الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب

كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

محاضرات في مقياس :

بحوث العمليات

من إعداد الدكتور:

بن عامر عبد الكريم

موجهة لطلبة السنة الثالثة ليسانس: تخصص اقتصاد كمي

السنة الجامعية 2023-2024

مقدمة:

يعتبر فن اتخاذ القرار عملية قديمة قدم الإنسان، أين كان هذا الأخير يجد نفسه أمام قضايا ومواقف مختلفة تفرض عليه اتخاذ القرار بشأنها بهدف بقائه واستمراره، إلا أن اتخاذ القرار كنظرية أو علم له موضوعه وخصائصه وأساليبه التي تميزه فهو حديث العهد يرجع لأقل من خمسين سنة. ورغم أن نظرية القرار بدأت تتطور بشكل كبير وفعال إبان الحرب العالمية الثانية فهي إلى يومنا هذا في تطور مستمر وذلك لوجود الكثير من العلوم التي تدعم عملية اتخاذ القرار.

ويأتي علم بحوث العمليات ليوفر أساليب كثيرة يمكن أن تساعد صناع القرار في المؤسسات الاقتصادية في حل الكثير من المشكلات التي تواجههم خاصة وأنه يعتمد على مجموعة من الأساليب الكمية الرياضية لتقييم البدائل المختلفة المتاحة بطريقة علمية ومنهجية منظمة للوصول إلى الحلول المثلى

ونظرا للأهمية المعتبرة التي أولي بها مقياس بحوث العمليات كمادة علمية في العلوم المختلفة جاء هذا العمل لتسلط الضوء على هذا المقياس، فهي موجهة أساسا إلى طلبة الجامعات في ميدان العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية والمالية في دراسات الطور الجامعي،كما تعتبر أداة مهمة وفعالة للباحثين في مجال صناعة القرارات الإدارية لتزويد معارفهم وتنمية كفاءاتهم في كيفية حل المشكلات الإدارية التي تواجههم في الحياة العملية

وجاءت فصول هذا العمل مختصرة وتناولت بصفة موجزة كل ما يحتاج إليه الطالب لمقياس بحوث العمليات وفق البرنامج المقرر، حيث سيتناول الفصل الأول نظرية اتخاذ القرار. أما الفصل الثاني فسنحاول فيه إلقاء الضوء على البرمجة الخطية التي غالبا ما يستعين بها صانع القرار في عمليته الإدارية حتى تتسم قراراته بنوع من العقلانية. أما الفصل الثالث فسنتطرق إلى مسائل النقل والتخصيص. وأما الفصل الأخير فسنعرض نظرية الألعاب الإستراتيجية.

I – ماهية بحوث العمليات:

يعتبر موضوع بحوث العمليات فرع من فروع الرياضيات – خاصة الرياضيات التطبيقية، ويستخدم لتوفير قاعدة علمية لصناع القرار في المؤسسات لاتخاذ قرارات فعالة في الوقت المناسب لحل المشاكلات التي تواجههم. وتجنيبهم المخاطر المترتبة عن اتخاذ القرارات المبنية على التخمين والحدس الشخصي أو باستخدام قواعد الإبهام. إدارة الأعمال هي مفهوم متعدد الأبعاد وديناميكي. إنه متعدد الأبعاد، لأن مشاكل إدارة الأعمال وحلولها لها نتائج على عدة أبعاد، مثل المجالات البشرية والاقتصادية والاجتماعية والسياسية. نظرًا لأن صانع القرار يدير نظامه في بيئة معقدة وسريعة التغير ولا تتسم بالثبات ، وبالتالي فهي ديناميكية بطبيعتها. ومن ثم فإن أي صانع قرار أثناء اتخاذ القرارات، يأخذ في الاعتبار جميع الجوانب بالإضافة إلى الجانب الاقتصادي، بحيث يكون حله للمشكلة التي تواجهه مفيدًا من جميع الجوانب. وبالتالي منهجه العام هو تحليل المشكلة من الناحية الاقتصادية ثم تنفيذ الحل إذا كان كذلك ليست يتوافق مع الجوانب أخرى المتوفرة للمؤسسة التي يديرها مثل القيود البشرية والاجتماعية والسياسية.

ويأتي علم بحوث العمليات ليوفر أساليب كثيرة يمكن تبنيها في حل كثير من المشكلات الإدارية خصوصا وأن هذا العلم كان قد نجح نجاحا باهرا عندما اعتمدت أساليبه في المجال العسكري أثناء الحرب العالمية الثانية حيث شهد تطورا كبيرا وإضافات نوعية عندما ساعد القادة العسكريين في تحقيق انتصارات باهرة وقلل من الخسائر في صفوف قواتهم البرية والبحرية والجوية. إن هذا العلم أصبح اليوم مادة دراسية في جميع المعاهد والجامعات في العالم بدون استثناء في تخصصات إدارة الأعمال والعلوم القريبة منها وكذا الأمر في تخصصات الهندسة والحاسوب والإحصاء والرياضيات و أيضا الكليات العسكرية على اختلاف تخصصاتها فضلا عن تطبيقات كثيرة في أغلب العلوم المعاصرة. ولا بد من الإشارة إلى أن المجالات العلمية المتخصصة بنشر البحوث النظرية والتطبيقية الخاصة بهذا العلم أصبحت من الكثرة بحيث لا يمكن للباحث متابعتها جميعا بل ولا حتى جزء يسير منها ويختص بعضها كما أشرنا سابقا بالدراسات التطبيقية في حين كرس الآخر صفحاته للنماذج والبحوث النظرية. وقد استحدثت جوائز علمية كثيرة للتطبيقات المتميزة التي تسهم في علاج مشكلات تعاني منها كثير من القطاعات الاقتصادية أو الإدارية العامة والحكومية وكذا الأمر مع الكثير من المؤتمرات السنوية الدورية التي تعقد في شتى أرجاء العالم والتي تمثل إضافات مستمرة و إغناء دائم لأدبيات هذا العلم. نحن الآن في عالم نامي أحوج ما نكون إلى اللجوء إلى هذا العالم والاستعانة بأساليبه بغرض التعامل مع كثير من مشاكلنا والعمل على تدريسه في

جامعاتنا و معاهدنا وفق الأصول العلمية وحيث الطلبة والعاملين على اعتماد الأساليب الكمية في بحوثهم لزيادة دقة النتائج التي توصلوا إليها[1].

I -1- تعريف بحوث العمليات:

بحوث العمليات هي الوسائل المركبة المبنية على النماذج الرياضية التي توصل إلى استنتاج كمي بشكل كامل أو جزئي تستفيد منه عناصر التحكم والسيطرة، وينصب مجهودها في الوقت الراهن نحو المسائل المرتبطة بالإنتاج، وكذلك نماذج القتال عالية الأداء[2].

كما تعرف على أنها " الأساليب الكمية للمساعدة في حل المشاكل واتخاذ القرارات الرشيدة كل ما أمكن ذلك[3]".

من التعريفين السابقين يتبين أن بحوث العمليات تهتم بقطاع معين من الرياضيات، وهو قطاع الرياضيات التحسين في ظل القيود، ولكن عن طريق تقييد المجال: بالإضافة إلى ذلك يتضح أننا سوف نتعامل فقط مع مشاكل القرار الاقتصادي، أو في أي حالة تشبهها: جميع متغيرات القرار، والمعايير، سيكون للقيود أهمية اقتصادية وإدارية. لذلك سيكون السؤال إضفاء الطابع الرسمي على مشاكل تخصيص الموارد، والتنظيم اللوجستي، جدولة الإنتاج، تخطيط الإنتاج وغيرها.

ويطلق على بحوث العمليات مسمى التحليل الكمي نسبة إلى الأساليب الكمية التي تستخدم في اتخاذ القرارات وحل المشاكل، كما يطلق عليها مسمى علم الإدارة لعدة أسباب نذكر منها[4]:

- تستخدم الطرق العملية في البحث والاستقصاء للمساعدة في اختيار البديل الأفضل من بين البدائل المتاحة، وللتحقق من صحة النماذج التي يتم تطويرها.
- تميزها عن الإدارة العلمية التي استخدمت أساليب علمية لرفع إنتاجية العاملين.

[1] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، إثراء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن، 2009، ص.13.
[2] محمود علي متولي عجوز، بحوث العمليات والإحصاء، المعهد العالي للحاسب ونظم المعلومات بأبي قير، دار الفكر الجامعي، الإسكندرية، 2007، ص127.
[3] د. محمود الفياض، د. عيسي قدادةن، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الطبعة العربية، 2007،ص4.
[4] Lapin, lawrence L ; whesler, william D ; quantitative decision making, wandsworth/ thomson learning, belmont, USA 2002, p2.

I –2– التطور التاريخي لبحوث العمليات:

بحوث العمليات هي في الأصل "وليدة حرب". ذلك لأن المشكلة الأولى التي حاولت حلها بطريقة منهجية كانت تتعلق بكيفية ضبط فتيل قنبلة تم إسقاطها من طائرة إلى غواصة. في الواقع ، كان الأصل الرئيسي لبحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية. إبان وقت الحرب العالمية الثانية، دعت الإدارة العسكرية في إنجلترا فريقًا من العلماء والمتخصصين لدراسة المشكلات الإستراتيجية والتكتيكية المتعلقة بالدفاع الجوي والبري للبلاد. اكتسبت المشكلة أهمية لأنه في ذلك الوقت كانت الموارد المتاحة لإنجلترا محدودة للغاية وكان الهدف هو كسب الحرب بالموارد المحدودة المتاحة. كانت الموارد مثل الغذاء والأدوية والذخيرة والقوى العاملة وما إلى ذلك، مطلوبة من إدارة الحرب وأيضا للاستخدام لسكان البلاد. وكان من الضروري اتخاذ قرار بشأن الاستخدام الأكثر فعالية للموارد المتاحة لتحقيق الهدف. كما كان من الضروري استخدام الموارد العسكرية بحذر. وعلى هذا الأساس دعا الجنرالات العسكريون فريقًا من الخبراء من مختلف أنحاء البلاد مثل العلماء والأطباء وعلماء الرياضيات ورجال الأعمال والأساتذة والمهندسين وما إلى ذلك، وتم إعطائهم مشكلة استخدام الموارد لمناقشتها والخروج بأفضل حل ممكن لها. أجرى هؤلاء المتخصصون جلسة عصف ذهني وتوصلوا إلى طريقة لحل المشكلة أطلقوا عليها اسم "البرمجة الخطية". نجحت هذه الطريقة في حل مشكلة الحرب. وكما يشير الاسم، تستخدم كلمة "عمليات" للإشارة إلى المشاكل العسكرية وكلمة "بحوث" تستخدم لاختراع وابتكار طريقة جديدة. نظرًا لأن طريقة حل المشكلة هذه قد تم اختراعها خلال فترة الحرب، فقد تم تسمية الموضوع باسم بحوث العمليات "OPERATIONS RESEARCH" واختصاره بـ "O.R." وبعد الحرب العالمية كانت هناك ندرة في المواد الصناعية ووصلت الإنتاجية الصناعية إلى أدنى مستوى. كان هناك ركود صناعي ولحل المشكلة الصناعية تم استخدام طريقة البرمجة الخطية للحصول على الحل الأمثل. ومنذ ذلك الحين، تم القيام بالكثير من الأعمال في هذا المجال واليوم أصبح موضوع بحوث العمليات تتوفر على العديدة من الطرق لحل أنواع مختلفة من المشاكل. وبعد رؤية النجاح الذي حققه الجيش البريطاني خلال الحرب العالمية الثانية ، بدأت الإدارة العسكرية للولايات المتحدة الأمريكية بتطبيق التقنيات على الأنشطة المختلفة لحل المشكلات التي تواجهها في المجالين العسكري والمدني وقد أطلقوا أسماء مختلفة على هذا التخصص. منها التحليل التشغيلي، وتقييم العمليات، بحوث العمليات، تحليل النظام، تقييم النظام، بحوث النظم، الأساليب الكمية ، تقنيات التحسين، علوم الإدارة وغيرها، ولكن الاسم الأكثر استخدامًا هو بحوث العمليات. في المجال الصناعي أهم مشكلة تستخدم فيها هذه التقنيات

هي كيفية تحسين وتعظيم الربح أو كيفية تدنية وتقليل التكاليف. وكانت البداية بنموذج البرمجة الخطية وطريقة Simplex والتي طورها عالم الرياضيات الأمريكي George B. Dontzig سنة 1947 والتي أعطت فرصة للتوجه إلى التقنيات والتطبيقات الجديدة من خلال جهود وتعاون الأفراد المهتمين في المجال الأكاديمي والمجال الصناعي. **لكن** اليوم أصبح الأمر مختلفاتماما. حيث يوجد عدد كبير من مستشاري بحوث العمليات للتعامل مع أنواع مختلفة من المشكلات. في الهند مثلا، لدينا جمعية الهند لبحوث العمليات 1959 (O.R. Society of India 1959). للمساعدة في حل المشاكل المختلفة. كما أنه في وقتنا الحاضر يتم تدريس تقنيات بحوث العمليات على مستوى المدارس الثانوية. ومن بين المؤسسات الصناعية الهندية التي تستعمل تقنيات بحوث العمليات لحل المشكلات التي تواجهها نجد Delhi Cloth Mills, Indian Railways، Indian Airline، Hindustan Lever، Tata Iron and Steel Company، Fertilizers Corporation of India، Defense Organization. في جميع المؤسسات المذكورة أعلاه، يتصرف أفراد بحوث العمليات بصفتهم الموظفين لدعم المديرين التنفيذيين في عملية اتخاذ القرارات. وكخلاصة لما سبق يمكننا أن القول أن بحوث العمليات تلعب دورًا حيويًا في كل مؤسسة، وخاصة في عملية صنع القرار[5].

I -3- أهداف بحوث العمليات:

يتواجد المدراء وصناع القرار اليوم في وضع معقد للغاية بسبب التعقيد في منظمات الأعمال. حيث تضم وحدة الأعمال اليوم عددًا من الأقسام ويعمل كل قسم لتحقيق أهداف المنظمة. أثناء القيام بذلك، قد يتعارض الهدف الفردي لأحد الأقسام مع هدف القسم الآخر، على الرغم من أنهما يعملان لتحقيق الهدف المشترك في مصلحة المنظمة. في مثل هذه الحالة ستصبح المسألة معقدة للغاية بالنسبة للمدير العام لتحقيق الانسجام بين الإدارات وتخصيص الموارد المتاحة من جميع الأنواع للإدارات لتحقيق هدف المنظمة. في الوقت نفسه ، تكون البيئة التي تعمل فيها المنظمة ديناميكية للغاية بطبيعتها ويتعين على المدير اتخاذ القرارات دون تأخير للوقوف على المنافسة في السوق. ويكون القرار الخاطئ أو القرار غير المناسب مكلفًا للغاية. ومن هذا الأساس أصبحت عملية صنع القرار معقدة للغاية وفي نفس الوقت مهمة للغاية في بيئة تكون بها المصالح متضاربة والاستراتيجيات التنافسية متضاربة في الكثير من الأحيان . وهنا من المستحسن أن يستخدم المدير الحديث الأساليب العلمية التي تعتمد على القواعد الرياضية أثناء اتخاذ القرارات بدلاً من الاعتماد على أساليب التخمين والحدس الشخصي. ومن ثم

[5] P.Rama Morthy, Opérations Research, Second Edition,NEW AGE, intell engineering college Anantapur, New Delhi, 2007, p.4.

فإن المعرفة بأساليب بحوث العمليات هي وسيلة أساسية فعالة للمدير الذي يشارك في عملية صنع القرار. وبالتالي يجب يدعم المعرفة التي يكتسبها بالرياضيات والإحصاء والاقتصاد وما إلى ذلك، بحيث يكون القرار الذي يتخذه هو القرار الأمثل لمنظمته. وتوفر له بحوث العمليات المعرفة وتساعده على اتخاذ قرارات سريعة وفي الوقت المناسب، والتي تعتبر مثالية للمؤسسة.

ومن ثم فإن الهدف من بحوث العمليات هو:

الهدف من بحوث العمليات هو توفير أساس علمي لصانع القرار لحل المشكلات التي تنطوي على تفاعل مختلف مكونات المنظمة من خلال توظيف فريق من المختصين من مختلف المجالات، يعملون جميعًا معًا لإيجاد حل هو الأفضل لمصلحة المنظمة ككل. يُعرف الحل الأفضل الذي يتم الحصول عليه بالقرار الأمثل.

I -4- أسباب انتشار علم بحوث العمليات[6]:

- إن المدراء في عالم اليوم يحتاجون إلى وسائل تساعدهم في اتخاذ قرارات أكثر رشد وعقلانية بعد أن تعقدت المشاكل وتضخمت وأصبحت متداخلة ومتشعبة. إن أسلوب الارتجال والحكم الشخصي لوحده لا يكفيان للتصدي لهذه المشاكل وحلها بطريقة فاعلة. و أساليب بحوث العمليات تمثل أداة فاعلة في أيدي هؤلاء المدراء.
- إن الرغبة في الوصول إلى حلول مثلى سواءا كانت تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف يقتضي اعتماد أساليب علمية دقيقة. فليس بالإمكان اعتماد التجربة والخطأ في مجال الإنتاج والتوزيع وغيرها من العمليات حيث أن عالم اليوم لم يعد فيه متسع لاتخاذ القرارات غير صائبة ومن ثم تعديلها بدون تكاليف عالية، بعبارة أخرى يجب أن يكون القرار صائبا من أول مرة.
- النجاح الباهر الذي تحقق في المجال العسكري أثناء الحرب العالمية الثانية وغيرها من الحروب في مجال اختيار الأسلحة المناسبة أو توزيع القطعات العسكرية والقيام بأعمال الدفاع المدني أثناء الحروب وكذا تطوير الأسلحة الجديدة، كما هذا شجع على تطبيق نفس الأساليب في الأعمال المدنية التي أعطة بدوره نتائج ممتازة.

[6] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، نفس المرجع السابق، ص.16.

❖ التوسع الكبير في استخدام أجهزة الحاسوب التي تتسم بالسرعة العالية والدقة الأمر الذي أدى إلى حل النماذج التي تحتوي على معادلات معقدة وكثيرة المتغيرات. مما ساعد في توسيع وازدياد التطبيقات لبحوث العمليات في حل المشاكل الإدارية. كذلك فإن تطوير البرمجيات الكثيرة التي تسهل كثيرا حل المشكلات المختلفة قد ساهم في تطوير المناهج المختلفة في هذا العلم ووفر وسيلة مساعدة للطلاب والباحثين.

❖ حاجة العلوم المختلفة الأخرى لأساليب بحوث العمليات فلا يوجد تخصص تقريبا إلا وتجد أن بعض هذه الأساليب مثلا على الأقل موجودة في مناهجه فالحاسوب والهندسة بكل فروعها وإدارة الأعمال والرياضيات والإحصاء وغيرها من العلوم تعتبر بحوث العمليات واحدة من أهم موادها الدراسية.

I -5- الوظائف الرئيسية لبحوث العمليات:

يمكن أن نجمل الوظائف الرئيسية لبحوث العمليات في ميدان الأعمال كالتالي[7]:

- تسهيل عملية اتخاذ القرار ومساعدة المدراء ولكن ليس إحلال الحلول محلهم.
- توفير حلول لمختلف المشاكل الإدارية.
- تعتبر أداة فعالة في مجال البحث العلمي في ميادين إدارة الأعمال.
- تساعد في تخصيص الموارد بشكل فاعل على الاحتياجات الكثيرة.
- المساعدة في اختيار الاستراتيجيات المختلفة في الإنتاج والتسويق والتمويل.
- المساعدة في تخفيض التكاليف في كثير من القرارات الإدارية.
- توفر أداة مهمة للدراسة ردود الفعل وتحليل الحساسية للكثير من القرارات المتخذة.

I -6- منهج بحوث العمليات:

تعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي ابتداءا من بناء النموذج إلى حله فاختباره فتطبيقه، كون أن التحضير لاتخاذ القرارات في المؤسسات بمساعدة بحوث العمليات يتطلب المرور بمجموعة من المراحل منها ما يلي[8]:

[7] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، نفس المرجع السابق، ص.17.
[8] محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الرابعة، الجزائر، 2004، ص.7.

- ✓ تحديد المشكلة وتحليلها إلى عناصر أولية.
- ✓ بناء النموذج الرياضي المناسب والذي يتماشى مع طبيعة المشكلة.
- ✓ اختبار مدى صحة النموذج.
- ✓ إيجاد حل للنموذج بعد معرفة الطريقة التي تخضع لها المشكلة.
- ✓ تنفيذ خطة الحل المتوصل إليها.

هذه الخطوات المنهجية لابد من المرور عليها لحل أي مشكل علمي في الإدارة الاقتصادية للموارد.

II – أسلوب البرمجة الخطية:

إن أول محاولة في مجال البرمجة الخطية قام بها العالم جورج ستيغلر G.stiegier عام 1945، حين حاول دراسة الحد الأدنى للنفقات اللازمة لإنسان ما، لتأمين الكميات الكافية لحياته، والمكونة من تسع مقومات غذائية كالفيتامين والحديد، يحصل عليها من سبع وسبعون مادة غذائية كانت متوفرة في الأسواق حينذاك، هذه الدراسة قادت هذا العالم إلى وضع أول نموذج رياضي سماه (البرنامج الخطي)[9]، ولكنه عجز عن حل هذا النموذج باستعمال الطرق الرياضية التي كانت موجودة كطريقة لاغرانج. وفي سنة 1947 قام العالم جورج دانتزيغ G.Dantzing بإيجاد طريقة السمبلكس التي نشرت سنة 1951، حيث عدلت وطورت حتى تتلائم مع جميع الحالات الممكنة للنماذج الخطية التي رافقت التطورات الاقتصادية والصناعية إلى يومنا هذا.

وسميت بالبرمجة الخطية لأنها تستعمل معادلة خط المستقيم في بناء النموذج الرياضي الذي يتكون من معادلتين أو أكثر ويساعد في تحديد الحلول الممكنة واختيار البديل المناسب والأفضل من بينها. عامة البرمجة الخطية تتضمن دالة الهدف في الغالب إحدى الغايتين الرئيسيتين: تعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف أو الخسائر مما يؤدي في النهاية إلى كفاءة الإنتاج وتسعير المنتجات بأسعار منافسة[10].

