الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليــم العالــي والبحــث العلمــــي
Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et informatiques

MÉMOIRE

Pour l’obtention du diplôme de Master en : Mathématique

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Equations différentielles et modélisation

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À RETARD

Présenté Par :

BENAOUDA Marwa

Devant le jury composé de :

Dr. HELLAL Meryem	(M C B)	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. BELATTAR Zokha	(M C B)	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. MEKHALFI Kheira	(M C A)	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2020/2021

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvres et une immense joie, je dédie ce mémoire.

A mes très chéres parents ⋆ Rouai ⋆ et ⋆ Mamia ⋆.
Qui m'ont guidé durant les moments les plus pénible de ce long chemin.

A mes frères ⋆ Radouane ⋆ et ⋆ Hichem ⋆.

A mes amis ⋆ Ikram ⋆ et ⋆ Bouchra ⋆,

A mes amis de ma promotion.

Ainsi a tout la famille ⋆ Benaouda ⋆ et ⋆ Mouffok⋆.

A tous mes enseignants.

♣ Marwa ♣

Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah soubhanaho wa tahala pour tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Madame Mekhalfi kheira. Je la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Je remercie ensuite tous les membres du jury, Mme HELLAL Meryem et Mme BELATTAR Zokha, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail et de participer à la soutenance.

Je remercie également tout mes professeurs pour leur générosités et conseils.

Je tiens à remercie, chaleureusement, les êtres qui me sont les plus chers au monde " mes parents " pour leur sacrifices et leur conseils, sans eux, je ne serais jamais arrivé à ce niveau, que dieu les gardes. Je remercie mes frères pour leur encouragement.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent , également à tous mes amis et mes collègues pour les moments et les souvenirs inoubliables qu'on a passé ensemble.

A tout ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles à retard, les équations intégrales différentielles et les équations différentielles sont étudiées depuis au moins 200 ans par E.schmitt (1911). Certains des premiers travaux provenaient de problème de géométrie et la théorie des nombres.

Des équations différentielles tardives surviennent lors de la formalisation de nombreux phénomènes. Chaines dynamiques où certaines effets ne sont pas immédiats, mais se produisent avec un retard. En d'autres termes, lorsque l'état á un moment donné est fonction de son passé.

On la retrouve dans de nombreux domaines d'application, notamment en économie, physique, médecine, biologie....etc. L'importance du retrad dans un mois donné cela peut être différent le moment de la conception en biologie le temps nécessaire à la maturation de la cellule ou à la transformation du type cellulaire en un autre ......etc.

Les états antérieurs n'y intervenant pas, l'hérédité y est un vain mot. L'application de ces équations où le passé ne se distingue pas de l'avenir, où les mouvements sont de nature réversible, sont donc inapplicables aux êtres vivants.

Les équations différentielles à retard peuvent être classées comme linéaire ou non linéaire, autonome ou non autonome. Le retard est généralement une constante positive, une variable dépendante continument du temps ou de l'état ou distribué et se traduit comme un temps nécessaire pour que le système répond à une certaine évolution, ou parce qu'un certain outils doit être atteint avant que le système ne soit activé.

Pour les équations différentielles fonctionnelles retardées (EDFR) avec des données initiales continues. Si $r \geq 0$ est donnée, Soit $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et si $x : [-r, \alpha] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, Soit $x_t \in \mathcal{C}_0$, $t \in [0, \alpha)$ être défini par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0]$$

Si $f : \mathcal{C}_0 \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, une équation différentielle retardé est défini par la relation :

$$x'(t) = f(x_t) \tag{1}$$

Si $\varphi \in \mathcal{C}_0$ est donnée, la solution $x(t, \varphi)$ de (1) avec valeur initiale φ à $t = 0$ est une fonction continue définie sur un intervalle $[-r, \alpha)$, $\alpha > 0$.

Les résultats concernant l'existence, l'unicité et la continuité des solutions, ainsi que la dépendance aux paramètres, sont essentiellement les même comme pour EDO avec quelques détails techniques supplémentaires en raison du caractère dimensionnel infini du problème. Si f est continue et prend des ensembles bornés alors il existe une solution $x(t, \varphi)$ par φ qui existe sur un intervalle maximal $[-r, \alpha_\varphi)$.

Dans ce mémoire on s'intéressera aux équations différentielles fonctionnelles à retard et plus précisément aux résultat d'existence et d'unicité de solution.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Le chapitre 1 : C'est un rappel de quelque définitions et notations de base de la théorie d'existence et d'unicité des solutions, quelques théorèmes de Point fixe et quelques résultats sur la dérivation fractionnaire.

Le chapitre 2 : Dans ce chapitre est composé de deux partie :

Dans la première partie nous étudions l'existence et l'unicité des solutions de problème à valeur initiale pour des équations différentielles à retard fini :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = & f(t, x_t) \text{ } pour \text{ } t \geq t_0 \\ et \text{ } x_{t_0} & = & \varphi \end{cases}$$

oú $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\varphi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R})$ est une fonction continue donnée.
Dans la deuxième partie nous étudions l'existence et l'unicité des solutions de problème á retard constant d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) & = & f(t, y_t) \quad pour \quad t \in J = [0, b] \quad , 0 < \alpha < 1 \\ y(t) & = & \varphi(t) \quad pour \quad t \in [-r, 0] \end{cases}$$

D^α : est une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, f et φ des fonctions continues .

Le chapitre 3 :Dans ce chapitre est composé de deux partie :

Dans la premiere partie nous étudions l'existence et l'unicité des solutions des equations différentielles à retard dépendant de l'état de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) &= f\Big(t, y(t), y(t - r(y(t)))\Big) \qquad \textit{pour } \forall t \geq 0 \\ y(t) &= \varphi(t) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{pour } \forall t \in [-\alpha, 0] \end{cases}$$

où f et φ des fonctions continues.

Dans la deuxième partie nous étudions l'existence et l'unicité des solution de problème á retard dépendant de l'état d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= f(t, x(t - \rho(x(t)))) \quad t \in J = [0, b], 0 < \alpha < 1 \\ x(t) &= \varphi(t) \quad t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

avec D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville.
f est une fonction continue donnée ,
$\varphi : [-r, 0] \to E$ est une fonction continue bornée donnée avec $\varphi(0) = 0$ muni de la norme infini.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et définitions

Dans cette section, nous présentons les notations et définitions de base utilisées dans notre travail, á savoir les théorèmes fondamentaux.

Soit $J = [0, b], b > 0$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach.

Notons $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = sup\{|y(t)|/t \in J\} ;$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Soit $r \geq 0$ un réel donné. On note par $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a, b]$ a valeur dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$$

Notons la norme d'un élément φ de $\mathcal{C}_0$ par

$$\|\varphi\| = sup\{|\varphi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$$

où $\| \cdot \|$ est une norme dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1.1.1. *(Lemme de Gronwall [11]) : Soit φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, a valeurs positives et vérifiant l'inégalité.*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds \qquad \forall t \in [a, b] \tag{1.1}$$

Alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)exp\Big(\int_s^t \psi(u)du\Big)ds \quad \forall t \in [a,b]$$

Preuve 1.1.1. *Posons* $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$.
En multipliant les deux membres de (1.1) par $\psi(t)$*, on obtient :*

$$F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t).$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t)exp\Big(-\int_a^t \psi(s)ds\Big) \quad , \text{ avec}$$
$$G(t) = F(t)exp\Big(-\int_a^t \psi(s)ds\Big)$$

comme $G(a) = F(a) = 0$ *; on déduit par intégration :*

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)exp\Big(-\int_a^s \psi(u)du\Big)ds.$$

Or, d'après (1.1), on aura

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t)exp\Big(\int_a^t \psi(s)ds\Big),$$

d'où le résultat voulu.

Définition 1.1.1. *Soit* E *un espace de Banach et* $A : E \to E$*, un opérateur. On dit que* A *est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante* $0 < k < 1$ *telle que :*

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k\|x - y\|_E, \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Proposition 1.1.1. *Soit* $\mathcal{C}([J,E])$ *l'espace des fonctions continues de* J *vers l'espace de Banach* E *et* $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}([J,E])$.
$\mathcal{M}$ *est relativement compact ssi :*

1. $\mathcal{M}$ *est borné i.e.* $\exists b \geq 0$ *tel que* $\forall f \in \mathcal{M}, \|f\|_\infty \leq b$.
2. $\mathcal{M}$ *est équicontinu i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in J : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{M}$$

3. $\forall x \in J,\ f(x) \in E, f \in \mathcal{M}$ *est relativement compact dans* E.

