séparable, on peut trouver une partie A de $P(W^{m,p}(\Omega))$ qui est dénombrable et dense.
   Prenons $u \in W^{m,p}(\Omega)$, ainsi il existe $(u_n)_n \subset A$ telle que $\|u_n - Pu\|_{L_d^p} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   D'autre part, pour tout n, $u_n = P(P^{-1}(u_n)) \in A$, c'est-à-dire, $P^{-1}(u_n) \in P^{-1}(A)$ et

   $$\lim_{n\to\infty} \|P^{-1}(u_n) - u\|_{m,p} = \lim_{n\to\infty} \|P\left(P^{-1}(u_n)\right) - Pu\|_{L_d^p} = \|u_n - Pu\|_{L_d^p} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

   Autrement dit, $P^{-1}(A)$, qui est dénombrable comme image réciproque d'un ensemble dénombrable par une application bijective, est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, ce qui implique que $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.

■

2.2 Approximation par des fonctions régulières

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats de densité parce que travailler sur les fonctions $W^{m,p}(\Omega)$ et leurs dérivées au sens des distributions est souvent difficile. Ainsi dans les preuves, il est toujours pratique de se ramener aux fonctions régulières et de passer ensuite à la limite. Ces résultats dépendent de l'ouvert Ω.

Proposition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$, alors le sous-espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Preuve. Pour la preuve, on va distinguer le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.

- Pour le premier cas, considérons $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite régularisante introduite dans la définition (1.3.8). D'après le théorème (1.3.10), pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\rho_\varepsilon * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ et } \mathrm{D}^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = \rho_\varepsilon * \mathrm{D}^\alpha u,$$
et pour tout $0 \leq |\alpha| \leq m$,
$$(\mathrm{D}^\alpha u - \rho_\varepsilon * \mathrm{D}^\alpha u) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \text{ dans } L^p(\Omega).$$
On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon * u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et $(\rho_\varepsilon * u)_\varepsilon$ converge vers u dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.
- Passons maintenant au cas $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, pour cela, considérons $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un recouvrement ouvert de Ω défini comme suit :
$$\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset \text{ et } \Omega_i = \left\{ x \in \Omega,\ |x| \leq i \text{ et } d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i+1} \right\},\ \forall i \geq 1.$$
On a bien pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$ et $\Omega \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \Omega_i$. On définit ensuite la suite d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par
$$\mathcal{O}_0 = \Omega_2,\quad \mathcal{O}_1 = \Omega_3 \text{ et } \mathcal{O}_i = \Omega_{i+2} \backslash \overline{\Omega_{i-1}},\ i \geq 2\ .$$
On a encore
$$\Omega \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{O}i \text{ et } \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_{i'} = \emptyset \text{ si } |i - i'| \geq 3.$$
En utilisant le théorème (1.3.7), on trouvera la partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ du recouvrement $(\mathcal{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
Soit à présent $\varepsilon > 0$ et puisque $\varphi_i u \in W^{m,p}(\Omega)$, on peut choisir ε_i assez petit pour que,
$$\mathcal{O}_i + \mathcal{B}(0, \varepsilon_i) \subset \mathcal{O}_{i-1} \cup \mathcal{O}_i \cup \mathcal{O}_{i+1},\ \forall i \geq 2$$
et
$$\|\rho_{\varepsilon_i} * \varphi_i u - \varphi_i u\|_{m,p} < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},\ \forall i \geq 0.$$

Posons ensuite,

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} (\rho_{\varepsilon_i} * (\varphi_i u)),$$

cette somme est bien définie car par le théorème 1.3.7-(2) , seuls un nombre fini de termes est non nul. De plus, par les propriétés de la convolution, on déduit que $w \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ et $w \in W^{m,p}(\Omega)$. D'autre part, puisque $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i = 1$ sur Ω, on peut alors écrire, $u = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i u$, dans ce cas, on aura

$$\begin{aligned} \|w-u\|_{m,p} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\rho_{\varepsilon_i} * \varphi_i u - \varphi_i u\|_{m,p} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Finalement, on a trouvé une fonction $w \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{m,p}(\Omega)$, ce qui montre la densité.

■

De ce théorème, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ et q son conjugué.*

1. *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,q}(\Omega)$, alors $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq N$,*

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

2. *Pour $1 < p < \infty$, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $|u|^p \in W^{1,1}(\Omega)$, $|u|^{p-1} u \in W^{1,1}(\Omega)$, et pour tout $1 \leq i \leq N$,*

$$\frac{\partial |u|^p}{\partial x_i} = p\,|u|^{p-2}\, u \frac{\partial u}{\partial x_i} \;\; et \;\; \frac{\partial \left(|u|^{p-1} u\right)}{\partial x_i} = p\,|u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Preuve.

1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors par la Proposition précédente, on peut trouver une suite $(u_n)_n \subset \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\|u_n v - uv\|_1 = \int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|\;\; |v(x)|\, dx \leq \|u_n - u\|_p \, \|v\|_q \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $(u_n v)_n$ converge vers uv dans $L^1(\Omega)$. Passons à la dérivée, v étant une distribution, on peut la multiplier par fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on aura alors

$$\frac{\partial (u_n v)}{\partial x_i} = u_n \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \text{ pour tout } 1 \le i \le n.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\, v(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\, v(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(u_n(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) + v(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right) \varphi(x)\, dx\end{aligned}$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, on montre que $(u_n \frac{\partial v}{\partial x_i})_n$ converge vers $u \frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $L^1(\Omega)$ et $(v \frac{\partial u_n}{\partial x_i})_n$ converge vers $v \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^1(\Omega)$, on obtient alors

$$\int_\Omega u(x)\, v(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) + v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \varphi(x)\, dx$$

Finalement, $\dfrac{\partial (uv)}{\partial x_i} = u \dfrac{\partial v}{\partial x_i} + v \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$.

2. Pour montrer que $|u|^p \in W^{1,1}(\Omega)$, on montre que $|u|^p \in L^1(\Omega)$ ce qui est évident et $\dfrac{\partial |u|^p}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$.
   Comme précédement, on peut trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, et on montre que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(|u_n|^p)$ converge vers $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(|u|^p)$ où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_n|^p) = p|u_n|^{p-2} u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i}.$$

■

Plusieurs propriétés des espaces de Sobolev s'obtiennent plus facilement dans le cas d'un domaine sans bord, comme l'espace entier. La propriété suivante simplifie beaucoup l'analyse des espaces $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 2.2.3 *Pour $1 \le p < \infty$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Preuve. On a un résultat d'analyse qui nous permet de construire une fonction θ de $\mathcal{D}(\mathcal{B}(0,2))$ à valeur dans $[0,1]$ et qui est égale à 1 sur $\mathcal{B}(0,1)$, posons

$$\theta_n(x) = \theta(\frac{x}{n}),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n(x) = \theta_n(x)u(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|1-\theta\left(\frac{x}{n}\right)\right|^p |u(x)|^p\,dx \\ &= \int_{|x|\geq n} \left|1-\theta\left(\frac{x}{n}\right)\right|^p |u(x)|^p\,dx \\ &\leq 2^p \int_{|x|\geq n} |u(x)|^p\,dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Passons maintenant à la dérivée, en utilisant la formule de Leibniz, on aura

$$\mathrm{D}^\alpha u_n = \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{1}{n^{|\beta|}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\theta\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{D}^\alpha u\,(x)\,.$$

Ecrivons

$$\|\mathrm{D}^\alpha u_n - \mathrm{D}^\alpha u\|_p \leq \|\mathrm{D}^\alpha\left(\theta_n u\right) - \theta_n \mathrm{D}^\alpha u\|_p + \|\theta_n \mathrm{D}^\alpha u_n - \mathrm{D}^\alpha u\|_p\,.$$

D'une part

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}^\alpha\left(\theta_n u\right) - \theta_n \mathrm{D}^\alpha u\|_p^p &\leq \sum_{0<\beta\leq\alpha} \frac{1}{n^{|\beta|p}} \binom{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \left|D^\beta\theta\left(\frac{x}{n}\right)\right|^p |\mathrm{D}^\alpha u(x)|^p\,dx \\ &\leq \sum_{0<\beta\leq\alpha} \frac{1}{n^{|\beta|p}} \binom{\alpha}{\beta} \left\|D^\beta\theta\right\|_\infty^p \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant les mêmes arguments plus haut, on montre que

$$\|\theta_n \mathrm{D}^\alpha u_n - \mathrm{D}^\alpha u\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ensuite considérons $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la suite régularisante introduite dans la définition (1.3.8) et posons

$$v_n = \rho_n * (\theta_n u),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant les propriétés de ρ_n et de la convolution, on vérifie aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et converge vers u dans $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. ■

Cette proposition est fausse si on remplace $\mathbb{R}^N$ par un ouvert quelconque Ω. Ceci va justifier l'introduction de la définition suivante.