II – 1– متطلبات استخدام البرمجة الخطية:

هناك عدة متطلبات أو شروط لاستخدام نموذج البرمجة الخطية يمكن إجمالها فيما يلي:

- شرط الخطية: أن تكون العلاقة بين المتغيرات في شكل خطي.
- تعدد القيود: وجود مجموعة من القيود التي تؤثر على حرية متخذ القرار.
- اتصال البيانات:أن تكون قيم المتغيرات قابلة للتجزئة.
- تعدد البدائل: وجود أكثر من بديل أمام متخذ القرار.
- الهدف: يقوم نموذج البرمجة الخطية بتحقيق هدف وحيد إما تعظيم أو تدنية.
- الصياغة الكمية للمشكلة: أن تأخذ المتغيرات التي تتضمنها المشكلة طابع كمي.
- عدم التفاعل: ألا توجد تفاعل أو علاقة بين المتغيرات المستقلة فيما بينها.
- عدم السالبية: وهو ألا تأخذ المتغيرات سواء المتعلقة بدالة الهدف أو القيود قيما سالبة.

[9] إبراهيم نائب، د. انعام باقية، بحوث العمليات، خوارزميات وبرامج حاسوبية، دار وائل للنشر،الطبعة الأولى، 1999، ص27.
[10] محمود فياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2007، ص.34.

- الأجل القصير:أن تتحقق العلاقة الخطية بين المتغيرات في الأجل القصير لأنه في الأجل الطويل تصبح هذه العلاقة غير خطية وعامة يأخذ نموذج البرمجة الخطية الشكل التالي:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq, =, \geq b_i$ i=1,2,............,m

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{MAX or MIN}$$

$\boldsymbol{x_j \geq 0}$ j=1,2,..........,n

II – 2- طرق الحل باستعمال نموذج البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية هي أحدي أهم الأساليب التي تساعد صناع القرار في المؤسسات على اتخاذ قرارات صائبة، "فهي طريقة رياضية تمكن من التوصل لأفضل وأمثل الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط رياضية معينة فنجد كلمة البرمجة والتي تشير إلى الطريقة الرياضية المنتظمة التي يتم على أساسها التوصل إلى الحل الأمثل ونجد كلمة الخطية والتي تشير إلى الشروط الواجب توافرها في العلاقات بين المتغيرات التي يجب أن تكون خطية"[11]. بالإضافة إلى أنها أداة بيانية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل لحلها بإحدى الطرق من أهمها:

- طريقة الحل البياني
- طريقة السمبلكس
- طريقة Big M
- طريقة النقل والتوزيع
- طريقة التخصيص أو التعيين
- نظرية الألعاب الاستراتيجية.
- البرامج الجاهزة (lingo, lindo)

[11] P. ROGER , Gestion de production, Dalloz-Sirey, Paris, 1992, p.31.

II – 2– 1– الطريقة البيانية:

تتناول مسائل علمية بسيطة يمكن حلها بطريقة الرسم البياني، حيث لا يمكن حل نموذج البرمجة الخطية إلا إذا كانت تحتوي على متغيرين، وبالتالي تكون منطقة الحل على شكل مسطح ذو بعدين، وإذا كان هناك ثلاث متغيرات فإن منطقة الحل تكون على شكل مجسم تصعب معالجته بيانيا، حيث يصعب حصر رؤوسه التي تمثل بدائل الحلول الممكنة، أما إذا كانت المسألة ذات أربع متغيرات فإنه لا يمكن تمثيلها بيانيا على شكل رسم هندسي.

ويتميز هذه الطريقة بسهولتها ووضوحها، وتستند على منطقة الحل الأولي المقبول (منطقة الحلول المقبولة)، ثم نقوم بتحديد القيم المتطرفة التي تجعل الأرباح أعظم ما يمكن إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Maximisation) وأقل ما يمكن إذا كانت دالة الهدف تقليل التكاليف (Minimisation)، ويتم الوصول إلى الحل الأمثل بالاعتماد على الطريقة البيانية من خلال تطبيق الخطوات التالية:

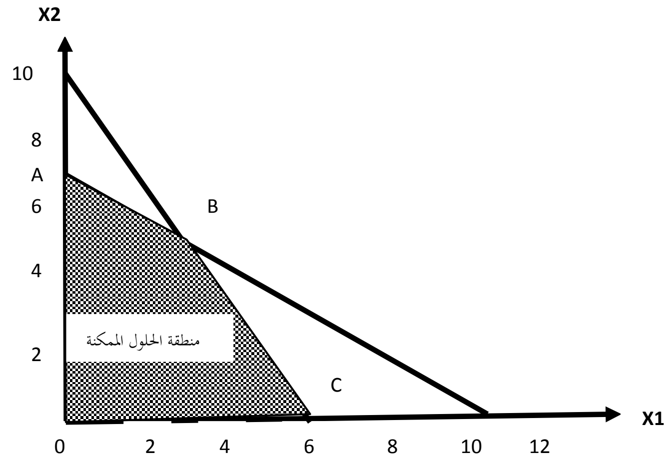
- تحديد دالة الهدف معبرا عنها بشكل معادلات رياضية.
- تحديد القيود الموضوعية معبرا عنها بشكل متباينات ثم تحويلها إلى شكل معادلات رياضية.
- تحديد الحلول الممكنة للمشكلة، وذلك من خلال تعيين نقطتين لكل معادلة من أجل رسم المعادلات (المستقيمات) بيانيا.
- إيجاد الحل الأمثل بيانيا والذي يختلف باختلاف المشكلة تعظيم الأرباح (Maximisation) أو تقليل التكاليف (Minimisation) من خلال النقاط المتطرفة في الشكل البياني.
- في حالة التعظيم (Maximisation) الحل الأمثل هو أبعد نقطة إلى نقطة الأصل (0، 0)، أما في حالة التقليل (Minimisation) الحل الأمثل هو أقرب نقطة إلى نقطة الأصل (0، 0).

حالة تعظيم الأرباح (Maximisation):

ونهدف من خلال هذه الحالة إلى إيجاد أكبر عائد ممكن للمشكلة المعطاة بيانيا

مثال1: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بالاعتماد على الطريقة البيانية:

$$Max\ z = 8x_1 + 5x_2$$
ST
$$5x_1 + 3x_2 \leq 30$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



1/ $\mathbf{5x_1 + 3x_2 = 30}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10 \quad (0\,,10)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \quad (6\,,0)$

2/ $\mathbf{2x_1 + 3x_2 = 21}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \quad (0\,,7)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10.50 \quad (10.50\,,0)$

إذن النقاط المتطرفة في منطقة الحلول الممكنة هي (0، A، B، C)

- نقوم بحساب x_1 و x_2 عند النقطة B لدينا.

$$5x_1 + 3x_2 = 30$$
$$2x_1 + 3x_2 = 21$$

بحل هذه الجملة نجد:

$x_1 = 3$

$x_2 = 5$

حساب قيمة دالة الهدف:

النقاط		دالة الهدف
0	$(0\,,0)$	Z= 8(0)+5(0)=**0**
A	$(0\,,7)$	Z= 8(0)+5(7)=**35**
B	$(3\,,5)$	Z= 8(3)+5(5)=**49**
C	$(6\,,0)$	Z= 8(6)+5(0)=**48**

بما أن دالة الهدف هي دالة تعظيم (Maximisation) فإن النقطة (3, 5) B هي أبعد نقطة عن نقطة الأصل (0، 0) وبالتالي تعتبر الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية هذه وتكون قيم المتغيرات كالتالي:

$$x_1 = \mathbf{3}$$
$$x_2 = \mathbf{5}$$
$$Z = \mathbf{49}$$

مثال2:

تنتج مؤسسة نوعين ما من المنتجات أجهزة من النوع الصغير وأجهزة من النوع الكبير. كما أن مواردها من المواد الأولية محدودة والطاقة الإنتاجية. تريد هذه المؤسسة تحديد أفضل مزيج إنتاجي من هذين المنتجين والذي من خلاله يمكنها الحصول على أفضل ربح ممكن والجدول التالي يعطي مستلزمات عملية التصنيع للمنتجين:

	أجهزة من النوع الكبير	أجهزة من النوع الصغير
مادة أولية (كلغ)	12	8
عمل الآلة (ساعة)	2	1

علما أن كمية المادة الأولية المتوفرة بالمؤسسة هى 120 كلغ، 16 ساعة في اليوم للآلة. كما أن الشركة تتوقع الحصول على ربحا قدرة 15 دينار للجهاز الواحد من النوع الكبير و10 دينار للجهاز من النوع الصغير.

المطلوب:

تحديد أفضل مزيج إنتاجي من المنتجين والذي تحقق أقصى ربح ممكن باستعمال الطريقة البيانية ؟

الحل:

الصياغة الرياضية للمشكلة

- **تحديد دالة الهدف:**

$$\mathrm{Max}\,.\mathrm{Z} = 15\mathrm{x}_1 + 10\mathrm{x}_2$$

- **القيود الموضوعية:**

– قيد الطاقة الإنتاجية:

$$12x_1 + 8x_2 \leq 120$$

– قيد عمل الآلة:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 16$$

– قيد عدم السالبية:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

وعليه يصبح نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$$\text{Max}\,.Z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\text{ST}$$

$$12x_1 + 8x_2 \leq 120$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

لحل المسألة بيانيا يجب أولا تحوي المتراجحات (المتباينات) إلى معادلات كالتالي:

$$\text{Max}\,.Z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\text{ST}$$

$$12x_1 + 8x_2 = 120$$

$$2x_1 + 1x_2 = 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ثم نقوم بتمثيل هذه المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كالتالي:

$$1/ \quad \mathbf{12x_1 + 8x_2 = 120}$$

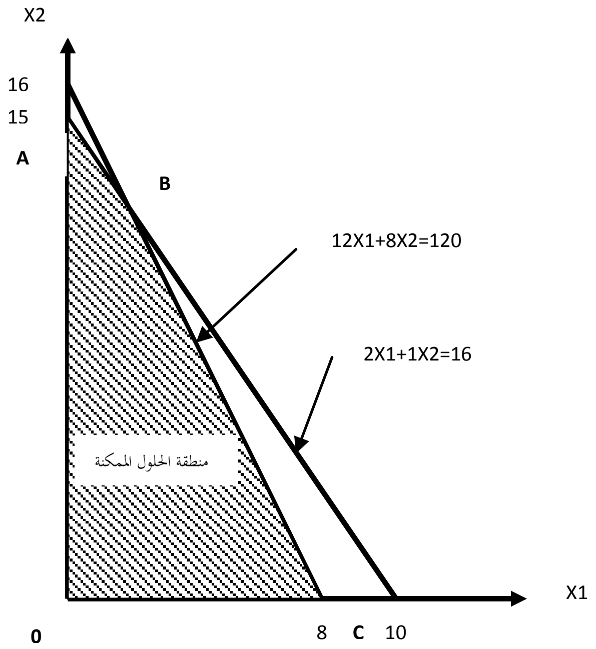
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 15 \qquad (0\,,15)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10 \qquad (10\,,0)$$

$$2/ \quad \mathbf{2x_1 + 1x_2 = 16}$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 16 \qquad (0\,,16)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \qquad (8,0)$$



إذن النقاط المتطرفة في منطقة الحلول الممكنة هي (0، A، B، C)

- نقوم بحساب x_1 و x_2 عند النقطة B لدينا.

$$12x_1 + 8x_2 = 120$$

$$2x_1 + 1x_2 = 16$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 8$$

حساب قيمة دالة الهدف:

النقاط	دالة الهدف
0 (0 , 0)	Z= 15(0)+10(0)=**0**
A (0 , 15)	Z= 15(0)+10(15)=**150**
B (4 , 8)	Z= 15(4)+10(8)=**140**
C (8 , 0)	Z= 15(8)+10(0)=**120**

بما أن دالة الهدف هي دالة تعظيم (Maximisation) فإن النقطة (0, 15) A هي أبعد نقطة عن نقطة الأصل (0، 0) وبالتالي تعتبر الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية هذه وتكون قيم المتغيرات كالتالي:

$$x_1 = \mathbf{0}$$
$$x_2 = \mathbf{15}$$
$$Z = \mathbf{150}$$

حالة تقليل التكاليف (Minimisation):

ونهدف من خلال هذه الحالة إلى إيجاد أقل تكلفة ممكنة للمشكلة المعطاة بيانيا

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\mathrm{Min\,.Z} = 200x_1 + 160x_2$$
ST
$$12x_1 + 4x_2 \geq 24$$
$$4x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$12x_1 + 8x_2 \geq 36$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

1/ $\mathbf{12x_1 + 4x_2 = 24}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \quad (0\,,6)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad (2\,,0)$

2/ $\mathbf{4x_1 + 4x_2 = 16}$

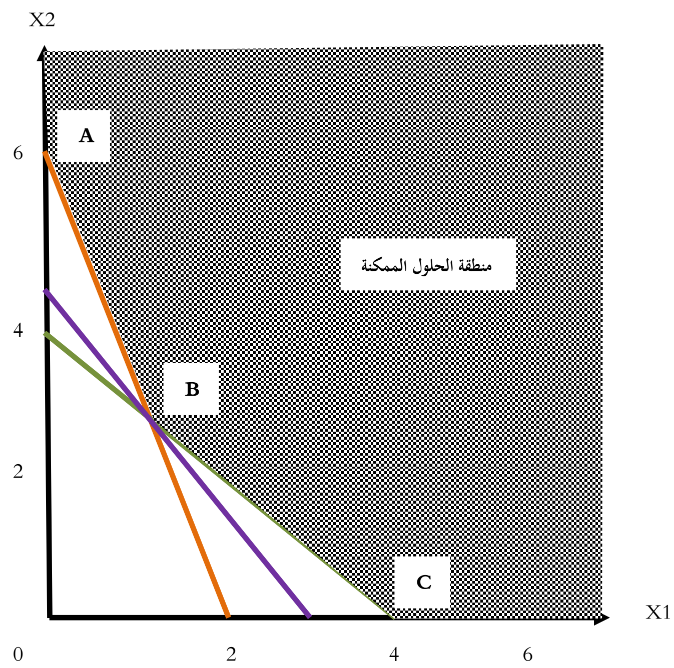
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \quad (0\,,4)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \quad (4, 0)$

3/ $\mathbf{12x_1 + 8x_2 = 36}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4.5 \quad (0\,,4.5)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad (3\,,0)$



إذن النقاط المتطرفة في منطقة الحلول الممكنة هي (0، A، B، C)

- نقوم بحساب x_1 و x_2 عند النقطة B التي هي نقطة تقاطع المستقيمات الثلاث لدينا.

$$12x_1 + 4x_2 = 24$$
$$4x_1 + 4x_2 = 16$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 3$$

أو:

$$4x_1 + 4x_2 = 16$$
$$12x_1 + 8x_2 = 36$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 3$$

حساب قيمة دالة الهدف:

النقاط		دالة الهدف
0	(0 , 0)	Z= 200(0)+160(0)=**0**
A	(0 , 6)	Z= 200(0)+160(6)=**960**
B	(1 , 3)	Z= 200(1)+160(3)=**680**
C	(4 , 0)	Z= 200(4)+160(0)=**800**

بما أن دالة الهدف هي دالة تقليل (Minimisation) فإن النقطة (1, 3) B هي أقرب نقطة عن نقطة الأصل (0، 0) وبالتالي تعتبر الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية هذه وتكون قيم المتغيرات كالتالي:

$$x_1 = \mathbf{1}$$
$$x_2 = \mathbf{3}$$
$$Z=\mathbf{780}$$

II – 2– 2– الطريقة المبسطة (السمبلكس):

هي من أسهل واشهر الطرق التي تستعمل لحل نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات عكس الطريقة البيانية التي لا يمكن استعمالها إلا إذا كان عدد المتغيرات إثنان فقط. ويعتمد أسلوب السمبلكس على البداية بإحدى ذروات منطقة الحل، والتي تعطي لدالة الهدف قيمة معينة، ثم ننتقل إلى ذروة أخرى تعطي للدالة

قيمة أفضل، وهكذا حتى نصل إلى الذروة التي تعطي للدالة القيمة المثلى، ونقصد بالقيمة المثلى لدالة الهدف إما القيمة العظمى max أو القيمة الدنيا min حسب نوع المسألة المدروسة.

ويعتبر G.B.Danzing أول من استخدم طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية وذلك باكتشاف الطريقة المنظمة لحل مجموعة من المشاكل التي تتوفر فيها شروط البرمجة الخطية وقد نشر أول بحث عنها سنة 1947 وعرفت باسم طريقة السمبلكس التي أصبحت تطبق لحساب عدد كبير من المتغيرات[12].

خطوات الحل باستعمال الطريقة المبسطة:

1 تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصغة القياسية أي تحويل جميع القيود إلى حالة مساواة وإضافة المتغير الوهمي (Si) لكل قيد.

2 تشكيل جدول الحل الأولى المقبول بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات (Xi, Si) في دالة الهدف أو القيود حتى يسمى هذا الجدول بجدول السمبلكس.

3 تحديد المتغير الداخل (entering variable) وذلك من خلال النظر إلى صف معاملات دالة الهدف (Z-Cj) واختيار أكبر معامل بالسالب (أكبر قيمة سالبة).

4 تحديد المتغير الخارج (liaving variable) وذلك من خلال قسمة القيم الموجودة في الجهة اليمنى من الجدول على قيم المتغير الداخل واختيار المتغير الذي يقابله أقل قيمة موجبة ليكون هو المتغير الخارج ليحل المتغير الداخل محل المتغير الخارج في الجدول الجديد.

5 تحديد نقطة المحور وهي عنصر التقاطع بين المتغير الداخل والمتغير الخارج.

6 استخراج قيم عناصر المتغير الداخل وذلك بقسمة عناصر المتغير الخارج على عنصر التقاطع بين المتغير الداخل والمتغير الخارج (نقطة المحور) ويسمى صف عناصر المتغير الداخل بمعادلة المحور.

7 لإيجاد عناصر بقية الصفوف نطبق المعادلة التالية.

عناصر الصف الجديد= عناصر الصف القديم (عنصر التقاطع * معادلة المحور)

8 يتم الوصول إلى الحل الأمثل (optimal Solusion) عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف في الجدول الجديد أكبر من أو تساوي الصفر، فإذا كانت قيمة واحدة على الأقل قيمة سالبة فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل.

[12] سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية، الطبعة 1، بنغازي، ليبيا، 2002، ص. 59

9 -يتم تكرار جميع الخطوات السابقة إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل والذي تكون جيع قيمه أكبر من أو يساوي الصفر ($Z - Cj \geq 0$)

مثال1:

أوجد الحل الأمثل لمشكل البرمجة الخطية بالاعتماد على الطريقة المبسطة:

$$Max\,.Z = 60x_1 + 36x_2$$

ST

$$2x_1 + 4x_2 \leq 400$$
$$6x_1 + 4x_2 \leq 600$$
$$2x_1 \leq 300$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

أولا: تحويل القيود إلى مساوات وذلك بإضافة متغير وهمي (Si) إلى كل قيد فيصبح النموذج على النحو التالي:

$$Max\,.Z = 60x_1 + 36x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

ST

$$2x_1 + 4x_2 + S_1 = 400$$

$$6x_1 + 4x_2 + S_2 = 600$$
$$2x_1 + S_3 = 300$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ثانيا: تحويل قيم النموذج إلى جدول الحل الأولي والذي يتكون من معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية (الوهمية) بالإضافة إلى معاملات متغيرات دالة الهدف. (الصفوف تمثل المتغيرات الأساسية بالإضافة إلى دالة الهدف، الأعمدة تمثل كل المتغيرات الأساسية والوهمية بالإضافة إلى القيم الثابتة)

- معاملات القيد الأول تقابل المتغير الوهمي (S_1)
- معاملات القيد الثاني تقابل المتغير الوهمي (S_2)
- معاملات القيد الثالث تقابل المتغير الوهمي (S_3)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	القيم الثابتة
S_1	2	4	1	0	0	400
S_2	6	4	0	1	0	600
	2	0	0	0	1	300
$Z - C_j$	-60	-36	0	0	0	0

ثالثا: تحديد المتغير الداخل إلى النموذج والذي يقابل أكبر قيمة بالإشارة السالبة في صف ($Z - C_j$) ومن الجدول نلاحظ أن المتغير الداخل هو المتغير (x_1).

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	القيم الثابتة
S_1	2	4	1	0	0	400
S_2	6	4	0	1	0	600
S_3	2	0	0	0	1	300
$Z - C_j$	-60	-36	0	0	0	0

رابعا: تحديد المتغير الخارج من النموذج والذي يقابل أقل قيمة موجبة في عمود القيم الثابتة بعد قسمته على قيم المتغير الداخل (x_1). كما يلي:

$$(S_1 = 400/2 = 200)\ ,\ (S_2 = 600/6 = 100),\ (S_2 = 300/2 = 150)$$

أصغر قيمة هي 100 وبالتالي المتغير الخارج هو S_2

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	القيم الثابتة
S_1	2	4	1	0	0	400
S_2	6	4	0	1	0	600
S_3	2	0	0	0	1	300
$Z - C_j$	-60	-36	0	0	0	0

خامسا: قسمة صف المتغير الخارج (S_2) على قيمة التقاطع (6).