Définition 1.1.2. *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une fonction :*
• f est dite compacte si l'image $f(E)$ est relativement compacte dans F,
• f est dite complètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de E est relativement compacte dans F.

Théorème 1.1.1. *(Arzelà-Ascoli [6] [12]) : Soit F une famille des fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$. Alors F est relativement compacte (pré-compact) dans $\mathcal{C}([a, b])$ si F est équicontinu et uniformément bornée.*

1.2 Théorèmes du point fixe

Dans cette section nous présentons deux théorèmes de point fixe qui sont utilisés pour démontrer l'existence et l'unicité de solution des équations différentielles.

Théorème 1.2.1. *(Contraction de Banach [1], [5]) : Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.*

Théorème 1.2.2. *(L'Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder [5]) : Soit E un espace de Banach, et $U \subset E$ convexe avec $0 \in U$. Soit $F : U \to U$ est un opérateur complètement continu. Alors ou bien*

1. *F a un point fixe*

   Oú bien

2. *L'ensemble $\xi = \{x \in U : x = \lambda F(x),\ 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.*

1.3 Fonctions spéciales

1.3.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est fonction d'Euler Gamma, qui généralise la factorielle $n!$ et permet n de prendre aussi les non entiers et même des valeurs complexes (voir [4], [7]).

Définition 1.3.1. *La fonction Gamma Γ est définie sur $\mathbb{C}$ par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0 \tag{1.2}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$,si $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Proposition 1.3.1. *L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait a l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.3}$$

En particulier :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma, est qu'elle a des pôles simples aux points $z = -n$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Preuve 1.3.1. *On démontre cette proposition par une intégration par partie de (1.2)*

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z} dt \\
&= \Big[- e^{-t} t^{z} \Big]_0^{+\infty} + \underbrace{z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt}_{\Gamma(z)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

En particulier, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1$$

et en utilisant (1.3) , on obtient pour $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{c}
\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1! \\
\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\
\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!
\end{array}$$

Par conséquent

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Remarque 1.3.1. *On a* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Preuve 1.3.2. *On a*

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

En effet

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{-1}{2}} dt\end{aligned}$$

On pose le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{t} \Rightarrow t = u^2 \text{ et } dt = 2udu$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \cdot udu \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\end{aligned}$$

d'après l'intégrale de Gausse on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

1.3.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma (voir [4], [7]).

Définition 1.3.2. *La fonction Bêta est définie par l'intégral d'Euler de seconde espèce*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0,\ \mathfrak{Re}(w) > 0 \tag{1.4}$$

cette intégrale est convergent pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ *si* $\mathfrak{Re}(z) > 0$ *et* $\mathfrak{Re}(w) > 0$.

Proposition 1.3.2. *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \qquad \mathfrak{Re}(z)>0,\ \mathfrak{Re}(w)>0 \tag{1.5}$$

D'où il résulte que Bêta est symétrique :

$$B(z,w)=B(w,z) \qquad \mathfrak{Re}(z)>0,\ \mathfrak{Re}(w)>0$$

Preuve 1.3.3. *Soient* $(z,w)\in\mathbb{C}^2$*, avec* $\mathfrak{Re}(z)>0$ *et* $\mathfrak{Re}(w)>0$*. telle que*

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$
$$\Gamma(w)=\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{w-1}ds$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}s^{w-1}e^{-s}dt\ ds\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-(t+s)}s^{w-1}dt\ ds\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $r=t+x\Rightarrow dr=dt+dx$ *et* $0<r<+\infty$

Et on pose $t=rs\Rightarrow s=\frac{t}{r}=\frac{t}{t+x}$ *donc*

$$\begin{gathered} si\ \ t=0\Rightarrow s=0\\ si\ \ t=+\infty\Rightarrow s=1\end{gathered}$$

on a

$$dr=dt+dx\Rightarrow dx=dr-dt$$

Et on a $t=rs$ *donc*

$$dx=dr-(rds-sdr)\Rightarrow dx=(1-s)dr-rds$$

Alors,

$$\left\{\begin{array}{lcl} dt &=& rds+sdr\\ dx &=& (1-s)dr-rds\end{array}\right. \Rightarrow dtdx=rdsdr$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-r}(rs)^{z-1}(r(1-s))^{w-1}r\ ds\ dr \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-r}r^{z-1}s^{z-1}r^{w-1}(1-s)^{w-1}r\ ds\ dr \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z-1}r^{w-1}r\ dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z+w-1}dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds \\
&= \Gamma(z+w)B(z,w)
\end{aligned}$$

d'où $B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$

Proposition 1.3.3. *Pour tout* $p, q \in \mathbb{C}, Re(p) > 0, Re(q) > 0$. *on a les propriétés suivantes :*

1. $B(p,q) = B(q,p)$.
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.
3. $B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$.
4. $B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sint)^{2p-1}(cost)^{2q-1}dt.$

1.4 Calcul fractionnaire

1.4.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, \mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ au sens de Riemann-Liouville généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale répété n-fois,

$$I_a^n f(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

D'après la généralisation du factoriel par la fonction Gamma, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Observons que le second membre de (1.6) pourrait avoir un sens même pour des valeurs non-entières de n, il était donc naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.4.1. *(Intégrale de Riemann-Liouville) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville de f notée I_a^α, l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad (x > 0, \mathfrak{Re}(\alpha) > 0) \tag{1.7}$$

On note I_0^α par I^α
En particuliers pour $\alpha = 1$ on a $I_0^1 = \int_a^x f(t)dt$

Exemple 1.4.1. *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \qquad x \in [a,b] \qquad ou\ \beta > -1, \qquad \alpha > 0.$$

On a alors

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \tag{1.8}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$t = a + (x-a)\tau \text{ avec } 0 \leq \tau \leq 1 \text{ donc } dt = (x-a)d\tau$$

donc, (1.8) devient

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1} (a+(x-a)\tau-a)^\beta (x-a)\ d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} \tau^\beta\ d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\beta} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta\ d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta\ d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}
\end{aligned}$$

Alors, on obtient l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction f, telle que :

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.9}$$

Cas particulier :

Si $\alpha = 1$, D'après (1.3) on déduit que

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \tfrac{1}{\beta+1}(x-a)^{1+\beta}$$

Si $\beta = 0$ *On a dans ce cas*

$$I_a^\alpha 1 = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha$$

Proposition 1.4.1. *[2] Soit* $f \in \mathcal{C}[a,b]$*. Pour* α *et* β *des nombres complexe où* $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0,\ \mathfrak{Re}(\beta) > 0$*. alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x) \right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$$

Preuve 1.4.1. *Soit* $f \in \mathcal{C}([a,b])$*, On a par définition de* I_a^α

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-a)^{\alpha-1} \left[I_a^\beta f \right](t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-a)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_s^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds \right] dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on aura :

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \underbrace{\int_s^t (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt}_{\mathcal{I}}\ ds \tag{1.10}$$

En effectuant le changement de variable suivant dans l'intégrale $\mathcal{I}$*, telle que*

$$t = s + (x-s)\tau \qquad \text{avec} \qquad (0 \le \tau \le 1), \qquad \text{donc } dt = (x-s)d\tau$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 (x-s-(x-s)\tau)^{\alpha-1} (s+(x-s)\tau - s)^{\beta-1} (x-s)\ d\tau \\ &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} \tau^{\beta-1} (x-s)\ d\tau \\ &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha+\beta-1} \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1}\ d\tau \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1}\ d\tau \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de Bêta (1.4) puis de la relation (1.5), on aura :

$$\mathcal{I} = (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\beta,\alpha)$$
$$\mathcal{I} = (x-s)^{\alpha+\beta-1} \tfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

En retournant à la formule (1.10), on obtient alors

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\big[I_a^{\beta} f(x)\big] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-s)^{\alpha+\beta-1}\right] ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\ ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\ ds \\
&= I_a^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4.2. *(Dérivée de Riemann-Liouville [2], [7])*
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[,\ n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f notée D_a^{α} la fonction définie par :

$$D_a^{\alpha} f(x) = D^n\big[I_a^{n-\alpha} f(x)\big]$$

$$D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \qquad \big(n = [\mathfrak{Re}(\alpha)]+1,\ x>0\big) \tag{1.11}$$

Où $[\ .\ ]$ la partie entière d'un nombre réel et $D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$.
En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique :

Si $\alpha = 0$ on a :

$$D_a^0 f(x) = D^1\big[I_a^1 f(x)\big] = f(x)$$

Si $\alpha = n$ on a :

$$D_a^n f(x) = D^{n+1}\big[I_a^{n+1-n} f(x)\big] = D^n f(x)$$

Exemple 1.4.2. *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = (x-a)^{\beta}, \qquad x \in [a,b],\ \text{où}\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in \big]n-1, n\big[$, Nous avons

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = D^n \left[I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta \right].$$

D'après (1.9), on obtient

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = D^n \left[\tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} (x-a)^{n-\alpha+\beta} \right]$$
$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \left[\left(\tfrac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} \right]$$

On sait que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\cdots(n-\alpha+\beta-n+1)(x-a)^{n-\alpha+\beta-n} \\ &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\cdots+(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Alors

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left[\tfrac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \right]$$

Alors, on obtient la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f, telle que

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}$$

Cas particulier ;

Si $\alpha = 1$, D'après (1.3) on déduit que

$$D_a^1 (x-a)^\beta = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} = \tfrac{d}{dx}(x-a)^\beta$$

Si $\beta = 0$, On a dans ce cas

$$D_a^\alpha 1 = \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

Ce qui montre que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Lemme 1.4.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $D_a^\alpha f = 0$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}$$

où C_k sont des constantes quelconques.

Preuve 1.4.2. *Comme* $D_a^\alpha f = 0$ *alors*

$$\left(D^n I_a^{n-\alpha} f\right)(x) = 0 \Rightarrow \left(I_a^{n-\alpha} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k$$

Par composition avec I_a^α *on obtient*

$$\begin{aligned}\left(I_a^n f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k I_a^\alpha (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}\end{aligned}$$

En remplaçant $\left(I_a^n f\right)(x)$ *par son expression, on trouve*

$$\left(I_a^n f\right)(x) = \tfrac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}$$

Puis, par une dérivation classique d'ordre n *par rapport à* x*, on obtient*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}$$

Lemme 1.4.2. *Si* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in \left]n-1, n\right[, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}([a,b])$*, alors on a l'égalité*

$$\left(D_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) = f(x)$$

Preuve 1.4.3. *En se basant sur la propriété classique*

$$\left(D^n I_a^n f\right)(x) = f(x)$$

Et en utilisant la définition (1.4.2) et de proposition (1.4.1) on déduit

$$\begin{aligned}\left(D_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) &= D^n\left[I_a^{n-\alpha}\left(I_a^\alpha f(x)\right)\right] \\ &= D^n\left[I_a^n f(x)\right] \\ &= f(x).\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Propriétés 1.4.1. *[2] Si* $n > \mathfrak{Re}(\alpha) > \mathfrak{Re}(\beta) > n-1 > 0$*, alors pour* $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ *; on a la relation*

$$\left(D_a^\beta D_a^\alpha f\right)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x).$$

En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{Re}(\alpha) > k$, alors

$$\left(D_a^k D_a^\alpha f\right)(x) = I_a^{\alpha-k} f(x).$$

Preuve 1.4.4. *En utilisant la définition (1.4.2) et de proposition (1.4.1) on déduit*

$$\begin{aligned} \left(D_a^\beta D_a^\alpha f\right)(x) &= D^n\left[I_a^{n-\beta}\left(I_a^\alpha f(x)\right)\right] \\ &= D^n\left[I_a^{n-\beta+\alpha} f(x)\right] \\ &= D^n\left[I_a^n\left(I_a^{\alpha-\beta} f(x)\right)\right] \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 1.4.1. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non-commutative, i.e :*

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta = D_a^{\alpha+\beta} \neq D_a^\beta \circ D_a^\alpha.$$

Exemple 1.4.3. *On considère la fonction f définie par :*

$$\begin{aligned} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) = 1 \end{aligned}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}} f$,$D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f$ et $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f$

Solution 1.4.1. *On a $D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$ et on a $f(x) = 1$ ie $a = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ Alors*

1. *Calcule $D_0^{\frac{1}{2}} f$:*

$$D_0^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}}$$
$$D_0^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$$

2. *Calcule $D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f$:*

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 &= D_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[D_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0)} x^{-1}\right] = 0 \end{aligned}$$

3. *Calcule $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f$:*

$$D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} 1 = D_0^1 1 = 0$$

Conclusion : $D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f = D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f$.

Chapitre 2

Équations différentielles à retard fini

Dans ce chapitre, nous considérons le problème à valeur initiale d'équations différentielles fonctionnelles et problème d'ordre Fractionnaire à retard fini, nous intéressons par l'existence et l'unicité de solution, on utilisons le théorème du point fixe de Contraction de Banach et de Leray-Schauder.

2.1 Problème à valeur initiale

Étant donné $r > 0$, Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ et $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $t \in [t_0, t_0 + A]$, on a $x_t \in \mathcal{C}_0$, défini par

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \text{ pour } -r \leq \theta \leq 0.$$

Remarque 2.1.1. *Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t-r, t]$, translatée sur $[-r, 0]$.*

Définition 2.1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0 \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle une équation différentielle fonctionnelle à retard $(EDFR)$ une équation de la forme suivantes :*

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x_t) \text{ pour } t \geq t_0 \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2. *[9] Soit x une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.*

1. *On dit que x est uns solution de l'équation (2.1) s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + A[, \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0$ et x vérifie la relation (2.1) pour tout $t \in [t_0, t_0 + A]$.*

2. *Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0$ donnée, x est dite solution du problème a valeur initiale*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = & f(t, x_t) \text{ pour } t \geq t_0 \\ \text{et} & & \\ x_{t_0} & = & \varphi \end{cases} \tag{2.2}$$

s'il existe $A > 0$ tel que x soit solution de (2.2) sur $[t_0 - r, t_0 + A[$ et $x_{t_0} = \varphi$.

3. *Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0$ donnés, la solution du problème (2.2) est dite unique si deux solution coïncident là où elles sont simultanément définies.*

Remarque 2.1.2. *Dans ce cas oú il y a unicité, la solution de (2.1) a valeur initiale φ est notée par $x = x(., t_0, \varphi)$. L'équation (2.1) est un type d'équation très général et comprend des équations différentielles du type*

$$\tfrac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), x(t - r)) \text{ pour } t \in J$$

ainsi

$$\tfrac{dx}{dt}(t) = \int_{-r}^{0} g\big(t, \theta, x(t + \theta)\big)d\theta$$

Si

$$f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t)$$

où L est linéaire en φ et $(t, \varphi) \to L(t, \varphi)$, en dit que l'équation est une équation différentielle de retard linéaire, elle est dite homogène si $h \equiv 0$.
Si $f(t, \varphi) = g(\varphi)$, l'équation (2.2) est autonome.

Lemme 2.1.1. *[8] Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0$ donné et f continue sur le produit $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0$. Pour à rédiger la solution du problème (2.2)est donné par la relation suivant :*

$$x(t) = \varphi + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds \quad t \geq t_0 \text{ et } x_{t_0} = \varphi$$

Preuve 2.1.1. *On Montre que la solution du problème(2.2) est :*

$$x(t) = \varphi + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds \quad t \geq t_0 \text{ et } x_{t_0} = \varphi.$$

En effet par intégration de l'équation (2.1) sur l'intervalle $[t_0, t]$ on obtient :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} x(s) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds$$
$$[x(s)]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds$$
$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds$$
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds$$

puisque on a $x_{t_0} = \varphi$ *alors*

$$x(t) = \varphi + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds$$

2.1.1 Existence

Lemme 2.1.2. *[8] Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*, Si* $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$*, alors* x_t *est une fonction continue de* t *pour* $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Preuve 2.1.2. *Puisque* x *est continue sur* $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ *, elle est uniformément continue et donc*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x(t) - x(s)| < \varepsilon \text{ si } |t - s| < \delta.$$

Par conséquent pour t, s *dans* $[t_0, t_0 + \alpha], |t - s| < \delta$ *on a :*

$$\forall \theta \in [-r, 0], |x(t + \theta) - x(s + \theta)| < \varepsilon.$$

Théorème 2.1.1. *[8]*

Soit D *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0$ *et* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *est continue. Pour toute* $(t_0, \varphi) \in D$ *, il existe une solution de l'équation (2.1).*

Proposition 2.1.1. *Si* f *est plus affine c'est-à-dire* $|f(t, \phi)| \leq a|\phi| + b$ *avec* $a, b > 0$*, alors il existe une solution globale sur* $[\alpha, \infty[$.