Définition 2.2.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$.*

En tenant compte de la proposition (2.2.3), on aura

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) = W_0^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

On va donner maintenant une caractérisation de $W^{1,p}(\Omega)$ en utilisant l'opérateur de translation, cette caractérisation est démontrée à l'aide des résultats de densité.

On écrit $\omega \subset\subset \Omega$ et on dit que ω est fortement inclus dans Ω si

$$\overline{\omega} \text{ est compact et } \overline{\omega} \subset \Omega.$$

Rappelons d'abord que si u est une fonction définie sur Ω, $\omega \subset\subset \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $|h| \leq d(\omega, \partial\Omega)$, alors $\tau_h u$ est la fonction définie par

$$\tau_h u(x) = u(x+h), \text{ pour tout } x \in \omega.$$

Théorème 2.2.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$u \in W^{1,p}(\Omega)$.*
2. *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $|h| \leq d(\omega, \partial\Omega)$, on a*
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C\,|h|. \tag{2.4}$$

Preuve.

1. Commençons par montrer la première implication.
   Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors par la Proposition 2.2.1, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ qui converge vers u.
   Pour $x, h \in \mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\partial}{\partial t}(u_n(x+th)) = \nabla u_n(x+th) \cdot h$, donc
$$\tau_h u_n(x) - u_n(x) = u_n(x+h) - u_n(x) = \int_0^1 \nabla u_n(x+th) \cdot h\, dt$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Jensen (1.2.5), on trouve

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 |\nabla u_n(x+th)\cdot h\ |\,dt\right)^p &\leq \int_0^1 |\nabla u_n(x+th)\cdot h\ |^p\,dt \\ &\leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u_n(x+th)|^p\,dt\end{aligned}$$

Puisque $|h| < d(\omega, \partial\Omega)$, alors on peut affirmer que $\omega + th \subset \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, donc en intégrant sur ω et en appliquant Fubini, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\omega |\tau_h u_n(x) - u_n(x)|^p\,dx &\leq |h|^p \int_0^1 \int_\omega |\nabla u_n(x+th)|^p\,dxdt \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \int_{\omega+th} |\nabla u_n(x)|^p\ dxdt \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^p\ dxdt \\ &\leq |h|^p \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p.\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\omega)} \leq |h| \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}$. Finalement,

$$\begin{aligned}\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} &\leq \|\tau_h u - \tau_h u_n\|_{L^p(\omega)} + \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\omega)} + \|u_n - u\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq \|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} + |h| \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|u - u_n\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

et en passant à la limite, on obtient le résultat,

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq |h| \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

2. A présent, on démontre la seconde implication.
   Supposons que $u \in L^p(\Omega)$ et l'inégalité (2.4) est vérifiée, on va montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq N$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc supp φ est compact et on peut trouver un ouvert ω tel que supp $\varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et e_i le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Par hypothèse et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u(x)(\varphi(x - te_i) - \varphi(x))\,dx\right| &= \left|\int_\Omega (\tau_{te_i} u(x) - u(x))\,\varphi(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_\omega (\tau_{te_i} u(x) - u(x))\,\varphi(x)\,dx\right| \\ &\leq \|\tau_{te_i} u - u\|_{L^p(\omega)} \|\varphi\|_{L^q(\omega)} \\ &\leq t \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $t \to 0$, on obtient

$$\left|\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx\right| \leq \ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Ainsi la forme linéaire $\varphi \mapsto \int_\Omega u(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $L^q(\Omega)$ et puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^q(\Omega)$, alors on peut la prolonger par continuité à l'espace $L^q(\Omega)$ et on applique le théorème de Riesz (1.2.8), on va alors trouver $v_i \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_\Omega v_i(x)\,\varphi(x)\,dx,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui signifie que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = -v_i \in L^p(\Omega)$, donc $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

■

2.3 Injections de Sobolev pour $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$

Avant de présenter les différentes injections, on va donner deux remarques qui nous seront utiles dans toutes les preuves qui suivent.

Remarque 2.3.1 *On a déjà montré dans la proposition 2.2.3, que l'espace* $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *est dense dans* $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *c'est-à-dire que pour tout* $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *qui converge vers* u *dans* $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Ensuite, si on montre que pour un certain* p, m *et* q,

$$\exists C > 0,\ \|u\|_q \leq C\,\|u\|_{m,p}\,,\ \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.5}$$

Alors cette inégalité est vérifiée aussi pour u_n, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Avec ces hypothèses on peut déduire que cette inégalité est aussi vérifiée pour* $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

En effet, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente dans* $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *c'est donc une suite de Cauchy dans cet espace et puisque pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\|u_n - u_m\|_q \leq C\,\|u_n - u_m\|_{m,p}\,,$$

on déduit qu'elle est de Cauchy dans $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, *donc elle converge aussi dans cet espace vers* $v \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Montrons ensuite que $u = v$ *p.p. sur* $\mathbb{R}^N$*, pour cela on considère* $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et par l'inégalité de Hölder, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - v(x)|\,|\varphi(x)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u_n(x)|\,|\varphi(x)|\,dx + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x) - v(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \|u_n - u\|_p \|\varphi\|_{p'} + \|u_n - v\|_q \|\varphi\|_{q'} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - v(x))\,\varphi(x)\,dx = 0, \ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

la proposition 1.4.4, nous affirme que $u = v$ *p.p. sur* $\mathbb{R}^N$.

Finalement, en appliquant l'inégalité (2.5) à u_n *et en passant à la limite, on obtient* $\|v\|_q \leq C\|u\|_{m,p}$ *donc*

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{m,p}, \ \text{pour tout } u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Remarque 2.3.2 *Si on veut démontrer que pour un certain* p, m *et* q *vérifiant la condition* $p \leq q \leq p^*$ *où* p^* *dépend de* p *et* m*, on a*

$$\exists C > 0, \ \|u\|_q \leq C\|u\|_{m,p}, \ \text{pour tout } u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.6}$$

Il suffit alors de le faire pour le cas $q = p^*$.
En effet, supposons que l'inégalité (2.6) est vrai pour $q = p^*$ *et montrons qu'elle est aussi vraie pour tout* $p \leq q \leq p^*$.
Pour tout $\lambda \in]0,1[$*, on a* $q = (1-\lambda)p + \lambda p^*$ *et en appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants* $\frac{1}{\lambda}$ *et* $\frac{1}{1-\lambda}$ *on aura*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{(1-\lambda)p} |u(x)|^{\lambda p^*}\,dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p\,dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{\lambda} \\ &\leq \|u\|_p^{p(1-\lambda)} \|u\|_{p^*}^{p^*\lambda} < \infty\end{aligned}$$

car $u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et par l'inégalité (2.6),* $u \in L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$*. En déduit alors que* $u \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et de plus*

$$\|u\|_q^q \leq \|u\|_{m,p}^{p(1-\lambda)} C^{p^*\lambda} \|u\|_{m,p}^{p^*\lambda} = C^{p^*\lambda} \|u\|_{m,p}^q.$$

D'où la continuité de l'injection.

2.3.1 Cas $N > mp$

Commençons par le lemme technique suivant.

Lemme 2.3.3 *Si $N \geq 2$ et pour tout $1 \leq i \leq N$, $F_i \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$, alors*

$$\prod_{1\leq i\leq N} F_i(x_i^{*,N}) \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right),$$

où $x_i^{*,N} = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N)$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{1\leq i\leq N} \left|F_i(x_i^{*,N})\right| dx \leq \prod_{1\leq i\leq N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|F_i(x_i^{*,N})\right|^{N-1} dx_i^{*,N}\right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{2.7}$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur N. Pour $N = 2$, on n'a rien à vérifier puisque

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F_1(x_2)F_2(x_1)|\, dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}} |F_1(x_2)| dx_2 \int_{\mathbb{R}} |F_2(x_1)| dx_1$$

Maintenant supposons que la propriété est vraie à l'ordre N et considérons pour tout $1 \leq i \leq N+1$, les fonctions $F_i \in L^N\left(\mathbb{R}^N\right)$. Posons $x = (x_i)_{1\leq i\leq N}$ et

$$I_N = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{1\leq i\leq N} \left|F_i\left(x_i^{*,N}, x_{N+1}\right)\right| |F_{N+1}(x)|\, dx.$$

On applique l'inégalité de Hölder avec les exposants N et $\frac{N}{N-1}$, on obtient alors

$$I_N \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{1\leq i\leq N} \left|F_i\left(x_i^{*,N}, x_{N+1}\right)\right|^{\frac{N}{N-1}} dx\right]^{\frac{N-1}{N}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |F_{N+1}(x)|^N dx\right]^{\frac{1}{N}} < \infty$$