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	القيم الثابتة
S_1	2	4	1	0	0	400
S_2	1	2/3	0	1/6	0	100
S_3	2	0	0	0	1	300
$Z - C_j$	-60	-36	0	0	0	0

سادسا: تصفير باقي قيم عمود المتغير الدخل ($\mathbf{x_1}$) وحساب قيم المتغيرات لباقي الصفوف ($S_1, S_3, Z-Cj$) بالاعتماد على العلاقة التالية: القيم الجديدة للصف= القيم الصف- (قيمة التقاطع * معادلة المحور)

قيم الصف S1	قيم الصف S3	قيم الصف $\mathbf{Z-C_j}$
2-(2*1)=0	2-(2*1)=0	-60-(-60*1)=0
4-(2*2/3)=2/3	0-(2*2/3)=-4/3	-36-(-60*2/3)=4
1-(2*0)=1	0-(2*0)=0	0-(-60*0)=0
0-(2*1/6)=-1/3	0-(2*1/6)=-1/3	0-(-60*1/6)=10
0-(2*0)=0	1-(2*0)=0	0-(-60*0)=0
400-(2*100)=200	300-(2*100)=100	0-(-60*100)=6000

نحصل على الجدول التالي:

القيم الثابتة	S_3	S_2	S_1	x_2	x_1	المتغيرات الأساسية
200	0	-1/3	1	2/3	0	S_1
100	0	1/6	0	2/3	1	x_1
100	1	-1/3	0	-4/3	0	S_3
6000	0	10	0	4	0	$Z-C_j$

بما أن جميع قيم في صف دالة الهدف ($\mathbf{Z-C_j}$) موجبة أو أصفار فإن الحل الذي أمامنا يعتبر الحل الأمثل ومنه:

$$\mathbf{x_1 = 100}$$

$$\mathbf{Z = 6000}$$

II – 2– 3– طريقة M الكبيرة (big M)

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون قيود نموذج البرمجة الخطية من النوع أكبر أو تساوي أ و حالة المساواة، فهنا سنقوم بإضافة متغير صناعي نرمز له بالرمز R بمعامل (+M) إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم (Minimisation) ويضاف معامل (-M) إذا كانت دالة الهدف من النوع تقليل (Maximisation)، حيث هو عدد صحيح كبير موجب.

خطوات طريقة (big M):

تشبه خطوات الحل وفق هذه الطريقة، الطريقة المبسطة (السمبلكس) وتختلف عنها في الخطوتين الأولتين ونوجزها فيما يلي:

- نضيف إلى القيود التي متبايناتها من نوع $\leq$ متغير وهمي (S).
- نطرح من القيود التي متبايناتها من نوع $\geq$ متغير وهمي (S) ونضيف المتغير الصناعي (R).
- نتبع نفس الخطوات كما في حالة السمبلكس.

مثال: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة (**big M**) ؟

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\,.\,Z = 2x_1 + x_2 \\
&\text{ST} \\
&x_1 + 3x_2 \geq 30 \\
&4x_1 + 2x_2 \geq 40 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

الحل:

أولا: تحويل جمع القيود إلى مساوات وذلك بإضافة متغير وهمي (Si) لكل قيد بمعامل (1−) وإضافة متغير إصطناعي (Ri) بمعامل (1+).

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\,.\,Z = 2x_1 + x_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2 \\
&\text{ST} \\
&x_1 + 3x_2 - S_1 + R_1 = 30 \\
&4x_1 + 2x_2 - S_2 + R_2 = 40 \\
&x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}$$

صياغة دالة الهدف z بدلالة المتغيرات المكملة والمتغيرات الاصطناعية.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 - S_1 + R_1 = 30 \\
&R_1 = 30 - x_1 - 3x_2 + S_1 \dots\dots (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 2x_2 - S_2 + R_2 = 40 \\
&R_2 = 40 - 4x_1 - 2x_2 + S_2 \dots\dots (2)
\end{aligned}$$

نعوض قيم R_1 و R_2 في معادلة دالة الهدف فنحصل على:

$$Z = 2x_1 + x_2 + M(30 - x_1 - 3x_2 + S_1) + M(40 - 4x_1 - 2x_2 + S_2)$$

$$Z = 2x_1 + x_2 + M(70 - 5x_1 - 5x_2 + S_1 + S_2)$$

$$Z = 2x_1 + x_2 + 70M - 5Mx_1 - 5Mx_2 + MS_1 + MS_2$$
$$Z = (-5M + 2)x_1 + (-5M + 1)x_2 + MS_1 + MS_2 + 70M$$
$$Z - (-5M + 2)x_1 - (-5M + 1)x_2 - MS_1 - MS_2 = 70M$$

ثانيا: تحويل قيم النموذج إلى جدول الحل الأولي والذي يتكون من معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية (الوهمية) بالإضافة إلى معاملات متغيرات دالة الهدف. (الصفوف تمثل المتغيرات الأساسية بالإضافة إلى دالة الهدف، الأعمدة تمثل كل المتغيرات الأساسية والوهمية والاصطناعية بالإضافة إلى القيم الثابتة)

- معاملات القيد الأول تقابل المتغير الوهمي (R_1)
- معاملات القيد الثاني تقابل المتغير الوهمي (R_2)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	القيم الثابتة
R_1	1	3	-1	0	1	0	**30**
R_2	4	2	0	-1	0	1	**40**
$Z - C_j$	5M-2	5M-1	-M	-M	0	0	**70M**

ثالثا: تحديد المتغير الداخل إلى النموذج والذي يقابل أكبر قيمة موجبة لمعامل (M) في صف ($Z - C_j$) ومن الجدول نلاحظ أن المتغير الداخل هو المتغير (x_2).

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	القيم الثابتة
R_1	1	3	-1	0	1	0	**30**
R_2	4	2	0	-1	0	1	**40**
$Z - C_j$	5M-2	5M-1	-M	-M	0	0	**70M**

رابعا: تحديد المتغير الخارج من النموذج والذي يقابل أقل قيمة موجبة في عمود القيم الثابتة بعد قسمته على قيم المتغير الداخل (x_2). كما يلي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	القيم الثابتة
R_1	1	3	-1	0	1	0	**30**
R_2	4	2	0	-1	0	1	**40**
$Z - C_j$	4M-3	4M-1	-M	-M	0	0	**70M**

$(R_1 = 30/3 = 10)$, $(R_2 = 40/2 = 20)$

أصغر قيمة هي 10وبالتالي المتغير الخارج هو R_1

خامسا: قسمة صف المتغير الخارج (R_1) على قيمة التقاطع (2).

معاملات دالة الهدف	3	1	0	0	M	M	
المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	القيم الثابتة
x_2	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	**10**
R_2	3	2	0	-1	0	1	**40**
$Z - C_j$	4M-3	4M-1	-M	-M	0	0	**70M**

سادسا: تصفير باقي قيم عمود المتغير الداخل (x_2) وحساب قيم المتغيرات لباقي الصفوف (R_2, $Z - C_j$)

بالاعتماد على العلاقة التالية: القيم الجديدة للصف= القيم الصف- (قيمة التقاطع * معادلة المحور)

معادلة المحور هي قيم صف الارتكاز (0، 1/3، 0، -1/3، 1، 1/3)

$$\boldsymbol{R_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 40 \end{pmatrix} - (2)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \\ \frac{-2}{3} \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z-C_j}=\begin{pmatrix}5M-2\\5M-1\\-M\\-M\\0\\0\\70M\end{pmatrix}-(5M-1)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\-\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\\0\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3}M-5/3\\0\\\frac{2}{3}M-1/3\\-M\\-\frac{5}{3}M+1/3\\0\\20M+10\end{pmatrix}$$

نحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية							القيم الثابتة
	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	**10**
	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	**20**
	10/3M-5/3	0	2/3M-1/3	-M	-5/3M+1/3	0	**20M+10**

بما أنه توجد قيم موجبة في صف دالة الهدف ($\mathbf{Z-C_j}$) فإن الحل الذي أمامنا لا يعتبر الحل الأمثل ومنه وعليه نعيد نفس المراحل السابقة من المرحلة الثالثة إلى المرحلة السادسة بحيث يكون (x_1) هو المتغير الداخل لأنه يملك أكبر قيمة موجبة لمعامل (M) في صف ($Z-C_j$) ويكون (R_2) هو المتغير الخارج لانه يقابل أقل قيمة موجبة في عمود القيم الثابتة بعد قسمته على قيم المتغير الداخل (x_2).

$$\left(x_2=\frac{10}{1/3}\right)=30,\ \left(R_2=20/\frac{10}{3}=6\right)$$

ثم نقوم بقسمة صف المتغير الخارج (R_2) على قيمة التقاطع (10/3).

المتغيرات الأساسية	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{R_1}$	$\mathbf{R_2}$	القيم الثابتة
$\mathbf{x_2}$	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	**10**
$\mathbf{R_2}$	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	**6**
$\mathbf{Z-C_j}$	10/3M-5/3	0	2/3M-1/3	-M	-5/3M+1/3	0	**20M+10**

ثم نقوم بتصفير باقي قيم عمود المتغير الداخل ($\mathbf{x_1}$) وحساب قيم المتغيرات لباقي الصفوف ($x_2,\ Z-Cj$) بالاعتماد على العلاقة التالية: القيم الجديدة للصف= القيم الصف– (قيمة التقاطع * معادلة المحور)

معادلة المحور هي قيم صف الارتكاز (6، 3/10، -1/5، -3/10، 1/5، 0، 1)

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - (1/3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/5 \\ -3/10 \\ -1/5 \\ 3/10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/5 \\ 1/10 \\ 2/5 \\ -1/10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z - C_j} = \begin{pmatrix} 10/3M - 5/2 \\ 0 \\ 2/3M - 1/3 \\ -M \\ -5/3M + 1/3 \\ 0 \\ 20M + 10 \end{pmatrix} - (10/3M - 5/3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/5 \\ -3/10 \\ -1/5 \\ 3/10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ -M \\ -M + 1/2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

نحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	القيم الثابتة
x_2	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10	**8**
x_2	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	**6**
$Z - C_j$	0	0	0	-1/2	-M	-M+1/2	**20**

II – 2– 4- النموذج المقابل (THE DUAL MODEL):

لكل نموذج تعظيم للبرمجة الخطية، يوجد نموذج مقابل تسمى يشكل معه ثنائية. نموذجا التعظيم هو المشكل الأصلي هي المشكل الأساسي. والنموذج المقابل هو النموذج المرافق له أو التابع.

النموذج الأولي (الأصلي):

البرنامج الأولي هو برنامج خطي يتكون من تعظيم دالة اقتصادية في مجال محدد بواسطة قيود في شكل متباينات من النوع أصغر من أو يساوي ($\leq$) ويمكن كتابة جميع البرامج الخطية وفق الشكل التالي:

$$\text{Max}\,.\,Z_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

ST

$$\begin{cases} a_{11}\mathrm{x}_1 + a_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{1n}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq b_1 \\ a_{21}\mathrm{x}_1 + a_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{2n}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq b_2 \\ a_{31}\mathrm{x}_1 + a_{32}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{3n}\mathrm{x}_\mathrm{n} \geq b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}\mathrm{x}_1 + a_{m2}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{mn}\mathrm{x}_\mathrm{n} \geq b_m \\ \mathrm{x_j} \geq 0, \qquad \forall_\mathrm{j} = 1, n; \ , \qquad \forall_\mathrm{i} 1, m; \end{cases}$$

النموذج المقابل: هو برنامج خطي يتكون من تقليل دالة اقتصادية في مجال محدد بواسطة قيود في شكل متباينات من النوع أكبر من أو يساوي ($\geq$) ويمكن كتابة جميع البرامج الخطية وفق الشكل التالي:

$$\mathrm{Min}\,.\mathrm{Z}_d = \mathrm{b}_1\mathrm{y}_1 + \mathrm{b}_2\mathrm{y}_2 + \cdots + \mathrm{b}_\mathrm{m}\mathrm{y}_\mathrm{m}$$

ST

$$\begin{cases} a_{11}\mathrm{y}_1 + a_{21}\mathrm{y}_2 + \cdots + a_{m1}\mathrm{y}_\mathrm{n} \leq c_1 \\ a_{12}\mathrm{x}_1 + a_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{m2}\mathrm{y}_\mathrm{n} \leq c_2 \\ a_{13}\mathrm{x}_1 + a_{32}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{m3}\mathrm{y}_\mathrm{n} \geq c_3 \\ \vdots \\ a_{1n}\mathrm{y}_1 + a_{2n}\mathrm{y}_2 + \cdots + a_{mn}\mathrm{y}_\mathrm{n} \geq c_n \\ \mathrm{y_j} \geq 0, \qquad \forall_\mathrm{j} = 1, n; \ , \qquad \forall_\mathrm{i} 1, m; \end{cases}$$

النموذج الأصلي والنموذج المقابل مترابطتان بينهمابشدة. إذا كان أحدهما لديه حلا أمثلا، فالآخر لديه أيضا حلا أمثلا. بالإضافة إلى ذلك ، فإن الحلين لهما نفس القيمة ($(\mathrm{Z_d^*} = \mathrm{Z_b^*})$)، والعكس صحيح إذا كان أحدهما غير محدود ، فلا يوجد حل للآخر.

يجب ملاحظة مايلي[13]:

- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأول تهدف إلى القيمة العظمى (Maximisation) فإن دالة الهدف في النموذج المقابل سوف تهدف إلى القيمة الصغرى (Minimisation) والعكس صحيح.
- تصبح الصفوف في المشكلة الأصلية أعمدة في مشكلة الازدواج.
- تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الأصلية، الطرف الأيمن في معادلات القيود لمشكلة الازدواجية، والطرف الأيمن من المعادلات تكون معاملات لدالة الهدف.

[13] سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية ببنغازي، الجامعة المفتوحة ، ليبيا، 2002، ص.107.

- تحويل الاشارة أكبر من أو يساوي في المشكلة الأصلية إلى أقل من أو يساوي في مشكلة الازدواجية والعكس صحيح.
- استبدال جميع المتغيرات في المشكلة الأصلية المشار إليها بالحرف x إلى متغيرات مشار إليها بالحرف y ، والعكس صحيح.
- إضافة شرط عدم السالبية إلى جميع المتغيرات الناتجة.

وبتتبع هذه الخطوات نلاحظ أنه إذا كان عدد المتغيرات في النموذج الأصلي يساوي (n). وعدد القيود المفروضة يساوي (m). فإن عدد المتغيرات في النموذج المقابل يصبح يساوي (m) وعدد القيود يساري (n).

أمثلة عن النموذج المقابل:

النموذج المقابل (DUAL)	النموذج الأصلي (PRIMAL)
$Min.Z = 25y_1 + 12y_2$ ST $5y_1 + y_2 \leq 15$ $2y_1 + 3y_2 \leq 20$ $y_1, y_2 \geq 0$	$Max.Z = 15x_1 + 20x_2$ ST $5x_1 + 2x_2 \geq 25$ $x_1 + 3x_2 \geq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$
$Min.Z = 50y_1 + 60y_2 + 100y_3$ ST $y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 6$ $3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 2$ $4y_1 + 3y_2 + 5y_3 \leq 5$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$	$Max.Z = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3$ ST $x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 50$ $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 60$ $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 100$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
$Min.Z = 12y_1 + 8y_2 + 15y_3 + 3y_4$ ST $y_1 + 3y_3 \leq 3$ $y_2 + y_3 \leq 2$ $4y_1 + 5y_3 \leq 3$ $3y_1 + 2y_2 + 2y_4 \leq 3$ $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$	$Max.Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4$ ST $x_1 + 4x_3 + 3x_4 \geq 12$ $x_2 + 2x_4 \geq 8$ $3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 15$ $2x_4 \geq 3$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

III– 3– أساليب البرمجة الأخرى

أولا: أسلوب البرمجة اللاخطية:

تحتوي العديد من مشاكل البرمجة الرياضية على قيم غير خطية، سواء بالنسبة لدالة الهدف، أو القيود، وهنا تظهر دالة الهدف بصورة غير اعتيادية كوجود الأس في المتغيرات، هذه المشاكل لا تستطيع البرمجة الخطية حلها، وعموما عندما تكون العلاقات في صورة غير خطية، يسمى النموذج المستعمل في هذه الحالة البرنامج غير الخطي، "ويعتمد حله بصفة عامة على حساب التفاضل لإيجاد قيم المتغيرات القرارية التي تحقق النهايات العظمى أو الصغرى لدالة الهدف، وذلك باستخدام مضاعفات لاغرانج (lagrange multipliers) إذا كانت القيود الهيكلية في شكل معادلات، وباستخدام شروط كون توكر (khun tucker conditions) ومضاعفات لاغرانج إذا كانت القيود الهيكلية في صورة متباينات[14]".

ثانيا: أسلوب البرمجة التربيعية:

"تصاغ العديد من المواقف الإدارية بحيث تكون دالة الهدف في صورة تربيعية والقيود الهيكلية في صورة خطية والمتغيرات القرارية غير سالبة، ويعرف النموذج الناتج بنموذج البرمجة التربيعية، وهو حالة خاصة من نموذج البرمجة اللاخطية، مثل نموذج سلوك المستهلك الذي تكون فيه دالة المنفعة(دالة الهدف) في صورة تربيعية ودالة الميزانية في صورة خطية، ومن طرق الحل التي يمكن استعمالها لحل هذه المشاكل طريقة wolfe's، التي تعتمد في استخدامها على طريقة السمبلكس بالإضافة إلى مضاعفات لاغرانج وشروط كون توكر[15]".

ثالثا: أسلوب البرمجة العشوائية:

تكون مؤشرات النموذج في البرنامج الخطي (كمعاملات المتغيرات في دالة الهدف وفي القيود الهيكلية) ثابتة أي لا تتغير، ولكن يمكن لهذه المؤشرات أن تتغير نتيجة لعوامل خارجة عن إرادة متخذ القرار، كتغير معدلات الربح أو التكلفة، " وبالتالي نلجأ إلى تحليل الحساسية لدراسة أثر التغير في هذه المؤشرات على الحل الأمثل، "وإذا أمكن وصف مؤشر أو أكثر من مؤشرات النموذج باستخدام متغيرات عشوائية، فإن النموذج الناتج يعرف بالبرنامج العشوائي ومن الطرق المعروفة لحله طريقة البرمجة المقيدة العشوائية، حيث تقدر القيم المتوقعة لدالة الهدف، وتعامل معاملات المتغيرات القرارية في القيود الهيكلية أو الطرف الأيمن أو كليهما كمتغيرات عشوائية ذات توزيعات احتمالية معينة[16]"

---

[14] د. إبراهيم أحمد مخلوف، التحليل الكمي في الإدارة، عمادة شؤون المكتبات- جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى، 1995، ص14.
[15] د. إبراهيم أحمد مخلوف، التحليل الكمي في الإدارة، مرجع سبق ذكره، ص 14.
[16] د. إبراهيم أحمد مخلوف، التحليل الكمي في الإدارة، مرجع سبق ذكره، ص 15

III- أساليب النقل والتخصيص

III -1- أسلوب النقل:

هو من بين الأساليب الرياضية الهامة المساعدة على اتخاذ القرارات الملائمة بشأن نقل كمية من المواد (السلع) من مصادر تصنيعها أو من المخازن إلى مراكز متعددة بهدف سد حاجة هذه المراكز وبأقل تكلفة، كما تتخصص في توزيع الموارد البشرية والمادية بأفضل صورة على اعتبار هذه الموارد محدودة دائما، ولحل مسألة عن طريق (مشكلة نقل) لابد من توفر الشروط التالية:

- وجود عدد من مصادر التوريد ذات طاقات متاحة محددة.
- وجود عدد من المصانع (أو المخزن) لها طاقات طلب محدد.
- أن تكون الكميات المطلوبة مساوية للكميات المتاحة كمجموع إجمالي (يمكن التخلص من خلل هذا الشرط بإدخال تقنيات أخرى).
- إن من مزاياها أنها تعتمد على مبدأ تكرار الحلول مع ملاحظة أنه يجب أن يكون كل حل أفضل من سابقه.

أ- الصيغة الرياضية لمشكلة النقل:

أولا: القيود: وهي نوعان

- **قيود مركز التوزيع**

$$x_{11} + \mathrm{x}_{12} + \cdots + \mathrm{x}_{1\mathrm{n}} = \mathrm{a}_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m$$

- **قيود مراكز الاستلام**

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n$$

ثانيا:دالة الهدف

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow MIN$$

ثالثا : شرط عدم السالبية

$$x_{11}, x_{12} + \cdots + x_{mn} \geq 0$$

ويمكن أن يعاد صياغة النموذج الرياضي السابق ليصبح على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$
$$Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\ x_{ij} \rightarrow min$$
$$x_{ij} \geq 0$$

أ -**خطوات الحل باستخدام مسألة النقل:**

- صياغة المشكلة الإدارية رياضيا (أو وضعها في جدول البيانات الخاصة بمسألة النقل)
- إيجاد الحل المبدئي للمسألة: ويتم ذلك باستخدام إحدى الطرق التالية: طريقة الركن الشمالي الغربي، طريقة أقل تكلفة في المصفوفة، طريقة فوجل التقريبية (الجزاءات)
- تطوير الحل وإيجاد الحل الأمثل باستخدام إحدى الطرق التالية: طريقة الحجر المتنقل أو المتخطي (التخطية)، طريقة التوزيع المعدلة

وتتكرر عملية تطوير الحل حتى نصل إلى الحل الأمثل، حيث تكون جميع نتائج الخلايا الفارغة المختبرة موجبة أو صفرية في حال تخفيض التكاليف، (سالبة أو صفرية في حالة تعظيم الأرباح)

- شرح النتائج بعد الحصول على الحل الأمثل (أي إعطاء القرار المناسب).

III - 1-1- طرق البحث عن الحل الأولي (المبدئي):

هناك العديد من الطرق التي يمكن استعمالها للبحث عن الحل الأولى لمشكلة النقل أبرزها ثلاث طرق هي:

1 طريقة الركن الشمالي الغربي: يقصد بالركن الشمالي الغربي الخانة الأولى الموجودة في أعلى الجدول على اليسار والتي نستعملها كانطلاقة للحصول على الحل الأمثل ثم التي تليها من الخانات غير المشبعة سواءا كانت في الصف أو العمود حتى تتم عملية التوزيع.

2 طريقة أقل تكلفة في المصفوفة: نقوم وفق هذه الخطوة بالتركيز على التكلفة الأقل في جدول النقل ونقوم بملإها حتى تتشبع ثم نقوم بشطب الصف أو العمود الذي تشبع. ثم نبحث عن أقل تكلفة في الخلايا المتبقية ونقوم بملإها حتى تتشبع ونشطب الصف أو العمود الذي تشبع وهكذا حتى نقوم بنقل كل الكميات المتوفرة.

3 طريقة فوجل (vogel) التقريبية (الجزاءات): تعد هذه الطريقة من بين أفضل الطرق في حل مسائل النقل وغالبا ما تعطي حلا أمثلا ويمكن أن نجمل خطوات إيجاد الحل وفق هذه الطريقة في[17]:

- إيجاد الفرق بين أقل تكلفتين في الصف.
- إيجاد الفرق بين أقل تكلفتين في العمود.
- تحديد أكبر فرق سواءا كان في الصفوف أو الأعمدة.
- البحث عن أقل تكلفة في الصف أو العمود الذي يقابل أكبر فرق و البدأ بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق.
- إعادة الخطوات السابقة إلى غاية الوصول إلى توزيع كامل للطاقات الإنتاجية وإشباع وإشباع تام لاحتياجات الأسواق مع مراعاة استبعاد الخلايا المتشبعة أو التي لم تشغل عند حساب الفروقات.