Preuve 2.1.3. *Soit* $\beta \in \mathbb{R}$ *,* $\beta > \alpha$ *et* $\varphi \in \mathcal{C}_0$*, et supposons que la solution n'est définie que sur* $[\alpha, \beta[$*. En intégrant l'équation (2.2) , on a*

$$x(t) = \varphi + \int_{0}^{t} f(s, x_s) ds$$

on a f *est plus affine i.e* $|f(t, x_s)| \leq a|x_s| + b$ *donc*

$$|x(t, \varphi)| = |\varphi| + \int_{t_0}^{t} (a|x_s| + b) ds$$

et

$$|x_t(.,\varphi)| = |\varphi| + a\int_{t_0}^{t} |x_s|ds + b\beta$$

Par le Lemme de Gronwall

$$|x_t(.,\varphi)| = (|\varphi| + b\beta)\exp a\beta < \infty.$$

D'autre par

$$sup_{t\in[0,\beta[}\left|\frac{dx}{dt}(t)\right| < \infty$$

et donné que la solution est uniformément continue sur $[0,\beta[$ *et ce implique que* $\lim\limits_{t\to\beta}|x_t(.,\varphi)|$ *existe et fini, notez-le* x_β.

Considérons l'équation différentielle de retard suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dy}{dt} & = & f(t,y_t) \text{ pour } t\geq\beta \\ et & & \\ y_{t_0} & = & x_\beta\in\mathcal{C} \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Cette dernière équation a au moins une solution sur $I = [\beta,\beta+\varepsilon]$ *pour certains* $\varepsilon > 0$*, et l'équation (2.2) a au moins une solution définie sur* $[\alpha,\alpha+\varepsilon]$*, qui contredit la maxima-lité de la solution.*

Corollaire 2.1.1. *Si* f *est lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors il satisfait la propriété de la proposition (2.1.1).*

Preuve 2.1.4. *On travaille sur l'équation (2.3) parce que a au moins une solution sur* $[\beta,\beta+\varepsilon]$ *pour certains* $\varepsilon > 0$*. D'après lemme (2.1.1) la solution de (2.3) est*

$$y(t) = \varphi + \int_{\beta}^{t} f(t,y_t)dt$$

Et on a f *est lipschitzienne par rapport à la seconde variable ie*

$$\|f(t,y_t) - f(t,z_t)\| \leq k\|y_t - z_t\|$$

Donc, Soit $z(t)$ *une autre solution alors :*

$$\begin{array}{rcl} |y(t)-z(t)| & \leq & \displaystyle\int_{\beta}^{t} |f(t,y_s) - f(t,z_s)|ds \\ & \leq & k\displaystyle\int_{\beta}^{t} \|y_s - z_s\|_\infty ds \\ & \leq & ksup_{s\in[\beta,t]}\|y_s - z_s\|_\infty\displaystyle\int_{\beta}^{t} ds \\ & \leq & k(t-\beta)\|y-z\|_\infty \end{array}$$

Si $t \to \beta$ *alors* $\|y(t) - z(t)\| \to 0$
Donc la solution x *est une solution globale sur* $[\alpha, \infty[$.

2.1.2 Unicité

Théorème 2.1.2. *[8]*
Soit D *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}\times\mathcal{C}_0$ *et supposons que* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *est continue et* $f(t, \varphi)$ *est lipschitzienne par rapport à* φ *dans tout sous-ensemble compact de* D*. Si* $(t_0, \varphi) \in D$ *alors l'équation (2.1) a un solution unique.*

Preuve 2.1.5. *Considérons* I_α*, et supposons que* x *et* y *soient deux solutions de l'équation (2.1) sur* $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ *avec* $x_{t_0} = y_{t_0} = \varphi$ *c'est-à -dire :*
$x(t) = \varphi + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds$ *pour* $t \geq t_0$ *et* $x_{t_0} = \varphi$
$y(t) = \varphi + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)ds$ *pour* $t \geq t_0$ *et* $y_{t_0} = \varphi$
alors :

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= \varphi + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds - \varphi - \int_{t_0}^{t} f(s, y_s)ds \\ &= \int_{t_0}^{t} (f(s, x_s) - f(s, y_s))ds \quad \text{pour } t \geq t_0 \end{aligned}$$

$f(t, x_t)$ *est lipschitzienne dans le sous-ensemble compact* D *donc* $\forall t \in I_\alpha = [\alpha, \alpha + \varepsilon]$ *on a :*

$$|f(t, x_t) - f(t, y_t)| \leq k|x_t - y_t|$$

avec k *la constante de Lipschitz.*
alors :

$$|x(t) - y(t)| \leq \textstyle\int_{t_0}^{t} k|x_t - y_t|ds$$

on choisi $\overline{\alpha}$ *telle que* $k\overline{\alpha} < 1$*. Alors pour tout* $t \in I_\alpha$ *on a :*

$$|x(t) - y(t)| \leq ksup_{t_0 \leq s \leq t}|x_s - y_s|$$

Par passage au limite on trouve

$$|x(t) - y(t)| \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Et cela implique que $x(t) = y(t)$ *pour* $t \in I_{\overline{\alpha}}$*, donc la solution est unique.*

Remarque 2.1.3.
1. *L'unicité ne peut pas tenir si la fonction n'est pas localement lipschitzienne.*

2. *Il peut avoir deux solutions distinctes de (2.2) définis sur* $]-\infty, +\infty[$*, et ils coïncident sur* $]0, \infty[$.

2.2 Problème d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on s'intersse à l'existence et l'unicité de solution pour les équations différentielles á retard constant de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-r)) \tag{2.4}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction continue

Définition 2.2.1. *On considére le probléme à retard constant d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = f(t, y_t) & pour \quad t \in J = [0, b] \quad , 0 < \alpha < 1 \\ y(t) = \varphi(t) & pour \quad t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{2.5}$$

D^α : La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.
$f : J \times \mathcal{C} \to E$ est une fonction continue.
$\varphi(t) : [-r, 0] \to E$: est une fonction continue bornée donnée avec $\varphi(0) = 0$

Pour tout fonction y définie sur $[-r, b]$ et tout $t \in J$ on note y_t l'élément de $\mathcal{C}([-r, 0], E)$ définit par $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$.

Remarque 2.2.1. *Pour déterminer la solution de l'équation (2.4) sur intervalle $[t_0, t_0 + r]$, Il faut connaitre $y(t)$ sur intervalle antérieur $[t_0 - r, t_0]$, avec φ une fonction continue sur $[t_0 - r, t_0]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.*

Définition 2.2.2. *On dit que la fonction $y : [-r, b] \to E$ est une solution de problème (2.5) si :*

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t) & pour\ t \in [-r, 0] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, t \in J \end{cases}$$

Preuve 2.2.1.
1. *$y(t) = \varphi(t)$ est une solution connait et donnée sur intervalle $t \in [-r, b]$*
2. *On montre que $\forall t \in J$ on a la solution :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds$$

On a l'équation $D^\alpha y(t) = f(t, y_t)$ on appliquant l'opérateur I^α aux deux membres de l'égalité on aura :

$$\begin{aligned} I^\alpha D^\alpha y(t) &= I^\alpha f(t, y_t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds \end{aligned}$$

puisque on a $I^\alpha D^\alpha y(t) = y(t)$ donc

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds$$

Notre premier résultat d'existence et d'unicité est basé sur le principe de Contraction de Banach.

Théorème 2.2.1. *Soit $f : J \times \mathcal{C}([-r, 0], E)$ continue, supposons qu'il existe une constant $k \geq 0$ tel que :*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq k\|u - v\|_\infty, \text{ pour } t \in J \text{ et } (u, v) \in \mathcal{C}([-r, 0], E)$$

Si

$$\frac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

Alors il existe une solution unique de problème (2.5)

Preuve 2.2.2. *Transformons le problème (2.5) en un problème de point fixe et on considère l'opérateur*
$F : \mathcal{C}([-r, b], E) \to \mathcal{C}([-r, b], E)$ défini par :

$$F(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in [-r, 0] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds & t \in J \end{cases}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur F sont solution du problème (2.5).