Car pour tout $1 \leq i \leq N$ et x_{N+1} fixé, les fonctions

$$\left|F_i\left(x_i^{*,N}, x_{N+1}\right)\right|^{\frac{N}{N-1}} \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

donc par hypothèse de récurrence,

$$\prod_{1\leq i\leq N} \left|F_i\left(x_i^{*,N}, x_{N+1}\right)\right|^{\frac{N}{N-1}} \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right),$$

Il reste à vérifier (2.7) , pour cela posons

$$g_i\left(x_{N+1}\right)=\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|F_i\left(x_i^{*,N},x_{N+1}\right)\right|^N dx_i^{*,N}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Par hypothèse de récurrence, l'inégalité (2.7) est vérifiée pour les fonctions $\left|F_i\left(x_i^{*,N},x_{N+1}\right)\right|^{\frac{N}{N-1}}$, donc

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\prod_{1\leq i\leq N}\left|F_i\left(x_i^{*N},x_{N+1}\right)\right|^{\frac{N}{N-1}}dx\right]^{\frac{N-1}{N}} &\leq \prod_{1\leq i\leq N}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|F_i\left(x_i^{*N},x_{N+1}\right)\right|^N dx_i^{*N}\right)^N\\ &\leq \prod_{1\leq i\leq N} g_i\left(x_{N+1}\right)\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}I_N &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N}\prod_{1\leq i\leq N}\left|F_i\left(x_i^{*,N},x_{N+1}\right)\right|^{\frac{N}{N-1}}dx\right]^{\frac{N-1}{N}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left|F_{N+1}(x)\right|^N dx\right]^{\frac{1}{N}}\\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N}\left|F_{N+1}(x)\right|^N dx\right]^{\frac{1}{N}}\prod_{1\leq i\leq N} g_i\left(x_{N+1}\right)\end{aligned}$$

On remarque $\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left|F_{N+1}(x)\right|^N dx\right]^{\frac{1}{N}}$ est indépendante de x_{N+1} et si on intègre I_N sur $\mathbb{R}$ par rapport à la variable x_{N+1}, on obtient I_{N+1}.
Donc en appliquant l'inégalité de Hölder généralisée avec les exposants N et le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}I_{N+1} &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N}\left|F_{N+1}(x)\right|^N dx\right]^{\frac{1}{N}}\prod_{1\leq i\leq N}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(g_i\left(x_{N+1}\right)\right)^N dx_{N+1}\right)^{\frac{1}{N}}\\ &\leq \prod_{1\leq i\leq N+1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|F_i(x_i^{*,N+1})\right|^N dx_i^{*,N+1}\right)^{\frac{1}{N}}\end{aligned}$$

■

Ci-dessous le théorème qui nous donne l'injection dans ce cas.

Théorème 2.3.4 *Soit $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$, pour tout q vérifiant $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$, on a l'injection continue suivante*

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.8}$$

Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{m,p}, \text{ pour tout } u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.9}$$

Preuve. En se basant sur la remarque 2.3.1 et sur la remarque 2.3.2, il suffit de prouver l'inégalité 2.9 pour $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et pour $q = \frac{N}{N-1}$. On va distinguer alors trois cas :

1. Si $m = 1$ et $p = 1$, on va alors montrer $\exists C > 0$,

   $$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq C\|u\|_{1,1}, \ \forall u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

   Pour tout $1 \leq i \leq N$ et $x \in \mathbb{R}^N$ et $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a

   $$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + (s - x_i)e_i)ds,$$

   donc

   $$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x + (s - x_i)e_i)\right| ds. \tag{2.10}$$

   L'intégrale du membre de droite est évidement indépendante de la composante x_i de x. Notons alors $x_i^* = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N)$ et

   $$u_i\left(x_i^*\right) = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x + (s - x_i)e_i)\right| ds.$$

   La fonction u_i est définit sur $\mathbb{R}^{N-1}$ et à support compact. Avec ces notations, on a obtenu

   $$1 \leq i \leq N, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ |u(x)|^{\frac{1}{N-1}} \leq \left(u_i\left(x_i^*\right)\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

   Ce qui implique que $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

   $$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(u_i\left(x_i^*\right)\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

On applique le lemme (2.3.3) aux fonctions définies par

$$F_i\left(x_i^*\right)=\left(u_i\left(x_i^*\right)\right)^{\frac{1}{N-1}},\ 1\leq i\leq N,$$

on aura

$$\int_{\mathbb{R}^N}\prod_{1\leq i\leq N}\left|\left(u_i\left(x_i^*\right)\right)^{\frac{1}{N-1}}\right|dx\leq\prod_{1\leq i\leq N}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|u_i\left(x_i^*\right)\right|dx_i^*\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}dx\right]^{\frac{N-1}{N}} &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N}\prod_{i=1}^{N}\left|u_i\left(x_i^*\right)\right|^{\frac{1}{N-1}}dx\right]^{\frac{N-1}{N}}\\ &\leq \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|u_i\left(x_i^*\right)\right|dx_i^*\right)^{\frac{1}{N}},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\|u\|_{\frac{N}{N-1}} &\leq \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|u_i\left(x_i^*\right)\right|dx_i^*\right)^{\frac{1}{N}}\\ &= \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+(s-x_i)e_i)\right|ds dx_i^*\right)^{\frac{1}{N}}\\ &= \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|dx\right)^{\frac{1}{N}}.\end{aligned}$$

Utilisant la relation entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique, on obtient

$$\begin{aligned}\|u\|_{\frac{N}{N-1}} &\leq \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|dx\right)^{\frac{1}{N}}\\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|dx \qquad (2.11)\\ &\leq \frac{1}{N}\|u\|_{1,1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Si $m=1$ et $p<N$, on va alors montrer
$$\exists C>0,\ \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{Np}{N-p}}\,dx\right)^{\frac{N-p}{Np}}\leq C\,\|u\|_{1,p}\,,\ \forall u\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$
On va utiliser le résultat du premier cas, pour cela écrivons
$$|u|^{\frac{Np}{N-p}}=\left(|u|^{\frac{(N-1)p}{N-p}}\right)^{\frac{N}{N-1}}.$$
Donc
$$\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{Np}{N-p}}\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u\left(x\right)|^{\frac{(N-1)p}{N-p}}\right)^{\frac{N}{N-1}}dx.$$
Appliquons (2.11), on obtient
$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p}}^{\frac{p(N-1)}{N-p}}\leq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{\frac{(N-1)p}{N-p}}\right)(x)\right|dx,$$
Or
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{\frac{(N-1)p}{N-p}}\right)=\frac{(N-1)\,p}{N-p}\,|u|^{\frac{(N-1)p}{N-p}-1}\,\frac{\partial u}{\partial x_i},$$
ainsi
$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p}}^{\frac{p(N-1)}{N-p}}\leq\frac{1}{N}\frac{(N-1)\,p}{N-p}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x\right)\right|\left|u\left(x\right)\right|^{\frac{(N-1)p}{N-p}-1}dx.$$
En appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $\frac{p}{p-1}$, on obtient
$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p}}^{\frac{p(N-1)}{N-p}}\leq\frac{1}{N}\frac{(N-1)\,p}{N-p}\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u\left(x\right)|^{\frac{Np}{N-p}}\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}},$$
c'est-à-dire
$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p}}^{\frac{p(N-1)}{N-p}}\leq\frac{1}{N}\frac{(N-1)\,p}{N-p}\,\|u\|_{1,p}\,\|u\|_{\frac{Np}{N-p}}^{\frac{N(p-1)}{N-p}}.$$
Finalement,
$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p}}\leq\frac{1}{N}\frac{(N-1)\,p}{N-p}\,\|u\|_{1,p}\,.$$

3. Si $m>1$ et $mp<N$, on va procéder par récurrence sur m, c'est-à-dire, on suppose que
$$W^{m-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-(m-1)p}}\left(\mathbb{R}^N\right)\ \text{ pour }\ (m-1)\,p<N.\tag{2.12}$$

Soit $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors

$$Du \in W^{m-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ et } u \in W^{m-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Puisque $(m-1)p < N$, alors on peut utiliser l'injection (2.12) pour avoir

$$Du \in L^{\frac{Np}{N-(m-1)p}}\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ et } u \in L^{\frac{Np}{N-(m-1)p}}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Finalement, on a obtenu $u \in W^{1,\frac{Np}{N-(m-1)p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
D'autre part, $mp < N$ donc $\frac{Np}{N-(m-1)p} < N$ et l'injection démontrée au 2ème cas, nous donne

$$u \in L^{\frac{Np}{N-mp}}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

■

2.3.2 Cas $N = mp$

Dans ce paragraphe, nous allons traiter le cas limite $N = mp$

Théorème 2.3.5 *Si $p = 1$ et $m = N$, on a l'injection continue suivante*

$$W^{N,1}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow \mathcal{C}_b\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Preuve. Pour simplifier la preuve, on commence par montrer par récurrence sur N que

$$W^{N,1}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

1. Pour le cas $N = 1$, si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, on utilise le procédé de densité décrit dans la remarque 2.3.1, donc il suffit de montrer que

$$\exists C > 0,\ \|u\|_{\infty} \leq C\|u\|_{1,1},\ \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(s)\, ds$ donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u'(s)|\, ds \leq \|u\|_{1,1}.$$