مثال:

تريد شركة لإنتاج السكر نقل منتجاتها من مصانعها الثلاث A، B، C، إلى ثلاث مراكز للبيع M1، M2، M3، تقدر كمية الانتاج في المصانع بـ 800، 650، 1000 وحدة على الترتيب. كما تقدر الكمية المطلوبة من قبل مراكز البيع بـ 700، 850، 900 وحدة على الترتيب. والجدول التالي يبين تكلفة نقل الوحدة الواحدة من هذه المصانع الثلاث إلى مركز البيع الثلاث بالوحدة النقدية:

[17] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، إثراء للنشر والتوزيع، ط 1، الأردن، 2009، ص. 219.

	M1	M2	M3
A	11	14	10
B	18	13	8
C	12	16	15

المطلوب:

- إيجاد الحل الأولي باستعمال الطرق الثلاث أعلاه:

1 الحل الأولي باستعمال طريقة الركن الشمالي الغربي:

بإتباع خطوات الحل وفق هذه الطريقة والمبين أعلاه نحصل على الجدول النقل التالي:

	M1	M2	M3	المصانع
A	11 / 700	14 / 100	10	**800**
B	18	13 / 650	8	**650**
C	12	16 / 100	15 / 900	**1000**
مراكز البيع	**700**	**850**	**900**	**2450**

$$CT=700(11)+100(14)+650(13)+100(16)+900(15)=\mathbf{32650}$$

تقدر التكلفة الإجمالية للنقل وفق هذه الطريقة بـ 32650 وحدة نقدية

2 الحل الأولي باستعمال أقل تكلفة في المصفوفة

	M1	M2	M3	المصانع
A	11 / 550	14	10 / 250	**800**
B	18	13	8 / 650	**650**
C	12 / 150	16 / 850	15	**1000**
مراكز البيع	**700**	**850**	**900**	**2450**

$$CT=550(11)+250(10)+650(8)+150(12)+850(16)=\mathbf{29150}$$

تقدر التكلفة الإجمالية للنقل وفق هذه الطريقة بـ 29150 وحدة نقدية

3 الحل الأولي باستعمال طريقة فوجل التقريبية:

بإتباع خطوات الحل وفق هذه الطريقة والمبين أعلاه نحصل على الخطوات النقل التالي:

الخطوة 1: حساب الفروق للصفوف والأعمدة:

	M1	M2	M3	المصانع	الفرق
A	11	14	10	800	1
B	18	13	8 650	650	5
C	12	16	15	1000	3
مراكز البيع	700	850	900	2450	
الفرق	1	1	2		

الخطوة 2:

	M1	M2	M3	المصانع	الفرق
A	11	14	10 800	800	1
B	18	13	8 650	650	تشبع
C	12	16	15	1000	3
مراكز البيع	700	850	900	2450	
الفرق	1	2	3		

الخطوة 3:

	M1	M2	M3	المصانع	الفرق
A	11	14	10 250	800	3
B	18	13	8 650	650	تشبع
C	12	16	15	1000	4
مراكز البيع	700	850	900	2450	
الفرق	1	2	تشبع		

الخطوة 4:

	M1	M2	M3	المصانع	الفرق
A	11	14	10 250	800	3
B	18	13	8 650	650	تشبع
C	12 700	16	15	1000	4
مراكز البيع	700	850	900	2450	
الفرق	1	2	تشبع		

الخطوة 5:

	M1	M2	M3	المصانع	الفرق
A	11	14	10 250	800	
B	18	13	8 650	650	تشبع
C	12 700	16 300	15	1000	
مراكز البيع	700	850	900	2450	
الفرق	تشبع	2	تشبع		

الخطوة 6:

	M1	M2	M3	المصانع	الفرق
A	11	14 550	10 250	800	
B	18	13	8 650	650	تشبع
C	12 700	16 300	15	1000	تشبع
مراكز البيع	700	850	900	2450	
الفرق	تشبع	2	تشبع		

الخطوة 7:

	M1	M2	M3	المصانع
A	11	14 550	10 250	800
B	18	13	8 650	650
C	12 700	16 300	15	1000
مراكز البيع	700	850	900	2450

III – 1–2– طرق البحث عن الحل الأمثل:

بعد إيجاد الحل الأولي باستعمال الطرق الثلاثة السابقة والمذكورة أعلاه، يجب التأكد إن كان هذا الحل هو الحل الأمثل أم لا بالنسبة لمشكلة النقل محل الدراسة. وفي حال التأكد من أنه ليس حلا أمثلا نلجأ إلى تحسين الحل الأولي، وهناك العديد من الطرق التي يمكن من خلالها تحسين الحل أشهرها طريقتين هما: طريقة المسار المتعرج (الحجر المتنقل)، وطريقة التوزيع المعدلة.

أولا: طريقة المسار المتعرج:

هو أسلوب الانتقال من الحل الأولى لمشكلة النقل إلى الحل الأمثل، ولتطبيق هذه الطريقة يجب أولا التحقق من أن الحل الأولى مستوفي الشرط التالي:

حيث:

N: عدد الخلايا المشغولة

R: عدد الصفوف

C: عدد الأعمدة

خطوات الحل وفق هذه الطريقة هي كالتالي:

- إيجاد الحل الأولي باستخدام إحدى الطرق الثلاث المذكورة أعلاه.
- نرسم من كل خلية فارغة (متغير غير أساسي) مسار يتجه إلى أقرب خلية مشغولة (متغير أساسي) سواءا كان في الصف أو العمود بشرط ألا يزيد عدد المتغيرات في كل اتجاه أفقي أو عمودي على متغيرين، والمسار يجب أن يكون مغلقا.
- يبدأ المسار المغلق بعلامة (+) للخلايا الفارغة (المتغير غير الأساسي) تعقبها علامة (−) للخلايا المشغولة (المتغير الأساسي)، ثم موجبة (+) ثم سالبة (−) وهكذا إلى أن لجميع الخلايا (المتغيرات) التي يتشكل منها المسار.
- نقوم بحساب التكلفة التقديرية(C_{ij}) لكل الخلايا الفارغة (متغيرات غير أساسية) وذلك بجمع تكاليف النقل للخلايا التي يرتكز عليها المسار (الخلايا الجانبية) وبإشارات متناوبة موجبة وسالبة كما كما تم وضعها وهكذا. فإذا كانت التكلفة التقديرية أكبر أو يساوي الصفر ($C_{ij} \geq 0$) فإن الحل هنا يعتبر أمثلا وبالتالي جميع المتغيرات ليس لها تأثير في تقليل دالة الهدف، أما إذا كان هناك على الأقل تكلفة تقديرية سالبة فإن الحل ليس أمثلا ويمكن تحسينه.
- إذا كان الحل ليس أمثلا نقوم بتحديد المتغير الداخل وهنا نختار الخلية التي فيها أكبر تكلفة تقديرية سالبة، ونقوم باختيار أصغر كمية موجودة في نقاط الارتكاز التي تحمل إشارة سالبة للمسار (الخلايا الجانبية المملوءة) ثم نضيفها للخلايا التي تحمل إشارة موجبة (+)، ونطرح نفس الكمية من الخلايا التي تحمل إشارة سالبة (−). ثم نحسب التكلفة الكلية للنقل المحسنة.
- نعد حساب الكلف التقديرية فإذا كان الحل غير أمثل نكرر الخطوات السابقة حتى نحصل على جميع التكاليف التقديرية سالبة.

مثال: إليك الحل الأولي التالي لمسألة نقل منتج لمؤسسة ما من المخازن إلى مناطق البيع.

	P1	P2	P3	مناطق البيع
A	$\boxed{6}$ 29	$\boxed{2}$ 23	$\boxed{9}$	52
B	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 27	$\boxed{1}$ 27	54
C	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$ 24	24
المخازن	29	50	51	130

CT=29(6)+23(2)+27(5)+27(1)+24(8)=**574**

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة المسار المتعرج

الحل:

نتأكد من أن $N = R + C - 1$ (عدد الخلايا المشغولة 5 و عدد الصفوف 3 وعدد الأعمدة 3) ومنه الحل يمكن تحسينه

	P1	P2	P3	مناطق البيع
A	$\boxed{6}$ 29	$\boxed{2}$ 23	$\boxed{9}$	52
B	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 27	$\boxed{1}$ 27	54
C	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$ 24	24
المخازن	29	50	51	130

نقوم بتشكيل المسار المتعرج للخلايا الفارغة كما هو موضح أعلاه وحساب التكاليف القديرية للخلايا الفارغة.

$$C_{13} = 9 - 2 + 5 - 1 = 11$$
$$C_{21} = 3 - 5 + 2 - 6 = -6$$
$$C_{31} = 4 - 8 + 1 - 5 + 2 - 6 = -12$$
$$C_{32} = 7 - 8 + 1 - 5 = -5$$

نختار الخلية x_{31} لملأها لأن تكلفتها هي الأصغر بالسالب ($C_{31} = -12$) والكمية المنقولة هي 24 لأنها أصغر كمية في خلايا الارتكاز السالبة للمسار المتعرج نحصل على جدول النقل المحسن التالي:

	P1	P2	P3	مناطق البيع
A	6 5	2 47	9	**52**
B	3	5 3	1 51	**54**
C	4 24	7	8	**24**
المخازن	**29**	**50**	**51**	**130**

CT=5(6)+47 (2)+3 (5)+51 (1)+24 (4)=**286**

نقوم بتشكيل المسار المتعرج للخلايا الفارغة كما هو موضح أعلاه وحساب التكاليف القديرية للخلايا الفارغة من جديد.

$$C_{13} = 9 - 2 + 5 - 1 = 11$$
$$C_{21} = 3 - 5 + 2 - 6 = -6$$
$$C_{32} = 7 - 2 + 6 - 4 = 7$$
$$C_{33} = 8 - 1 + 5 - 2 + 6 - 4 = 12$$

نختار الخلية x_{21} لملأها لأن تكلفتها هي الأصغر بالسالب ($C_{31} = -6$) والكمية المنقولة هي 3 لأنها أصغر كمية في خلايا الارتكاز السالبة للمسار المتعرج نحصل على جدول النقل المحسن التالي:

	P1	P2	P3	مناطق البيع
A	6 2	2 50	9	**52**
B	3 3	5	1 51	**54**
C	4 24	7	8	**24**
المخازن	**29**	**50**	**51**	**130**

CT=2(6)+50 (2)+3 (3)+51 (1)+24 (4)=**268**

نقوم بتشكيل المسار المتعرج للخلايا الفارغة كما هو موضح أعلاه وحساب التكاليف القديرية للخلايا الفارغة من جديد.

$$C_{13} = 9 - 2 + 5 - 1 = 11$$
$$C_{22} = 5 - 2 + 6 - 3 = 6$$
$$C_{32} = 7 - 2 + 6 - 4 = 7$$
$$C_{33} = 8 - 1 + 3 - 4 = 6$$

نلاحظ أن كل قيم التكاليف التقديرية (C_{ij}) موجبة وبالتالي الحل أعلاه يعتبر أمثلا.

ثانيا: طريقة التوزيع المعدلة:

خطوات الحل وفق هذه الطريقة هي كالتالي:

- ❖ التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة يساوي عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1
- ❖ حساب مؤشر الصفوف ومؤشر الأعمدة عند الخلايا المشغولة باستخدام المعادلة التالية:

$$C_{ij} = u_i + v_j$$

C_{ij}: التكلفة

u_i: مؤشر الصف

v_j: مؤشر العمود

- ❖ حساب القيمة المحسنة عند الخلايا غير المشغولة باستخدام المعادلة التالية:

$$C_{ij}{}^{*} = C_{ij} - u_i - v_j$$

والقاعدة هي:

- إذا كانت التكلفة المحسنة ($C_{ij}{}_{ij}^{*}$) جميعها موجبة هذا يعني أنه لا يمكن تحسين الحل وأن الحل الحالي هو الحل المثالي.

- إذا كانت التكلفة المحسنة ($C_{ij}{}^{*}$) بها قيمة سالبة أو أكثر هذا يعني أنه يمكن تحسين الحل وأن الحل الحالي ليس هو الحل المثالي. وبالتالي نختار المتغير الداخل الذي تكلفته المحسنة أصغر بالسالب. ثم نقوم بتوزيع الكمية الأصغر في الخلايا السالبة كما في طريقة المسار المتعرج.

مثال: قم بحل نفس المثال السابق بطريقة التوزيع المعدلة

الحل

حساب مؤشرات الصفوف والأعمدة عند الخلايا المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij} = u_i + v_j}$ **نضع** $u_1 = 0$ ونقوم بحساب قيم المتغيرات الأخرى نجد $C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 6 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 6$ $C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 2 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 2$ $C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow 5 = u_2 + 2 \Rightarrow u_2 = 3$ $C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 1 = 3 + v_3 \Rightarrow v_3 = -2$ $C_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow 8 = u_3 + (-2) \Rightarrow u_3 = 6$
حساب التكلفة المحسنة عند الخلايا غير المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij}{}^{*} = C_{ij} - u_i - v_j}$ $C_{13}{}^{*} = C_{13} - u_1 - v_3 = 9 - 0 - (-2) = \mathbf{11}$ $C_{21}{}^{*} = C_{21} - u_2 - v_1 = 3 - 3 - 6 = \mathbf{-6}$ $C_{31}{}^{*} = C_{31} - u_3 - v_1 = 4 - 6 - 6 = \mathbf{-8}$ $C_{32}{}^{*} = C_{32} - u_3 - v_2 = 7 - 6 - 2 = \mathbf{-1}$

نختار أصغر قيمة بالسالب (‎-8) وهي الخلية C_{31} ونقوم بنقل أقل كمية في الخلايا التي تحمل إشارة سالبة كما في حالة المسار المتعرج فنحصل على جدول النقل التالي:

	P1	P2	P3	مناطق البيع
A	6 5	2 47	9	**52**
B	3	5 3	1 51	**54**
C	4 24	7	8	**24**
المخازن	**29**	**50**	**51**	**130**

CT=5(6)+47 (2)+3 (5)+51 (1)+24 (4)=**286**

ثم نقوم بالتأكد إن كان الحل أمثل أم لا كما فعلنا في الأول:

حساب مؤشرات الصفوف والأعمدة عند الخلايا المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij} = u_i + v_j}$ نضع $u_1 = 0$ ونقوم بحساب قيم المتغيرات الأخرى نجد $C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 6 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 6$ $C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 2 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 2$ $C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow 5 = u_2 + 2 \Rightarrow u_2 = 3$ $C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 1 = 3 + v_3 \Rightarrow v_3 = -2$ $C_{31} = u_3 + v_1 \Rightarrow 8 = u_3 + 6 \Rightarrow u_3 = 2$
حساب التكلفة المحسنة عند الخلايا غير المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij}{}^* = C_{ij} - u_i - v_j}$ $C_{13}{}^* = C_{13} - u_1 - v_3 = 9 - 0 - (-2) = \mathbf{11}$ $C_{21}{}^* = C_{21} - u_2 - v_1 = 3 - 3 - 6 = \mathbf{-6}$ $C_{32}{}^* = C_{32} - u_3 - v_2 = 7 - 2 - 2 = \mathbf{4}$ $C_{33}{}^* = C_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 2 - (-2) = \mathbf{8}$

نختار أصغر قيمة بالسالب (-6) وهي الخلية C_{21} ونقوم بنقل أقل كمية في الخلايا التي تحمل إشارة سالبة كما في حالة المسار المتعرج فنحصل على جدول النقل التالي:

	P1	P2	P3	مناطق البيع
A	6 / 2	2 / 50	9	52
B	3 / 3	5	1 / 51	54
C	4 / 24	7	8	24
المخازن	29	50	51	130

CT=2(6)+50 (2)+3 (3)+51 (1)+24 (4)=**268**

ثم نقوم بالتأكد إن كان الحل أمثل أم لا كما فعلنا في الأول:

حساب مؤشرات الصفوف والأعمدة عند الخلايا المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij} = u_i + v_j}$ **نضع** $u_1 = 0$ ونقوم بحساب قيم المتغيرات الأخرى نجد $C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 6 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 6$ $C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 2 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 2$ $C_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow 5 = u_2 + 6 \Rightarrow u_2 = -1$ $C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 1 = -1 + v_3 \Rightarrow v_3 = 3$ $C_{31} = u_3 + v_1 \Rightarrow 8 = u_3 + 6 \Rightarrow u_3 = 2$
حساب التكلفة المحسنة عند الخلايا غير المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij}^* = C_{ij} - u_i - v_j}$ $C_{13}^* = C_{13} - u_1 - v_3 = 9 - 0 - 3 = \mathbf{6}$ $C_{22}^* = C_{22} - u_2 - v_2 = 3 - (-1) - 2 = \mathbf{2}$ $C_{32}^* = C_{32} - u_3 - v_2 = 7 - 2 - 2 = \mathbf{4}$ $C_{33}^* = C_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 2 - 3 = \mathbf{5}$

بما أن جميع التكاليف المحسنة أكبر من الصفر (لا تحتوي على قيم سالبة) فإن الحل السابق يعتبر أمثلا وتكلفة النقل الكلية المثلى هي 268 وحدة نقدية.

III – 1–3– حالات خاصة في مسائل النقل:

هناك العديد من الحالات الخاصة التي يمكن مصادفتها عند دراسة مسائل النقل أشهرها:

أولا: حالة عدم تساوي العرض والطلب:

كما رأينا سابقا من بين الشوط الأساسية التي يمكن أن نواجهها في الواقع العملي هي مسألة عدم تساوي العرض والطلب، ولحل هذا النوع من المسائل نقوم إما بإضافة صف وهي أو عمود وهمي تكاليفه الوحدية تساوي أصفار في جميع الخلايا بينما الكمية الموجودة في الصف أو العمود الوهمي المضاف هي الفرق بين الكمية المعروضة والمطلوبة، بعدها نقوم بعملية الحل بالطرق الاعتيادية كما رأينا سابقا،و في الأخير عند الوصول إلى الحل الأمثل نقوم بإهمال الصف أو العمود الذي تم إضافته.

1 ـحالة التفكك:

وتظهر هذه الحالة عندما تكون عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأولي لا تستوفي الشرط المذكور أعلاه والذي يعتبر شرطا أساسيا لإيجاد مسارات الحل وهو:

$$N = R + C - 1$$

حيث:

N: عدد الخلايا المشغولة

R: عدد الصفوف

C: عدد الأعمدة

وللتخلص من هذه المشكلة نلجأ إلى التحايل وذلك بوضع خلية أو أكثر لاستيفاء الشرط أعلاه نعطيها القيمة ε ثم نكمل الحل بالطريقة الاعتيادية للوصول إلى الحل الأمثل كما رأينا سابقا على أن نهملها في تماما في النهاية كونها تعتبر قيمة مساعدة فقط ويكون ذلك سواءا حصل التفكك في جدول الحل الأولى أو في جداول الحل الموالية.

مثال: إليك الجدول التالي والذي يمثل تكلفة نقل الوحدة الواحة من منتج مؤسسة ما من مناطق العرض إلى مناطق الطلب.

العرض	D3	D2	D1	
70	4	3	2	**A1**
30	8	7	6	**A2**
40	5	9	10	**A3**
140 160	40	60	60	**الطلب**

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة أقل تكلفة وطريقة التوزيع المعدل

1: إيجاد الحل الأولي باستعمال طريقة أقل تكلفة

نلاحظ أن الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة وعلى هذا الأساس سنقوم بإضافة صف وهمي بتكلفة صفرية لجميع خلايا هذا الصف، مع كمية تساوي الفرق بين الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، ثم نقوم بالحل بطريقة أقل تكلفة في المصفوفة فنحصل على جدول الحل الأولي التالي:

	D1	D2	D3	العرض
A1	2 / **60**	3 / **10**	4	**70**
A2	6	7 / **30**	8	**30**
A3	10	9	5 / **40**	**40**
A4	0	0 / **20**	0	**20**
الطلب	**60**	**60**	**40**	**160**

CT=60(2)+10 (3)+30 (7)+40 (5) =**560**

1: إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة التوزيع المعدل

- ❖ التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة يساوي عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1

$$N = R + C - 1$$

نلاحظ أن هذا الشرط غير متحقق لأن:

- – عدد الخلايا المشغولة باحتساب الصف الوهمي تساوي 5
- – عدد الصفوف باحتساب الصف الوهمي يساوي 4
- – عدد الأعمدة يساوي 3

وهذا ما يقودنا إلى حالة التفكك والسبب في ذالك أن الخلية (3،3) تشبع الصف والعمود في آن واحد وعليه يتم إضافة قيمة افتراضية صغيرة جدا ε يتم التعامل معها وكأنها قيمة عادية موجبة وهذا حتى تحقق الشرط أعلاه أي

$$N = R + C - 1$$

فيصبح جدول النقل كالتالي:

	D1	D2	D3	العرض
A1	2 / 60	3 / 10	4	70
A2	6	7 / 30	8	30
A3	10	9 / ε	5 / 40	40
A4	0	0 / 20	0	20
الطلب	60	60	40	160

والآن نتبع نفس خطوات تحسين الحل:

حساب مؤشرات الصفوف والأعمدة عند الخلايا المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij} = u_i + v_j}$ **نضع** $u_1 = 0$ ونقوم بحساب قيم المتغيرات الأخرى نجد $C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 2 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 2$ $C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 3 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 3$ $C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow 7 = u_2 + 3 \Rightarrow u_2 = 4$ $C_{32} = u_3 + v_2 \Rightarrow 9 = u_3 + 3 \Rightarrow u_3 = 6$ $C_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow 5 = u_3 + v_3 \Rightarrow v_3 = -1$ $C_{42} = u_4 + v_2 \Rightarrow 0 = u_4 + v_2 \Rightarrow u_4 = -2$
حساب التكلفة المحسنة عند الخلايا غير المشغولة
$\boldsymbol{C_{ij}{}^* = C_{ij} - u_i - v_j}$ $C_{13}{}^* = C_{13} - u_1 - v_3 = 4 - 0 - (-1) = \mathbf{5}$ $C_{21}{}^* = C_{21} - u_2 - v_1 = 6 - 4 - 2 = 0$ $C_{23}{}^* = C_{23} - u_2 - v_3 = 8 - 4 - (-1) = \mathbf{5}$ $C_{31}{}^* = C_{31} - u_3 - v_1 = 10 - 6 - 2 = \mathbf{2}$ $C_{41}{}^* = C_{41} - u_4 - v_1 = 0 - (-2) - 2 = \mathbf{0}$ $C_{43}{}^* = C_{43} - u_4 - v_3 = 0 - (-2) - (-1) = \mathbf{3}$

بما أن جميع التكاليف المحسنة أكبر من الصفر (لا تحتوي على قيم سالبة) فإن الحل السابق يعتبر أمثلا وتكلفة النقل الكلية المثلى هي 560 وحدة نقدية. و أخيرا نهمل الصف الوهمي والقيمة ε لأنها مساعدان فقط فيصبح جدول الحل الأمثل كالتالي:

	D1	D2	D3	العرض
A1	2 **60**	3 **10**	4	**70**
A2	6	7 **30**	8	**30**
A3	10	9	5 **40**	**40**
الطلب	**60**	**60**	**40**	**160**

$$CT=60(2)+10(3)+30(7)+40(5)=\mathbf{560}$$

III – 2- أسلوب التخصيص (Assignment model):

يعد نموذج التخصيص حالة خاصة من نماذج النقل، والمشكلة في هذا النوع من النماذج تتعلق باختيار أفضل تخصيص يؤدي إلى تقليل التكاليف أو تعظيم الأرباح (العوائد). ويعرف نموذج التخصيص على أنه نموذج البرمجة الخطية ذو أغراض خاصة يستخدم في حل المشكلات التي تستدعي توزيع المهام على الموارد المتاحة (كالعمال، الآلات وغيرها) للتوصل إلى الملائمة المثلى بين المهام والموارد المتاحة.