F est bien défini, en effet : si $y \in \mathcal{C}([-r, b], E)$, alors $F(y) \in \mathcal{C}([-r, b], E)$, pour montrer que F admet un unique point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction.
En effet, soient $y, z \in \mathcal{C}([-r, b], E)$ alors $\forall t \in J$ on a :

$$\begin{aligned} |F(y)(t) - F(z)(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, z_s) ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_s) - f(s, z_s)| ds \end{aligned}$$

d'après le théorème on a : $|f(t,y_s)-f(t,z_s)| \leq k\|y_s-z_s\|_\infty$ *donc :*

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)-F(z)(t)| &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|y_s-z_s|ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} sup_{s\in J}|y_s-z_s|ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\|y-z\|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\|y-z\|_\infty \Big(\frac{-1}{\alpha}\Big)[(t-s)^\alpha]_0^t \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\|y-z\|_\infty \Big(\frac{t^\alpha}{\alpha}\Big) \\
&\leq \frac{kt^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|y-z\|_\infty
\end{aligned}$$

par majoration de t *sur l'intervalle* $J=[0,b]$ *on trouve*

$$sup_{t\in J}|F(y)(t)-F(z)(t)| \leq sup_{t\in J}\tfrac{kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y-z\|_\infty$$
$$\|F(y)-F(z)\|_\infty \leq \tfrac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y-z\|_\infty$$

Alors pour $\alpha \in [0,1]$ *l'opérateur* F *est contraction donc* F *a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach qui donne une solution unique de problème (2.5).*

Ensuite, nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder appliquée aux opérateurs complètement continus. Le théorème suivant est essentiel pour la preuve de notre résultat principal.

Théorème 2.2.2. *: Supposons que :*
H_1 *:* $f : J\times\mathcal{C}([-r,0],E)$ *une fonction continue.*
H_2 *: Il existe une constant* $M>0$ *telle que :*

$$|f(t,u)| \leq M \text{ pour tout } t\in J \text{ et } u\in\mathcal{C}([-r,0],E)$$

Alors le problème (2.5) admet au moins une solution sur J.

Preuve 2.2.3. *Transformons le problème (2.5) en un problème du point fixe et on considère l'opérateur* $F : \mathcal{C}([-r,b],E) \to \mathcal{C}([-r,b],E)$ *défini par :*

$$F(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t\in[-r,0] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y_s)ds & t\in J \end{cases}$$

On va montrer que F admet un point fixe, on va utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder. La preuve est donnée en quatre étapes.

Étape 1 : *On va montre que F est continu.*

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$ converge vers y dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$ c'est-á dire

$$\lim_{n\to+\infty}\|y_n-y\|_\infty=0.$$

On va montrer que $\lim_{n\to+\infty}\|F(y_n)-F(y)\|_\infty=0$ *pour* $t\in J$.

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t)-F(y)(t)| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,y_n(s))ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\Big|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}sup_{s\in[0,b]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds\\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\Big(\frac{-1}{\alpha}\Big)[(t)^\alpha]_0^t\\
&\leq \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0,b]$, on obtient

$$sup_{t\in[0,b]}|F(y_n)(t)-F(y)(t)|\leq sup_{t\in[0,b]}\tfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty$$
$$\|F(y_n)-F(y)\|_\infty\leq\tfrac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons :

$$\|F(y_n)-F(y)\|_\infty\leq\tfrac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty\to0 \text{ quand } n\to\infty$$

Donc F est continu.

Étape 2 : *F transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$*

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante strictement positif l tel que pour chaque

$$y \in B_\eta = \{y \in \mathcal{C}([-r,b],E) : \|y\|_\infty < \eta\}$$

.
On veut montrer que $\|F(y)\|_\infty < l$
Alors, pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y_s)ds\Big| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_s)|ds \end{aligned}$$

d'après hypothèse (H_2) de théorème on a : $|f(t,u)| \leq M$ alors,

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{Mt^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0,b]$, on obtient

$$\begin{aligned} |F(y)| &\leq \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = l \\ &\leq l \end{aligned}$$

Et donc $F(B_\eta)$ est uniformément borné.

Étape 3 : *F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$.*
Soit $t_1, t_2 \in J$ et $t_1 < t_2$, B_η un ensemble borné de $\mathcal{C}([-r,b],E)$ de l'étape

deux et soit $y \in B_\eta$. Alors

$$\begin{aligned}\Big|F(y)(t_2)-F(y)(t_1)\Big| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y_s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y_s)ds\Big|.\\
&= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}+(t_1-s)^{\alpha-1}]f(s,y_s)ds\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y_s)ds\Big|.\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}]ds+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^{\alpha}+t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}]+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha}\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha}+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1-t_2)^{\alpha}\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.

Alors, l'ensemble $Y(t) = \{F(y)(t) : y \in B_\eta\}$ est compact dans $\mathbb{R}$. D'après les étapes précédentes et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que F est un opérateur complètement continu.

Étape 4 *: Maintenant reste à montrer que $\xi = \{y \in C([-r,b],E), y = \lambda F(y), 0 < \lambda < 1\}$ est borné.*

Soit $y \in \xi$, alors

$$y = \lambda F(y)\ ;\ \text{pour } 0 < \lambda < 1$$

donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda\Big[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y_s)ds\Big]$$

pour $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}|y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_s)|ds\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\\
&\leq \frac{Mt^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $J = [0, b]$, on obtient

$$sup_{t\in J}|y(t)| \leq sup_{t\in J}\frac{Mt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{Mb^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} = R$$
$$\|y\|_{\infty} \leq R$$

avec R une constante strictement positif. Cela montre que ξ est borné par conséquence du théorème du point fixe de Leray-Schauder.
On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème de (2.5).

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solution de problème d'ordre fractionnaire.

Théorème 2.2.3. *Supposons que les conditions du théorème précédent sont vérifiées et supposons que de plus qu'il existe une constante positive k telle que :*

$$|f(t,u(t)) - f(t,v(t))| \leq k\|u-v\|_{\infty} \qquad \forall t \in J \qquad \forall (u,v) \in \mathcal{C}([-r,b],E)$$

Alors le problème (2.5) admet une unique solution sur J.

Preuve 2.2.4. *Pour prouver l'unicité de $y(t)$, on suppose que le problème (2.5) admet une autre solution.*
Soit $z(t)$ cette autre solution du problème (2.5) alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|y(t)-z(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y_s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,z_s)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_s)-f(s,z_s)|ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|y-z\|_{\infty}ds
\end{aligned}$$

Maintenant, on va utiliser le Lemme de Gronwall , avec $\varphi(t) \equiv 0$ et $u(t) = |y(t) - z(t)|$, on obtient $y(t) = z(t)$, d'où l'unicité de la solution du problème (2.5).

Chapitre 3

Équations différentielles à retard dépendant de l'état

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solution, des deux types de problème à retard dépendant de l'état, le premier d'ordre un et le deuxième d'ordre fractionnaire.

Pour plus de detail voir [7], [8] et [10].

3.1 Existence et unicité de solution des équations différentielles à retard dépendant de l'état

Définition 3.1.1. *On appelle équation différentielle à retard dépendant de l'état, une équation de la forme suivante :*

$$\begin{cases} y'(t) &= f\Big(t, y(t), y(t-r(y(t)))\Big) & \textit{pour } \forall t \geq 0 \\ y(t) &= \varphi(t) & \textit{pour } \forall t \in [-\alpha, 0] \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*
$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *est en fonction de* $y(t)$*.*
$\varphi \in \mathcal{C}([-\alpha, 0], \mathbb{R})$ *fonction donnée, avec* $\alpha = max_{y \in \mathbb{R}} r(y)$ *.*

Soit l'équation différentielle à retard dépendant de l'état de la forme (3.1), On suppose que f et r vérifiant les hypothèses suivantes :

$H_1^{'}$: f est localement lipschitzienne par rapport aux deux variable $y(t)$ et $y(t - r(y(t)))$.

$H_2^{'}$: $r(t)$ est localement lipschitzienne.

$H_3^{'}$: f est bornée.

Alors, pour tout $L > 0$, soit F un ensemble des fonctions continues de $[-\alpha, L]$ à valeurs réelles, muni de la norme infinie, donc F est un espace de Banach.

Proposition 3.1.1. *Soient F un espace de Banach, p un réel positif et soit $C_{\varphi,L}$ sous ensemble de F definit par :*

$$C_{\varphi,L} = \begin{cases} y \in F, y(s) & = & \varphi(s), & & \forall s \in [-\alpha, 0] \\ \|y\| & \leq & \rho, & \text{et } |y(t) - y(s)| \leq p|t-s| & \forall t, s \in [0, L] \end{cases} \tag{3.2}$$

$C_{\varphi,L}$ est compact.