2. Ensuite supposons que si $u \in W^{N-1,1}\left(\mathbb{R}^{N-1}\right)$, alors $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{N-1})$, autrement dit $\exists C > 0$, tel que

$$\|u\|_{\infty} \leq C \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\mathrm{D}^{\alpha} u(x')|\, dx'.$$

Soit à présent $u \in W^{N,1}\left(\mathbb{R}^N\right)$, donc pour x_N fixé, la fonction $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}(\cdot, x_N) \in W^{N-1,1}\left(\mathbb{R}^{N-1}\right)$, donc

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right| \leq C \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \mathrm{D}^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x_N} \right)(x', x_N) \right| dx'.$$

On intègre par rapport à x_N, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sup_{x' \in \mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N &\leq C \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \mathrm{D}^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x_N} \right)(x', x_N) \right| dx' dx_N \\ &\leq C \sum_{|\alpha|=0}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \mathrm{D}^\alpha u(x) \right| dx. \end{aligned}$$

Comme

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N \leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{x' \in \mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N$$

Alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x)| \leq C \|u\|_{N,1}.$$

A présent si $u \in W^{N,1}\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ qui converge vers u dans $W^{N,1}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et d'après ce qui précède, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, autrement dit $(u_n)_n$ converge vers u uniformément sur $\mathbb{R}^N$ donc u est continue sur $\mathbb{R}^N$ et il en résulte que $u \in \mathcal{C}_b\left(\mathbb{R}^N\right)$.

■

Le théorème suivant donne la deuxième injection du cas limite $N = mp$.

Théorème 2.3.6 *Soit $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$, alors pour tout q tel que $p \leq q < \infty$, on a l'injection suivante*

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.13}$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, on va distinguer deux cas :

1. Pour m =1, $p = N$ et $N \leq q < \infty$, on va montrer

$$\exists C > 0,\ \|u\|_q \leq C\|u\|_{1,N},\ \forall u \in W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.14}$$

Soit $N \leq q \leq \frac{N^2}{N-1}$, si $u \in W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors $|u|^N \in W^{1,1}\left(\mathbb{R}^N\right)$ car en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura pour tout $1 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial\left(u^N\right)}{\partial x_i}(x)\right|dx &= N\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{N-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|dx \\
&\leq N\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^N\right)^{\frac{N-1}{N}}dx\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^N dx\right)^{\frac{1}{N}} < \infty
\end{aligned}$$

L'injection (2.8) nous donne $u \in L^{\frac{N^2}{N-1}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et par la remarque (2.3.2) on déduit que (2.14) est vrai pour tout $q \leq \frac{N^2}{N-1}$.
Maintenant si $q > \frac{N^2}{N-1}$, alors on peut écrire $q = \frac{rN}{N-1}$, avec $r > N$. En se basant sur la remarque (2.3.1) , il suffit de considérer $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$. On va considérer la fonction u^r et lui appliquer la majoration (2.11) et l'inégalité de Hölder, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\|u^r\|_{\frac{N}{N-1}} &\leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial\left(u^r\right)}{\partial x_i}(x)\right|dx \\
&= \frac{r}{N}\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{r-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|dx \\
&\leq \frac{r}{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{(r-1)N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}}dx\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^N dx\right)^{\frac{1}{N}},
\end{aligned}$$

Sachant que $N \leq \frac{(r-1)N}{N-1} \leq \frac{rN}{N-1}$, alors $\exists\lambda \in [0,1]$ tel que

$$\frac{(r-1)N}{N-1} = \lambda N + (1-\lambda)\frac{rN}{N-1}.$$

Par suite, en utilisant encore l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{(r-1)N}{N-1}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^N dx\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{rN}{N-1}}dx\right)^{1-\lambda},$$

en remplaçant dans les inégalités précédentes, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{rN}{N-1}}\, dx\right)^{\frac{N-1}{Nr}} \leq \left(\frac{r}{N}\right)^{r+1-N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u\,(x)|^{\,N} dx\right)^{\frac{N-1}{Nr}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\,(x)\right|^N dx\right)^{\frac{r+1-N}{rN}}$$

D'où le résultat.

2. Pour $m \geq 2$, $mp = N$, on va montrer que pour tout $p \leq q < \infty$,

$$\exists C > 0,\ \|u\|_q \leq C\,\|u\|_{m,p}\,,\ \forall u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.15}$$

Soit $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et puisque $(m-1)p < N$, alors par l'injection (2.12),

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{\frac{Np}{N-(m-1)p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et puisque $mp = N$, alors

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^N\left(\mathbb{R}^N\right),$$

c'est-à-dire $u \in W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et d'après (2.14), $u \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour tout $p \leq q < \infty$.

■

2.3.3 Cas $N < mp$

Théorème 2.3.7 *Soit $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$, on a les injections suivantes :*

1. *Si $m = 1$ et $N < p$, alors pour tout $0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{p}$, on a l'injection*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.16}$$

2. *Si* $\dfrac{N}{p} \notin \mathbb{N}$, *alors pour tout* j *vérifiant* $j = \left[\frac{N}{p}\right] + 1$ *et* $0 < \lambda \leq j - \frac{N}{p}$, *on a l'injection*
$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m-j,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

3. *Si* $\dfrac{N}{p} \in \mathbb{N}$ *et* $m \geq \frac{N}{p} + 1$, *alors pour tout* $\lambda < 1$, *on a l'injection*
$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m-\frac{N}{p}-1,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Preuve. Soit $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$,

1. Si $m = 1$ et $N < p$, on va montrer que pour tout $0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{p}$, $\exists C > 0$,
$$|u(x+h) - u(x)| \leq Ch^{\lambda} \|u\|_{1,p}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

   - Commençons par montrer que $u \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et pour cela on considère $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ compte tenu de la remarque (2.3.1). On va alors chercher une majoration de $|u(x)|$ et quitte à faire une translation, on se ramène à la majoration de $|u(0)|$.
     On va utiliser la technique qui consiste à intégrer sur un cône $C_{h,\alpha}$ de sommet 0, d'angle au sommet α, limité par une sphère de $\mathbb{R}^N$ de rayon h et les coordonnées polaires (r,θ) où $0 \leq r \leq h$, $\theta \in \mathcal{A}(r)$, la surface d'intersection de $C_{h,\alpha}$ avec la sphère de rayon r.
     L'élément de volume est donné par $dx = r^{N-1}s(\theta)\,d\theta dr$ où $s(\theta)\,d\theta$ est l'élément d'air de dimension $(N-1)$ sur la sphère unité S_N.
     Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on note $\tilde{u}(r,\theta) = u(x)$, c'est-à-dire l'expression de u dans les coordonnées polaires. On a
$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\,d\lambda &= \tilde{u}(r,\theta) - \tilde{u}(0,\theta) \\ &= \tilde{u}(r,\theta) - u(0) \end{aligned} \tag{2.17}$$
     Sachant que $\int_{C_{h,\alpha}} dx = C_1 h^N$, en majorant (2.17) sur le cône $C_{h,\alpha}$, on obtient
$$C_1 h^N |u(0)| \leq \int_0^h \int_{\mathcal{A}(r)} |\tilde{u}(r,\theta)|\, r^{N-1} s(\theta)\,d\theta dr + \tag{2.18}$$
$$\int_0^h \int_{\mathcal{A}(r)} \left(\int_0^r \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right| d\lambda\right) r^{N-1} s(\theta)\,d\theta dr \tag{2.19}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}
\int_0^h \int_{\mathcal{A}(r)} |\tilde{u}(r,\theta)| r^{N-1} s(\theta)\, d\theta dr &= \int_{C_{h,\alpha}} |u(x)|\, dx \\
&\leq \left(\int_{C_{h,\alpha}} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{C_{h,\alpha}} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_1 h^{\frac{N}{p'}} \|u\|_{L^p\left(C_{h,\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

Passant à la deuxième intégrale, mais d'abord écrivons

$$\begin{aligned}
\int_0^r \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right| d\lambda &= \int_0^r \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right| \lambda^{\frac{N-1}{p}} \lambda^{\frac{N-1}{p'}} \lambda^{1-N} d\lambda \\
&\leq \left(\int_0^r \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right|^p \lambda^{N-1} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r \lambda^{(N-1)(1-p')} d\lambda\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

Or $N < p$ donc $(N-1)(1-p') > -1$, donc

$$\int_0^r \lambda^{(N-1)(1-p')} d\lambda = C_2 \left(r^{(N-1)(1-p')+1}\right) < \infty.$$

Si on pose

$$I = \int_0^h \int_{\mathcal{A}(r)} \left(\int_0^r \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right| d\lambda\right) r^{N-1} s(\theta)\, d\theta dr$$