كما يعرف أسلوب التخصيص على بأسلوب رياضي يستخدم من قبل متخذي القرار في منظمات الأعمال بهدف اختيار عدد من التخصيصات التي تؤدي إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح.

III – 2-1- صياغة النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص:

قبل البدأ في صياغة النموذج الرياضي لمشكلة التخصيص هناك مجموعة من الخصائص التي يجب أن تتوفر في هذا الأسلوب والتي تعد أساسا لبناء أو لصياغة هذا الأسلوب وهي:

1- يجب أن يكون عدد الصفوف مساويا لعدد الأعمدة أي أن (m=n)، بمعنى آخر يجب أن يكون عدد الوسائل مساويا لعدد المهام.

2- يتم تخصيص وسيلة واحدة لإنجاز مهمة واحدة

3- أن تأخذ قيم المتغير الأساسي (x_{ij}) لكل قيم (i, j) القيمتين 0 أو 1 فقط ولا يمكن أن تأخذ القيم الكسرية.

4- يرمز إلى تكاليف التخصيص بالرمز (c_{ij}) ونعني بذلك كلفة تخصيص i من الوسائل لإنجاز j من المهام

حيث: $i = 1,2,\cdots,m, \quad j = 1,2,\cdots,n$

ويمكن توضيح جدول التخصيص كما يلي:

المهام / الوسائل	1	2	…	n	a_i
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	…
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	…
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	…
b_j	1	1	…	1	n / m

وبالاعتماد على خصائص النموذج والبيانات الواردة في الجدول السابق يمكن صياغة النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص على النحو التالي:

1- دالة الهدف:

$$MINz = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\ c_{ij}$$

2- قيود النموذج:

أ- قيود الوسائل:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\dots\dots,m$$

ب- قيود المهام:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\dots\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

الطرق المستخدمة في حل الأسلوب الرياضي لمسألة التخصيص: هنا العديد من الطرق المستعملة لحل مسألة التخصيص أهمها:

III – 2-2- طريقة العد الكامل (Complete Enumeration Method):

وتسمى أيضا بطريقة التوافيق المختلفة وتعد من أبسط الطرق المستخدمة في حل مسألة التخصيص عندما لا يتجاوز عدد الوسائل أو المهام (ثلاثة) لكل منهما. إذ يتم بموجبها تحديد جميع البدائل لعملية التوزيع (حساب جميع الاحتمالات الممكنة لعملية التخصيص). وعدد هذه البدائل هو A حيث: $A = m! = n!$

مثال:يرغب مدير في تعيين ثلاث موظفين (A ,B,C) لأداء ثلاث مهام هي (1,2,3) وكانت تكاليف إنجاز المهام موضحة بالجدول التالي:

الموظفين	المهام		
	1	**2**	**3**
A	25	24	18
B	14	19	17
C	17	12	19

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص للموظفين للمهام والذي يعطي أقل التكاليف ممكنة باستعمال طريقة العد الكامل ؟

الحل:

عدد البدائل الممكنة لعملية التخصيص هي:

$$n = m = 3$$

إذن عدد البدائل 6

البدائل	المهام			مجموع تكاليف البدائل	التكلفة الكلية
	1	2	3		
1	A	B	C	25+19+19	**63**
2	A	C	B	25+12+17	**54**
3	B	A	C	14+24+19	**57**
4	B	C	A	14+12+18	Min **44**
5	C	A	B	17+24+17	**58**
6	C	B	A	17+19+18	**54**

يتضح من الجدول أعلاه بأن أفضل بديل هو البديل الرابع كونه يحقق أدنى التكاليف وعليه فإن التخصيص هو:

- تعيين الموظف (A) لإنجاز المهمة (3)
- تعيين الموظف (B)لإنجاز المهمة (1)
- تعيين الموظف (C) لإنجاز المهمة (2)

وتكون التكلفة الكلية المحققة هي:

CT=14+12+18=**44** unit price

حالة التعظيم: الحل بنفس الطريقة لكن نختار البديل الذي يعظم الأرباح أو الفوائد:

مثال: ترغب شركة في تعيين ثلاث مدراء لشغل ثلاث وظائف إدارية () وقد كانت الأرباح المحققة من شغل هذه الوظائف كما في الجدول التالي:

المدراء	**الوظائف**		
	1	**2**	**3**
A	23	17	15
B	18	16	17
C	19	12	22

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص للمدراء على الوظائف والذي يعطي أكبر الأرباح الممكنة باستعمال طريقة العد الكامل ؟

$$n = m = 3$$
$$n! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

إذن عدد البدائل 6

البدائل	**الوظائف**			**مجموع أرباح البدائل**	**الأرباح الكلية المحققة**
	1	**2**	**3**		
1	A	B	C	23+16+22	**Max 61**
2	A	C	B	23+12+17	**52**
3	B	A	C	18+17+22	**57**
4	B	C	A	18+12+15	**45**
5	C	A	B	19+17+17	**53**
6	C	B	A	19+16+15	**50**

يتضح من الجدول أعلاه بأن أفضل بديل هو البديل الأول كونه يحقق أكبر الأرباح الممكنة وعليه فإن التخصيص هو:

- تعيين المدير (A) لإشتغال في الوظيفة (1)
- تعيين المدير (B) للإشتغال في الوظيفة (2)
- تعيين المدير (C) للإشتغال في الوظيفة (3)

وتكون الأرباح الكلية المحققة هي:

PRO =23+16+22=**61** unit price

III – 2–3– الطريقة الهنغارية (المجرية)(Hungarian Method) :

تعتمد إجراءات الحل وفق هذه الطريقة على ما يسمى (بالمصفوفة المتناقصة) والتي تستلزم طرح وإضافة أرقام ملائمة من هذه المصفوفة، ومن خلالها نستطيع أن نحقق الحل الأمثل، وتعتمد خطوات الوصول إلى الحل الأمثل على هدف مشكلة التخصيص حيث تختلف تلك الخطوات في حالة تدنية التكاليف (Minimisation) عن حالة تعظيم الأرباح أو الإيرادات (Maximisation). خطوات الحل وفق هذه الطريقة هي كالتالي:

1– حالة تدنية التكاليف:

تتلخص خطوات الوصول إلى الحل الأمثل في حالة تدنية التكاليف كما يلي:

- ❖ وضع المعلومات المتوفرة في شكل جدول (مصفوفة).
- ❖ تحديد أقل قيم في كل صف وطرحها من ذلك قيم ذلك الصف.
- ❖ تحديد أقل قيم في كل عمود وطرحها من ذلك قيم ذلك العمود.
- ❖ اختبر الصفوف فإذا وجدت صفا به صفرا واحدا خصصه واشطب باقي أصفار العمود الموجود به ذلك الصفر.
- ❖ اختبر الأعمدة فإذا وجدت عمودا به صفرا واحدا خصصه واشطب باقي أصفار الصف الموجود به ذلك الصفر.
- ➢ إذا لم تجد حلا كاملا نتبع الخطوات التالية:
- ❖ نغطي الأعمدة التي بها أصفار خصصت عند اختبار الصفوف (الخطوة 4) بخط مستقيم يمر على هذه الأصفار.
- ❖ نغطي الصفوف التي بها أصفار خصصت عند اختبار الأعمدة (الخطوة 5) بخط مستقيم يمر على هذه الأصفار وينتج عن ذلك أن تصبح جميع الأصفار مغطاة بخطوط.
- ❖ حدد أقل قيمة غير مغطاة بخط ونطرحها من نفسها ومن باقي القيم غير المغطاة ونضيفها إلى القيم التي في تقاطع الخطوط وتبقى باقي القيم التي يمر عليها خط واحد كما هي.

❖ تكرار هذه الخطوة الى تصل إلى الحل الأمثل عندما يصبح عدد الخطوط التي تغطي الأصفار يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة.

مثال: : إليك المثال التالي والذي يمثل تكاليف تصنيع طلبيات الإنتاج على الآلات الموجودة بمؤسسة ما.

الآلات	طلبيات الانتاج					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	51	25	52	39	72	41
B	50	81	65	49	29	22
C	32	32	51	60	39	27
D	43	37	52	48	50	45
E	33	30	26	39	40	29
F	30	51	60	40	40	82

المطلوب:

1 – حدد التخصيص الأمثل باستعمال الطريقة الهنغارية ؟

2 – أحسب مقدار التناقص الكلي ؟

الحل:

1 – نحدد أصغر قيمة في كل صف ونطرحها من باقي القيم الموجودة في ذلك الصف فنحصل على:

الآلات	طلبيات الانتاج					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	26	0	27	14	47	16
B	28	59	43	27	7	0
C	5	5	24	33	12	0
D	6	0	15	11	13	8
E	7	4	0	13	14	3
F	0	21	30	10	10	52

2 نحدد أصغر قيمة في كل عمود ونطرحها من باقي القيم الموجودة في ذلك العمود فنحصل على:

الآلات	طلبيات الانتاج					
	1	2	3	4	5	6
A	26	$\boxed{0}$	27	4	40	16
B	28	59	43	17	$\boxed{0}$	0
C	5	5	24	23	5	$\boxed{0}$
D	6	0	15	1	6	8
E	7	4	$\boxed{0}$	3	7	3
F	$\boxed{0}$	21	30	0	3	52

- نقوم بعملية التخصيص حيث يتم تخصيص الصف أو العمود الذي يحتوي على صفر واحد فقط:
- نلاحظ من الجدول أعلاه أن الأصفار التي تم تخصيصها هي خمسة فقط في حين أن التخصيص يجب أن يكون مساويا لعدد الصفوف أو عدد الأعمدة ومنه:
- نحدد أصغر قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من نفسها ومن باقي القيم غير المغطاة ونضيفها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية فنحصل على:

الآلات	طلبيات الانتاج					
	1	2	3	4	5	6
A	25	0	26	3	39	16
B	28	60	43	17	0	1
C	4	5	23	22	4	0
D	5	0	14	0	5	8
E	7	5	0	3	7	4
F	0	22	30	0	3	53

نلاحظ أن عملية التخصيص قد تمت وتكون النتيجة كالتالي:

- الآلة A تقوم بصناعة الطلبية رقم (2) وبتكلفة 25 دينار
- الآلة B تقوم بصناعة الطلبية رقم (5) وبتكلفة 29 دينار

- الآلة C تقوم بصناعة الطلبية رقم (6) وبتكلفة 27 دينار
- الآلة D تقوم بصناعة الطلبية رقم (4) وبتكلفة 48 دينار
- الآلة E تقوم بصناعة الطلبية رقم (3) وبتكلفة 26 دينار
- الآلة F تقوم بصناعة الطلبية رقم (1) وبتكلفة 30 دينار
- المجمـــــــــــــــــــــــــــــــوع **185 دينار**

2– حالة تعظيم الأرباح: يمكن اعتماد جميع الخطوات السابقة في عملية التخصيص لحل المشاكل التي تهدف إلى تعظيم الأرباح بعد تحويل المصفوفة المتضمنة للمعلومات إلى مصفوفة تكاليف ويتم ذلك من خلال طرح جميع القيم الموجودة في المصفوفة من أكبر قيمة فيها ثم نتبع نفس الخطوات كما في حالة التدنية:

مثال: إليك المصفوفة الأرباح التالية:

الأجهزة	الوكلاء			
	1	**2**	**3**	**4**
A	10	6	4	2
B	6	8	5	3
C	9	3	8	5
D	7	7	3	4

المطلوب:

إجراء التخصيص الأفضل الذي يحقق أقصى عائد ممكن ؟

1– تحديد أكبر قيمة في المصفوفة ونقوم بطرح منها باقي القيم الموجودة في المصفوفة فنحصل على المصفوفة التالية

الأجهزة	الوكلاء			
	1	**2**	**3**	**4**
A	0	4	6	8
B	4	2	5	7
C	1	7	2	5
D	3	3	7	6

2- نحدد أصغر قيمة في كل صف ونطرحها من باقي القيم الموجودة في ذلك الصف فنحصل على:

الأجهزة	الوكلاء			
	1	**2**	**3**	**4**
A	0	4	6	8
B	2	0	3	5
C	0	6	1	4
D	0	0	4	3

3 نحدد أصغر قيمة في كل عمود ونطرحها من باقي القيم الموجودة في ذلك العمود فنحصل على:

الأجهزة	الوكلاء			
	1	**2**	**3**	**4**
A	$\boxed{0}$	4	5	5
B	2	$\boxed{0}$	2	2
C	0	6	$\boxed{0}$	1
D	0	0	3	$\boxed{0}$

الجدول أعلاه يحقق شرط وجود أصفار في كل الصفوف والأعمدة وهذا يحقق إمكانية تغطية جميع الأصفار بعدد من الخطوط مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة ومعنى هذا أنه وصلنا إلى الحل الأمثل وهو كما يلي:

الجهاز A يخصص للوكالة رقم 01.

الجهاز B يخصص للوكالة رقم 02.

الجهاز C يخصص للوكالة رقم 03.

الجهاز D يخصص للوكالة رقم 04.

III – 2-3- حالات خاصة في نموذج التخصيص:

هنا العديد من الحالات الخاصة في نموذج التخصيص نستعرضها أهمها فيما يلي:

1- حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة:

من بين الشروط الأساسية التي يجب توافرها في مشكلة التخصيص هو أن عدد الصفوف يجب أ يكون مساويا لعدد الأعمدة، لكن هناك العديد من الحالات التي لا يتحقق هذا الشرط أ ي أن عدد الصفوف يكون غير مساري لعدد الأعمدة. وتكون طريق الحل بإضافة صف أو عمود وهمي إلى الأعمدة أو الصفوف الناقصة. وهنا اختلاف عند إضافة الصف أو العمود بين حالة تقليل التكاليف وحالة تعظيم الفوائد أو الأرباح:

أولا: حالة تقليل التكاليف:

مثال1: إليك الجدول التالي والذي يمثل تكاليف توظيف لثلاث موظفين (A ,B, C) مناصبين شغل (1,2)

الموظفين	المناصب	
	1	**2**
A	30	44
B	28	50
C	21	43

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص للموظفين للمهام والذي يعطي أقل التكاليف ممكنة باستعمال طريقة العد الكامل ؟

الحل:

نلاحظ أن عدد الصفوف هو 3 وعدد الأعمدة هو 2 وعلى هذا الأساس نقوم بإضافة عمود وهمي بتكاليف صفرية فيصبح الجدول كالتالي:

الموظفين	المناصب		
	1	**2**	**3**
A	30	44	0
B	28	50	0
C	21	43	0

عدد البدائل المكنة لعملية التخصيص هي:

$$n = m = 3$$

$$n! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

إذن عدد البدائل 6

البدائل	الموظفين 1	الموظفين 2	الموظفين 3	مجموع تكاليف البدائل	التكلفة الكلية
1	A	B	C	30+50+0	**80**
2	A	C	B	30+43+0	**73**
3	B	A	C	28+44+0	**72**
4	B	C	A	28+43+0	**71**
5	C	A	B	21+44+0	Min **65**
6	C	B	A	21+50+0	**71**

يتضح من الجدول أعلاه بأن أفضل بديل هو البديل الخامس كونه يحقق أدنى التكاليف، نقوم بإهمال العمود الوهمي وعليه فإن التخصيص هو:

- تعيين الموظف (A) لإنجاز المهمة (2)
- تعيين الموظف (C) لإنجاز المهمة (1)

وتكون التكلفة الكلية المحققة هي:

CT=21+44=**65** unit price

مثال2:

إليك الجدول التالي والذي يمثل الوقت اللازم بالساعات للوصول إلى أربع مدن من قبل أربع أنواع من وسائل النقل:

أنواع وسائل النقل	المدن		
	1	**2**	**3**
الحافلة	25	30	24
القطار	24	33	20
السيارة	21	29	18
الشاحنة	23	31	21

المطلوب: حدد التخصيص الأمثل الذي يقلل وقت السفر باستعمال الطريقة الهنغارية ؟

الحل: يمكن ملاحظة أن عدد الصفوف أكبر من عدد الأعمدة وعليه يجب إضافة عمود وهمي (مدينة وهمية) يكون الوقت اللازم للوصول إليها من قبل كل وسائل النقل هو صفر فنحصل على الجدول التالي:

أنواع وسائل النقل	المدن			
	1	**2**	**3**	**4** (مدينة وهمية)
الحافلة	25	30	24	0
القطار	24	33	20	0
السيارة	21	29	18	0
الشاحنة	23	31	21	0

ثم نتبع نفس الخطوات السابقة.

2- نلاحظ أن أصغر قيمة في كل الصفوف هي صفر وبالتالي وبالتالي في المرحلة الأولى وهي طرح أقل قيمة في الصف من باقي قيم الصف تبقى قيم الجدول كما هي.

3- نقوم بتحديد أقل قيمة في كل عمود ونطرحها من باقي قيم ذلك العمود فتحصل على الجدول التالي:

أنواع وسائل النقل	المدن			
	1	**2**	**3**	**4** (مدينة وهمية)
الحافلة	4	1	6	0
القطار	3	4	2	0
السيارة	0	0	0	0
الشاحنة	2	2	3	0

نلاحظ في الجدول أعلاه أن عدد خطوط التغطية أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة. وبالتالي مازلنا لم نصل إلى الحل الأمثل. وعليه نمر إلى المرحلة الموالية وهي اختيار أقل قيمة من بين القيم غير المغطاة بخط ونطرحها من باقي قيم الجدول ونضيفها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية فنحصل على:

أنواع وسائل النقل	المدن			
	1	**2**	**3**	**4 (مدينة وهمية)**
الحافلة	3	$\boxed{0}$	5	0
القطار	2	3	1	0
السيارة	$\boxed{0}$	0	0	1
الشاحنة	1	1	2	0

نلاحظ في الجدول أعلاه أن عدد خطوط التغطية أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة. وبالتالي نستكمل عملية الوصول إلى الحل الأمثل من خلال تكرار المرحلة السابقة.

أنواع وسائل النقل	المدن			
	1	**2**	**3**	**4 (مدينة وهمية)**
الحافلة	3	$\boxed{0}$	5	1
القطار	1	2	$\boxed{0}$	0
التاكسي	$\boxed{0}$	0	0	2
الشاحنة	0	0	1	0

نلاحظ في الجدول أعلاه أن عدد خطوط التغطية تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة ومن الحل الذي أمامنا هو الحل الأمثل. وعليه تكون عملية التخصيص كما يلي:

الحافلة تخصص للنقل للمدينة 02

القطار يخصص للنقل للمدينة 03

التاكسي يخصص للنقل للمدينة 01

ويتم استبعاد الشاحنة من عملية النقل

ثانيا: حالة تعظيم الأرباح (الفوائد):

ترغب مؤسسة معينة في تسويق منتجاتها إلى أربع تجار جملة ومصفوفة الفوائد المترتبة عن عملية التسويق تظهر في الجدول التالي:

تجار الجملة	المنتجات			
	1	**2**	**3**	**4**
A	30	15	5	35
B	25	20	5	30
C	35	15	10	25

المطلوب: تحديد التخصيص الأمثل الذي يعظم الفوائد ؟

الحل:

1- تحديد أكبر قيمة في المصفوفة ونقوم بطرح منها باقي القيم الموجودة في المصفوفة فنحصل على المصفوفة التالية

تجار الجملة	المنتجات			
	1	**2**	**3**	**4**
A	5	20	30	0
B	10	15	30	5
C	0	20	25	10

2- نقوم بإضافة صف أو عمود وهمي ونتبع نفس الخطوات كما في الحالة تقليل التكاليف:

تجار الجملة	المنتجات			
	1	**2**	**3**	**4**
A	5	20	30	0
B	10	15	30	5
C	0	20	25	10
D	0	0	0	0

3- نحدد أصغر قيمة في كل صف ونطرحها من باقي القيم الموجودة في ذلك الصف فنحصل على:

تجار الجملة	المنتجات			
	1	**2**	**3**	**4**
A	5	20	30	$\boxed{0}$
B	5	10	25	0
C	$\boxed{0}$	20	25	10
D	0	0	0	0

4- نحدد أصغر قيمة في كل عمود ونطرحها من باقي القيم الموجودة في ذلك العمود، وهنا إضافة صف وهمي خلق صفر في كل الأعمدة وعليه تبقى المصفوفة في هذه الخطوة كما هي بالإضافة إلى أن عدد خطوط التغطية لا يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة وعليه الحل ليس أمثلا:

4 نختار أقل قيمة من بين القيم غير المغطاة بخط ونطرحها من باقي قيم الجدول ونضيفها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية فنحصل على:

تجار الجملة	المنتجات			
	1	**2**	**3**	**4**
A	5	10	20	$\boxed{0}$
B	5	$\boxed{0}$	15	0
C	$\boxed{0}$	10	15	10
D	10	0	0	10

نلاحظ في الجدول أعلاه أن عدد خطوط التغطية تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة ومن الحل الذي أمامنا هو الحل الأمثل. وعليه تكون عملية التخصيص كما يلي:

تاجر الجملة A يخصص له المنتج رقم 4

تاجر الجملة B يخصص له المنتج رقم 2

تاجر الجملة C يخصص له المنتج رقم 1

ويتم استبعاد المنتج رقم 3

IV- نظرية الألعاب الإستراتيجية (نظرية المباريات):

وهي أحد الاتجاهات الكمية المهمة في الإدارة التي تساعد المنافسين في اختيار سياساتهم للوصول إلى أفضل هدف، "وتتضمن نظرية المباريات عددا من المقاييس يقوم كل منها على افتراض أن ظرفا معينا هو الذي سوف يتحقق مستقبلا، ويبين متخذ القرار تقديراته على هذا الأساس، فهذه النظرية تتجاهل أية احتمالات ذاتية قد تكون في ذهن المخطط أو متخذ القرار عن توقعاته لحدوث ظرف من الظروف المحتمل تحققها مستقبلا، فهي تصلح في حالة عدم التأكد[18]".