Preuve 3.1.1. *Pour démontrer $C_{\varphi,L}$ est compact , il faut montrer que $C_{\varphi,L}$ est relativement compact et fermé .*

Étape 1 *: $C_{\varphi,L}$ est relativement compact :*
D'après le théorème d'Ascoli, $C_{\varphi,L}$ soit borné et uniformément equicontinu.

1. *Il claire que $C_{\varphi,L}$ est borné par construction .*
2. *Pour tout $y \in C_{\varphi,L}$ et pour tout $t, s \in [-\alpha, r]$ on a :*

$$|y(t) - y(s)| \leq p|t - s| \tag{3.3}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour $|t - s| \leq \frac{\varepsilon}{p}$
Alors (3.3) donne

$$|y(t) - y(s)| \leq \varepsilon$$

Donc $C_{\varphi,L}$ est relativement compact.

Étape 2 *: $C_{\varphi,L}$ est fermé :*
On prend une suite y_n dans $C_{\varphi,L}$ qui converge vers y i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = y(t)$$

Et on montre que $y(t) \in C_{\varphi,L}$.

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$y_n(s) = \varphi(s) \qquad \forall s \in [-\alpha, 0]$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(s) = \varphi(s) \qquad \forall s \in [-\alpha, 0]$$

Alors

$$\begin{aligned} |y(t) - y(s)| &= |y(t) - y_n(t) + y_n(t) + y_n(s) + y_n(s) - y(s)| \\ &\leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| \end{aligned}$$

D'après la définition de limite, on obtient :

$$|y(t) - y(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + u|t-s| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + R|s-t|, \forall \varepsilon \geq 0, \forall R \geq 0, \forall u \geq 0$$

Ainsi

$$|y(t) - y(s)| \leq p|t-s|$$

Et nous avons

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|\lim_{n\to+\infty} y_n\| \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \|y_n\| \\ &\leq \rho. \end{aligned}$$

Alors $y \in C_{\varphi,L}$ *donc* $C_{\varphi,L}$ *est fermé .*

Théorème 3.1.1. *Supposons que les hypothèse* $H_1^{'}, H_2^{'}$ *et* $H_3^{'}$ *sont vérifiée, et tout fonction* φ *dérivable avec* $|\varphi'(t)| < R$, $R > 0$,
Alors le problème (3.1) admet une solution unique $y(t)$.

Preuve 3.1.2. *Pour prouver ce théorème, on utilise le théorème du point fixe de Banach.*

1. *Soit* q *un réel positif, et soit* φ *bornée par* D *et* f *bornée par* M*, on suppose que* $R \geq M$*, pour* $p = R$ *et* $q = D + LM$ *on définit* $C_{\varphi,L}$*, et d'après la proposition précédente* $C_{\varphi,L}$ *est compact.*
2. *Montrons que* $C_{\varphi,L}$ *est convexe :*
   (a) Soit $\delta \in [0,1]$ *et* $x, y \in C_{\varphi,L}$ *alors :*

$$\begin{aligned} \delta x(s) + (1-\delta)y(s) &= \delta\varphi(s) + (1-\delta)\varphi(s) \\ &= \varphi(s), \qquad \forall s \in [-\alpha, 0] \end{aligned}$$

(b) Pour tout $t, s \in [-\alpha, L]$ *on a :*

$$\begin{aligned} |\delta x(s) + (1-\delta)y(s) - \delta x(t) + (1-\delta)y(t)| &\leq |\delta(x(s) - x(t)) + (1-\delta)(y(s) - y(t)| \\ &\leq \delta|x(s) - x(t)| + (1-\delta)|y(s) - y(t)| \\ &\leq \delta R|s-t| + (1-\delta)|s-t| \\ &\leq R|s-t| \end{aligned}$$

Alors, $\delta x + (1-\delta)y$ *est lipschitzienne sur* $[-\alpha, L]$ *avec la constante de Lipschitz* R.

(c) x *et* y *sont bornés par* q *, alors :*

$$\|\delta x + (1-\delta)y\| \leq \delta\|x\| + (1-\delta)\|y\|.$$

d'où $\delta x + (1-\delta)y \in C_{\varphi,L}$ *donc* $C_{\varphi,L}$ *est convexe.*

3. *Posons* $J = [-\alpha, L]$ *et on considère l'application suivante :*

$$A : C_{\varphi,L} \to F$$

définit par :

$$(Ay)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \forall t \in [-\alpha, 0] \\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, y(s), y(s - r(y(s))))ds & \forall t \in [0, L] \end{cases} \tag{3.4}$$

On dit que A *admet un point fixe si* A *est complètement continue et* $A(C_{\varphi,L}) \subset C_{\varphi,L}$ *.*
Si A *admet un point fixe alors le problème (3.1) admet une solution.*

$\triangleright$ *Montrons que* $A(C_{\varphi,L}) \subset C_{\varphi,L}$ *:*
$\forall t \in [-\alpha, 0]$ *on a* $(Ay)(t) = \varphi(t)$, *et* φ *est une fonction bornée par* D *et* R *lipschitzienne, Alors* $A(C_{\varphi,L}) \subset C_{\varphi,L}$.

(a) *Si* $y \in C_{\varphi,L}$ *et pour* $t \in [0, L]$ *on a :*

$$|(Ay)(t)| \leq |\varphi(0)| + \int_0^t |f(s, y(s), y(s - r(y(s))))|ds$$

On sait que

$$|f(s, y(s), y(s - r(y(s))))| \leq M$$
$$\text{et } |\varphi(0)| \leq D$$

Donc

$$\begin{aligned} |(Ay)(t)| &\leq D + \int_0^t M ds \\ &\leq D + Mt \end{aligned}$$

On prend le supremum de t *sur* $[0, L]$ *Alors,*

$$|(Ay)(t)| \leq D + ML = q$$

Donc A est bornée par q.

(b) *On montre que* $|((Ay)(t))'|$ *est bornée par R .*
Alors, en effet :

$$((Ay)(t))' = f(t, y(t), y(t - r(y(t))))$$

D'après l'hypothèse H_3' *donc :*

$$\begin{aligned} \|((Ay)(t))'\| &\leq M \\ &\leq R. \end{aligned}$$

4. *On montre maintenant que A est complètement continue :*
(a) *Supposons que* $y_i \in C_{\varphi,L}$ *et*

$$\lim_{i \to +\infty} y_i = y \text{ i.e. } \|y_i - y\|_\infty \to 0$$

Notons par $\rho_i(s) = r(y_i(s))$, $q(s) = r(y(s))$, *l la constante de Lipschitz de r et k la constante de Lipschitz de f, Donc pour tout* $t \in [0, L]$

On a :

$$\begin{aligned}
|(Ay_i)(t)-(Ay)(t)| &\leq \int_0^t |f(s,y_i(s),y_i(s-\rho_i(s)))-f(s,y(s),y(s-\rho(s)))|ds \\
&\leq \int_0^t |f(s,y_i(s),y_i(s-\rho_i(s)))-f(s,y(s),y(s-\rho_i(s)))|ds \\
&+ \int_0^t |f(s,y(s),y(s-\rho_i(s)))-f(s,y(s),y(s-\rho(s)))|ds \\
&\leq k\int_0^t ksup\{sup_{s\in[-\alpha,L]}|y_i(s)-y(s)|, \\
&sup_{s\in[-\alpha,L]}|y_i(s-\rho_i(s))-y(s-\rho_i(s))|\}ds+ \\
&k\int_0^t ksup\{sup_{s\in[-\alpha,L]}|y(s)-y(s)|, \\
&sup_{s\in[-\alpha,L]}|y(s-\rho_i(s))-y(s-\rho(s))|\}ds \\
&\leq \int_0^t ksup\{\|y_i-y\|_\infty,\|y_i-y\|_\infty\}ds \\
&+ \int_0^t ksup\{0,sup_{s\in[-\alpha,L]}|y(s-\rho_i(s))-y(s-\rho(s))|\}ds \\
&\leq \int_0^t k\|y_i-y\|_\infty ds+\int_0^t ksup_{s\in[-\alpha,L]}|y(s-\rho_i(s))-y(s-\rho(s))|ds \\
&\leq \int_0^t k\|y_i-y\|_\infty ds+\int_0^t ksup_{s\in[-\alpha,L]}R|s-\rho_i(s)-s+\rho(s)|ds \\
&\leq \int_0^t k\|y_i-y\|_\infty ds+\int_0^t ksup_{s\in[-\alpha,L]}R|\rho_i(s)-\rho(s)|ds \\
&\leq \int_0^t k\|y_i-y\|_\infty ds+\int_0^t kRl\|y_i-y\|_\infty ds \\
&\leq kt\|y_i-y\|_\infty+ktRl\|y_i-y\|_\infty \\
&\leq tk[1+Rl]\|y_i-y\|_\infty
\end{aligned}$$

Alors

$$\|Ay_i-Ay\|_\infty \leq Lk[1+Rl]\|y_i-y\|_\infty$$

Donc A est lipschitzienne dans $C_{\varphi,L}$ et par conséquent elle est continue.
(b) On montre que A est compact :
En effet : Soit B un sous ensemble borné de $C_{\varphi,L}$.
On a $\overline{A(B)}$ un fermé inclue dans $C_{\varphi,L}$ qui est compact donc $\overline{A(B)}$ est compact .