On a alors

$$\begin{aligned}
I &\leq C_2 \int_0^h r^{N-1} \int_{\mathcal{A}(r)} \left(\int_0^r \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right|^p \lambda^{N-1} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{(N-1)(1-p')+1}{p'}} s(\theta)\, d\theta dr \\
&\leq C_2 \int_0^h r^{\frac{N}{p'}} \int_{\mathcal{A}(r)} \left(\int_0^h \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right|^p \lambda^{N-1} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} s(\theta)\, d\theta dr
\end{aligned}$$

En appliquant encore l'inégalité de Hölder à l'intégrale de θ et en notant on $|\mathcal{A}(r)|$ la mesure de $\mathcal{A}(r)$, on obtient

$$I \leq C_2 \int_0^h r^{\frac{N}{p'}} |\mathcal{A}(r)|^{\frac{1}{p'}} \int_{\mathcal{A}(r)} \int_0^h \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right|^p \lambda^{N-1} d\lambda s(\theta)\, d\theta^{\frac{1}{p}} dr$$

Sachant que $|\mathcal{A}(r)|$ est majorée indépendamment de h et

$$\left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right| \leq |\nabla u(x)|,$$

on aura

$$\int_0^h \int_{\mathcal{A}(r)} \left(\int_0^r \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(\lambda,\theta)\right| d\lambda\right) r^{N-1} s(\theta)\, d\theta dr \leq C_3 h^{\frac{N}{p'}+1} \|\nabla u\|_{L^p\left(C_{h,\alpha}\right)}$$

Retournons à (2.18)

$$|u(0)| \leq C_1 h^{-\frac{N}{p}} \|u\|_{L^p\left(C_{h,\alpha}\right)} + C_3 h^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p\left(C_{h,\alpha}\right)}.$$

Si on considère pour tout $\mu > 0$, la fonction $u_\mu(x) = u\left(\frac{x}{\mu}\right)$ et on lui applique l'inégalité obtenue de ce qui procède,

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_p + C\prime \|\nabla u\|_p,$$

on trouvera

$$\|u\|_\infty \leq C\mu^{\frac{N}{p}} \|u\|_p + C\prime \mu^{\frac{N}{p}-1} \|\nabla u\|_p,$$

On cherche ensuite $\min_\mu \left(C\|u\|_p \mu^{\frac{N}{p}} + C\prime \|\nabla u\|_p \mu^{\frac{N}{p}-1}\right)$ qui est atteint pour $\mu = \frac{C'(p-N)}{NC_1} \|\nabla u\|_p \|u\|_p^{-1}$, après calcul, on aura

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_p^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_p^{\frac{N}{p}} \tag{2.20}$$

où $C = C(N,p)$.

- Maintenant, on va montrer que u vérifie le caractère Höldérien pour $\lambda = 1 - \frac{N}{p}$ et compte tenu de la remarque $(2.3.2)$, on aura le résultat pour tout $\lambda \leq 1 - \frac{N}{p}$.
  Soit $h \in \mathbb{R}^N$, en utilisant l'inégalité (2.20), on obtient

$$\|\tau_h u - u\|_\infty \leq C\|\tau_h u - u\|_p^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla(\tau_h u - u)\|_p^{\frac{N}{p}}.$$

D'une part, on a $\|\nabla(\tau_h u - u)\|_p \leq 2\|\nabla u\|_p$ et d'autre part par $(\mathbf{??})$, on a $\|\tau_h u - u\|_p \leq \|\nabla u\|_p |h|$, donc

$$\|\tau_h u - u\|_\infty \leq C|h|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_p$$

2. Si $m \geq 2$, $\dfrac{N}{p} \notin \mathbb{N}$, alors pour tout j vérifiant $j = \left[\frac{N}{p}\right] + 1$, on va montrer que

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m-j,j-\frac{N}{p}}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Si $m = j$, alors pour $u \in W^{j,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a $u, Du \in W^{j-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et puisque $\frac{j-1}{p} < N$, alors on peut utiliser l'injection (2.8), c'est-à-dire

$$u \in W^{1,\frac{Np}{N-(j-1)p}}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

Maintenant puisque, $\frac{Np}{N-(j-1)p} > N$, alors par (1), on aura $u \in \mathcal{C}^{0,j-\frac{N}{p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
Si $pm > N$, alors pour $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a $D^{(m-j)}u \in W^{j,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et d'après ce qui précède $D^{(m-j)}u \in \mathcal{C}^{0,j-\frac{N}{p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$, c'est-à-dire

$$u \in \mathcal{C}^{m-j,j-\frac{N}{p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

3. Si $\dfrac{N}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geq \frac{N}{p} + 1$, alors pour tout $\lambda < 1$, on va montrer que

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m-\frac{N}{p-1},\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Si $u \in W^{j,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, où $j = \frac{N}{p} + 1$, alors $u, Du \in W^{j-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et puisque $j-1 = \frac{N}{p}$, alors l'injection (2.13) nous donne $u, Du \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour tout $q < \infty$ et d'après (1), $u \in \mathcal{C}^{0,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour tout $\lambda < 1 - \frac{N}{q}$. Finalement, $u \in \mathcal{C}^{0,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour tout $\lambda < 1$.Si $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors $D^{(m-j)}u \in W^{j,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et d'après ce qui précède $D^{(m-j)}u \in \mathcal{C}^{0,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour tout $\lambda < 1$, c'est-à-dire $u \in \mathcal{C}^{m-\frac{N}{p}-1,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

■

2.4 Injections de Sobolev pour $W^{m,p}(\Omega)$

On va maintenant montrer que sous des hypothèses convenables sur l'ouvert Ω, les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ s'injectent les uns dans les autres et pour des conditions légèrement plus fortes.

Certains espaces de Sobolev peuvent s'injecter de manière compacte dans d'autres espaces.

2.4.1 Injections continues

Pour obtenir ces théorèmes d'injection, on va chercher un prolongement de $W^{m,p}(\Omega)$ à $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. L'existence d'un tel prolongement est liée à la structure géométrique de Ω. Dans notre travail, on va voir le cas des ouverts lipschitziens, commençons par définir ces ouverts lipschitziens.

Définition 2.4.1 *[6] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, il est dit un ouvert lipschitzien uniforme si*

1. *Il existe un recouvrement ouvert fini $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de Ω tel que $d(\Omega_0, \partial\Omega) > 0$ et pour tout $i \geq 1$, Ω_i est borné et $\Omega_i \cap \partial\, \Omega \neq \emptyset$.*
2. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un ouvert borné Γ_i de $\mathbb{R}^{N-1}$, une fonction γ_i lipschitzienne sur Γ_i et un système de coordonnées tel que*

$$\Omega_i \cap \Omega \subset \{(x', x_N) \mid x' \in \Gamma_i,\ x_N > \gamma_i(x')\},$$

$$\Omega_i \cap \partial\Omega = \{(x', \gamma_i(x')) \mid x' \in \Gamma_i\}.$$

3. *Il existe une partition de l'unité $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, subordonnée au recouvrement $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{1} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\mathrm{D}^\alpha \psi_i(x)| \leq C_1 \ \ et \ \ \sum_{|\alpha|=0}^{1} \sup_{x\in\Gamma_i} |\mathrm{D}^\alpha \gamma_i(x)| \leq C_2.$$

Définition 2.4.2 *[6] On dit qu'un ouvert est de classe $\mathcal{C}^1$-uniforme s'il est lipschitzien uniforme et de plus les fonctions γ_i sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Dans la proposition ci-dessous qu'on admettra, on présente la relation entre les fonctions $W^{1,p}(\Omega)$ et leur restrictions à $W^{1,p}(\Omega \cap \Omega_i)$.

Proposition 2.4.3 *[6] Soit Ω un ouvert lipschitzien, $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son recouvrement associé et $u \in L^p(\Omega)$. Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $u \in W^{1,p}(\Omega \cap \Omega_i)$, alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$. De plus, il existe deux constantes C et C' telles que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\varphi_i u\|_{W^{1,p}(\Omega\cap\Omega_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ \ et \ \ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C' \sum_{i\in\mathbb{N}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega\cap\Omega_i)}$$

Les ouverts lipschitziens possèdent un opérateur de prolongement, comme le montre la proposition suivante.