ويمكن استخدام نظرية المباراة لتمثيل المشكلات التي تواجه المشروع عند قيام عدد صغير من المتنافسين الذين يعتمد بعضهم على بعض بصياغة إستراتيجية تسويقية، يحتاج أحد المحتكرين الأقلية " Oligorpoly" لتقويم ردود فعل منافسيه تجاه سياساته التسويقية لضمان تقدير " مكسب " أي استراتيجة تسويقية معينة، وكما يوضح (Render, Stair, 1992, p.842) أنه يمكن تقسيم نماذج المباريات وفقا لكل من عدد اللاعبين، مجموع جميع العوائد، وعدد الاستراتيجيات المستخدمة.

IV -1- مفهوم نظرية المباريات:

المباراة عبارة عن منافسة بين طرفين أو أكثر ولكل طرف من هذه الأطراف مجموعة من الخطط (الاستراتيجيات) من الممكن أن يتبعها من أجل تحقيق أكبر عدد ممكن من المكاسب (الأرباح) أو تقليل الخسائر.

ويتم استخدام كلمة (لاعبين) لتدل على وجود طرفين متنافسين لهما مصالح متعارضة مثل الشركات المتنافسة أو المصالح الدولية المتعارضة. ويحاول كل طرف إيجاد الاستراتيجيات المثلى التي من شأنها تعظيم العائد (الأرباح) أو تقليل التكاليف (الخسائر) عند حدودها الدنيا.

تصنيف المباراة:

يمكن تصنيف البيئة التنافسية إلى عدة أصناف استنادا إلى المعايير التالية:

1- عدد اللاعبين:

[18] د. على هادي جبرين، الاتجاهات والأدوات الكمية في الإدارة، مرجع سبق ذكره، ص 327.

إذا كان عدد المتنافسين يساوي (2) تسمى المباراة بمباراة بين شخصين أما إذا كان عدد اللاعبين أثر من (2) عند إذن تسمى المباراة بين اللاعبين

2- من حيث المجموع:

إذا كان مقدار الربح الذي يحصل علية اللاعب الأول (A) يمثل مقدار الخسارة التي يحصل عليها اللاعب الثاني (B) تسمى المباراة ذات المجموع الصفري والعكس إذا كان مقدار الربح الذي يحصل علية اللاعب الأول (A) لا يمثل مقدار الخسارة التي يحصل عليها اللاعب الثاني (B) تسمى المباراة ذات المجموع غير الصفري.

مصفوفة الدفع:

هي مصفوفة حيث صفوفها تمثل الاستراتيجيات التي يتبعها اللاعب الأول (A) والأعمدة تمثل الاستراتيجيات التي يتبعها اللاعب الثاني (B). والرقم الموجب يمثل ربح بالنسبة للاعب الأول (A) وخسارة للاعب الثاني (B) والعكس الرقم السالب يمثل خسارة بالنسبة للاعب الأول (A) وربح للاعب الثاني (B).

V-2- المباراة ذات المجموع الصفري:

V-2-1- نقطة التوازن:

هي النقطة التي يتساوى فيها Maximin (للاعب A) مع Minimax (للاعب B) أي:

Minimax (B) = Maximin (A)

كيفية استخراج Maximin (A):

* نأخذ أقل قيمة من كل صف من مصفوفة الدفع.

* من القيم الدنيا (الصغرى) المستخرجة نأخذ أكبر قيمة.

كيفية استخراج Minimax (B):

* نأخذ أكبر قيمة من كل عمود من مصفوفة الدفع.

* من القيم العظمى (الكبرى) المستخرجة نأخذ أقل قيمة.

ملاحظة:

إذا تساوت القيمتين المستخرجتان أعلاه أي (A) Maximin و (B) Minimax نقول أن لمصفوفة الدفع نقطة توازن وهذا يعني أن أمام اللاعب الأول إستراتيجية واحدة وأمام اللاعب الثاني إستراتيجية واحدة أيضا. تسمى القيمة المحصلة من هذه الإستراتيجية نقطة التوازن وهي تمثل في نفس الوقت قيمة المباراة.

مثال: إليك مصفوفة الدفع التالية:

الاستراتيجيات		**اللاعب B**			
		1	**2**	**3**	**4**
اللاعب A	**1**	4	7	2	2
	2	1	-2	2	5
	3	3	1	-3	6

المطلوب: حساب نقطة التوازن ثم التعليق على النتيجة

الحل:

الاستراتيجيات		**اللاعب B**					
		1	**2**	**3**	**4**	**Min**	**Max**
اللاعب A	**1**	4	7	2	2	2	2
	2	1	2-	2	5	-2	
	3	3	1	3-	6	-3	
	Max	4	7	2	6		
	Min	2					

$$\text{Maximin }(A) = \text{Minimax }(B) = 2$$

التعليق:

القيمة 2 تمثل نقطة التوازن وتمثل في نفس الوقت قيمة المباراة وهي مقدار الربح الذي يحصل عليه اللاعب A إذا لعب بالإستراتيجية الأولى ولعب B بالإستراتيجية الثالثة.

IV -2-2- إختزال مصفوفة الدفع (الاستراتيجيات المهيمنة):

إن المقصود بعملية الاختزال هو تقليل أو تقليص رتبة أو درجة المصفوفة من خلال حذف بعض الصفوف أو بعض الأعمدة وفق قواعد محددة.

قواعد اختزال مصفوفة الدفع:

1- نقوم بحذف كل الصف تكون جميع عناصره أقل أو تساوي صف آخر.

2- نقوم بحذف كل عمود تكون جميع عناصره أكبر أو تساوي عمود آخر.

3- عملية الاختزال لا تأثر على نقطة التوازن.

مثال: إليك مصفوفة الدفع التالية:

الاستراتيجيات	B1	B2	B3	B4
A1	4	-10	-15	20
A2	-3	-18	-7	-4
A3	5	-8	3	8
A4	4	-20	-6	-8
A5	-8	-12	-15	-10

المطلوب:

1- حدد نقطة التوازن ؟

2- اختزل مصفوفة الدفع ؟

3- ماذا تستنتج ؟

الحل:

1- حساب نقطة التوازن:

<table>
<tr><th>الاستراتيجيات</th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th><th>B4</th><th>Min</th><th>Max</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>4</td><td>-10</td><td>-15</td><td>20</td><td>-15</td><td rowspan="7">-8</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>-3</td><td>-18</td><td>-7</td><td>-4</td><td>-18</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>5</td><td>-8</td><td>3</td><td>8</td><td>-8</td></tr>
<tr><td>A4</td><td>4</td><td>-20</td><td>-6</td><td>-8</td><td>-20</td></tr>
<tr><td>A5</td><td>-8</td><td>-12</td><td>-15</td><td>-10</td><td>-15</td></tr>
<tr><td>Max</td><td>5</td><td>-8</td><td>3</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>Min</td><td colspan="5">-8</td></tr>
</table>

$$(A)\ \text{Maximin} = \text{Minimax}\ (B) = -8$$

2- اختزال مصفوفة الدفع:

الصف الرابع (الإستراتيجية الرابعة للاعب A) قيمه كلها أقل من قيم الصف الثالث ومنه نختزل الصف الرابع تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B1	B2	B3	B4
A1	4	-10	-15	20
A2	-3	-18	-7	-4
A3	5	-8	3	8
A5	-8	-12	-15	-10

الصف الرابع في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الخامسة للاعب A) قيمه كلها أقل من قيم الصف الثالث ومنه نختزل الصف الرابع تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B1	B2	B3	B4
A1	4	-10	-15	20
A2	-3	-18	-7	-4
A3	5	-8	3	8

الصف الثاني في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الثانية للاعب A) قيمه كلها أقل من قيم الصف الثالث ومنه نختزل الصف الثاني تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B1	B2	B3	B4
A1	4	-10	-15	20
A3	5	-8	3	8

العمود الرابع في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الرابعة للاعب B) قيمه كلها أكبر من قيم العمود الأول ومنه نختزل العمود الرابع تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B1	B2	B3
A1	4	-10	-15
A3	5	-8	3

العمود الأول في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الأولى للاعب B) قيمه كلها أكبر من قيم العمود الثاني ومنه نختزل العمود الأول تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B2	B3
A1	-10	-15
A3	-8	3

الصف الأول في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الأولى للاعب A) قيمه كلها أقل من قيم الصف الثاني في المصفوفة الجديدة ومنه نختزل الصف الأول تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B2	B3
A3	-8	3

العمود الثاني في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الثانية للاعب B) قيمه كلها أكبر من قيم العمود الأول في المصفوفة الجديدة ومنه نختزل العمود الثاني تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B2
A3	-8

وهي نفسها نقطة التوازن.

الاستنتاج:

نستنتج أن عملية الاختزال لا تؤثر على نقطة التوازن حيث تبقى نقطة التوازن -8 ثابتة في كل مراحل الاختزال في آ خر مرحلة نحصل على نقطة التوازن.

مثال02: إليك مصفوفة الدفع التالية:

الاستراتيجيات	B1	B2	B3	B4
A1	0	-3	7	5
A2	5	4	6	3
A3	3	2	8	-3
A4	-1	-3	3	2

المطلوب:

1- اختزل مصفوفة الدفع ؟

2- حدد نقطة التوازن ؟

الحل:

1- اختزال مصفوفة الدفع

الصف الرابع (الإستراتيجية الرابعة للاعب A) قيمه كلها أقل من قيم الصف الثاني ومنه نختزل الصف الرابع تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B1	B2	B3	B4
A1	0	-3	7	5
A2	5	4	6	3
A3	3	2	8	-3

العمود الثالث في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الثالثة للاعب B) قيمه كلها أكبر من قيم العمود الأول في المصفوفة الجديدة ومنه نختزل العمود الثالث تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B1	B2	B4
A1	0	-3	5
A2	5	4	3
A3	3	2	-3

الصف الثالث في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الثالثة للاعب A) قيمه كلها أقل من قيم الصف الثاني ومنه نختزل الصف الثالث تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B1	B2	B4
A1	0	-3	5
A2	5	4	3

العمود الأول في المصفوفة الجديدة (الإستراتيجية الأولى للاعب B) قيمه كلها أكبر من قيم العمود الثاني في المصفوفة الجديدة ومنه نختزل العمود الأول تصبح مصفوفة الدفع كالتالي:

الاستراتيجيات	B2	B4
A1	-3	5
A2	4	3

الجدول أعلاه يعبر عن المرحلة الأخيرة من الاختزال. ولا يمكن اختزال المصفوفة أكثر.

2- حساب نقطة التوازن

الاستراتيجيات	B2	B4	Min	Max
A1	-3	5	-3	**3**
A2	4	3	3	
Max	4	5		
Min	**4**			

$$\text{Maximin}(A)=3$$

$$\text{Minimax}(B)=4$$

$$\text{Minimax}\ (A)\ \neq \text{Maximin}(B)$$

المباراة لا تقبل نقطة توازن (نقطة استقرار) ومن هنا يجب على كلا اللاعبين اللجوء إلى مزيج من الاستراتيجيات.

IV -3-الاستراتيجيات المختلطة (عدم وجود نقطة توازن):

إن وجود نقطة توازن لمصفوفة الدفع يعني أن أمام كلا اللاعبين إستراتيجية واحدة. لكن المشكلة تصبح أكثر تعقيد عندما لا توجد نقطة توازن أي:

$$\text{Maximin}\ (A) \neq \text{Minimax}\ (B)$$

وهنا وقبل استخراج قيمة المباراة لا بد من ملاحظة ما يلي:

1- يجب أن يكون Minimax (B) أكبر من Maximin (A).

2- يجب أن تكون قيمة المباراة محصورة بين Maximin (A) و Minimax (B) المستخرجة.

IV -3-1- طرق إيجاد قيمة المباراة في حالة عدم وجود نقطة توازن:

هناك العديد من الطرق الرياضية المتبعة لاستخراج قيمة المباراة ومعرفة الاستراتيجيات المتبعة من قبل كلا اللاعبين وجميع هذه الطرق تعتمد بالدرجة الأولى على رتبة (درجة) مصفوفة الدفع وأهمها:

* طريقة الاحتمالات (الطريقة الجبرية):

* الطريقة الحسابية:

* طريقة المباريات الفرعية:

* الطريقة البيانية:

*طريقة المعادلات الخطية:

* طريقة البرمجة الخطية

1- طريقة الاحتمالات

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون مصفوفة الدفع من الدرجة 2*2 أي أن أمام كلا اللاعبين إستراتيجيتان فقط. وسميت بطريقة الاحتمالات لأنها تعتمد على توقع أداء اللاعبين فيما يتعلق بالاستراتيجيات المتبعة وليس الأداء الفعلي. وهنا يجب التنويه أن مجموع الاحتمالات لكل لاعب يساوي الواحد والاحتمال محصور بين الصفر والواحد ويمكن توضيح هذه الطريقة بالمثال التالي:

مثال: إليك مصفوفة الدفع التالية:

	B1	B2
A1	3	-2
A2	1	4

المطلوب:

1- حساب (A) Maximin و(B) Minimax ماذا تستنتج؟

2- حدد قيمة المباراة (V) واشرح النتيجة المتوصل إليها ؟

الحل:

1- حساب (A) Maximin و(B) Minimax

الاستراتيجيات	B2	B4	Min	Max
A1	3	2-	2-	**1**
A2	1	4	1	
Max	3	4		
Min	**3**			

Maximin (A)=1

Minimax (B)=3

نلاحظ أن Minimax (B) أكبر من Maximin (A) ومنه المباراة لا تقبل نقطة توازن وقيمة المباراة يجب أن يكون محصور بين 1 و 3.

2- حساب قيمة المباراة:

1- بالنسبة للاعب A: يلعب الإستراتيجية الأولى باحتمال P والإستراتيجية الثانية باحتمال (1-P). ثم نقوم بحساب P.

الاحتمال		B1	B2
P	A1	3	-2
1-P	A2	1	4

فيصبح لدينا:

$$3P + 1\,(1 - P) = V \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$-2P + 4\,(1 - P) = V \cdots\cdots\cdots (2)$$
$$(1) = (2) \Rightarrow 3P + 1\,(1 - P) = -2P + 4\,(1 - P)$$
$$\Rightarrow 2P + 1 = -6P + 4$$
$$\Rightarrow 8P = 3$$
$$\Rightarrow P = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}$$

$$(1 - P) = 1 - 0.375 = \mathbf{0.625}$$

ومنه قيمة المباراة هي:

$$V = 2(0.375) + 1 = \mathbf{1.75}$$

أو

$$V = -6(0.375) + 4 = \mathbf{1.75}$$

التعليق:

1.75 هو الربح الذي يحصل عليه اللاعب A إذا لعب الإستراتيجية الأولى باحتمال 0.375 والإستراتيجية الثانية باحتمال 0.625 ولهذا السبب يطلق عليها اسم الاستراتيجيات المختلطة وليس الإستراتيجية الوحيدة.

تأكيد الحل:

نلاحظ أن قيمة المباراة هي فعلا محصورة بين 1 و 3 المستخرجة.

2- بالنسبة للاعب B: يلعب الإستراتيجية الأولى باحتمال Q والإستراتيجية الثانية باحتمال (1-Q). ثم نقوم بحساب Q.

الاحتمال	Q	1-Q
	B1	B2
A1	3	-2
A2	1	4

فيصبح لدينا:

$$3Q - 2\,(1 - Q) = V \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$Q + 4\,(1 - Q) = V \cdots\cdots\cdots (2)$$
$$(1) = (2) \Rightarrow 3Q - 2\,(1 - Q) = Q + 4\,(1 - Q)$$
$$\Rightarrow 5Q - 2 = -3Q + 4$$
$$\Rightarrow 8Q = 6$$
$$\Rightarrow P = \frac{6}{8} = \mathbf{0.75}$$
$$(1 - Q) = 1 - 0.75 = \mathbf{0.25}$$

ومنه قيمة المباراة هي:

$$V = 5(0.75) - 2 = \mathbf{1.75}$$

أو

$$V = -3(0.75) + 4 = \mathbf{1.75}$$

التعليق:

1.75 هي الخسارة التي يحصل عليها اللاعب B إذا لعب الإستراتيجية الأولى باحتمال 0.75 والإستراتيجية الثانية باحتمال 0.25 ولهذا السبب يطلق عليها اسم الاستراتيجيات المختلطة وليس الإستراتيجية الوحيدة.

تأكيد الحل:

نلاحظ أن قيمة المباراة هي فعلا محصورة بين 1 و 3 المستخرجة.

2- الطريقة الحسابية:

يمكن إيجاد نسبة الوقت الذي يقضيه كا من اللاعبين للعب إستراتيجيتهما بالطريقة الحسابية بإتباع الخطوات التالية:

- نقوم بحساب الفرق الموجب (طرح العائد الأصغر من العائد الأكبر) لكل صف ولكل عمود.

- نقسم كل فرق موجب للصفوف على مجموع الفروق الموجبة للصفوف وكل فرق موجب للأعمدة على مجموع الفروق الموجبة للأعمدة.

- تبديل النسب الناتجة بين الصفين وبين العمودين (النسب الناتجة تمثل نسبة الوقت الذي يقضيه كل لاعب للعب استراتيجياته المختلفة).

- إيجاد قيمة المباراة وهي مجموع القيم مضروبة في الاحتمالات المرافقة لها من الصفوف والأعمدة.

مثال: حل نفس المثال السابق بالاعتماد عل الطريقة الحسابية ؟

الحل: مصفوفة الدفع هي:

1- حساب الفرق الموجب لكل صف ولكل عمود.

الفرق الموجب للصفوف	B2	B1	
3-(-2)=**5**	-2	3	A1
4-1=**3**	4	1	A2
	4-(-2)=**6**	3-1=**2**	الفرق الموجب للأعمدة

2- نقسم كل فرق موجب للصفوف على مجموع الفروق الموجبة للصفوف وكل فرق موجب للأعمدة على مجموع الفروق الموجبة للأعمدة.

نسب الصفوف	B2	B1	
5/8	-2	3	A1
3/8	4	1	A2
	6/8	**2/8**	نسب الأعمدة

3- تبديل النسب الناتجة بين الصفين وبين العمودين (النسب الناتجة تمثل نسبة الوقت الذي يقضيه كل لاعب للعب استراتيجياته المختلفة).

نسب لعب الاستراتيجيات	B2	B1	
3/8	-2	3	A1
5/8	4	1	A2
	2/8	**6/8**	نسب لعب الاستراتيجيات

4- حساب قيمة المباراة: وهي مجموع القيم مضروبة في الاحتمالات المرافقة لها من الصفوف والأعمدة وهي تمثل أيضا إجمالي الكسب المتوقع للاعب A وإجمالي الخسارة المتوقع للاعب B.

4-1- إجمالي الكسب المتوقع للاعب A هو:

$$\frac{6}{8}\left[\frac{3}{8}(3)+\frac{5}{8}(1)\right]+\frac{2}{8}\left[\frac{3}{8}(-2)+\frac{5}{8}(4)\right]=\mathbf{1.75}$$

4-2- إجمالي الخسارة المتوقعة للاعب B هي:

$$\frac{3}{8}\left[\frac{6}{8}(3)+\frac{2}{8}(-2)\right]+\frac{5}{8}\left[\frac{6}{8}(1)+\frac{2}{8}(4)\right]=\mathbf{1.75}$$

1.75 تمثل قيمة المباراة

3- طريقة المباريات الفرعية:

يوجد هناك العديد من الحالات التي لا يمكننا فيها حل المباراة من نوع (M . 2) أو (2 . M) بطريق السيطرة (الهيمنة) وذلك بسبب عدم إمكانية اختزالها إلى مباراة من نوع (2 . 2). وهنا يمكن للاعب الذي يملك أكثر من إستراتيجيتين اللجوء إلى المباريات الفرعية ومن ثم اختيار الأفضل من بينها.

مثال: إليك مصفوفة الدفع التالية:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	14	6	-9	5	-21
A2	9	-26	-13	10	23

المطلوب: حدد قيمة المباراة

الحل:

Maximin (A)=-21

Minimax (B)=-9

نلاحظ أن (B) Minimax أكبر من (A) Maximin المباراة أعلاه لا تحتوي على نقطة توازن وبالتالي سيلجأ اللاعب B إلى طريقة السيطرة (الهيمنة) بإسقاط الاستراتيجيات التي تحقق الكسب الدائم للاعب A وهي الإستراتيجيتين 1 و4 وبالتالي تصبح المصفوفة على الشكل التالي:

	B1	B2	B3
A1	6	-9	-21
A2	-26	-13	23

المباراة أعلاه لا تحتوي على نقطة توازن ولا يمكن اختزالها إلى مباراة من نوع (2 . 2) ومنه سنلجأ إلى تقسيمها إلى مباريات فرعية من نوع (2 . 2) فنحصل على ثلاث مباريات فرعية كالتالي:

المباراة 1		
	B1	B2
A1	6	-9
A2	-26	-13

المباراة 2		
	B1	B2
A1	6	-21
A2	-26	23

المباراة 3		
	B1	B2
A1	-9	-21
A2	-13	23

نقوم بحل كل مباراة على حدة واختيار المباراة التي تحقق للاعب B أكبر العوائد أي أعلى قيمة بالإشارة السالبة.