Ainsi A est complètement continue .
D'après le théorème du point fixe pour tout $L \geq 0$ il existe une fonction $y \in C_{\varphi,L}$ tel que

$$(Ay)(t) = y(t) \text{ pour } t \in [0, L]$$

Pour montrer l'unicité de solution en effet :
Par absurde on suppose deux solution $y(t)$ et $z(t)$, Alors pour $t \in [0, L]$ on a :

$$\begin{aligned}
|y(t) - z(t)| &\leq \int_0^t |f(s, y(s), y(s - r(y(s)))) - f(s, z(s), z(s - r(z(s))))|ds \\
&\leq \int_0^t |f(s, y(s), y(s - \rho(s))) - f(s, z(s), z(s - \rho(s)))|ds \\
&\leq \int_0^t k\|y_i - y\|_\infty ds + \int_0^t kRlsup_{s\in[-\alpha,L]}|y(s) - z(s)|ds \\
&\leq (1 - q)k[1 + Rl]\|y - z\|_\infty \\
&\leq Lk[1 + Rl]\|y - z\|_\infty
\end{aligned}$$

Pour $L \leq \frac{1}{K(1+Rl)}$ on obtient :

$$|y(t) - z(t)| \leq \|y - z\|_\infty$$

Contradiction donc $y(s) = z(s)$ pour $s \in [0, L]$.

Exemple 3.1.1. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) &= -2sin\Big(x\Big(t - \frac{-x+1}{2}\Big)\Big) \quad \forall t \geq 0 \\ x(t) &= e^{-t} \quad \forall t \leq 0 \end{cases}$$

Alors :$r(x(t)) = \Big(\frac{-x+1}{2}\Big)$ et
$f(t, x(t), x(t - r(x(t)))) = -2sin\Big(x\Big(t - \frac{-x+1}{2}\Big)\Big)$, $\varphi(t) = e^{-t}$ *et*
$\alpha = max_{t\in\mathbb{R}} r(\varphi) = max_{t\in\mathbb{R}} r(e^{-t}) = 0$
$\Rightarrow \alpha = 0$

1. *Il est claire que $f \in C^1$ par rapport á x donc il est localement lipschitzienne .*
2. *r est localement lipschitzienne.*
3. *Comme la fonction $sint$ est borné par 1 pour tout x, alors f est borné par 2*
   Alors les hypothèse H_1', H_2' et H_3' sont vérifiée, de même $\varphi(t) = e^{-t}$ est une fonction dérivable est borné par 1, Alors d'après le Théorème (3.1.1) cette équation admet une solution unique $x(t)$.

3.2 Existence et unicité de solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire à retard dépendant de l'état

Dans cette section, nous intéressons à l'existence et l'unicité de solution pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec retard dépendant de l'état .

On considère le problème d'ordre fractionnaire à retard dépendant de l'état :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= f(t, x(t-\rho(x(t)))) \quad t \in J = [0,b], 0<\alpha<1 \\ x(t) &= \varphi(t) \quad t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{3.5}$$

avec D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville.
$f : J \times \mathcal{C}([-r,0], E) \to E$ est une fonction continue donnée ,
$\varphi : [-r,0] \to E$ est une fonction continue bornée donnée avec $\varphi(0) = 0$ muni de la norme sup

$$\|\varphi\|_\infty = sup\{|\varphi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$$

ρ est la fonction continue positive et bornée sur $\mathcal{C}([-r,0], E)$.
r : le retard maximal défini par :

$$r = sup\ \rho(x)$$

Définition 3.2.1. *Une fonction $y \in \mathcal{C}(J, E)$ est dite solution de (3.5) si pour tout $s \in J$ alors,*
▷ $x(t) = \varphi(t)$ *pour* $t \in [-r, 0]$
▷ $x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s-\rho(x(s))))ds$ *pour* $t \in J$

Notre premier résultat d'existence et d'unicité est basé sur le principe de Contraction de Banach.

Théorème 3.2.1. *Soit $f : J \times \mathcal{C}([-r,0], E) \to E$ une fonction continue , supposons qu'il existe une constante positive k telle que :*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq k\|u-v\|_\infty, \quad pour \quad t \in J \quad u, v \in \mathcal{C}$$

si

$$\frac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.6}$$

Alors, il existe une solution unique de problème (3.5).

Preuve 3.2.1. *Transformons le problème (3.5) en un problème du point fixe, on considère l'opérateur* $A : \mathcal{C}([-r, 0], E) \to \mathcal{C}([-r, 0], E)$ *définit par :*

$$(Ax)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & pour \quad t \in [-r, 0] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s-\rho(x(s))))ds, & pour \quad t \in J \end{cases}$$

Il est clair que les points fixe de l'opérateur A *sont solution du problème (3.5).* A *est bien défini, en effet : si* $y \in \mathcal{C}([-r, 0], E)$ *, alors* $A(x) \in \mathcal{C}([-r, 0], E)$*, pour montrer que* A *admet un unique point fixe, il suffit de montrer que* A *est une contraction.*

En effet , soient $x, y \in \mathcal{C}([-r, 0], E)$ *alors* $\forall t \in J$ *on a :*

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s-\rho(x(s)))) - f(s, y(s-\rho(y(s))))| ds \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x(s-\rho(x(s))) - y(s-\rho(y(s)))| ds \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} sup_{s\in J} |x(s-\rho(x(s))) - y(s-\rho(y(s)))| ds \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty \left(\frac{1}{\alpha}\right) [(t-s)^\alpha]_0^t \\ &\leq \frac{kt^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

par majoration de t *sur l'intervalle* $J = [0; b]$ *on trouve :*

$$sup_{t\in J} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| \leq sup_{t\in J} \tfrac{kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty$$

Alors,

$$\|(Ax) - (Ay)\|_\infty \leq \tfrac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty$$

Par la condition (3.6) l'opérateur A *est une contraction et donc* A *a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach qui donne une solution unique de problème (3.5).*

Ensuite, nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder appliquée aux opérateurs complètement continus.

Le théorème suivant est essentiel pour la preuve de notre résultat principal.

Théorème 3.2.2. *Pour $t \in J$ on suppose que $\rho \in \mathcal{C}([-r,0],E)$ est continue et $\varphi \in \mathcal{C}([-r,0],E)$ et f satisfait a l'hypothèse suivante :*
$H1$:f est une fonction continue.
$H2$: Il existe $p,q \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}^+)$ tel que

$$|f(t,u)| \leq p(t) + q(t)\|u\|_\infty, \quad pour \quad t \in J \quad et \quad u \in \mathcal{C}$$

Alors le problème (3.5) admet au moins une solution sur J.

Preuve 3.2.2. *Transformons le problème (3.5) en un problème du point fixe et on considère l'opérateur $A : \mathcal{C}([-r,b],E) \to \mathcal{C}([-r,b],E)$ définit par :*

$$(Ax)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & pour \quad t \in [-r,0] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s-\rho(x(s))))ds, & pour \quad t \in J \end{cases}$$

Pour montrer que A admet un point fixe, on va utiliser le théorème du point fixe de Leray-schauder.

La preuve est donnée en quatre étape :

***Étape 1** : On va montrer que A est continue :*
Soit $\{x_n\}$ une suite dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$ converge vers x dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$ i.e

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$$

Alors, on va montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|A(x_n) - A(x)\|_\infty = 0$$

$$\begin{aligned}
|A(x_n)(t) - A(x)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x_n(s-\rho(x_n(s)))) - f(s, x(s-\rho(x(s))))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} sup_{s\in[0,b]} |f(s, x_n(s-\rho(x_n(s)))) \\
&- f(s, x(s-\rho(x(s))))| ds \\
&\leq \frac{\|f(., x_n(.-\rho(x_n(.)))) - f(., x(.-\rho(x(.))))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\|f(., x_n(.-\rho(x_n(.)))) - f(., x(.-\rho(x(.))))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{-1}{\alpha}\right) \Big[t^\alpha\Big]_0^t \\
&\leq \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f(., x_n(.-\rho(x_n(.)))) - f(., x(.-\rho(x(.))))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0,b]$, on obtient :

$$sup_{t\in[0,b]}|A(x_n)(t) - A(x)(t)| \leq$$
$$sup_{t\in[0,b]}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,x_n(.-\rho(x_n(.)))) - f(.,x(.-\rho(x(.))))\|_\infty.$$

d'où

$$\|A(x_n) - A(x)\| \leq \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,x_n(.-\rho(x_n(.)))) - f(.,x(.-\rho(x(.))))\|_\infty.$$

Puisque f est une fonction continue :

$$\|A(x_n) - A(x)\| \leq \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,x_n(.-\rho(x_n(.)))) - f(.,x(.-\rho(x(.))))\|_\infty$$

Alors,

$$\|A(x_n) - A(x)\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

Donc A est continu.

Étape 2 *: A transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$.*

En effet, il suffit de montrer que pour tout η, il existe une constante strictement positive l tel que pour chaque

$$x \in B_\eta = \{x \in \mathcal{C}([-r,b],E) : \|x\|_\infty < \eta\}$$

On va montrer que $\|A(x)\|_\infty < l$
Alors, pour tout $t \in J$ on a :

$$|A(x)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s-\rho(x(s))))|ds$$

d'après l'hypothèse $(H2)$ on a :

$$|f(t,u)| \leq p(t) + q(t)\|u\|_\infty, \quad pour \quad t \in J \quad et \quad u \in \mathcal{C}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |A(x)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|(p(t) + q(t)\|x\|_\infty)|ds \\ &\leq \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} + \frac{\eta\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}[\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty] \end{aligned}$$

Alors,

$$\|A(x)\|_\infty \leq \tfrac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty] = l$$

Et donc $A(B_\eta)$ est uniformément borné.

Étape 3 *: A transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}([-r,b],E)$.*
Soit $t_1, t_2 \in J$ et $t_1 < t_2$, B_η un ensemble borné de $\mathcal{C}([-r,b],E)$ de l'étape deux et soit $x \in B_\eta$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Big|A(x)(t_2) - A(x)(t_1)\Big| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s-\rho(x(s)))))ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s-\rho(x(s)))))ds\Big|. \\
&\leq \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\Big[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} + (t_1-s)^{\alpha-1}\Big] \\
& f(s,x(s-\rho(x(s)))))ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s-\rho(x(s)))))ds\Big|. \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s-\rho(x(s))))|ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s-\rho(x(s))))|ds\Big] \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_1^\alpha\Big] + \frac{\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big[(t_2-t_1)^\alpha\Big] \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha + \frac{\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1-t_2)^\alpha
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.

Alors, l'ensemble $x(t) = \{A(x)(t) : x \in B_\eta\}$ est pré-compact dans $\mathbb{R}$. D'après les étapes précédentes et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que A est un opérateur complètement continu.

Étape 4 *: Maintenant reste à montrer que $\xi = \{x \in \mathcal{C}([-r,b],E), x = \lambda A(x), 0 < \lambda < 1\}$ est borné.*

Soit $x \in \xi$, alors

$$x = \lambda A(x) \text{ ; pour } 0 < \lambda < 1$$

donc pour tout $t \in J$ on a :

$$x(t) = \lambda\Big[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s-\rho(x(s))))ds\Big]$$

pour $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s, x(s-\rho(x(s))))|ds \\ &\leq \frac{\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{[\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty]t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $J = [0, b]$, on obtient

$$sup_{t\in J}|x(t)| \leq sup_{t\in J}\frac{[\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty]t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$\|x\|_\infty \leq \tfrac{[\|p\|_\infty + \eta\|q\|_\infty]b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = R$$
$$\|x\|_\infty \leq R$$

avec R une constante strictement positif. Cela montre que ξ est borné par conséquence du théorème du point fixe de Leray-Schauder.
On déduit que A admet au moins un point fixe qui est une solution du problème de (3.5).

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solution de problème d'ordre fractionnaire.

Théorème 3.2.3. *Supposons que les conditions du théorème précédent sont vérifiées et supposons que de plus qu'il existe une constante positive k telle que :*

$$|f(t, u(t)) - f(t, v(t))| \leq k\|u - v\|_\infty \qquad \forall t \in J \qquad \forall (u, v) \in \mathcal{C}([-r, b], E)$$

Alors le problème (3.5) admet une unique solution sur J.

Preuve 3.2.3. *Pour prouver l'unicité de $x(t)$, on suppose que le problème (3.5) admet une autre solution.*
Soit $x(t)$ cette autre solution du problème (3.5) alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s-\rho(x(s))))ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s-\rho(y(s))))ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s-\rho(x(s)))) - f(s, y(s-\rho(y(s))))|ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x-y\|_\infty ds
\end{aligned}
$$

Maintenant, on va utiliser le Lemme de Gronwall , avec $\varphi(t) \equiv 0$ et $u(t) = |x(t) - y(t)|$, on obtient $x(t) = y(t)$, d'où l'unicité de la solution du problème (3.5).

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons traité l'existence et l'unicité de solution intégrale des équations différentielles fonctionnelles à retard fini et dépendant de l'état, l'étude était pour les problèmes d'ordre un et pour les problèmes d'ordre fractionnaire. Ces résultats sont obtenus à l'aide des théorèmes de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leary-Schauder.

On a rappelé quelques définitions et Notations des dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville et quelques outils de base et propriétés du calcule fractionnaire.

Bibliographie

[1] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003

[2] A. Kilnas, H. M. Srivastava and J.J. Trujillo, theory and applications of Fractional Differential Equations, vol.204. Elsevier science B.V.,Ansterdam,2006.

[3] D.R Smart and J. Spaimier, the fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order , vol.111.Elsevier,1974.

[4] D.R Smart, Fixed point Theorems, Cambridge tracts in mathematics, University, vol 66,(1974).

[5] E. Zeidler, Nonlineair Functional Analysis and its Applications. Fixed point Theorems. Springer-Verlag, New York. 1990.

[6] G.Da Prato and E,Sinestrari, Differential operators with non-dense domains, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI .Sci. 14(1987)285-344.

[7] I. Podlubny, Fractional Differential equations : on introduction to fractional derivatives, fractional differential equation, to methods of their solution and some of their application , vol.198. Elsevier, 1998.

[8] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equation, Speringer. Verlag, Berlin 1993.

[9] M. Lakrib, Stroboscopie et moyennisation dans les equations différentielles fonctionnelles à retard. thèse doctorat 2004.

[10] M. Yahiaoui, Les equations différentielles à retard dépendant de l'état . PhD thesis 2014.

[11] T.H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of solution of a system of differential equation. Ann. Of Math.,0(1919) 4, pp.292-296.

[12] Y.Yosida, K. On the différentiabilité and the représentation of one-paramètre semi-groupes of linear operators.J. Math. Japan,1(197-48), 15-21.

Abstract

This work has been devoted to the study of the existence and uniqueness of solutions of two types differential equations with delay. The first type differential equations with finite delay and the second type differential equations with state dependent delay.

To prove the existence and uniqueness of the solutions we use some properties of fractional calculus with fixed point theorems [Banach Contraction theorem and Leray-Schauder theorem].

Résumé

Ce travail à été dévoué à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de deux types d'équations différentielles à retard. Le première type les équations différentielles avec un retard fini et le deuxième les équations différentielles avec un retard dépendant de l'état.

Pour prouver l'existence et l'unicité des solutions nous utilisons quelques propriétés de calcules fractionnaires avec des théorèmes du point fixe [théorème de Contraction de Banach et théorème de Leray-Schauder].

ملخص

تم تخصيص هذا العمل لدراسة وجود وتفرد حلول من نوعين هما المعادلات التفاضلية مع التأخير. المعادلات التفاضلية من النوع الأول ذات التأخير المحدود والنوع الثاني من المعادلات التفاضلية ذات التأخير المعتمد على الحالة.

لإثبات وجود الحلول وتفردها ، نستخدم بعض خصائص حساب التفاضل والتكامل الكسري مع نظريات النقطة الثابتة [نظرية باناك للتقلص ونظرية ليراي-شودر].