Théorème 2.4.4 *Si Ω est un ouvert lipschitzien, alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$, il existe un opérateur linéaire et continu P de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que pour tout $x \in \Omega$, on a $Pu(x) = u(x)$. De plus, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.21}$$

Preuve. Si Ω est un ouvert lipschitzien, alors il existe un recouvrement ouvert fini $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de Ω, une fonction γ_i lipschitzienne et une partition de l'unité $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, subordonnée au recouvrement $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés de la définition (2.4.1). Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}(\psi_i u) \subset \Omega_i \cap \Omega$, donc $\psi_i u \in W^{1,p}(\Omega_i \cap \Omega)$.
On va prolonger la fonction $\psi_i u$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Soit S la symétrie définie dans $\Gamma_i \times \mathbb{R}$ par rapport à l'hypersurface d'équation $x_N = \gamma_i(x')$ par

$$S(x', x_N) = (x', 2\gamma_i(x') - x_N).$$

Evidement $S = S^{-1}$ et puisque γ_i est continue, donc S l'est aussi et on a pour tout $(x,y) \in (\Gamma_i \times \mathbb{R})^2$

$$\begin{aligned}
|S(x) - S(y)| &= |(x', 2\gamma_i(x') - x_N) - (y', 2\gamma_i(y') - y_N)| \\
&= \left(|x'-y'|^2 + |2\gamma_i(x') - 2\gamma_i(y') - (x_N + y_N)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(|x'-y'|^2 + 4|\gamma_i(x') - \gamma_i(y')|^2 + |x_N + y_N|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(|x-y|^2 + 4\|\nabla\gamma_i\|_\infty^2 |x-y|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(1 + 4\|\nabla\gamma_i\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} |x-y| \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, définissons l'ouvert

$$\Omega_i' = S(\Omega \cap \Omega_i), \; U_i = (\Omega_i \cap \Omega) \cup (\partial\Omega \cap \Omega_i) \cup \Omega_i'$$

et posons pour tout $(x', x_N) \in U_i$

$$P_i(\psi_i u)(x', x_N) = \begin{cases} (\psi_i u)(x', x_N) & \text{si} \quad x_N > \gamma_i(x') \\ (\psi_i u)(x', 2\gamma_i(x') - x_N) & \text{si} \quad x_N < \gamma_i(x') \end{cases} \tag{2.23}$$

et pour $(x', x_N) \notin U_i$, $P_i(\psi_i u)(x', x_N) = 0$, ensuite, on va vérifier que

$$P_i(\psi_i u) \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Pour cela appliquons la proposition (1.2.6) à $P_i(\psi_i u)$ sur les ouverts $\Omega_i \cap \Omega$ et Ω_i' et pour mieux voir cela, considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[$ par

$$g(x', t) = \psi_i u\,(x', \gamma_i(x') + t)\,,$$

et son prolongement qu'on note $\widetilde{g}$ défini sur $\mathbb{R}^{N-1} \times]-\infty, 0[$ par

$$\widetilde{g}(x', t) = \psi_i u\,(x', \gamma_i(x') - t)\,.$$

Notons que qu'avec un simple changement de variable en t, on retrouve à partir de $\widetilde{g}$ le prolongement (2.23) .
En appliquant la proposition (1.2.6), on aura $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)$ et par suite son prolongement à $\mathbb{R}^N$, $\widetilde{g} \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Finalement, on a démontré que $\widetilde{\psi_i u} \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
La constante C de la proposition (1.2.6) ne dépend que des constantes de Lipschitz de S et de S^{-1} et d'après (2.22) , on aura

$$\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\left(1 + \|\nabla\gamma_i\|_\infty\right)\|\psi_i u\|_{W^{1,p}(\Omega_i \cap \Omega)}\,.$$

De plus par la définition (2.4.1) et la continuité du prolongement, on peut écrire

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\psi_i u}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq (1 + C_2)\,\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C'(1 + C_2)\,\|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{N-1} \times]0,+\infty[)} \\ &\leq C'(1 + C_2)C_3\,\|\psi_i u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Maintenant, si on pose $P(u) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} P_i(\psi_i u)$, alors d'après 2.4.3, $P(u) \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et de plus

$$\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \sum_{i \in \mathbb{N}} \|P_i(\psi_i u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Ce qui prouve la continuité de l'opérateur de prolongement P. ■

Comme conséquence, on a les deux résultats qui s'en suivent

Proposition 2.4.5 *Si Ω est un ouvert lipschitzien, alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Preuve. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $P(u) \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ qui converge vers $P(u)$ dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Si on prend la restriction de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à Ω, alors elle converge vers la restriction de $P(u)$ à Ω qui n'est autre que u. ■

En utilisant l'opérateur de prolongement, on obtient les injections suivantes.

Théorème 2.4.6 *Si Ω est un ouvert lipschitzien, alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a les injections continues suivantes :*

1. *Si $N > mp$, alors pour tout $q \leq \frac{Np}{N-mp}$, on a $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*
2. *Si $N = mp$, alors*
   (a) *Si $p = 1$, alors on a $W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b(\Omega)$.*
   (b) *Si $p > 1$, alors pour tout $q < \infty$, on a $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*
3. *Si $N > mp$, alors :*
   (a) *Si $m = 1$ et $N < p$, alors pour tout $0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{p}$, on a*
   $$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega).$$
   (b) *Si $\dfrac{N}{p} \notin \mathbb{N}$, alors pour tout j vérifiant $j = \left[\frac{N}{p}\right] + 1$ et $0 < \lambda \leq j - \frac{N}{p}$, on a*
   $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Omega).$$
   (c) *Si $\dfrac{N}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geq \frac{N}{p} + 1$, alors pour tout $\lambda < 1$, on a*
   $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\Omega).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser l'opérateur de prolongement P et d'appliquer les différents théorèmes d'injection vus auparavant.

1. Commençons par le cas $mp < N$. On va distinguer deux cas :
   - Si $m = 1$, alors il existe l'opérateur de prolongement P, défini dans le théorème $(2.4.4)$, qui est continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et qui vérifie
   $$P(u)(x) = u(x), \ \forall x \in \Omega.$$
   Si $q \leq \frac{Np}{N-p}$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors en utilisant l'injection (2.9) et l'inégalité (2.21), on obtient
   $$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|Pu\|_{L^q(\Omega)} \leq \|Pu\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$
   - Si $m > 1$ et $mp < N$, on va procéder par récurrence sur m et utiliser la même technique déjà appliqué dans la démonstration (3).
2. De la même manière, on démontre les autres assertions.

■

2.4.2 Injections compactes

Voici dans quels cas les injections de Sobolev sont compactes.

- **Cas** $N > mp$

Commençons par des lemmes utiles à la preuve du théorème ci-dessous.

Lemme 2.4.7 *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, alors l'injection*

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

est compacte.

Preuve. On va montrer que tout ensemble $\mathcal{B}$ borné de $W^{1,1}(\Omega)$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$ et pour cela, on utilise le théorème (1.2.7).

- Soit $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{B}$, on va choisir un compact $K \subset \Omega$, de tel en sorte à avoir $\int_{\Omega\setminus K} |u(x)|\, dx < \varepsilon$. En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder on a

  $$\int_{\Omega\setminus K} |u(x)|\, dx \leq \left(\int_{\Omega\setminus K} dx\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{\Omega\setminus K} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\, dx\right)^{\frac{N-1}{N}}.$$

  Puisque Ω est borné, on va choisir la mesure de K assez grande pour que la mesure de $\Omega\setminus K$ soit assez petite et on a le résultat souhaité.
- A présent, cherchons $\delta > 0$ tel que $\delta < d(\omega, \partial\Omega)$ et $\forall h \in \mathbb{R}^N$ où $|h| < \delta$ et $u \in \mathcal{B}$, on a

  $$\|\tau_h \widetilde{u} - \widetilde{u}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

  où $\widetilde{u}$ désigne la prolongée de u par 0 hors de Ω. Soit $h_0 > 0$ donné et posons

  $$\mathcal{B}_0 = \overline{\bigcup_{x\in\partial\Omega} \mathcal{B}(x, h_0)} \text{ et } \omega = \Omega\setminus\mathcal{B}_0,$$

  qui est un ouvert inclus dans Ω. Si on prend $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $|h| < h_0$ et $x \in \omega$, alors $x+h\in\Omega$ et on aura

$$\begin{aligned}
\int_\omega \left|\widetilde{u}(x+h)-\widetilde{u}(x)\right| dx &= \int_\omega \left|u(x+h)-u(x)\right| dx \\
&= \int_\omega \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(u(x+h)\right) dt\right| dx \\
&= \int_\omega \left|\int_0^1 \sum_{i=1}^N h_i \frac{\partial u}{dx_i}(x+th)dt\right| dx \\
&\leq |h| \int_\omega \int_0^1 \left|\nabla u(x+th)\right| dtdx \\
&\leq |h| \int_0^1 \int_{\omega+th} \left|\nabla u(x)\right| dxdt
\end{aligned}$$

et puisque $\omega+th\subset\Omega$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\int_0^1 \int_{\omega+th} \left|\nabla u(x)\right| dxdt \leq |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\Omega)},$$

donc

$$\int_\omega \left|u(x+h)-u(x)\right| dx \leq C\,|h|\,.$$

Ainsi pour $h_0<h_1$ bien choisi avec, $\forall h\in\mathbb{R}^N$ où $|h|<h_0$

$$\int_\omega \left|u(x+h)-u(x)\right| dx \leq C\,|h| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, on va majorer cette intégrale sur $\Omega\backslash\omega$. On a

$$\int_{\Omega\backslash\omega} \left|\widetilde{u}(x+h)-\widetilde{u}(x)\right| dx \leq \int_{\Omega\backslash\omega} \left|u(x+h)\right| dx + \int_{\Omega\backslash\omega} \left|u(x)\right| dx$$

Comme précédement, on va choisir la mesure de ω assez grande pour que la mesure de $\Omega\backslash\omega$ soit assez petite, ce qui entraine l'existence de $\delta<h_1$ tel que pour $|h|\leq\delta$, on aura

$$\int_{\Omega\backslash\omega} \left|\widetilde{u}(x+h)-\widetilde{u}(x)\right| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, pour tout $u\in\mathcal{B}$ et $|h|\leq\delta$, on a

$$\int_\Omega \left|u(x+h)-u(x)\right| dx \leq \varepsilon.$$

Le théorème (1.2.7) assure alors que B est relativement compact dans $L^1(\Omega)$.

■

Lemme 2.4.8 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $L^k(\Omega)$ et bornée dans $L^q(\Omega)$ pour un certain $q > k$, alors elle converge dans $L^p(\Omega)$ où $k \leq p < q$.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $L^k(\Omega)$ et bornée dans $L^q(\Omega)$ pour $q > k$.
Si $k \leq p < q$, alors on peut écrire $p = (1-\lambda)k + \lambda p$, où $\lambda \in]0,1[$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_n - u_m\|_p \leq \|u_n - u_m\|_k^{\lambda} \|u_n - u_m\|_q^{1-\lambda} \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0,$$

car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^k(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^q(\Omega)$. Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $L^p(\Omega)$, donc elle converge. ■

Ci-dessous le théorème qui nous donne la compacité des injections.

Théorème 2.4.9 *Soit $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $N > 1$ et Ω un ouvert borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, pour tout q vérifiant $q < \frac{Np}{N-mp}$, l'injection*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) .$$

est compacte.

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $W^{m,p}(\Omega)$. Puisque Ω est borné, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$ et d'après le lemme (2.4.7), elle est relativement compacte dans $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire elle admet une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans cet espace.

D'autre part, par l'injection $(2.4.6) - 1$, pour tout $p \leq r \leq \frac{Np}{N-mp}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^r(\Omega)$ et par le lemme (2.4.8), la sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans tous les $L^q(\Omega)$, pour $1 \leq q < r$, c'est-à-dire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^q(\Omega)$ pour $q < \frac{Np}{N-mp}$. ■

- **Cas** $N < mp$

On s'intéresse maintenant, dans le cas où $mp > N$ aux injections compactes dans des espaces de fonctions Höldériennes.

Lemme 2.4.10 *Soit un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in]0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Alors, pour tout μ tel que $0 < \mu < \lambda$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$.*

Preuve. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors il existe une sous-suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Montrons que cette sous suite est convergente dans $\mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$.
Puisque $\left(\mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega), [\cdot]_\mu\right)$ est complet, alors il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy dans cet espace. En effet, pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}} = \sup_{x\in\Omega, h\neq 0} \frac{\left|\left(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right)(x+h) - \left(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right)(x)\right|}{|h|^\mu}$$

Donc posons

$$d_{n,m} = \left|\left(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right)(x+h) - \left(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right)(x)\right|,$$

et écrivons

$$d_{n,m} = d_{n,m}^{\theta} d_{n,m}^{1-\theta} \quad \text{où } \theta \in \left]0,1\right[.$$

La suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ et $h_0 > 0$ tel que si $x, x+h \in \Omega$ avec $|h| < h_0$ et $n, m \geq N_0$, on a

$$\left|u_{\sigma(n)}(x+h) - u_{\sigma(m)}(x+h)\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon'^{\frac{1}{1-\theta}},$$

et

$$\left|u_{\sigma(n)}(x) - u_{\sigma(m)}(x)\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon'^{\frac{1}{1-\theta}},$$

donc

$$d_{n,m}^{1-\theta} \leq \varepsilon.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d_{n,m} &= \left|\left(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right)(x+h) - \left(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right)(x)\right| \\ &= \left|u_{\sigma(n)}(x+h) - u_{\sigma(n)}(x)\right| + \left|u_{\sigma(m)}(x+h) - u_{\sigma(m)}(x)\right| \leq 2h^\lambda \end{aligned}$$

Ainsi

$$d_{n,m} \leq 2^\theta h^{\theta\lambda}\varepsilon'.$$

Par conséquent en posant $\mu = \theta\lambda$, on aura $\left\|u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}\right\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}} \leq \varepsilon'$. ■

Théorème 2.4.11 *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $p \geq 1$, $N > 1$*

1. *Si $m = 1$ et $N < p$, alors pour tout $0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{p}$, l'injection*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$$

est compacte.

2. Si $m \in \mathbb{N}$ *et* $j = [\frac{N}{p}] + 1$, *alors pour tout* $0 < \lambda < j - \frac{N}{p}$, *les injections*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m-j,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right).$$

sont compactes.

Preuve.

1. Si $m = 1$ et $p > N$. En se basant sur le résultat du lemme (2.4.10) , il suffit de montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte.
   Pour le faire, on considère K un ensemble borné dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on montre grâce au théorème d'Ascoli-Arzela (1.3.5) qu'il est relativement compact dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. On a par l'injection $(2.4.6) - 3$,

   $$\|u\|_{\infty} \leq C\,\|u\|_{m,p}\,, \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

   En particulier, pour tout $u \in K$, on a $\|u\|_{\infty} \leq C'$, c'est-à-dire K est uniformément borné.
   Ensuite, en utilisant encore l'injection $(2.4.6) - 3$, on a pour tout $0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{p}$, $\exists C > 0,\ \forall u \in K$

   $$|u(x+h) - u(x)| \leq Ch^{\lambda}\,\|u\|_{1,p}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

   d'où l'équicontinuité de K.
2. Si $m \in \mathbb{N}$, et $j = [\frac{N}{p}] + 1$.
   - Commençons par considérer $m = j$, c'est-à-dire on doit montrer que

     $$W^{j,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right).$$

     Pour le faire on procède de la même manière que 1., c'est-à-dire, en considérant K un borné de $W^{j,p}(\Omega)$, il est facile de voir comme précédemment que K est relativement compact dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et on utilise encore le lemme (2.4.10) pour conclure que K est compact dans $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ pour tout $0 < \lambda < j - \frac{N}{p}$.
   - Maintenant pour $m \geq 2$, prenons K un un sous-ensemble borné de $W^{m,p}(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K. Puisque qu'elle est bornée dans $W^{m,p}(\Omega)$, alors les suites des dérivées $(D^{m-j}u_n)_n$ sont bornées dans $W^{j,p}(\Omega)$ et par ce qui précède, on peut extraire des sous-suites qu'on note

     $$(u_{n_k})_{n_k} \text{ et } (D^{m-j}u_{n_k})_{n_k}$$

qui convergent dans $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$, c'est-à-dire $\exists u, v_{m,j} \in \mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ tels que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{n_k} - u\|_{\mathcal{C}^{0,\lambda}} = \lim_{k\to\infty} \left\|D^{m-j}u_{n_k} - v_{m,j}\right\|_{\mathcal{C}^{0,\lambda}} = 0.$$

On déduit ensuite facilement que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left(D^{m-j}u(x) - v_{m,j}(x)\right)\varphi(x)\,dx = 0,$$

et par la proposition (1.4.4), on aura

$$D^{m-j}u = v_{m,j} \ p.p. \text{ sur } \Omega.$$

En outre, la suite $(D^{m-j}u_{n_k})_{n_k}$ converge vers $D^{m-j}u$ dans $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ pour tout $\lambda < j - \frac{N}{p}$ et par conséquent $(u_{n_k})_{n_k}$ converge vers u dans $\mathcal{C}^{m-j,\lambda}(\Omega)$, c'est-à-dire K est relativement compact dans $W^{m,p}(\Omega)$.

■

2.5 Trace sur la frontière d'un ouvert $\mathcal{C}^1$

Dans cette section, on va juste donner un petit aperçu sur la notion de trace d'une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ sur le bord de Ω. Les théorèmes qui suivent sont présentés sans preuve.

Théorème 2.5.1 *[6] Soit Ω un ouvert $\mathcal{C}^1$-uniforme dans $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe une application linéaire et continue*

$$\gamma_0 : \quad W^{1,p}(\Omega) \quad \to \quad L^p(\partial\Omega)$$

dite application trace, telle que

$$\gamma_0(u) = u_{|\partial\Omega} \ si \ u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, $\gamma_0(u)$ est la fonction $x \longmapsto u(x)$ bien définie sur $\partial\Omega$.