وإذا كانت كل القيم موجبة فإنه سيختار المباراة التي تحقق أقل خسارة ممكنة.

4- طريقة المعادلات الخطية : إذا كانت لدينا مباراة من نوع (M . N)، حيث N=M ولا تحتوي على نقطة توازن ولا يمكن تحويلها إلى مباراة من نوع (2 . 2) فيمكن استخدام طريقة المعادلات الخطية وحلها باستعمال الجبر الخطي.

مثال: إليك مصفوفة الدفع التالية:

	B1	B2	B3
A1	6	4	14
A2	10	10	6
A3	0	14	4
Max	10	14	14

المطلوب:

1- حساب (A) Maximin و (B) Minimax ماذا تستنتج؟

2- حدد قيمة المباراة (V) واشرح النتيجة المتوصل إليها ؟

الحل:

	B1	B2	B3	Min	Max
A1	6	4	14	4	
A2	10	10	6	6	**6**
A3	0	14	4	0	
Max	10	14	14		
Min		**10**			

1- حساب (A) Maximin و (B) Minimax

Maximin (A)=6

Minimax (B)=10

نستنتج أن (B) Minimax أكبر من (A) Maximin ومنه المباراة لا تقبل نقطة توازن وقيمة المباراة يجب أن يكون محصور بين 6 و 10.

2- تحديد قيمة المباراة (V) واشرح النتيجة المتوصل إليها ؟

لاستخراج قيمة المباراة نقوم بما يلي:

إذا لعب B استراتيجياته المختارة يكون ما يلي:

إستراتيجيات B	الربح المتوقع للاعب A
1	
2	
3	

للعب إستراتيجياته المختارة وبذلك يكون: A هو نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب x_1، x_2، x_3 حيث:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

V: قيمة المباراة

لدينا ثلاث معادلات وأربع مجاهيل ومنه علينا التخلص من أحد المجاهيل وليكن x_1 مثلا:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

نعوض في المعادلات أعلاه:

$$6(1 - x_2 - x_3) + 10x_2 + 0 = V$$
$$4(1 - x_2 - x_3) + 10x_2 + 14x_3 = V$$
$$14(1 - x_2 - x_3) + 6x_2 + 4x_3 = V$$

بالنشر نحصل على:

$$6 + 4x_2 - 6x_3 = V$$
$$4 + 6x_2 + 10x_3 = V$$
$$14 - 8x_2 - 10x_3 = V$$

$$V - 4x_2 + 6x_3 = 6$$

$$V - 6x_2 - 10x_3 = 4$$

$$V + 8x_2 + 10x_3 = 14$$

لدي ثلاث معادلات وثلاث مجاهيل ومنه أعلاه الجملة تقبل حل وحيد:

IV –4– حل المباراة بطريقة البرمجة الخطية:

توجد علاقة قوية بين نظرية المباريات ونظرية البرمجة الخطية منذ صياغة المسألة في صورة برمجة خطية وأن كل مسألة برمجة خطية يمكن اعتبارها مسألة مبارايات. وفي الحقيقة قام الباحث (G.Dantzing 1963) بالتطرق إلى نظرية المباراة عندما ظهر علم حل مسائل البرمجة الخطية (السمبلكس) في (1947) وكذلك تطرقت النظرية الثنائية في البرمجة الخطية إلى هذه العلاقة أيضا. فإذا أشرنا إلى الخطة المختلطة المثلى[19]:

$$Max\left\{min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \cdots\cdots\cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

تحت الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_m = 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad \mathrm{i} = 1,2,\cdots,m$$

هذه المسألة يمكن صياغتها في شكل برمجة خطية وذلك على النحو التالي:

$$\mathrm{v} = min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \cdots\cdots\cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)$$

فتصبح المسألة:

Maximize z=v

تحت الشروط (S.T)

[19] أبو قاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب والنشر،القاهرة، 2012، ص397-398.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i \geq \text{v}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1$$

$$x_i \geq 0 \text{ (لكل i)}$$

V: تمثل قيمة المباراة في هذه الحالة.

ويمكن تبسيط مسألة البرمجة الخطية بقسمة كل المعادلات (n+1) و (V) وهذا التقسيم صحيح مادام قيمة $\text{v} > 0$

أيضا إذا كانت قيمة $\text{v} > 0$ فإن رمز المعادلة $\left[\begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix}\right]$ تعكس وفقا لقواعد البرمجة الخطية.

أما إذا كانت $\text{v} = 0$ فلا يجوز القسمة

وبصفة عامة إذا كانت قيمة Max–min موجبة فهذا يحقق عدم وجود نقطة تلاقي أو نقطة استقرار فإذا فرضنا أن $\text{v} = 0$ فإن قيود مسألة البرمجة الخطية تكون على النحو التالي:

$$a_{11}\frac{x_1}{\text{v}} + a_{21}\frac{x_2}{\text{v}} + \cdots\cdots\cdots + a_{m1}\frac{x_m}{\text{v}} \geq 1$$
$$a_{21}\frac{x_1}{\text{v}} + a_{22}\frac{x_2}{\text{v}} + \cdots\cdots\cdots + a_{m2}\frac{x_m}{\text{v}} \geq 1$$
$$\text{M}$$
$$a_{1n}\frac{x_1}{\text{v}} + a_{2n}\frac{x_2}{\text{v}} + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}\frac{x_m}{\text{v}} \geq 1$$
$$\frac{x_1}{\text{v}} + \frac{x_2}{\text{v}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{x_m}{\text{v}} = \frac{1}{\text{v}}$$

فإذا قلنا أن:

$$x_1 = x_2/\text{v} \qquad i = 1,2,\dots\dots,m$$

فإن:

$$Max\ \text{v} = Min\ \frac{1}{\text{v}} = [x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_m]$$

وتصبح المسألة على الشكل التالي:

$$Minimize\ \ z = x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_m$$

S.T

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{m1}x_m \geq 1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{m2}x_m \geq 1$$

M

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_m \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_m \geq 0$$

أما اللاعب B فيمكن أن تعطى العلاقة على النحو التالي:

$$Max\left\{max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathrm{y_i}, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\mathrm{y_i}, \cdots\cdots\cdots\cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\,\mathrm{y_i}\right)\right\}$$

تحت الشروط التالية:

$$\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 + \cdots\cdots\cdots + \mathrm{y}_m = 1$$
$$\mathrm{y}_1 \geq 0 \qquad\qquad \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m$$

ويمكن عرضها بواسطة البرمجة الخطية على النحو التالي:

$$Miximize\ \ w = y_1 + y_2 + \cdots\cdots\cdots + y_m$$

S.T

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}y_n \geq 1$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n \geq 1$$

M

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}\,y_n \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_m \geq 0$$

حيث $w = \frac{1}{\mathrm{v}}$

$$y_1 = \frac{\mathrm{y_i}}{\mathrm{v}} \qquad\qquad \mathrm{i} = 1,2,\cdots,n$$

V- نماذج صفوف الانتظار:

ظهرت نظرية خطوط الانتظار سنة 1990 ميلادي بواسطة عالم رياضيات يدعى (A.K.Erlang) والذي بدأ بدراسة مشكلة تسلسل وتداخل خطوط الهاتف، وبعدها في الحرب العالمية الثانية بدأت تطبيقات عديدة في مجال الصناعة الإنتاجية وأصبحت إحدى الأدوات المهمة في العمليات الإدارية[20].

وتساعد هذه النماذج المديرين على محاولة فهم وصنع قرارات أفضل فيما يتعلق بتشغيل خطوط الانتظار، ومن منظور التحليل الكمي يطلق على خط الانتظار اسم صف الانتظار، وتتكون نماذج صفوف الانتظار من معادلات وعلاقات رياضية يمكن توظيفها من أجل تحديد خصائص التشغيل (أو مقاييس أداء) لخط انتظار.

V-1- مكونات الأساسية لصفوف الانتظار:

يتكون صف الانتظار من مجموعة من العناصر نوجزها فيما يلي:

الوحدات: ونعني بها الأشخاص الذين يطلبون الخدمة.

صف الانتظار: ونعني به مجموعة الزبائن أو العملاء الذين ينتظرون تقديم الخدمة لهم.

مركز الخدمة: ونعني به العامل أو الآلة المكلفة بتقديم الخدمة للعملاء أو الزبائن.

المخرجات: ونعني بها العملاء الذين يغادرون بعد تقديم الخدمة لهم.

V-2- خصائص صفوف الانتظار:

طاقة النظام:

طاقة النظام= عدد الوحدات التي توجد في الطابور+ عدد الوحدات التي تقدم لها الخدمة
ولكن هذا العدد يكون في العديد من الأحيان غير محدودا كما قد يكون محدودا.

طريقة تقديم الخدمة:

أ– القادم أولا تقدم له الخدمة أولا: (FIFO- first in first out)

[20] أبو قاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2012، ص.341.

ب- القادم الأخير تقدم له الخدمة أولا: (LIFO- first in last out)

توزيع وقت الوصول: ونقصد به الكيفية وصول العملاء إلى مركز الخدمة ويمكن أن يكون:

بمعدل ثابت: مثلا وصول خمسون شخص إلى مصلحة البريد في اليوم.

بمعدل عشوائي: مثلا عدد الأشخاص الذين يصلون مصلحة البريد يختلف من يوم لآخر.

ويعبر عن معدل الوصول بطريقتين:

- عدد الوحدات التي تصل وتنضم للنظام في وحدة زمنية.
- الوقت الذي يمضي بين واصلين متتاليين.

توزيع وقت الخدمة: ونقصد به الكيفية التي تقدم بها الخدمة والتي تكون بدورها بشكل ثابت أو عشوائي ويعبر عنه هو الآخر بطريقتين:

- عدد الوحدات التي تتلقى الخدمة في مدة زمنية.
- الوقت المطلوب لتقديم الخدمة.

V-3- نماذج صفوف الانتظار:

ويمكن تلخيص أشهر نماذج صفوف الانتظار فيما يلي[21]:

- نموذج M/M/1 FCFS/∞/∞: ويتكون هذا النموذج من خادم (مقدم خدمة) واحد، وتوزيع أسي لوقت الخدمة وصف لا نهائي، ومجتمع لا نهائي.
- نموذج M/C/1 FCFS/∞/∞: ويتكون من خادم فردي، ووقت خدمة ثابت، وطول صف لا نهائي ومجتمع لا نهائي.
- نموذج M/M/1 FCFS/K/∞: من خادم فردي، وتوزيع خدمة أسي، وصف محدود، ومجتمع غير محدود.
- نموذج M/G/1 FCFS/∞/∞: ويتكون من خادم فردي، وتوزيع خدمة عام، وطول لا نهائي للصف، ومجتمع لا نهائي.
- نموذج M/E/1 FCFS/∞/∞: : ويتكون من خادم فردي، وتوزيع إيرلنج لوقت الخدمة، وطول لا نهائي للصف، ومجتمع لا نهائي.

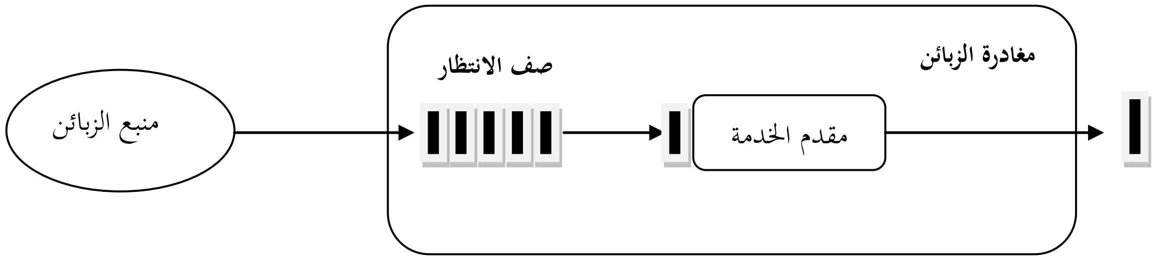
[21] د. فاهيد لطفي، كار بيجلز، نظم دعم القرارات، لإدارة العمليات، وبحوث العمليات، تعريب د.م. سرور علي ابراهيم سرور، دار المريخ للنشر 2007م،ص496-505.بتصرف.

- نموذج M/M/R FCFS/∞/∞: ويتكون من خدم متعددين، وتوزيع وقت الخدمة أسي، وطول لا نهائي للصف، ومجتمع لانهائي.
- نموذج: M/M/R FCFS/K/K: ويتكون من خدم متعددين، وتوزيع وقت الخدمة أسي، وطول لا نهائي للصف، ومجتمع محدود.

ويمكن القول أن الهدف التقليدي لتحليل صفوف الانتظار، هو تحقيق التوازن بين تكلفة تقديم مستوى معين من طاقة الخدمة وتكلفة انتظار العملاء لحين الحصول على الخدمة، وبصفة عامة، يمكن القول أن نجاح عملية الدراسة والتحليل يعتمد على قيامنا باختيار النموذج الملائم. وسنحاول التطرق إلى بعض النماذج المذكورة أعلاه.

V-3-1- صف واحد ومقدم خدمة واحد:

يعد هذا النموذج من أبسط الأنواع ويسمى أيضا بنظام القناة الواحدة (single channel system) إذ تصل الوحدات إلى مركز الخدمة بشكل متتالي في صف واحد، وتقدم لها الخدمة بمرحلة واحدة.



مثال ذلك (وصول السيارات العاطلة إلى مركز الإصلاح تتكون من مصلحة واحدة). ولغرض وضع نموذج لخط الانتظار يجب أولا تحديد خصائص النظام التالية.

- توزيع وقت الوصول.
- توزيع وقت الخدمة.
- خط الانتظار.

1- توزيع وقت الوصول:

وهنا نقوم بتحديد عدد الوحدات التي تصل إلى مركز الخدمة خلال فترة زمنية محددة، والذي يكون عشوائيا في أغلب الأحيان وعليه يصعب وضع نمط معين لعملية وصول الوحدات، وعلى هذا الأساس توزيع بواسون هو الأفضل لوصل العملاء لمركز الخدمة والمعرف بالعلاقة التالية:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

حيث:

X: عدد الوحدات التي تصل إلى مركز الخدمة خلال فترة زمنية معينة.

λ: متوسط عدد الواصلين إلى مركز الخدمة خلال مدة زمنية معينة.

e: قيمة ثابتة قدرها 2.718

2- توزيع وقت الخدمة:

هو الوقت المستغرق لتقديم الخدمة للعميل، ويعتبر التوزيع الأسي هو الأفضل لتأدية هذه الخدمة ويعرف بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}$$

حيث:

x:يمثل زمن تقديم الخدمة.

μ: متوسط عدد الوحدات التي تلقت الخدمة في مركز الخدمة خلال مدة زمنية معينة.

e: قيمة ثابتة قدرها 2.718

احتمال تقديم الخدمة خلال فترة زمنية t هو:

$$P(x \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

لغرض معالجة هذا النوع من النماذج نقوم بتوضيح بعض العلاقات الرياضية الاحتمالية التي سنستعملها لحل هذا النموذج:

الخاصية	العلاقة الرياضية
توزيع أوقات وصول الزبائن لمراكز الخدمة	$P = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$
توزيع تقديم الخدمة في مدة زمنية محددة	$P(x \le t) = 1 - e^{-\mu t}$
احتمال وجود وحدات في النظام (معامل التشغيل)	$P = \frac{\lambda}{\mu}\ ,(\lambda < \mu)$
احتمال عدم وجود وحدات في النظام (تعطل النظام)	$P_0 = (1 - P) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
احتمال عدم انتظار أي وحدة	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$
متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام	$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$
متوسط عدد الوحدات المتوقع في الصف	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$
متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

مثال:

إذا كانت مغسلة السيارات تستوعب سيارة واحدة للغسل، وقد لاحظ مسؤول المغسلة وقوف خمس سيارات في العديد من المرات في انتظار الغسل. ففكر في وضع بدائل لتقليل وقت الانتظار عن طريق ابتكار آلية جديدة للغسل وقد اقترح بديلين:

- البديل الأول: تسريع عملية الغسل من خلال زيادة عدد آليات التنظيف والغسل.
- البديل الثاني: توسيع المرآب وزيادة آليات التنظيف بحيث يصبح بإمكانه غسل سيارتين في آن واحد.

فإذا كان متوسط وصول السيارات للمغسلة هو 24 سيارة في اليوم. ضع نموذج لخط الانتظار، ومتوسط زمن غسل السيارات هو سيارتين في الساعة. وكان متوسط ساعات العمل اليومي هو 8ساعات.

المطلوب:

- احتمال عدم وصول أي سيارة إلى المغسلة في الساعة ؟
- احتمال وصول سيارتين إلى المغسلة في الساعة ؟
- احتمال وصول ثلاث سيارات في الساعة ؟
- حساب احتمال تقديم الخدمة خلال الفترات الزمنية التالية (ساعة واحدة، 4ساعات، ست ساعات) ؟

الحل:

لدينا: توزيع أوقات وصول الزبائن لمراكز الخدمة

$$P = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\lambda = \frac{24}{8} = 3$$

ومنه متوسط وصول السيارات للمغسلة في الساعة هو: 3

$$P = e^{-3}\frac{3^x}{x!}$$

- احتمال عدم وصول أي سيارة إلى المرآب في الساعة:

$$P(x = 0) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = \mathbf{0.05}$$

- احتمال وصول سيارتين إلى المرآب في الساعة:

$$P(x = 2) = e^{-3}\frac{3^2}{2!} = \mathbf{0.22}$$

- احتمال وصول ثلاث سيارات في الساعة:

$$P(x = 3) = e^{-3}\frac{3^3}{3!} = \mathbf{0.22}$$

لدينا أيضا: توزيع تقديم الخدمة في الساعة

$$P(x \leq t) = 1 - e^{-2t}$$

متوسط ساعات العمل اليومي هو 8ساعات:

– احتمال تأدية الخدمة خلال ساعة واحدة هو: $t = \frac{1}{8} = 0.125$

$$P(x \leq 0.125) = 1 - e^{-2(0.125)} = 0.22$$

– احتمال تأدية الخدمة خلال خلال 4 ساعات هو: $t = \frac{4}{8} = 0.5$

$$P(x \leq 0.5) = 1 - e^{-2(0.5)} = 0.63$$

– احتمال تأدية الخدمة خلال خلال 6 ساعات هو: $t = \frac{6}{8} = 0.75$

$$P(x \leq 0.75) = 1 - e^{-2(0.75\mu)} = 0.78$$

مثال 2:

يصل العملاء إلى مصلحة البريد المركزي بولاية عين تموشنت بمتوسط 28 عميل في الساعة، فإذاكان الموظف المسؤول عن تقديم الخدمة للعملاء يستطيع خدمة 40 عميل في الساعة اوجد مايلي:

1- احتمال أن يكون الموظف المسؤول عن تقديم الخدمة مشغولا ؟

2- نسبة الوقت الضائع (غير المستغل) ؟

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار ؟

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام ؟

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار ؟

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام ؟

الحل:

لدينا: معدل الوصول (λ) =28 زبون في الساعة

ومعدل تقديم الخدمة (μ) = 40 زبون في الساعة

1- احتمال أن يكون الموظف المسؤول عن تقديم الخدمة مشغولا:

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{28}{40} = \mathbf{0.7}$$

2- احتمال عدم وجود وحدات في النظام أو نسبة الوقت الضائع (غير المستغل):

$$P_0 = 1 - P = 1 - 0.7 = \mathbf{0.3}$$

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{28^2}{40(40-28)} = 1.63 \approx 2$$

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.63 + 0.7 = 2.33 \approx 2$$

أو

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{28}{40-28} = \frac{28}{12} = 2.33 \approx 2$$

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.63}{28} = 0.058 = 3.5 \text{ دقيقة}$$

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

أو

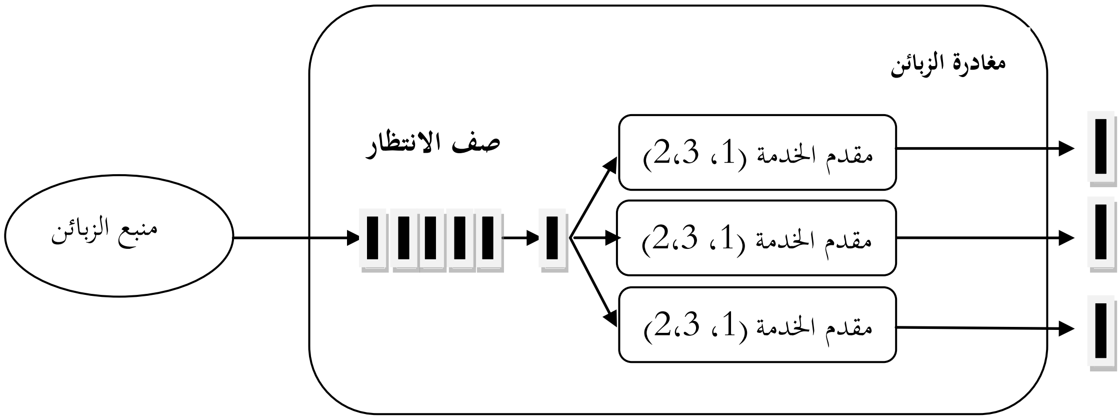
$$W_q = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{1}{12} = 0.083 = 5 \text{ دقيقة}$$

V-3-2- صف واحد وأكثر من مقدم خدمة:

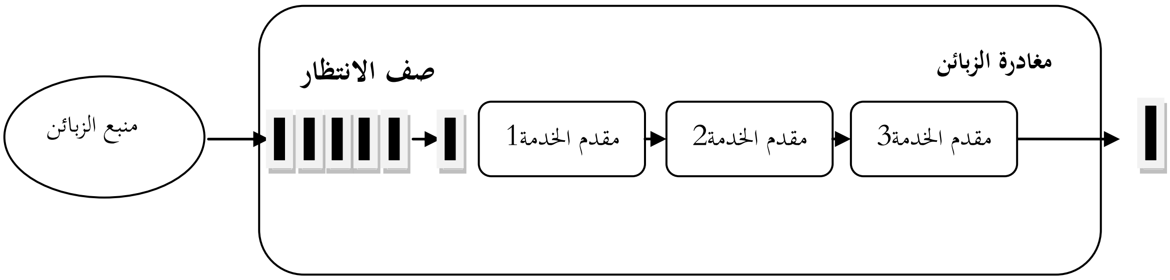
يعد نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة أكثر تعقيدا من النموذج الأول إذ يكون تقديم الخدمة بموجب هذا النموذج وفقا لأحد الأسلوبين التاليين[22]:

الأسلوب الأول: يظهر هذا الشكل في حالة وجود أكثر من مركز خدمة، ولكن الخدمة المقدمة للوحدات (الزبائن) تكون على مرحلة واحدة.