On termine avec une caractérisation de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans le cas ou Ω est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 2.5.2 *[6] Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$, $1 < p < \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Il existe une constante C telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R}^N\big)$,

$$\left|\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx\right| \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

3. La fonction $\widetilde{u} \in W^{1,p}\big(\mathbb{R}^N\big)$, où $\widetilde{u}$ est définie par

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si\ x \in \Omega \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{2.24}$$

4. La trace de u sur $\partial\Omega$ est nulle, c'est-à-dire $\gamma_0 u = 0$.

Théorème 2.5.3 (Inégalité de Poincaré) *[5] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tel que :*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Chapitre 3

Applications aux EDP

Les espaces de Sobolev fournissent un cadre où les solutions faibles des EDP peuvent être définies. Les solutions faibles sont des solutions qui satisfont l'EDP dans un sens intégral plutôt que point par point. Dans ce contexte, on utilise souvent le théorème de Lax-Milgram et le théorème Stampacchia, qui sont des résultats importants pour l'existence et l'unicité des solutions faibles.

Dans ce chapitre, on rappelle ces théorèmes, on introduit la notion générale d'opérateur elliptiques et on montre d'une façon brève comment l'utilisation des espaces de Sobolev permet d'obtenir des théorèmes d'existence.

3.1 Les théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram

On donne des définitions générales dans les espaces de Hilbert.

Définition 3.1.1 *[8] Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|$ et $a: \ H \times H \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On a les définitions suivantes.*

1. *L'application a est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tous $u, v \in H$, on a*
$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| .$$

2. *L'application a est dite coercive si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H$, on a*
$$a(u,u) \geq C \|u\|^2 .$$

Théorème 3.1.2 (Stampacchia) *[8] Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive sur $H \times H$ et B un sous-ensemble convexe fermé non* *vide de H. Alors pour toute forme linéaire continue f sur H, il existe un unique $u \in B$ vérifiant l'inéquation*

$$a\left(u, v-u\right) \geq f\left(v-u\right) \text{ pour tout } v \in B.$$

Un corollaire essentiel du théorème de Stampacchia est le théorème de Lax-Milgram :

Théorème 3.1.3 (Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$. Alors pour toute forme linéaire continue ϕ sur H, il existe un unique $u \in H$, tel que*

$$a\left(u, v\right) = \phi\left(v\right) \text{ pour tout } v \in H$$

Preuve. C'est une simple conséquence du théorème $(3.1.2)$. ■

3.2 Applications

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice. On se donne une fonction f définie sur Ω et on cherche les solutions u définies sur $\overline{\Omega}$ du problème de Dirichlet homogène suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition 3.2.1 *[8]*

1. *On dit que u est une solution classique du problème (3.1) si $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et l'équation est vérifiée par u au sens classique, c'est-à-dire*

$$\begin{cases} -\Delta u\left(x\right) + u\left(x\right) = f\left(x\right) & \forall x \in \Omega \\ u\left(x\right) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

2. *On dit que u est une solution faible du problème (3.1) si $u \in H_0^1\left(\Omega\right)$ et pour tout $\varphi \in H_0^1\left(\Omega\right)$, on a*

$$\int_\Omega \nabla u\left(x\right) \cdot \nabla \varphi\left(x\right) dx + \int_\Omega u\left(x\right) \varphi\left(x\right) dx = \int_\Omega f\left(x\right) \varphi\left(x\right) dx.$$

Proposition 3.2.2 *Si u est une solution classique du problème (3.1), alors u est une solution faible.*

Preuve. Si u est une solution classique du problème (3.1), alors $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap H^1(\Omega)$ et puisque $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors par le théorème (2.5.2), $u \in H_0^1(\Omega)$ et de plus pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\,\varphi(x)\,dx + \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

ce qui donne par intégration par partie que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx + \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Maintenant si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, alors on peut trouver une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ, donc on peut conclure que (3.2) est vrai pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. ■

Proposition 3.2.3 *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.1).*

Preuve. On va utiliser le théorème de Lax-Milgram. On prend alors l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ et la forme bilinéaire

$$a: \quad H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \quad\to\quad \mathbb{R}$$

définie par

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx$$

et la forme

$$\begin{array}{rccc} \phi: & H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \end{array}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants $p = p' = 2$, on montre que a est continue. Pour la coercivité, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \int_\Omega |u(x)|^2\,dx = \|u\|_{1,2}^2$$

Ainsi, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie $a(u,v) = \phi(v)$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. ■

On peut même montrer que l'unique solution du problème (3.1) est en fait plus régulière. Mais ceci exige d'autres conditions sur les données du problème.

Théorème 3.2.4 *[8] Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ et $f \in H^m(\Omega)$. Alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ et il existe $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{m+2,2} \leq C \|f\|_{m,2}.$$

En particulier si $m > \frac{N}{2}$, on aura $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et si Ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Remarque 3.2.5 *La preuve d'un tel résultat est fastidieuse car elle dépend de la géométrie de l'ouvert et des techniques assez difficiles à manipuler.*

La méthode ci-dessus s'adapte à de nombreux autres problèmes, on va présenter un autre exemple de l'opérateur différentiel elliptiques d'ordre 2.

On considère des fonctions $a_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour $1 \leq i, j \leq N$, $a_0 \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ et le problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u = f & \text{dans} \quad \Omega. \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

On a les définitions suivantes.

Définition 3.2.6 *[8]*

1. *On appelle solution classique du problème de Dirichlet homogène, toute fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{\Omega}$ qui vérifie le problème (3.3).*
2. *On appelle solution faible toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \alpha_{i,j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \alpha_0 u(x)\varphi(x) dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx.$$

Comme pour le premier exemple, on vérifie facilement que toute solution classique est une solution faible.

Théorème 3.2.7 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Si les fonctions $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ et $a_0 \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifient :*

1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq C |\xi|^2.$$

2. Pour tout $x \in \Omega$, $a_0(x) \geq 0$.

Alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (3.3).

Preuve. On applique le théorème de Lax-Milgram, pour cela on prend $H = H_0^1(\Omega)$, la forme bilinéaire b définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par

$$b(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0 u(x) v(x) dx$$

et la forme ϕ définie sur $H_0^1(\Omega)$ par $\phi(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$.
Avec les hypothèses sur les fonctions $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ et a_0 et le fait que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, u \in L^2(\Omega)$, on peut montrer que b est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Pour la coercivité, on a par les hypothèse 1. et 2.,

$$b(u,u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha_0 u^2(x) dx \geq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

et par l'inégalité de Poincaré, il existe $C' > 0$ tel que $\|u\|_{1,2}^2 \leq C' \|\nabla u\|_{1,2}^2$ donc en combinant ces deux inégalités, on trouvera

$$b(u,u) \geq \alpha \|\nabla u\|_{1,2}^2 .$$

Ainsi il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème $b(u,v) = \phi(v)$. ■

Références

[1] Adams R.A. Fournier J.J. *Sobolev spaces*. Elsevier, (2003).

[2] Benzoni-Gavage S. *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, (2016) .

[3] Bhattacharyya, P. K. *Distributions*. In Distributions. de Gruyter, (2012).

[4] Bony J.M. *Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier*. Editions Ecole Polytechnique, (2001).

[5] Brezis H. *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Masson, (1987) .

[6] Demengel F., Demengel G. *Espaces fonctionnels : utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*. EDP Sciences. (2007).

[7] Evans L. C. *Partial differential equations,* volume 119 of Graduate text in Mathematics. Amer. Math. Soc., (1998).

[8] Lacroix-Sonrier M.T. *Distributions, espaces de Sobolev : Applications.* Paris : Ellipses, (1998) .

[9] Leoni G. *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc. (2017) .

[10] Maz'ya, V. *Sobolev spaces*. Springer, (2013).

[11] Queffélec H., Zuilu C., *Analyse pour l'agrégation*, DUNOD, (2013) .

[12] Tartar, L. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*. Springer Science & Business Media. Vol. 3, (2007).

Résumé

Ce mémoire se focalise sur l'étude approfondie des espaces de Sobolev et de leurs applications. On a examiné en détail les notions fondamentales, notamment les définitions et les propriétés fonctionnelles essentielles de ces espaces, tels que la complétude, la densité, l'injection, les espaces de traces, et bien d'autres encore.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter ces espaces de Sobolev de manière claire et accessible, en mettant en évidence leurs propriétés fonctionnelles et leur utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

Mots clés : Espace Sobolev, Dérivées faibles, densité, Injections.

Abstract

This thesis is dedicated to the study of Sobolev spaces and their applications. We have seen the most important concepts, such as the definitions and functional properties of Sobolev spaces, including completeness, density, injection, trace spaces, and more.

This thesis aims to provide a clear understanding of these Sobolev spaces, their functional properties, and their application to the resolution of Partial Differential Equations.

Keywords: Sobolev space, Weak derivatives, Density, injections.