[22] صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سبق ذكره، ص.315.



الأسلوب الثاني: يظهر هذا الشكل في حالة وجود أكثر من مركز خدمة، ولكن الخدمة المقدمة للوحدات (الزبائن) تكون على عدة مراحل.



لغرض معالجة هذا النوع من النماذج نقوم بتوضيح بعض العلاقات الرياضية الاحتمالية التي سنستعملها لحل هذا النموذج:

الخاصية	العلاقة الرياضية
احتمال وجود وحدات في النظام (معامل التشغيل)	$P = \frac{\lambda}{\mu}\ ,(\lambda < s\mu)$
احتمال عدم وجود وحدات في النظام (تعطل النظام)	إيجاد قيمة P_0 من جداول خاصة بهذا النموذج، اعتمادا على قيمة P
متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام	$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$
متوسط عدد الوحدات المتوقع في الصف	$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^S * \lambda\,\mu * P_0}{(S-1)! * (S\mu - \lambda)^2}$
متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$
متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

مثال:

يتوافد الزبائن الراغبين في القروض البنكية على أحد البنوك الناشطة بولاية عين تموشنت بمتوسط 12 زبون في الساعة، كما يقوم هذا البنك بتسليم القروض للزبائن من خلال مركزين بمتوسط 15 زبون في الساعة.

أوجد ما يلي:

1- احتمال وجود زبائن في النظام ؟

2- احتمال عدم وجود زبائن في النظام ؟

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في الصف ؟

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام ؟

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار ؟

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام ؟

الحل:

لدينا: معدل الوصول (λ) =12 زبون في الساعة

ومعدل تقديم الخدمة (μ) = 15 زبون في الساعة

عدد مراكز الخدمة (S)= 2 مركز

1- احتمال وجود زبائن في النظام:

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{15} = \mathbf{0.8}$$

2- احتمال عدم وجود زبائن في النظام: $P_0 = ؟؟؟$

بما أن قيمة (P=0.8) يتضح أن الجدول أن $P_0 = 0.4286$

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^S * \lambda\, \mu * P_0}{(S-1)! * (S\mu - \lambda)^2}$$

$$L_q = \frac{(12/15)^2 * (12) * (15) * (0.4286)}{(2-1)! * [2(15)-12]^2}$$

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام:

$$L = L_q + P = 0.15 + 0.8 = 0.95 \approx 1 \text{ زبون}$$

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{0.15}{12} = 0.0125 \text{ ساعة}$$

$$W_q = 0.0125 * 60 = 0.75 \text{ دقيقة}$$

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W = 0.0125 + \frac{1}{15} = 0.0792 \text{ ساعة}$$

$$W = 0.0792 * 60 = 4.75 \text{ دقيقة}$$

V-3-3- تحسين تكاليف الانتظار:

إن الهدف الأساسي الذي يسعى إليه صانع القرار من خلال تحليله لمشكل الانتظار هو تقليل التكاليف المترتبة عن الانتظار سواءا كان الانتظار خاص بالزبون أمام مراكز الخدمة أو انتظار مقدم الخدمة الناتج عن عدم تواجد زبائن على طوابير الانتظار. هذه التكاليف أصبحت تمثل أعباء مالية باهظة على المؤسسات خاصة الإنتاجية والخدمية منها، وفيما يلي النموذج الخاص بالتكاليف:

V-3-3-1- النموذج الرياضي لتكاليف الانتظار:

$$TC = C_S + C_q$$

حيث:

TC: التكاليف الكلية

C_S: تكلفة مخصصة للعمال في مراكز الخدمة.

C_q: تكلفة الوقت الضائع للوحدات في صف الانتظار.

وتأخذ التكلفة مخصصة للعمال في مراكز الخدمة (C_S) و تكلفة الوقت الضائع للوحدات في صف الانتظار (C_q) الصيغة التالية:

$$C_S = C_1 * t$$

$$C_q = C_2 + t * L_q$$

C_1: تكلفة أجرة الوحدة الواحدة في صف الانتظار في وحدة الزمن (t).

C_2: تكلفة أجرة العاملين في مراكز الخدمة قي وحدة الزمن (t).

t: تمثل وحدة الزمن وتساوي (دقيقة، ساعة، يوم، أسبوع، شهر، ...)

L_q: متوسط عدد الوحدات المتوقع في الصف.

مثال:

في أحد صالونات الحلاقة بها مقعد حلاقة واحد، يصل الزبائن إلى الصالة بمتوسط 4 زبائن في الساعة، كما يستغرق الحلاق 12 دقيقة لقص شعر أي زبون. إذا علمت أن صاحب صالة الحلاقة يتقاضى 20 دينار عن الساعة الواحدة. وأن الحلاق كل زبون يكلف الحلاق 30 دينار، وأن ساعات العمل في صالة الحلاقة هي 8 ساعات في اليوم.

المطلوب:

1- حساب تكاليف الوقت الضائع المترتب عن انتظار الزبائن ؟

2- التكاليف الكلية المطلوبة لأداء العمل ؟

الحل:

لدينا:

متوسط وصول الزبائن إلى الصالة هو: $(\lambda = 4)$

متوسط تقديم الخدمة للزبائن في الصالة هو: $\mu = \frac{60}{12} = 5$

إذن:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4^2}{5(5-4)} = \frac{16}{5} = 3.2$$

1- تكاليف صاحب الصالة:

$$C_S = C_1 * t$$

$$C_S = 20 * 8$$

$$C_S = 160$$

2- حساب تكاليف الوقت الضائع المترتب عن انتظار الزبائن:

$$C_q = C_2 + t * L_q$$

$$C_q = 30 * 8 * 3.2$$

$$C_q = 768$$

3- التكاليف الكلية المطلوبة لأداء العمل ؟

$$TC = 160 + 768$$

$$\mathbf{TC = 928}$$

مثال 02: في المثال السابق إذا كانت صالة الحلاقة تتوفر على مقعدي حلاقة إي تستطيع خدمة زبونين في آن واحد.

المطلوب:

1- حساب تكاليف الوقت الضائع المترتب عن انتظار الزبائن ؟

2- التكاليف الكلية المطلوبة لأداء العمل ؟

الحل:

لدينا:

متوسط وصول الزبائن إلى الصالة هو: $(\lambda = 4)$

متوسط تقديم الخدمة للزبائن في الصالة هو: $\mu = \frac{60}{12} = 5$

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5} = 0.8$$

من الجدول:

$$P_0 = 0.4286$$

إذن:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^S * \lambda\, \mu * P_0}{(S-1)! * (S\mu - \lambda)^2}$$

$$L_q = \frac{(0.8)^2 * 4 * 5 * 0.4286}{(2-1)! * (2*5-4)^2}$$

$$L_q = 0.15$$

1- تكاليف صاحب الصالة:

$$C_S = C_1 * t$$

$$C_S = 20 * 8$$

$$C_S = 160$$

2- حساب تكاليف الوقت الضائع المترتب عن انتظار الزبائن:

$$C_q = C_2 + t * L_q$$

$$C_q = 30 * 8 * 0.15$$

$$C_q = 36$$

3- التكاليف الكلية المطلوبة لأداء العمل ؟

$$TC = 160 + 36$$

IV – أسلوب المحاكاة " تقليد المواقف":

يهدف أسلوب المحاكاة إلى تقليد النظام المدروس بنظام فرضي يحاكي النظام الحقيقي، ومراقبة التغيرات التي تطرأ على نموذج المحاكاة، فهي محاولة لتطبيق خصائص ومظاهر النظم الواقعية في شكل نماذج تقترب بشدة منه وتعطي تصورا دقيقا للواقع ومشاكله، ومن ثم يمكن تصميم ودراسة ووضع حلول للمشاكل المرتبة بالنظم في الواقع العملي، "ويمكن تصنيف أنواع المحاكاة على عدة أسس لكن أهمها هو تصنيف المحاكاة على أساس الميزة التي تحاكيها، وعلى أساس ذلك يكون هناك المحاكاة باستخدام الأحداث المنفصلة، والمحاكاة المستمرة، والمحاكاة المختلطة[23]"، ويستخدم هذا الأسلوب عند دراسة الكثير من المشاكل المعقدة التي لا توجد لها نماذج رياضية، والتي تواجهنا في مجال إدارة الأعمال، أو التي تكون النماذج الرياضية الخاصة بها معقدة (إن لم تكن مستحيلة) في عملية الحل، من بين هذه المشاكل:

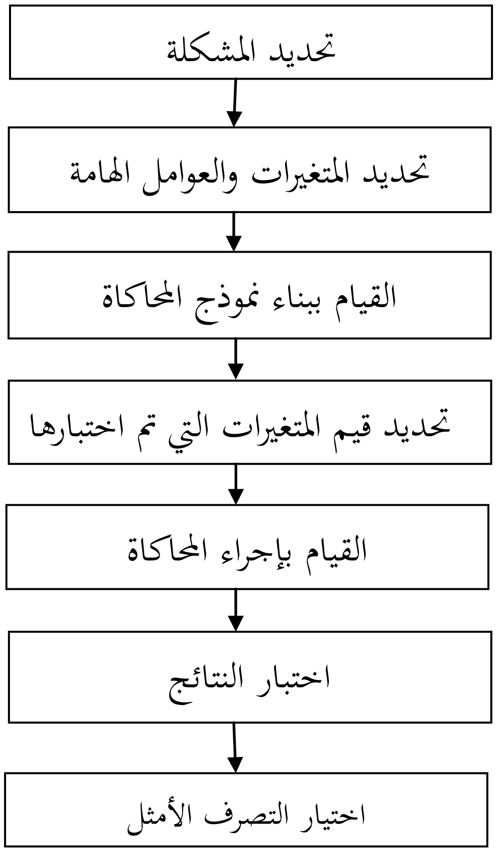
- مشكلة صيانة الآلات.
- تقييم مشروعات الاستثمار.
- تخطيط الأرباح.
- جدولة برامج الإنتاج.
- مشكلة المخزون .

دراسة تأثير الحملات الإعلانية.

وتتلخص خطوات إجراء المحاكاة في الشكل التالي:

[23] د. حسين بلعجوز، نظرية القرار، مدخل إداري وكمي، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 2006، ص191.

الشكل : **خطوات إجراء المحاكاة**



المصدر: جلال ابراهيم العبد، إدارة الانتاج والعمليات،الدار الجامعية، الأسكندرية، 2002، ص267.

IV -1- مزايا وعيوب نماذج المحاكاة:

IV -1- 1- مزايا نماذج المحاكاة: هناك العديد من مزايا نماذج المحاكاة نذكز منها:

1- يتميز بالمرونة والسهولة نسبيا مقارنة بالنماذج الأخرى.

2- التطورات الحديثة في برنامج الكمبيوتر زاد من سهولة تطوير هذه النماذج.

3- تستخدم لتحليل المواقف الصعبة والمعقدة التي تواجه صانع القرار.

4- لا تتدخل بالضرورة في الأنظمة الحقيقة.

5- تمكن من دراسة التفاعلات بين العناصر المشكلة للمشكلة.

6- تستغرق حل المشكلة وقت طويل نسبيا.

7- تمكن من إدراج تعقيدات العالم الحقيقي.

IV -1- 2- عيوب نماذج المحاكاة:

1- غالبا ما يكون اعتماد نماذج المحاكاة مكلفا لأنه يتطلب وقتا طويلا.

2- لا تعطي الحلول المثلى لصناع القرار.

3- تحتم على صناع القرار إدراج جميع القيود والشروط الموجودة في العالم الحقيقي.

4- لكل مشكلة حلها الخاص باعتماد نماذج المحاكاة ولا يمكن تعميم الحل على المشكلات المتماثلة.

IV -2- أسلوب المحاكاة موت كارلو (monte carlo simulation)

هي طريقة ذات خطوات محددة كلاسيكية الاستخدام، وتعتمد على أخذ العينات من نظام حقيقي، كما تستخدم الأرقام العشوائية لتحقيق قيم إحصائية لتغيرات النظام.

خطوات الحل وفق هذه الطريقة:

تتكون خطوات الحل وفق هذه الطريقة من خمسة خطوات أساسية هي:

1- إنشاء التوزيع العشوائي للمتغيرات.

يمكن نمذجة العديد من المواقف العملية باستخدام متغيرات عشوائية تخضع لقوانين محددة. لذلك من المهم دراسة هذه النماذج الاحتمالية التي قد تسمح لنا لاحقًا بتحليل تقلبات بعض الظواهر في تقييم، على سبيل المثال، احتمالات ملاحظة مثل هذا الحدث أو النتيجة. فنقوم أولا بإنشاء التوزيع الاحتمالي للمتغيرات المدروسة.

2- بناء التوزيع الاحتمالي التجميعي للمتغيرات.

نقوم بعد ذلك ببناء التوزيع التجميعي للمتغيرات بتجميع الاحتمالات نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي، المقابلة للتوزيع التكراري المتجمع النسبي.

3- إنشاء الفترات للأرقام العشوائية لكل متغير.

نقوم بعد ذلك بإنشاء الفترات أو المجالات المقابلة للتوزيع التجميعي للمتغيرات

4- توليد أو خلق أرقام عشوائية.

تعتمد محاكاة مونت كارلو على الأرقام العشوائية، وهناك عدة طرق لخلق وتوليد هذه الأرقام، والرقم العشوائي هو الرقم الذي يكون احتمال وقوعه مساو لاحتمال وقوع أي رقم عشوائي آخر من مجموعة أعداد عشوائية حيث تتبع الأعداد التوزيع القياسي المنتظم، وغالبا ما تنفذ نماذج المحاكاة المعتمدة على الأرقام العشوائية بواسطة الحاسوب.

5- محاكاة المشكلة لعدة مرات.

نقوم بتكرار المحاكاة آلاف المرات أو مئات المرات فالنتيجة التي من المتوقع أن نصل إليها ستكون قريبة جدا من القيمة الحقيقية في الواقع.

مثال:

عمل المعمل الوطني للإحصاء بإحصاء سكاني للعائلات التي عندها خمسة (5) أطفال وسجل عدد الذكور منهم. والجدول التالي يبين هذا الإحصاء على 300 عائلة.

عدد العائلات	عدد الأطفال الذكور
6	0
36	1
84	2
108	3
54	4
12	5

المطلوب: باستخدام نموذج المحاكاة مونت كارلو حدد عدد الأطفال الذكور المتوسط لهذه العائلات.

الخطوة الأولى: إنشاء التوزيع العشوائي للمتغيرات.

عدد الأطفال الذكور	عدد العائلات	
0	6	6/300=0.02
1	36	36/300=0.12
2	84	84/300=0.28
3	108	108/300=0.36
4	54	54/300=0.18
5	12	12/300=0.04
	300	**1.000**

الخطوة الثانية: بناء التوزيع الاحتمالي التجميعي للمتغيرات.

عدد الأطفال الذكور	الاحتمال	الاحتمال المتجمع
0	0.02	0.02
1	0.12	0.14
2	0.28	0.42
3	0.36	0.78
4	0.18	0.96
5	0.04	1.00

الخطوة الثالثة: إنشاء الفترات للأرقام العشوائية لكل متغير.

عدد الأطفال الذكور	الاحتمال	الاحتمال المتجمع	فترات الأرقام العشوائية
0	0.02	0.02	
1	0.12	0.14	
2	0.28	0.42	
3	0.36	0.78	
4	0.18	0.96	
5	0.04	1.00	

الخطوة الرابعة: توليد أو خلق أرقام عشوائية.

في حالتنا هذه سنقوم باستعمال جدول الأرقام العشوائية التالي والذي تم استخراجه باستعمال الحاسوب:

Random Number Table

1	69	24	40	68	29	39	95	60	30
97	23	70	59	79	4	47	19	38	20
13	44	5	71	12	99	78	34	9	96
34	55	83	21	72	3	37	85	61	2
22	80	18	82	54	32	84	16	46	88
7	43	6	48	11	92	63	53	86	28
56	90	36	91	64	45	15	73	10	87
49	65	50	14	51	33	89	52	74	57
98	17	100	58	5	8	77	25	62	31
27	76	66	81	26	93	41	94	67	42

الخطوة الخامسة: محاكاة المشكلة لعدة مرات.

محاكاة إحصاء عدد الأطفال الذكور	الرقم العشوائي	عدد الأشهر
0	1	0
5	97	1
1	13	2
2	34	3
2	22	4
1	7	6
3	56	7
3	49	8
5	98	9
2	27	10
24		

$$\bar{x} = \frac{24}{10} = \mathbf{2.4}$$

من الجدول الأول لدينا:

$$E(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i P(x_i)$$

$$E(x) = 0(0.02) + 1(0.12) + 2(0.28) + 3(0.36) + 4(0.18) + 5(0.04)$$

$$\boldsymbol{E(x) = 2.68}$$

النتيجة المتوصل إليها من خلال المحاكاة هي 2.40 وليس 2.68 ، إذا قمنا بتكرار المحاكاة آلاف المرات أو مئات المرات فالنتيجة التي من المتوقع أن نصل إليها ستكون قريبة جدا من القيمة **2.68**

الخاتمة:

حاولنا من خلال هذه المطبوعة تبيان العناصر الأساسية التي تدخل ضمن مقياس بحوث العمليات، والتي تعتبر مجموعة من الأساليب التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات، فصانع القرار كثيرا ما يجد نفسه مجبرا على اتخاذ قرارات صعبة ومعقدة، ويزيد من تعقيدها الغموض الذي يميز بيئة القرار وسرعة تغيرها، وحتمية فهم المستقبل يفرض عليه تبسيط القرار بصورة سهلة وفعالة ومنطقية. والقرارات المرتبطة بإدارة المؤسسات لا تعتمد على معيار واحد وواضح، وبالتالي يتعين على صناع القرار الأخذ بعين الاعتبار عددا كبيرا من المعايير بما في ذلك التكنولوجية والاقتصادية والأخلاقية والسياسية والقانونية، والعوامل الاجتماعية. فهناك حاجة لطرق بسيطة، ومنهجية، أو أدوات رياضية لتوجيه صناع القرار إلى النظر إلى عدد من معايير الاختيار والعلاقات فيما بينهم. وبالتالي النقطة الأولى في عملية التحليل هي تحديد معايير الاختيار المناسبأو الحصول على أنسب مزيج من المعايير.

كما قمنا بتسليط الضوء على جملة من النماذج البسيطة المستعملة في حل المشكل ومن ثم الوصول إلى الحلول المثلى المطروحة أمام صانع القرار مع الأخذ بعين الاعتبار جميع الجوانب المحيطة بالمشكل. لكن عملية تطبيقها تتطلب قدرا عاليا من المهارة. وكما كبيرا من المعلومات. فهناك عدة تقنيات لبحوث العمليات قيد الاستخدام لصنع القرار على المستوى الاستراتيجي. في حين أساليب حل المشكلات على أساس المبادئ الرياضية السليمة يمكن تطبيقه فقط على مشاكل منهجية وبشكل جيد. وهنا نقول أن عدم التطابق بين المشاكل وطرق حلها يؤدي إلى الإحباط من كبار صناع القرار وفقدان ثقتهم في هذه النماذج والأساليب.

كما نأمل أن نكون قد وفقنا في تحقيق أهداف هذا العمل المتواضع والذي سنحاول تحسينه وتطويره والتعمق أكثر في النماذج الأخرى لمقياس بحوث العمليات في الأعمال اللاحقة إن شاء الله، ونوصي أعزاءنا الطلبة والباحثين بالخوض في دراسة هذه النماذج وأستسمح القارئ الكريم العذر عما قد يجده من هفوات غير مقصودة والعصمة لله. وفوق كل ذي علم عليم.

المراجع:

باللغة العربية:

1- صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، إثراء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن، 2009.

2- محمود علي متولي عجوز، بحوث العمليات والإحصاء، المعهد العالي للحاسب ونظم المعلومات بأبي قير، دار الفكر الجامعي، الإسكندرية، 2007.

3- محمود الفياض، د. عيسي قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الطبعة العربية، 2007.

4-منعم زمزير الموسي، بحوث العمليات، مدخل علمي لاتخاذ القرارات، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، الأردن، 2009.

5- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الرابعة، الجزائر، 2004.

6- إبراهيم نائب، د. انعام باقية، بحوث العمليات، خوارزميات وبرامج حاسوبية، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، 1999.

7- محمود فياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2007

8- سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية، الطبعة 1، بنغازي، ليبيا، 2002.

9- صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، إثراء للنشر والتوزيع، ط1، الأردن، 2009.

10- على هادي جبرين، الاتجاهات والأدوات الكمية في الإدارة، دار الثقافة للنشر والتوزيع، الطبعة 2، 2011.

11- أبو قاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، 2012.

12- فاهيد لطفي، كاربيجلز، نظم دعم القرارات، لإدارة العمليات، وبحوث العمليات، تعريب د.م. سرور علي ابراهيم سرور، دار المريخ للنشر 2007.

13- حسين بلعجوز، نظرية القرار، مدخل إداري وكمي، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 2006.

باللغة الأجنبية:

1- Lapin, lawrence L ; whesler, william D ; quantitative decision making, wandsworth/ thomson learning, belmont, USA 2002.

2- P.Rama Morthy, Opérations Research, Second Edition,NEW AGE, intell engineering college Anantapur, New Delhi, 2007.

*3- Thiel D, **Recherche Opérationelle et Managenent des entreprises**, Economica édition, Paris, 1990.*

4- P. ROGER , Gestion de production, Dalloz-Sirey, Paris, 1992.

الفهرس: