الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمــــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain-Témouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et l'Informatique

MÉMOIRE
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématique
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Spécialité : Equation Différentielle et Modélisation

# Espace de Sobolev fractionnaire conformable sur les échelles de temps

**Présenté Par :**
M. Nouidir karim ABDELHADI

**Devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. Khair Hamid | M C B | UAT.B.B (Ain Témouchent) | Président |
| Dr. Mekhalfi Kheira | M C A | UAT.B.B (Ain Témouchent) | Examinateur |
| Dr. Beniani Abderrahmane | M C A | UAT.B.B (Ain Témouchent) | Encadrant |


*Année Universitaire 2020/2021*

# *Remerciements*

Tout d'abord, je tiens à remercier ***"Allah"*** le plus puissant, de m'avoir donnée la santé pour terminer ce travail, ainsi la volonté et la patience qui m'ont aidé à continuer mon chemin, et ne pas baisser les bras.

Je remercie ***Mr. Abderrahmane Beniani*** d'être mon encadreur, pour son soutient morale et ses conseils inoubliables, aussi son guide durant la préparation de cet mémoire.

Mes remerciements vont également à ***Mr. Khiar Hamide*** qui m'a fait l'honneur de vouloir accepté la présidence de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à ***Mme. Mekhalfi Kheira*** d'avoir accepté d'examiner mon modeste travail.
Je voudrais également remercier ma mère, mon père, mes frères, toute ma famille qui m'ont toujours aidé.

# *Dédicaces*

Je dédie ce mémoire :

• A mes très chers parents qui ont sacrifié leur vie pour le bon déroulement de mes études.

• A toutes la famille paternelle et maternelle.

• A mes amies.

• A tous mes enseignants.

# ***Proverbe***

*"Le succès a une formule simple : fais de ton mieux!"*

# Table des matières

# *Introduction générale*

La théorie des échelles de temps est un sujet très intéressant qui couvre plusieurs domaines de notre vie, le calcul sur les échelles de temps a été initié par STEFAN HILGER en 1990. Dans les dernières années le calcul sur les échelles de temps est devenu important et utilisable dans plusieurs domaines tels que l'économie, biologie et surtout en informatique..., il y a plusieurs méthodes pour étudier les solutions des problèmes de valeurs limites pour les équations différentielles fractionnaires et les théorèmes du point fixe, théorie de Schauder et théorie des points critiques. Mais jusqu'à présent, aucun chercheur n'a appliqué la théorie du point critique et point fixe pour étudier des équations différentielles fractionnaires conformables sur des échelles de temps, parce qu'il est souvent très difficile d'établir un espace approprié pour des équations différentielles fractionnaires conformables sur des échelles de temps.

Les espaces Sobolev sont un outil très important dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Ils permettent en particulier d'étudier des équations différentielles fractionnaires conformables sur des échelles de temps, car ce sont des espaces fermés. Ce mémoire se décompose de trois chapitres.

- Premier chapitre :

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et notions fondamentales sur les échelles de temps arbitraires.

- Deuxième chapitre :

Dans ce chapitre, nous introduisons tout d'abord la notion de calcul fractionnaire, ensuite on donne une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire.
Ainsi que, on définit l'intégrale fractionnaire conformable et leurs propriétés. Fina-

lement, on définit la $\Delta$_dérivée fractionnaire contormable d'ordre $\alpha$, $\alpha \in ]0,1]$ et $\Delta$_intégrale fractionnaire conformable sur les échelles de temps.

- Troisième chapitre :

Il s'agit dans chapitre introduisons le calcul $\Delta$_fractionnaire conformable sur les échelles de temps pour les fonctions à valeurs vectorielles et les espace de Sobolev fractionnaire conformable sur les échelles de temps.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions du calcul sur les échelles de temps, ainsi que des définitions et des propriétés sur la différentiabilité et l'intégration et un rappel de quelques espaces fonctionnels sur les échelles de temps, et on introduit l'espace de Lebesgue $L^p_{\alpha,\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

## 1.1 Calcul sur les échelles de temps

**Définition 1.1.1.** *[7, 10] On appelle échelle de temps toute partie fermée non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on la note $\mathbb{T}$.*

**Exemple 1.1.1.** $\mathbb{T} = \{zh, z \in \mathbb{Z}; h \in \mathbb{R}_+\}$ *est une échelle de temps.*
*Car :*

$$\begin{aligned}\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{T} &= ]-(n+1)h, -nh[\cup\cdots\cup]-h,0[\cup]0,h[\cup]h,2h[\cup\cdots\cup]nh,(n+1)h[\\ &= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-(n+1)h,-nh[\right)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]nh,(n+1)h[\right),\end{aligned}$$

*c'est une union infinie d'ouverts, donc c'est un ouvert.*
*D'où $\mathbb{T}$ est fermé, alors c'est une échelle de temps.*

**Définition 1.1.2.** *[7, 10] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, on définit :*

1. *L'opérateur de saut avant $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ par :*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

2. *L'opérateur de saut arrière* $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ *par :*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

**Définition 1.1.3.** *[7, 10] Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, la fonction de granulation en avant* $\mu : \mathbb{T} \longrightarrow ]0, +\infty[$ *est définie par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

*La fonction de granulation en arrière* $\gamma : \mathbb{T} \longrightarrow ]0, +\infty[$ *est définie par :*

$$\gamma(t) = t - \rho(t).$$

**Exemple 1.1.2.** *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *une échelle de temps.*
*Calculons* $\sigma(t)$, $\rho(t)$, $\mu(t)$, $\rho(t)$.
$\forall t \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} \\ &= \inf\,]t, +\infty[ \\ &= t, \end{aligned} \qquad et \qquad \begin{aligned} \rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} \\ &= \sup\,]-\infty, t[ \\ &= t. \end{aligned}$$

TABLE 1.1 – Exemple d'échelles de temps

| $\mathbb{T}$ | $\mu(t)$ | $\gamma(t)$ | $\sigma(t)$ | $\rho(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $0$ | $0$ | $t$ | $t$ |
| $\mathbb{Z}$ | $1$ | $1$ | $t+1$ | $t-1$ |
| $h\mathbb{Z}$ | $h$ | $h$ | $t+h$ | $t-h$ |
| $q^{\mathbb{N}}$ | $(q-1)t$ | $t(1-\frac{1}{q})$ | $qt$ | $\frac{t}{q}$ |
| $2^{\mathbb{N}}$ | $t$ | $\frac{t}{2}$ | $2t$ | $\frac{t}{2}$ |

Par convention , on supposera que :

- $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ (i.e $\sigma(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un maximum $t$) ,
- $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (i.e $\rho(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un minimum $t$) .

**Définition 1.1.4.** *[7, 10] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$. On dira que*

*i/ Si $t < \sigma(t)$, on dit que $t$ est dispersé à droite.*

*ii/ Si $\rho(t) < t$, on dit que $t$ est dispersé à gauche.*

*iii/ Les points qui sont à la fois dispersés à droite et à gauche sont dites isolés.*

*iv/ Si $t < \sup \mathbb{T}$ et $\sigma(t) = t$, on dit que $t$ est dense à droite.*

*v/ Si $t > \inf \mathbb{T}$ et $\rho(t) = t$, on dit que $t$ est dense à gauche.*

*vi/ Les points qui sont à la fois dense à droite et à gauche sont dites dense.*

**Exemple 1.1.3.** *Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \{2^n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Pour $t \neq 0$, on a :*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = 2^{n+1} = 2^n.2 = 2.t,$$

*et*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = 2^{n-1} = \frac{2^n}{2} = \frac{t}{2}.$$

*D'où $t$ est isolée. Pour $t = 0$ on a :*

$$\sigma(0) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = 1.$$

*Donc nous avons $0 < \sigma(0)$, d'où 0 est dispersé à droite.*

*Ainsi*

$$\rho(0) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < 0\} = 0.$$

*Alors 0 n'est pas dispersé à gauche.*

**Exemple 1.1.4.** *Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \{\sqrt{2n+1},\ n \in \mathbb{N}^*\}$. On a $t = \sqrt{2n+1}$ pour tout $n \geq 2$, donc $n = \frac{t^2-1}{2}$, alors*

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}, \\
&= \inf\{l \in \mathbb{N}^* : \sqrt{2l+1} > \sqrt{2n+1}\} = \sqrt{2n+3}, \\
&= \sqrt{t^2+2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,
\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}, \\
&= \sup\{l \in \mathbb{N}^* : \sqrt{2l+1} < \sqrt{2n+1}\} = \sqrt{2n-1}, \\
&= \sqrt{t^2-2}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

*Donc nous avons $t < \sigma(t)$, et $\rho(t) < t$, d'où $t$ est isolée.*

*Pour $n = 1$, alors $t = \sqrt{3}$ on a :*

$$\sigma(\sqrt{3}) = \inf\{s \in \mathbb{N}^* : \sqrt{2s+1} > \sqrt{3}\} = \sqrt{5}.$$

*Donc nous avons $\sqrt{3} < \sigma(\sqrt{3})$, d'où $\sqrt{3}$ est dispersé à droite.*

*Ainsi*

$$\begin{aligned}\rho(\sqrt{3}) &= \sup\{s \in \mathbb{N}^* : \sqrt{2s+1} < \sqrt{3}\},\\ &= \sup \emptyset = \inf \mathbb{T},\\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

*Alors $\sqrt{3}$ n'est pas dispersé à gauche.*

**Définition 1.1.5.** *[7, 10] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on définit la fonction $f^\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$f^\sigma(t) = (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

*et la fonctions $f^\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$f^\rho(t) = (f \circ \rho)(t) = f(\rho(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

**Exemple 1.1.5.** *Soit $\mathbb{T} = \{t = 2^{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$ une échelle de temps et la fonction définie sur $\mathbb{T}$ par :*

$$f(t) = t^2 + t - 1\ , \qquad \textit{pour tout } \ t \in \mathbb{T}.$$

*Alors*

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf\left\{2^{l+2} : 2^{l+2} > 2^{n+2}, l \in \mathbb{N}\right\},\\ &= 2^{n+3}\\ &= 2t, \qquad \textit{pour tout } \ t \in \mathbb{T}.\end{aligned}$$

*Donc*

$$\begin{aligned}f^\sigma(t) &= f(\sigma(t))\\ &= (\sigma(t))^2 + (\sigma(t)) - 1\\ &= (2t)^2 + 2t - 1\\ &= 4t^4 + 2t - 1, \qquad t \in \mathbb{T}.\end{aligned}$$

**Définition 1.1.6.** *[7, 10] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps.*

*i/ Si $\mathbb{T}$ admet un maximum $M$ dispersé à gauche, alors on définit l'ensemble $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

*ii/ Si $\mathbb{T}$ admet un minimum $m$ dispersé à droite, alors on définit l'ensemble $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, sinon $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.*

**Exemple 1.1.6.** *Soit $\mathbb{T} = ]-\infty, 0[\cup\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ une échelle de temps.*
*On a : $\sup \mathbb{T} = 6$, alors*

$$\rho(\sup \mathbb{T}) = \rho(6) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < 6\} = 5,$$

*donc $\rho(6) < 6$. D'où*

$$\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{6\} = ]-\infty, 0[\cup\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

## 1.2 Différentiabilité sur les échelles de temps

**Définition 1.2.1.** *[7, 10] Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, on dira que $f$ est $\Delta$_différentiable en $t$, s'il existe un nombre $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V$ de $t$ où :*

$$|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in V.$$

*On appelle $f^\Delta(t)$ la $\Delta$_dérivée de $f$ en $t$, si $f$ est $\Delta$_différentiable en $t$ pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^\Delta : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée la $\Delta$_dérivée de $f$ sur $\mathbb{T}^k$.*

**Exemple 1.2.1.** *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(t) = 6t^2$.*
*Montrons que $f^\Delta(t) = 6\sigma(t) + 6t$.*
*Soit $s \in V_t = ]t - \delta, t + \delta[\cap\mathbb{T}$ et $t \in \mathbb{T}^k$,*

$$\begin{aligned}
|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| &= |6\sigma(t)^2 - 6s^2 - 6(\sigma(t) + t)(\sigma(t) - s)| \\
&= |6(\sigma(t) - s)(\sigma(t) + s) - 6(\sigma(t) + t)(\sigma(t) - s)| \\
&= |6(\sigma(t) - s)(s - t)|.
\end{aligned}$$

*Donc*

$$\begin{aligned}|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| &\leq 6\delta(\sigma(t) - s) \\ &\leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \qquad \text{avec } \ \varepsilon = 6\delta.\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.2.** *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(t) = \alpha$.*
*Montrons que $f^\Delta(t) = 0$.*
*Soit $s \in V_t = ]t - \delta, t + \delta[\cap\mathbb{T}$ et $t \in \mathbb{T}^k$, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\begin{aligned}|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| &= |\alpha - \alpha| \\ &\leq \varepsilon|\sigma(t) - s|.\end{aligned}$$

**Théorème 1.2.1.** *[7, 10] Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$.*

*i/ Si $f$ est $\Delta$_différentiable en $t$, alors $f$ est continue en $t$.*

*ii/ Si $f$ est continue en $t$ et $t$ est dispersé à droite, alors $f$ est $\Delta$_différentiable en $t$ et*

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.1}$$

*iii/ Si $t$ est dense à droite, alors $f$ est $\Delta$_différentiable en $t$ si et seulement si*

$$\lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

*existe et finie.*

*Dans ce cas,*

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}. \tag{1.2}$$

*iv/ Si $f$ est $\Delta$_différentiable en $t$, alors*

$$f^\sigma(t) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

**Exemple 1.2.3.**

1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors on a $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}$, et pour $t \in \mathbb{T}^k$, le point $t$ est dense à droite. D'où*

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

*2. Si $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{T}^k=\mathbb{Z}$, et pour $t\in\mathbb{T}^k$, le point $t$ est isolé. On a*

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t),$$

*où $\Delta$ est l'opérateur de différence.*

**Théorème 1.2.2.** *[7, 10] Si $f,g:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ sont $\Delta$_différentiables en $t\in\mathbb{T}^k$, alors*

*i/ $f+g$ est $\Delta$_différentiable en $t$ et*

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t).$$

*ii/ Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha f$ est $\Delta$_différentiable en $t$ et*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t).$$

*iii/ $f.g$ est $\Delta$_différentiable en $t$ et*

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t). \tag{1.3}$$

*iv/ Si $g(t)g^{\sigma}(t)\neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est $\Delta$_différentiable en $t$*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g^{\sigma}(t)g(t)}.$$

**Exemple 1.2.4.** *Soit $f,g,h:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ sont $\Delta$_différentiables en $t\in\mathbb{T}^k$.*
*Alors*

$$\begin{aligned}(fgh)^{\Delta}(t)&=((fg)\,h)^{\Delta}(t)\\&=(fg)^{\Delta}(t)h(t)+(fg)(\sigma(t))h^{\Delta}(t)\\&=\left(f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\right)h(t)+f^{\sigma}(t)g^{\sigma}(t)h^{\Delta}(t)\\&=f^{\Delta}(t)g(t)h(t)+f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)h(t)+f^{\sigma}(t)g^{\sigma}(t)h^{\Delta}(t).\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.5.** *Soit $f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie par $f(t)=t^2$ pour tout $t\in\mathbb{T}$.*
*Soit $g$ une autre fonction définie par : $g(t)=t$.*

*Alors*

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) = (gg)^{\Delta}(t) &= g^{\Delta}(t)g(t) + g(\sigma(t))g^{\Delta}(t) \\ &= 1.t + \sigma(t).1 \\ &= t + \sigma(t). \end{aligned}$$

**Définition 1.2.2.** *[7, 10] Une fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite rd_continue, si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*
*On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ rd_continue sur $\mathbb{T}$ par :*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

*et l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Delta$_ différentiables et ses dérivées rd_continues sur $\mathbb{T}^k$ par :*

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

**Définition 1.2.3.** *[7, 10] Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite régulière, si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$, et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

**Théorème 1.2.3.** *[7, 10] Soient $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, alors on a :*

*i/ Si $f$ est continue, alors $f$ est rd_continue.*

*ii/ Si $f$ est rd_continue, alors $f$ est régulière.*

*iii/ L'opérateur de saut avant $\sigma$ est rd_continue.*

*iv/ Si $f$ est régulière, alors $f^{\sigma}$ est régulière.*

*v/ Si $f$ est rd_continue et $g$ continue, alors $g \circ f$ est rd_continue.*

*vi/ Si $f$ est régulière et $g$ continue, alors $g \circ f$ est régulière.*

**Notation 1.2.1.** *[7, 10] On note par :*
$\sigma^n(t) = \sigma(\sigma^{n-1}(t)), \quad \rho^n(t) = \rho(\rho^{n-1}(t)), \quad$ *et* $\mathbb{T}^{k^n} = (\mathbb{T}^{k^{n-1}})^k, \quad$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
*Par convention, on supposera que : $\sigma^0(t) = \rho^0(t) = t$ et $\mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$.*

**Définition 1.2.4.** *[7, 10] Une fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite deux fois dérivable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, si sa dérivée $f^{\Delta}$ est différentiable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, et on note la dérivée second de $f$*

*par :*

$$\begin{aligned} f^{\Delta^2} : \mathbb{T}^{k^2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow f^{\Delta^2}(t) = (f^{\Delta})^{\Delta}(t). \end{aligned}$$

*Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit la dérivée d'ordre* $n$ *de* $f$ *sur* $\mathbb{T}^{k^n}$ *par :*

$$f^{\Delta^n} = (f^{\Delta^{n-1}})^{\Delta}.$$

*On notera l'ensemble des fonctions* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui sont* $n$ *fois différentiables et* $f^{\Delta^n}$ *rd_continues sur* $\mathbb{T}^{k^n}$ *par :*

$$C^n_{rd} = C^n_{rd}(\mathbb{T}) = C^n_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

**Exemple 1.2.6.** *Soit l'échelle de temps* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *avec* $h > 0$ *et* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* $\Delta$*_différentiable.*
*On a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \{nh : n \in \mathbb{Z}\} \ , \\ &= \{\cdots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \cdots\}. \end{aligned}$$

*On a aussi :*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= inf\{s \in \mathbb{T} \quad s > t\} \\ &= (n+1)h \\ &= nh + h \\ &= t + h. \end{aligned}$$

*Alors*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

*et*

$$
\begin{aligned}
f^{\Delta^2}(t) = (f^{\Delta})^{\Delta}(t) &= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(s)}{t+h-s} \\
&= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)-f(s+h)+f(s)}{h}}{t+h-s} \\
&= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}.
\end{aligned}
$$

**Théorème 1.2.4.** *[7, 10] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\Delta$_différentiable, alors $f \circ g$ est $\Delta$_différentiable et on a :*

$$
(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t).
$$

**Exemple 1.2.7.** *On définit les fonctions $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$
g(t) = t^2 \qquad et \qquad f(t) = \exp(t).
$$

*On a :*

$$
g^{\Delta}(t) = (t+1)^2 - t^2 = 2t+1 \ et \ f'(t) = \exp(t).
$$

*Alors*

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)^{\Delta}(t) &= \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t) \\
&= (2t+1) \int_0^1 \exp(t^2 + h(2t+1))dh \\
&= (2t+1) \exp(t^2) \int_0^1 \exp(h(2t+1))dh \\
&= \exp(t^2) \left[\exp(h(2t+1))\right]_0^1 \\
&= \exp(t^2)(\exp(2t+1) - 1).
\end{aligned}
$$

*D'autre part, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
\Delta f(g(t)) &= f(g(t+1)) - f(g(t)) \\
&= \exp((t+1)^2) - \exp(t^2) \\
&= \exp(t^2 + 2t + 1) - \exp(t^2) \\
&= \exp(t^2)(\exp(2t+1) - 1).
\end{aligned}
$$

## 1.3 Intégration sur les échelles de temps

**Définition 1.3.1.** *[7, 10] Une fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est pré-différentiable sur un domaine de différentiabilité $D$, tel que $D \subset \mathbb{T}^k$, avec $\mathbb{T}^k \backslash D$ est un ensemble dénombrable et ne contenant pas des points dispersés à droite de $\mathbb{T}$ et $f$ est $\Delta$_différentiable pour tout $t \in D$.*

Le théorème suivant garantit l'existence de pré-antidérivée.

**Théorème 1.3.1.** *[7, 10](L'existence de pré-antidérivée). Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière, alors il existe une fonction $F$ pré-différentiable avec un domaine de différentiabilité $D$ telle que*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \text{pour tout} \quad t \in D.$$

**Définition 1.3.2.** *[7, 10] Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. Alors toute fonction $F$ donnée par le théorème 1.3.1 s'appelle pré-antidérivée de $f$.*
*Nous définissons :*

1. *L'intégrale indéfinie d'une fonction régulière $f$ par :*

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

   *où $C$ est une constante.*

2. *L'intégrale de Cauchy d'une fonction régulière $f$ par :*

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r), \quad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{T}.$$

**Définition 1.3.3.** *[7, 10] Une fonction $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée antidérivée de $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ si*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

**Exemple 1.3.1.** *Soient $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}}$ , $f(t) = 7t^2 - 9t - 1$ et $g(t) = t^3 - 3t^2 - t + 4$. Montrons que $g^{\Delta}(t) = f(t)$, comme $\sigma(t) = 2t$, et $\mu(t) = t$.*

*D'après la propriété* (1.1) *du théorème* 1.2.1 *en déduit que*

$$\begin{aligned} g^{\Delta}(t) &= \tfrac{g(\sigma)(t)-g(t)}{\mu(t)} \\ &= \tfrac{(2t)^3-3(2t)^2-2t+4-t^3+3t^2+t-4}{t} \\ &= \tfrac{7t^3-9t^2-t}{t} \\ &= 7t^2-9t-1 = f(t). \end{aligned}$$

*Alors*

$$\int f(t)\Delta t = g(t), \qquad t \in \mathbb{T}.$$

**Théorème 1.3.2.** *[7, 10] Chaque fonction rd_continue a une antidérivée, en particulier si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors $F$ est une antidérivée de $f$ telle que :*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\Delta s, \quad \textit{avec } t \in \mathbb{T}.$$

Le théorème suivant fournit plusieurs propriétés élémentaires de la delta intégrale.

**Théorème 1.3.3.** *[7, 10] Soient $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

1. $\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$
2. $\int_a^b (\alpha f(t))\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t.$
3. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$
4. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$
5. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$
6. *Si $|f(t)| \leq |g(t)|$ sur $[a, b[$, alors*

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b |g(t)|\Delta t.$$

7. *Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b] \cap \mathbb{T}$, alors* $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

**Théorème 1.3.4.** *[7, 10] Soient $a, b \in \mathbb{T}$ et $f, g \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

1. $\int_a^b f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t.$
2. $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

**Définition 1.3.4.** *[7, 10] Supposons que* $\sup \mathbb{T} = \infty$, *alors l'intégrale impropre de* $f$ *est définie par :*

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{b \longrightarrow \infty} \int_a^b f(t)\Delta t.$$

**Théorème 1.3.5.** *[7, 10] Soient* $a, b \in \mathbb{T}$ *et* $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

*i/ Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt,$$

*où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.*

*ii/ Si* $[a, b] \cap \mathbb{T}$ *ne contient que les points isolés, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t \in [a,b[} \mu(t) f(t).$$

*iii/ Soient* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tel que* $b > a$, *et* $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t=a}^{t=b-1} f(t).$$

*iv/ Soient* $a, b \in h\mathbb{Z}$ *tel que* $b > a$, *et* $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{k=\frac{b}{h}-1} h f(kh).$$

**Exemple 1.3.2.** *Soit* $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$, *où* $q > 1$, *alors*

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\Delta t &= \lim_{b \longrightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{t^2}\Delta t \\
&= \lim_{b \longrightarrow \infty} \sum_{t \in [1,b[} \frac{\mu(t)}{t^2} \\
&= \lim_{b \longrightarrow \infty} \sum_{t \in [1,b[} \frac{t(q-1)}{t^2} \\
&= \lim_{b \longrightarrow \infty} (q-1) \sum_{t \in [1,b[} t^{-1} \\
&= (q-1) \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n-1} q^{-k} \\
&= (q-1) \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[ \frac{1 - q^{1-n}}{1 - \frac{1}{q}} \right] \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} q \left( 1 - \frac{1}{q^{n-2}} \right) \\
&= q.
\end{aligned}$$

**Exemple 1.3.3.** *Soit $a \in \mathbb{T}$, où $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $f(t) = 1$ est une fonction. Supposons que $a < t$, alors pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} \int_a^t f(s)\Delta s &= \int_a^t f(s)ds \\ &= [s]_a^t \\ &= t - a. \end{aligned}$$

## 1.4 Quelques espaces fonctionnels sur les échelles de temps

### 1.4.1 L'intégrale de Lebesgue sur les échelles de temps

Dans cette partie, nous définissons une théorie de la mesure et l'intégration pour les échelles de temps $\mathbb{T}$ bornées où $a := \min \mathbb{T}$ et $b := \max \mathbb{T}$.

**Définition 1.4.1.** *[2] Soit $\mathcal{F}_1$ une famille d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite de $\mathbb{T}$ de la forme*

$$[c, d) = \{t \in \mathbb{T} : c \leq t < d\}.$$

*Où $c, d \in \mathbb{T}$ et $c \leq d$.*

**Définition 1.4.2.** *[3] On définit une mesure additive $m_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$ par*

$$m_1\left([c, d)\right) = d - c.$$

*Une mesure extérieure $m_1^* : \mathcal{P}\left(\mathbb{T}\right) \to \mathbb{R}$ est définie par :*
*pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{T}$*

$$m_1^*\left(E\right) = \begin{cases} \inf\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} m\left(A_k\right) : E \subset \bigcup_{k=1}^{k=m} A_k \text{ avec } A_k \in \mathcal{F}_1\right\} & si \quad b \notin E, \\ +\infty & si \quad b \in E. \end{cases}$$

**Définition 1.4.3.** *[3] Un ensemble $A \subset \mathbb{T}$ est $\Delta$_mesurable si la relation*

$$m_1^*\left(E\right) = m_1^*\left(E \cap A\right) + m_1^*\left(E \cap \left(\mathbb{T}\backslash A\right)\right),$$

*est vérifiée pour tout ensemble $E \subset \mathbb{T}$.*

Maintenant, on considère la famille

$$\mathcal{M}(m_1^*) = \{A \subset \mathbb{T} : A \text{ est } \Delta - \text{mesurable}\},$$

et la mesure $\mu_\Delta$ comme étant la restriction de $m_1^*$ sur l'ensemble $\mathcal{M}(m_1^*)$.

Nous présentons plusieurs concepts de la mesure générale et de l'intégration, appliqués à l'espace mesurable complet avec le triplet $(\mathbb{T}, \mathcal{M}(m_1^*), \mu_\Delta)$. Cet espace mesuré est utilisé pour définir la $\Delta$_mesurabilitéé et la $\Delta$_intégrabilité des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

**Lemme 1.4.1.** *[26] L'ensemble de tous les points dispersés à droit de $\mathbb{T}$ est dénombrable, c'est-à-dire, il existe $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{T}$ tels que*

$$\mathcal{R} := \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) > t\} = \{t_i\}_{i\in I}. \tag{1.4}$$

Pour $E \subset \mathbb{T}$, nous définissons

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap \mathcal{R}\},$$

avec $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{T}$.

Voici une correspondance intéressante qui existe entre la mesure $\mu_\Delta$ sur $\mathbb{T}$ et la mesure de Lebesgue $\mu_L$ sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.4.1.** *[3] Soit $A \subset \mathbb{T}$. Alors $A$ est $\Delta$_mesurable si et seulement si $A$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, si $b \notin A$, nous avons la propriété suivante*

$$\mu_\Delta(A) = \sum_{i\in I_E} (\sigma(t_i) - t_i) + \mu(A).$$

Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, nous avons besoin d'une fonction auxiliaire qui prolonge $\widetilde{f}$ à l'intervalle $[a,b]$, $\widetilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\widetilde{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in \mathbb{T}, \\ f(t_i) & \text{si } t \in (t_i, \sigma(t_i)), \text{ pour } i \in I. \end{cases} \tag{1.5}$$

**Proposition 1.4.1.** *[2] Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}$ son extention sur $[a,b]$. Alors, $f$ est $\Delta$_mesurable si et seulement si, $\widetilde{f}$ est mesurable au sens de Lebesgue.*

Le théorème suivant donne une formule pour calculer Lebesgue $\Delta$_intégrale.

**Théorème 1.4.2.** *[2] Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta$_mesurable tel que $b \notin E$ et $\widetilde{E} = E \cup \left( \bigcup_{i \in I_E} (t_i, \sigma(t_i)) \right)$. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta$_intégrable, alors*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_E f(s)ds + \sum_{i \in I_E} \mu(t_i) f(t_i).$$

## 1.4.2 Espace des fonctions continues sur les échelles de temps

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et soient $a, b \in \mathbb{T}$ tel que $a < b$, on définit l'intervalle $[a, b]_{\mathbb{T}}$ dans $\mathbb{T}$ par :

$$[a, b]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\},$$

par conséquent

$$[a, b]_{\mathbb{T}}^k = [a, \rho(b)]_{\mathbb{T}}.$$

L'ensemble des fonctions $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont $rd$_continues (respectivement continues) sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ est noté par $C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}})$(respectivement $C([a, b]_{\mathbb{T}})$).

**Remarque 1.4.1.** *[4] Les espaces $C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}})$ et $C([a, b]_{\mathbb{T}})$ sont des espaces de Banach avec la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]_{\mathbb{T}}} |f(t)|.$$

*Par la suite, on notera $C_{rd}^k([a, b]_{\mathbb{T}})$ l'ensemble des fonctions n fois $\Delta$_différentiables sur $[a, b]_{\mathbb{T}}^{k^n}$ tel que $f^{\Delta^n}$ est rd_ continue sur $[a, b]_{\mathbb{T}}^{k^n}$. Cet espace est muni de la norme*

$$\|f\|_{[a,b]_{\mathbb{T}}^{k^n}} = \max\{\|f\|_\infty, \|f^\Delta\|_\infty, ..., \|f^{\Delta^n}\|_\infty\}.$$

**Proposition 1.4.2.** *[4] L'espace $C_{rd}^k([a, b]_{\mathbb{T}})$ est un espace de Banach.*
*On désigne par $C_c([a, b]_{\mathbb{T}})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ à support compact, c'est-à-dire :*

$$C_c([a, b]_{\mathbb{T}}) := \{f \in C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}}) : f(t) = 0, \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \backslash K \quad \textit{où} \quad K \quad \textit{est un compact}\}.$$

**Remarque 1.4.2.** *[4] L'espace $C_c([a, b]_{\mathbb{T}})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\infty$.*

### 1.4.3 Les espaces de Lebesgue $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$

**Définition 1.4.4.** *[4] Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $E \subseteq \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta$_mesurable, on pose :*

$$L^p_\Delta(E,\mathbb{R}) := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est } \Delta\_\text{mesurable et } \int_E |f|^p \Delta t < \infty\}.$$

*On définit la norme sur $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ par :*

$$\|f\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} := \left(\int_\mathbb{T} |f|^p \Delta t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Théorème 1.4.3.** *[25] Soit $p \in [1,+\infty[$. Alors l'ensemble $L^p_\Delta([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme $\|.\|_{L^p_\Delta([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}$.*

**Théorème 1.4.4.** *[4](Inégalité de Minkowski). Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g$ des fonctions de $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors on a :*

$$\|f+g\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

**Théorème 1.4.5.** *[4] (Inégalité de Hölder). Soient $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $g \in L^q_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ tel que $q$ est le conjugué de $p$, alors $f.g \in L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et on a :*

$$\|f.g\|_{L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}\|g\|_{L^q_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

**Théorème 1.4.6.** *[4] Soit $p \in [1,+\infty[$, $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}$.*

**Corollaire 1.4.1.** *[4] L'ensemble $L^2_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(\varphi,\psi) = \int_{[a,b]\cap\mathbb{T}} \varphi(t)\psi(t)\Delta t.$$

**Théorème 1.4.7.** *[4] L'ensemble $L^\infty_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|f\|_{L^\infty_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \inf\{C : |f(t)|^p \leq C\ \Delta\_p.p. \text{ sur } \mathbb{T}\}.$$

### 1.4.4 Espace de Sobolev $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps compacte, on note $\mathbb{T}_0 := \mathbb{T}\backslash\{\max \mathbb{T}\}$.

**Définition 1.4.5.** *[23] On dira qu'une fonction $u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'ensemble $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, si est seulement si $u \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et il existe une fonction $g : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g \in L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et*

$$\int_{\mathbb{T}_0} u(s)\phi^{\Delta}(s)\Delta s = -\int_{\mathbb{T}_0} g(s)\phi^{\sigma}(s)\Delta s, \quad \textit{pour tout } \phi \in C_{0,rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R}), \tag{1.6}$$

*où*

$$C_{0,rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R} : f \in C_{rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R}), f(a) = f(b) = 0\}.$$

**Théorème 1.4.8.** *[23] L'ensemble $W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_{W_{\Delta}^{1,p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \|u\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|u^{\Delta}\|_{L_{\Delta}^{p}(\mathbb{T}^k,\mathbb{R})}.$$

*D'ailleurs, l'ensemble $H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T}) := W_{\Delta}^{1,2}(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire tel que :*

$$(\varphi,\psi)_{H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T})} = (\varphi,\psi)_{L_{\Delta}^{2}(\mathbb{T})} + (\varphi^{\Delta},\psi^{\Delta})_{L_{\Delta}^{2}(\mathbb{T}^k)}, \quad \textit{pour tout } \ (\varphi,\psi) \in H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T}) \times H_{\Delta}^{1}(\mathbb{T}).$$

# Chapitre 2

# Calcul fractionnaire conformable

## 2.1 Introduction

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des nations de dérivation et d'intégration á des ordres non entiers.
Il existe plusieurs définitions de la dérivation d'ordre non entier ( On a par exemple : Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Weyl, Caputo, Marchaud, et Riesz ([27]), on donne seulement les deux dérivées fractionnaires suivantes :

**Définition 2.1.1.** *[22](Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville )*
*Soient $f \in C([a,b],\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in [n-1,n)$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ de la fonction $f$ est définie par :*

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dx.$$

**Définition 2.1.2.** *[22](Dérivée fractionnaire au sens de Caputo)*
*Soient $f \in C^n([a,b],\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in [n-1,n)$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ de la fonction $f$ est définie par :*

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dx.$$

**Remarque 2.1.1.** *[21]*

1. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ne satisfait $\mathcal{D}_a^{\alpha}(1) = 0$ ( $\mathcal{D}_a^{\alpha}(1) = 0$ pour la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ) si $\alpha$ n'est pas un nombre naturel.*

2. *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle de produit :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha(fg) = f\mathcal{D}_a^\alpha(g) + g\mathcal{D}_a^\alpha(f).$$

3. *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle de quotient :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathcal{D}_a^\alpha(f) - f\mathcal{D}_a^\alpha(g)}{g^2}.$$

4. *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle de la composée :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha(f \circ g) = f^{(\alpha)}(g)g^\alpha.$$

5. *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas : $\mathcal{D}^{\alpha+\beta}f = \mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta f$ en général.*

## 2.2 Calcul fractionnaire conformable

Dans cette section , nous donnons une nouvelle définition de dérivée fractionnaire et intégrale fractionnaire.

### 2.2.1 Dérivée fractionnaire conformable

**Définition 2.2.1.** *[21] Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ , et $\alpha \in ]0,1]$. La dérivée fractionnaire conformable de $f$ d'ordre $\alpha$ est définie par :*

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

*pour tout $t > 0$.*

1. *On note : $\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = f^{(\alpha)}(t)$.*
2. *Si $f$ est existe et finie, on dit que $f$ est $\alpha$_différentiable en $t$.*
3. *Si $f$ est $\alpha$_différentiable dans l'intervalle $]0,a[$, $a > 0$, et $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ existe, alors la dérivée fractionnaire conformable de $f$ d'ordre $\alpha$ en $t = 0$ est définie comme :*

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \longrightarrow 0} f^{(\alpha)}(t).$$

**Proposition 2.2.1.** *[9] Soient $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, $\alpha \in ]0,1]$. Si $f$ est différentiable en $t > 0$, alors on a :*

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha}f'(t).$$

*Démonstration.*

Soient $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \ \alpha \in ]0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon t^{1-\alpha}} t^{1-\alpha} \\ &= f^{'}(t) t^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.2.1.** *[9] Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*a) $f$ est différentiable.*

*b) $f$ est $\alpha$_différentiable pour $0 < \alpha \leq 1$.*

*Démonstration.*

*a)* $\Rightarrow$ *b)*

Supposons que $f$ est différentiable, donc d'après la proposition 2.2.1, nous avons

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} f^{'}(t).$$

ie., $f$ est $\alpha$_différentiable.

*b)* $\Rightarrow$ *a)*

Si $f$ est $\alpha$_différentiable, alors $f^{'}(t) = t^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(t)$. D'où $f$ est différentiable. □

**Exemple 2.2.1.** *[21] Soit $t > 0$. Alors on a les dérivées fractionnaires conformables de certains fonctions suivantes :*

1. *$(t^p)^{(\alpha)} = pt^{p-\alpha}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

   *Pour tout $t > 0$, on a d'après la définition 2.2.1, on trouve*

$$\begin{aligned} (t^p)^{(\alpha)} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^p - (t)^p}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{p} C_p^i (\varepsilon t^{1-\alpha})^{p-i} t^i - t^p}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\varepsilon t^{1-\alpha})^p + ... + \frac{1}{2} p(p-1) t^{p-2} (\varepsilon t^{1-\alpha})^2 + pt^{p-1} \varepsilon t^{1-\alpha} + t^p - t^p}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\varepsilon t^{1-\alpha})^p + ... + \frac{1}{2} p(p-1) t^{p-2} (\varepsilon t^{1-\alpha})^2}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{pt^{p-1} \varepsilon t^{1-\alpha}}{\varepsilon} \\ &= 0 + pt^{p-1} t^{1-\alpha} \\ &= pt^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

*Où,* $C_p^i = \dfrac{p!}{i!(p-i)!}$.

2. $(\lambda)^{(\alpha)} = 0$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $(e^{pt})^{(\alpha)} = pt^{1-\alpha}e^{pt}$, *et* $(e^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}})^{(\alpha)} = pe^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}}$, *pour tout* $p \in \mathbb{R}$.

4. $(\cos(bt))^{\alpha} = -bt^{1-\alpha}\sin(bt), \ \forall b \in \mathbb{R}$.

**Remarque 2.2.1.** *[5] La fonction* $x : t \to (e^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}}), \ p \in \mathbb{R}$ *est une solution unique d'équation différentielle fractionnaire conformable.*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = px(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

*Soit* $x(t) = e^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}}$, *alors d'après la proposition 2.2.1 et le théorème 2.2.1, on obtient*

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t) &= (e^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}})^{(\alpha)} \\ &= t^{1-\alpha}\frac{\alpha p t^{\alpha-1}}{\alpha}e^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}} \\ &= pe^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}} \\ &= px(t). \end{aligned}$$

**Définition 2.2.2.** *[21] Soient* $\alpha \in ]n, n+1]$, *et* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est n_différentiable en* $t > 0$. *Alors la dérivée fractionnaire conformable de* $f$ *d'ordre* $\alpha$ *est définie par :*

$$\mathcal{T}_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon}.$$

*Où* $\lceil \alpha \rceil$ *: est la partie entière de* $\alpha$.

**Remarque 2.2.2.** *[21] En conséquence de la définition 2.2.2, on peut facilement montrer que*

$$\mathcal{T}_{\alpha}(f)(t) = t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} f^{(\lceil \alpha \rceil)}(t).$$

*Où,* $\alpha \in ]n, n+1]$ *et* $f$ *est* $(n+1)$*_différentiable en* $t > 0$.

**Théorème 2.2.2.** *[9] Soit* $\alpha \in ]0, 1]$ *et on suppose que* $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *sont* $\alpha$*_différentiables en* $t > 0$. *Alors nous avons les propriétés suivantes :*

1. $(\xi f + \eta g)^{(\alpha)} = \xi f^{(\alpha)} + \eta g^{(\alpha)}$, *pour tout* $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

2. $(fg)^{(\alpha)} = fg^{(\alpha)} + gf^{(\alpha)}$.

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(\alpha)} = \dfrac{gf^{(\alpha)} - fg^{(\alpha)}}{g^2}$.

*Démonstration.*

1. D'après la définition 2.2.1, on obtient

$$
\begin{aligned}
(\xi f+\eta g)^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\xi f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+\eta g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-\xi f(t)-\eta g(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\xi f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-\xi f(t)}{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\eta g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-\eta g(t)}{\varepsilon}\\
&= \xi f^{(\alpha)}(t)+\eta g^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}
$$

2. D'après la définition 2.2.1, nous avons

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon}\right]\\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}.g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\right]+f(t).\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\\
&= f^{(\alpha)}(t).\lim_{\varepsilon\to 0}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+f(t)g^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}
$$

Puisque $g$ continue en $t$. Alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})=g(t)$.

3. D'après la proposition 2.2.1 et le théorème 2.2.1, on a

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(t)\\
&= t^{1-\alpha}\left(\frac{g(t)f^{'}(t)-f(t)g^{'}(t)}{g^2(t)}\right)\\
&= \frac{g(t)f^{(\alpha)}(t)-f(t)g^{(\alpha)}(t)}{g^2(t)}.
\end{aligned}
$$

□

**Exemple 2.2.2.** *Soit $f(t)=\sin(t)+6t^3$, trouver $(f(t))^{(\alpha)}$ et pour $\alpha=\frac{2}{3}$.*

*On a*

$$
\begin{aligned}
(f(t))^{(\alpha)} &= \left(\sin(t)+6t^3\right)^{(\alpha)}\\
&= (\sin(t))^{(\alpha)}+6\left(t^3\right)^{(\alpha)}\\
&= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\sin(t)+6t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}t^3\\
&= t^{1-\alpha}\left(\cos(t)+18t^2\right).
\end{aligned}
$$

*Pour* $\alpha = \frac{2}{3}$, *on a*

$$
\begin{aligned}
(f(t))^{(\frac{2}{3})} &= t^{1-\frac{2}{3}}\left(\cos(t) + 18t^2\right) \\
&= t^{\frac{1}{3}}\left(\cos(t) + 18t^2\right).
\end{aligned}
$$

**Théorème 2.2.3.** *[21] Si la fonction* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est* $\alpha$*_différentiable en* $t_0 > 0$, $\alpha \in ]0, 1]$ *alors* $f$ *est continue en* $t_0$.

*Démonstration.*

Nous avons $f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \dfrac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon}\varepsilon$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\left(f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon.
$$

Soit $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$, alors

$$
\lim_{h\to 0}(f(t_0 + h) - f(t_0)) = f^{(\alpha)}(t_0).0
$$

$$
\lim_{h\to 0} f(t_0 + h) = f(t_0).
$$

D'où $f$ est continue en $t_0$. $\square$

**Proposition 2.2.2.** *[3] Si* $x : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* $\alpha$*_différentiable en* $t \in [a, b]$*, alors*

$$
|x(t)|^{(\alpha)} = \frac{x(t)x^{(\alpha)}(t)}{|x(t)|}.
$$

*Démonstration.*

D'après la définition 2.2.1, nous avons

$$
\begin{aligned}
|x(t)|^{(\alpha)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|x(t + \varepsilon t^{1-\alpha})| - |x(t)|}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^2 - x(t)^2}{\varepsilon\left(|x(t + \varepsilon t^{1-\alpha})| + |x(t)|\right)} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^2 - x(t)^2}{\varepsilon}.\frac{1}{|x(t + \varepsilon t^{1-\alpha})| + |x(t)|}\right] \\
&= \left[x(t)^2\right]^{(\alpha)}.\frac{1}{2|x(t)|} \\
&= 2x(t)x^{(\alpha)}(t)\frac{1}{2|x(t)|} \\
&= \frac{x(t)x^{(\alpha)}(t)}{|x(t)|}.
\end{aligned}
$$

$\square$

### 2.2.2 Intégrale fractionnaire conformable

**Définition 2.2.3.** *[21] Soient* $\alpha \in ]0,1[$, $a \geq 0$ *et* $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

*L'intégrale fractionnaire conformable de* $f$ *d'ordre* $\alpha$ *de* $a$ *vers* $t$ *définie par :*

$$\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f)(t) := \mathcal{I}_{1}^{a}(t^{\alpha-1}f)(t) = \int_{a}^{t} f(s)d_{\alpha}s := \int_{a}^{t} f(s)s^{\alpha-1}ds.$$

*L'intégrale considérée est l'intégrale impropre usuelle de Riemann.*

**Théorème 2.2.4.** *[15] Soient* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions différentiables. Alors on a*

$$\int_{a}^{b} f(t)g^{(\alpha)}(t)d_{\alpha}t = (fg)(t)|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} g(t)f^{(\alpha)}(t)d_{\alpha}t.$$

*Démonstration.*

D'après la propriété (2) du théorème 2.2.2 ce qui implique que

$$f(t)g^{(\alpha)}(t) = (fg)^{(\alpha)}(t) - g(t)f^{(\alpha)}(t).$$

Par passage à l'intégration, sur $[a, b]$

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(t)g^{(\alpha)}(t)d_{\alpha}t &= \int_{a}^{b}(fg)^{(\alpha)}(t)d_{\alpha}t - \int_{a}^{b} g(t)f^{(\alpha)}(t)d_{\alpha}t \\ &= (fg)(t)|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} g(t)f^{(\alpha)}(t)d_{\alpha}t.\end{aligned}$$

□

**Notation 2.2.1.** *Soit* $0 < a < b$, *on note par* ${}_{\alpha}\mathcal{J}_{a}^{b}[f]$ *la valeur de l'intégrale* $\int_{a}^{b} f(t)t^{\alpha-1}dt$, *comme*

$${}_{\alpha}\mathcal{J}_{a}^{b}[f] = \mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f)(b).$$

**Proposition 2.2.3.** *[3] Soit* $0 < a < b$. *On suppose que* $f \in L^{1}([a, b], \mathbb{R})$, *alors* $|{}_{\alpha}\mathcal{J}_{a}^{b}[f]| \leq {}_{\alpha}\mathcal{J}_{a}^{b}[|f|]$.

*Démonstration.* Soit $f \in L^{1}([a, b], \mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned}\left|{}_{\alpha}\mathcal{J}_{a}^{b}[f]\right| &= \left|\int_{a}^{b} f(t)t^{\alpha-1}dt\right| \\ &\leq \int_{a}^{b} \left|f(t)t^{\alpha-1}\right| dt = \int_{a}^{b} |f(t)|t^{\alpha-1}dt.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|{}_{\alpha}\mathcal{J}_{a}^{b}[f]| \leq {}_{\alpha}\mathcal{J}_{a}^{b}[|f|].$$

□

**Théorème 2.2.5.** *[21, 19] Soit $0 < \alpha \leq 1$, et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur le domaine de $\mathcal{I}_\alpha^a$ alors pour tout $t \geq a$ on a :*

$$(\mathcal{I}_\alpha^a(f))^{(\alpha)}(t) = f(t).$$

*Démonstration.*

Soit $0 < \alpha \leq 1$, et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_\alpha^a(f))^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}(\mathcal{I}_\alpha^a(f))(t) \\
&= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t f(s)s^{\alpha-1}ds \\
&= t^{1-\alpha}f(t)t^{\alpha-1} \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

□

**Théorème 2.2.6.** *[3] Si $g \in L^1([a,b])$ alors la fonction $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$x(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^\alpha}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + \ _\alpha\mathcal{J}_a^t\left[g(s)e^{\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^\alpha}\right]\right). \tag{2.1}$$

*est une solution du problème*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \frac{1}{a^\alpha}x(t) = g(t), \ t \in [a,b], \ a > 0, \\ x(a) = x_0. \end{cases}$$

*Démonstration.*

Soit $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par (2.1) . D'après la proposition 2.2.1 et les théorèmes 2.2.2, 2.2.5 nous obtenons

$$\begin{aligned}
x^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha \alpha t^{\alpha-1}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^\alpha}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + \ _\alpha\mathcal{J}_a^b\left[g(s)e^{\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^\alpha}\right]\right) + e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^\alpha}\left(\frac{g(t)}{e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^\alpha}}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^\alpha}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + \ _\alpha\mathcal{J}_a^b\left[g(s)e^{\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^\alpha}\right]\right) + g(t) \\
&= -\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha x(t) + g(t).
\end{aligned}$$

Donc,

$$x(a) = e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{a}{a})^\alpha}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + \ _\alpha\mathcal{J}_a^a\left[g(s)e^{\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^\alpha}\right]\right) = e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + 0\right) = x_0.$$

□

**Définition 2.2.4.** *[5, 6] Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Une propriété $\mathcal{P}$ est dite presque partout (p.p) sur $E$ ou presque pour tout (p.p.t) $t \in E$ s'il existe un ensemble $B \subset E$ négligeable tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $E \backslash B$.*

**Définition 2.2.5.** *[5, 6] Soit $A$ ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue sur $I$. On dit que la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $\alpha$_intégrable sur $A$ si et seulement si $t^{\alpha-1}f(t)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $A$, et on note*

$$\int_A f(t)d_\alpha t = \int_A t^{\alpha-1}f(t)dt.$$

*ie., $d_\alpha t = t^{\alpha-1}dt$.*

## 2.3 Calcul fractoinnaire conformable sur les échelles de temps

On introduit quelques notions de $\Delta$_dérivée fractionnaire conformable d'ordre $\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ pour une fonction définie sur l'échelle de temps arbitraire $\mathbb{T}$.

**Définition 2.3.1.** *[8] (Delta dérivée fractionnaire conformable ).*
*Soient $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}^k$ et $\alpha \in ]0, 1]$. Pour $t > 0$, on appelle $\mathcal{U}_\alpha(f)(t)$ la $\Delta$_dérivée fractionnaire conformable de $f$ d'ordre $\alpha$ en $t$ le nombre $\mathcal{U}_\alpha(f)(t)$ (à condition qu'il existe) tel que :*
*pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta-$voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}$ de $t$ tel que $\delta > 0$ où,*

$$|(f^\sigma(t) - f(s))t^{1-\alpha} - \mathcal{U}_\alpha(f)(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{V}.$$

**Remarque 2.3.1.** *[25] Si $\alpha = 1$, et si $f$ admet une $\Delta$_dérivée fractionnaire conformable d'ordre $\alpha$ alors $\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = f^\Delta(t)$.*

**Notation 2.3.1.** *On note*

1. *$C^\alpha([a, b]_\mathbb{T}, \mathbb{R}) = \{f : [a, b]_\mathbb{T} \to \mathbb{R},\ f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ sur $[a, b]_\mathbb{T}$ et $\mathcal{U}_\alpha(f)(t) \in C([a, b]_\mathbb{T})\}$.*
2. *$C^\alpha_{rd}([a, b]_\mathbb{T}, \mathbb{R}) = \{f : [a, b]_\mathbb{T} \to \mathbb{R},\ f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ sur $[a, b]_\mathbb{T}$ et $\mathcal{U}_\alpha(f)(t) \in C_{rd}([a, b]_\mathbb{T})\}$.*

Certaines propriétés importantes de $\Delta$_dérivée fractionnaire conformable d'ordre $\alpha$ sont données dans le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** *[8] Soient $\alpha \in ]0,1]$, $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, alors on a les propriétés suivantes.*

*i/ Si $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$, alors $f$ est continue en $t$.*

*ii/ Si $f$ est continue en $t$ et $t$ est dispersé à droite, alors $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ et*

$$\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}. \tag{2.2}$$

*iii/ Si $t$ est dense à droite, alors $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ si et seulement si*

$$\lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha},$$

*existe et finie.*

*Dans ce cas,*

$$\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}. \tag{2.3}$$

*iv/ Si $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$, alors*

$$f^\sigma(t) = f(t) + \mu(t) t^{1-\alpha} \mathcal{U}_\alpha(f)(t).$$

**Exemple 2.3.1.** *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(t) = t^2$.*
*Pour $t$ est dispersé à droite, nous calculons $\mathcal{U}_\alpha(f)(t)$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\alpha(f)(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} \\ &= \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} t^{1-\alpha} \\ &= (\sigma(t) + t)\, t^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

*Et pour $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, on a*

$$\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = (2t + h) t^{1-\alpha}.$$

**Théorème 2.3.2.** *[8] Si $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

*i/ $f + g$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ et*

$$\mathcal{U}_\alpha(f + g)(t) = \mathcal{U}_\alpha(f)(t) + \mathcal{U}_\alpha(g)(t).$$

*ii/ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$*

*et*

$$\mathcal{U}_\alpha(\alpha f)(t) = \alpha\mathcal{U}_\alpha(f)(t).$$

*iii/* *$f.g$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ et*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\alpha(fg)(t) &= \mathcal{U}_\alpha(f)(t)g(t) + f^\sigma(t)\mathcal{U}_\alpha(g)(t) \\ &= f(t)\mathcal{U}_\alpha(g)(t) + \mathcal{U}_\alpha(f)(t)g^\sigma(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

*iv/* *Si $g(t)g^\sigma(t) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$*

$$\mathcal{U}_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{\mathcal{U}_\alpha(f)(t)g(t) - f(t)\mathcal{U}_\alpha(g)(t)}{g^\sigma(t)g(t)}. \tag{2.5}$$

**Exemple 2.3.2.** *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(t) = t^4$ pour tout $t \in \mathbb{T}$. Soit $g$ une autre fonction définie par : $g(t) = t^2$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\alpha(f)(t) &= \mathcal{U}_\alpha(gg)(t) \\ &= \mathcal{U}_\alpha(g)(t)g(t) + g^\sigma(t)\mathcal{U}_\alpha(g)(t) \\ &= t^{1-\alpha}(\sigma(t)+t)\,t^2 + (\sigma(t))^2(\sigma(t)+t)\,t^{1-\alpha} \\ &= t^{1-\alpha}((\sigma(t))^3 + (\sigma(t))^2 t + \sigma(t)t^2 + t^3). \end{aligned}$$

Maintenant, nous introduisons la $\Delta$_intégrale fractionnaire conformable (où $\Delta^\alpha$_intégrale fractionnaire) sur l'échelle de temps.

**Définition 2.3.2.** *[8] Soit $0 < \alpha \leq 1$, et $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. Alors la $\Delta^\alpha$_intégrale fractionnaire de $f$ est définie par : $\int f(t)\Delta^\alpha t = \int f(t)t^{\alpha-1}\Delta t$.*

**Définition 2.3.3.** *[8] Supposons $0 < \alpha \leq 1$, et $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. Alors la $\Delta^\alpha$_intégrale fractionnaire de $f$ comme :*

$$F(t) = \int f(t)\Delta^\alpha t.$$

*Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{T}$, on définit $\Delta^\alpha$_intégrale fractionnaire de Cauchy par :*

$$\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = F(b) - F(a).$$

**Définition 2.3.4.** *[8] Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction, $A$ est un sous-ensemble $\Delta^\alpha$_mesurable de $\mathbb{T}$. On dit que $f$ est $\Delta^\alpha$_intégrable sur $A$ si et seulement si $t^{\alpha-1}f(t)$ est intégrable sur $A$, et $\int_A f(t)\Delta^\alpha t = \int_A t^{\alpha-1}f(t)\Delta t$.*

**Théorème 2.3.3.** *[8] Soit $\alpha \in ]0,1]$. Alors, pour toute fonction rd-continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, il existe une fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{U}_\alpha(F)(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^k$. La fonction $F$ s'appelle $\Delta^\alpha$_antidérivée de $f$.*

**Théorème 2.3.4.** *[8] Soient $\alpha \in ]0,1]$ et $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g$ deux fonctions rd-continues, alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta^\alpha t = \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t + \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t.$
2. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t))\Delta^\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = -\int_b^a f(t)\Delta^\alpha t.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = \int_a^c f(t)\Delta^\alpha t + \int_c^b f(t)\Delta^\alpha t.$
5. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta^\alpha t = 0.$
6. *Si $|f(t)| \leq |g(t)|$ sur $[a,b[$, alors*
$$\left| \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t \right| \leq \int_a^b |g(t)|\Delta^\alpha t.$$
7. *Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]_\mathbb{T}$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t \geq 0.$

**Théorème 2.3.5.** *[8] Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction rd-continue et $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta^\alpha s = f(t)\mu(t)t^{\alpha-1}.$$

**Théorème 2.3.6.** *[25] Soit $p \in [1,+\infty[$. Alors l'ensemble $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme que définie pour $f \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T}, \mathbb{R})$ comme*

$$\|f\|_{L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\int_{[a,b]_\mathbb{T}} |f|^p \Delta^\alpha t\right)^{\frac{1}{p}} & p \in \mathbb{R}, \\ \inf\{C \in \mathbb{R}; |f| \leq C \quad \Delta - p.p. \quad sur[a,b]_\mathbb{T}\} & p = +\infty. \end{cases}$$

*D'ailleurs, pour $p = 2, L^2_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donnée pour tout $(f,g) \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b)_\mathbb{T}, \mathbb{R}) \times L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T}, \mathbb{R})$ par*

$$\langle f, g\rangle_{L^2_{\alpha,\Delta}([a,b)_\mathbb{T},\mathbb{R})} = \int_{[a,b]_\mathbb{T}} f(t)g(t)\Delta^\alpha t.$$

**Théorème 2.3.7.** *[25](Inégalité de Minkowski). Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g$ des fonctions de $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors on a :*

$$\|f+g\|_{L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

**Théorème 2.3.8.** *[25] (Inégalité de Hölder). Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *et* $g \in L^q_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *tel que* $q$ *est le conjugué de* $p$*, alors* $f.g \in L^1_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *et on a :*

$$\|f.g\|_{L^1_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})} \|g\|_{L^q_{\alpha\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})}.$$

**Définition 2.3.5.** *[25] On dira qu'une fonction* $u : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *appartient à l'ensemble* $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$*, si est seulement si* $u \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$, $\mathcal{U}_\alpha(u) \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *et il existe une fonction* $g : [a,b]^k_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $g \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *et*

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} u(s)\mathcal{U}_\alpha(\phi)(s)\Delta^\alpha s = -\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} g(s)\phi^\sigma(s)\Delta^\alpha s, \quad \forall \phi \in C^\alpha_{a,b;rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}), \tag{2.6}$$

*où*

$$C^\alpha_{a,b;rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R} : f \in C^\alpha_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}), f(a) = f(b)\}.$$

# Chapitre 3

# Espace de Sobolev fractionnaire conformable sur les échelles de temps

## 3.1 Calcul $\Delta$_fractionnaire conformable sur $\mathbb{T}$ pour les fonctions à valeurs vectorielles

Maintenant, nous introduisons $\Delta$_dérivée fractionnaire conformable sur l'échelle de temps pour les fonctions à valeurs vectorielles.

**Définition 3.1.1.** *[25] Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{T}^k$ et $\alpha \in ]0,1]$. Pour $t > 0$. On appelle $\mathcal{U}_\alpha(f)(t)$ la $\Delta$_dérivée fractionnaire conformable de $f$ d'ordre $\alpha$ en $t$ le nombre $\mathcal{U}_\alpha(f)(t)$ (à condition qu'il existe) tel que :*
*pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta-$voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}$ de $t$ tel que $\delta > 0$ où,*

$$|(f^\sigma(t) - f(s))t^{1-\alpha} - \mathcal{U}_\alpha\left(f\right)(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{V},$$

*avec pour tout $t \in \mathbb{T}$, où*

$$\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = \left(\mathcal{U}_\alpha(f_1)(t), \mathcal{U}_\alpha(f_2)(t), ..., \mathcal{U}_\alpha(f_N)(t)\right).$$

**Définition 3.1.2.** *[25] Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $\alpha \in ]m, m+1]$, $\quad m \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ $m-$fois $\Delta$_différentiable en $t \in \mathbb{T}^{k^m}$. On définit la $\Delta$_dérivée fractionnaire* *conformable de $f$ d'ordre $\alpha$ par :*

$$\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = \mathcal{U}_{\alpha-m}(f^{\Delta^m})(t).$$

**Théorème 3.1.1.** *[25] Soient $\alpha \in ]0,1]$, $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, alors on a les propriétés suivantes.*

*i/ Si $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$, alors $f$ est continue en $t$.*

*ii/ Si $f$ est continue en $t$ et $t$ est dispersé à droite, alors $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ et*

$$\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}. \tag{3.1}$$

*iii/ Si $t$ est dense à droite, alors $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ si et seulement si*

$$\lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha},$$

*existe et finie.*

*Dans ce cas,*

$$\mathcal{U}_\alpha(f)(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}. \tag{3.2}$$

*iv/ Si $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$, alors*

$$f^\sigma(t) = f(t) + \mu(t) t^{1-\alpha} \mathcal{U}_\alpha(f)(t).$$

**Théorème 3.1.2.** *[25] Si $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sont $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

*i/ $f + g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ et*

$$\mathcal{U}_\alpha(f+g)(t) = \mathcal{U}_\alpha(f)(t) + \mathcal{U}_\alpha(g)(t).$$

*ii/ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ et*

$$\mathcal{U}_\alpha(\alpha f)(t) = \alpha \mathcal{U}_\alpha(f)(t).$$

*iii/ Si $f$ et $g$ sont continues alors le produit $f.g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est $\Delta$_fractionnaire confor-*

*mable différentiable d'ordre $\alpha$ en $t$ et*

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\alpha(fg)(t) &= \mathcal{U}_\alpha(f)(t)g(t) + f^\sigma(t)\mathcal{U}_\alpha(g)(t) \\ &= f(t)\mathcal{U}_\alpha(g)(t) + \mathcal{U}_\alpha(f)(t)g^\sigma(t).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ensuite, nous introduisons $\Delta$_intégrale fractionnaire conformable ( ou $\Delta$_intégrale $\alpha$_fractionnaire) sur l'échelle de temps pour les fonctions à valeurs vectorielles

**Définition 3.1.3.** *[25] Soit $f$ :$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_N(t))$ . Soit $A$ est sous-ensemble $\Delta$_mesurable de $\mathbb{T}$. Alors $f$ est $\Delta^\alpha$_intégrable sur $A$ si et seulement si $f_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$ sont $\Delta^\alpha$_intégrable sur $A$, et*

$$\int_A f(t)\Delta^\alpha t = \left(\int_A f_1(t)\Delta^\alpha t, \int_A f_2(t)\Delta^\alpha t, ..., \int_A f_N(t)\Delta^\alpha t\right).$$

**Théorème 3.1.3.** *[25] Soient $\alpha\in ]0, 1]$ et $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ deux fonctions rd-continues, alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta^\alpha t = \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t + \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t.$
2. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t))\Delta^\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = -\int_b^a f(t)\Delta^\alpha t.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = \int_a^c f(t)\Delta^\alpha t + \int_c^b f(t)\Delta^\alpha t.$
5. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta^\alpha t = 0.$
6. *s'il existe $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ avec $|f(t)| \le |g(t)|$ pour tout $t \in [a, b]_\mathbb{T}$, alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t\right| \le \int_a^b |g(t)|\, \Delta^\alpha t.$$

### 3.1.1 Fonction absolument continue

Maintenant, nous donnons la définition de la fonction absolument continue.

**Définition 3.1.4.** *[25] Une fonction $f : [a, b]_\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ est dite absolument continue notée $f \in AC([a, b]_\mathbb{T}, \mathbb{R}^N)$ sur $[a, b]_\mathbb{T}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\{(a_k, b_k]_\mathbb{T}\}_{k=1}^n$ est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints satisfaisant*

$$\sum_{k=1}^{k=n}(b_k - a_k) < \delta, \quad \textit{alors} \quad \sum_{k=1}^{k=n} |f(\rho(b_k)) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

**Théorème 3.1.4.** *[25] On suppose que la fonction $f : [a, b]_\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est absolument continue sur $[a, b]_\mathbb{T}$, alors $f$ est $\Delta$_fractionnaire conformable différentiable d'ordre $\alpha$ $\Delta$_p.p. sur $[a, b]_\mathbb{T}$*

*et on a l'égalité suivante :*

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \mathcal{U}_\alpha(f)(t)\Delta^\alpha t, \quad \textit{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

**Théorème 3.1.5.** *[25] On suppose que les fonctions $f, g : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est absolument continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$, alors le produit $(fg)$ est absolument continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et on a l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left[(\mathcal{U}_\alpha(f)(t), g(t)) + (f^\sigma(t), \mathcal{U}_\alpha(g)(t))\right] \Delta^\alpha t &= (f(b), g(b)) - (f(a), g(a)) \\ &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left[(f(t), \mathcal{U}_\alpha(g)(t)) + (\mathcal{U}_\alpha(f)(t), g^\sigma(t))\right] \Delta^\alpha t.\end{aligned}$$

## 3.2 Espace de Sobolev fractionnaire conformable sur les échelles de temps

Dans cette section, nous introduisons quelques espaces de Sobolev.

**Définition 3.2.1.** *[25] Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $E \subseteq \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta$_mesurable, on pose :*

$$L^p_{\alpha,\Delta}(E, \mathbb{R}^N) := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}^N, \ f \textit{ est } \Delta\_\textit{mesurable et } \int_E |f|^p \Delta^\alpha t < \infty\}.$$

*On définit la norme sur $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ par :*

$$\|f\|_{L^p_{\alpha,\Delta}} := \left(\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |f|^p \Delta^\alpha t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Théorème 3.2.1.** *[25](Inégalité de Minkowski). Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g$ des fonctions de $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$, alors on a :*

$$\|f + g\|_{L^p_{\alpha,\Delta}} \leq \|f\|_{L^p_{\alpha,\Delta}} + \|g\|_{L^p_{\alpha,\Delta}}.$$

**Théorème 3.2.2.** *[25] (Inégalité de Hölder). Soient $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ tel que $q$ est le conjugué de $p$, alors $f.g \in L^1_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ et on a :*

$$\|f.g\|_{L^1_{\alpha,\Delta}} \leq \|f\|_{L^p_{\alpha,\Delta}} \|g\|_{L^q_{\alpha\Delta}}.$$

**Théorème 3.2.3.** *[25] Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors l'ensemble $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ est un espace de Banach avec la norme $\|.\|_{L^p_{\alpha,\Delta}}$.*

*D'ailleurs, pour $p=2$, $L^2_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donnée pour tout $(f,g) \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b)_{\mathbb{T}^N},\mathbb{R}^N) \times L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ par*

$$\langle f,g\rangle_{L^2_{\alpha,\Delta}} = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (f(t),g(t))\,\Delta^\alpha t.$$

*Démonstration.*
Il est clair que $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace normé. Pour cela il suffit de montrer que $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace complet.
Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$, $u_n(t) = (u_n^1(t), u_n^2(t), ..., u_n^N(t))$.
Ce qui donne que

$$\begin{aligned}
\|u_m - u_n\|_{L^p_{\alpha,\Delta}} &= \left(\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_m(t)-u_n(t)|^p \Delta^\alpha t\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(\sum_{i=0}^{N} |u_m^i(t)-u_n^i(t)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \Delta^\alpha t\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Puisque $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ est un espace de Banach, nous obtenons

$$\|u_m^i - u_n^i\|_{L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})} = \left(\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_m^i(t)-u_n^i(t)|^p \Delta^\alpha t\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

$\forall i \in \{1,2,...,N\}$, donc $\{u_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$, d'après le théorème 2.3.6 il existe $v^i \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ $(i=1,2,...,N)$, On a

$$\|u_n^i - v^i\|_{L^p_{\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.4}$$

D'autre part, on pose $v(t) = (v^1(t), v^2(t), ..., v^N(t))$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |v|^p \Delta^\alpha t &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(\sum_{i=1}^{N} |v^i|^2\right)^{\frac{p}{2}} \Delta^\alpha t \\
&\leq N^{\frac{p}{2}} \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \sum_{i=1}^{N} |v^i|^p \Delta^\alpha t \\
&= N^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^{N} \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |v^i|^p \Delta^\alpha t < +\infty.
\end{aligned}$$

donc $v \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$.

D'autre part, d'après (3.4), on a

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_n(t)-v(t)|^p \Delta^\alpha t &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(\sum_{i=1}^N |u_n^i(t)-v^i(t)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \Delta^\alpha t \\
&\leq N^{\frac{p}{2}} \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \sum_{i=1}^N |u_n^i(t)-v^i(t)|^p \Delta^\alpha t \\
&= N^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^N \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_n^i(t)-v^i(t)|^p \Delta^\alpha t \\
&= N^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^N \|u_n^i - v^i\|_{L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

D'où, l'espace $L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace de Banach avec la norme $\|.\|_{L^p_{\alpha,\Delta}}$.
Évidemment, $L^2_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donnée pour tout $(f,g) \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b)_{\mathbb{T}^N},\mathbb{R}^N) \times L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ par :

$$\langle f,g\rangle_{L^2_{\alpha,\Delta}} = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (f(t),g(t))\, \Delta^\alpha t.$$

Ce qui complète la preuve. $\square$

**Définition 3.2.2.** *[25] On dira qu'une fonction $u : [a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ appartient à l'ensemble $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$, si est seulement si $u \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{U}_\alpha(u) \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ et il existe une fonction $g : [a,b]^k_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ telle que $g \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ et*

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (u(s),\mathcal{U}_\alpha(\phi)(s))\, \Delta^\alpha s = -\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (g(s),\phi^\sigma(s))\, \Delta^\alpha s, \quad \forall \phi \in C^\alpha_{a,b;rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^N), \tag{3.5}$$

*où*

$$C^\alpha_{a,b;rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^N : \ f \in C^\alpha_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N),\ f(a)=f(b)\}.$$

**Lemme 3.2.1.** *[25] Soient $p \in [1,+\infty[$, $u \in W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$. D'après la définition 3.2.2 alors $g \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$, donc, il existe une fonction $x \in V^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ tel que*

$$\begin{cases} x = u, \\ \mathcal{U}_\alpha(x) = g. \end{cases}$$

*où*

$$V^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n) = \{u \in AC([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N) : \ \mathcal{U}_\alpha(u) \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N), \quad u(a)=u(b)\}.$$

**Remarque 3.2.1.** *[25] D'après les théorèmes 3.1.4 et 3.1.5 implique que pour tout $p \in [1,+\infty[$ on a*

$$V^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N) \subset W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N).$$

**Théorème 3.2.4.** *[25] Supposons $p \in [1,+\infty[$, $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}}$ qui définie par :*

$$\|u\|_{W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}} = \left(\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u^\sigma(t)|^p \Delta^\alpha t + \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |\mathcal{U}_\alpha(u)(t)|^p \Delta^\alpha t\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.6}$$

*pour tout $u \in W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$.*
*De plus, pour $p=2$, $H^\alpha_{\Delta;a,b} = W^{\alpha,2}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donnée*

$$\langle u,v\rangle_{H^\alpha_{\Delta;a,b}} = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (u^\sigma(t),v^\sigma(t))\,\Delta^\alpha t + \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (\mathcal{U}_\alpha(u)(t),\mathcal{U}_\alpha(v)(t))\,\Delta^\alpha t, \qquad \forall u,v \in H^1_{\Delta;a,b}.$$

*Démonstration.*
Il est clair que $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace normé. Pour cela il suffit de montrer que $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ est un espace complet.
Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$. Donc, d'après la définition 3.2.2 il existe une fonction $g_n : [a,b]^k_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ telle que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\phi \in C^\alpha_{a,b;rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (u_n(t),\mathcal{U}_\alpha(\phi)(t))\,\Delta^\alpha t = -\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (g_n(t),\phi^\sigma(t))\,\Delta^\alpha t. \tag{3.7}$$

Alors, d'après le lemme 3.2.1, il existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\begin{cases} x_n = u_n, \\ \mathcal{U}_\alpha(x_n) = g_n. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (x_n(t),\mathcal{U}_\alpha(\phi)(t))\,\Delta^\alpha t = -\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (\mathcal{U}_\alpha(x_n)(t),\phi^\sigma(t))\,\Delta^\alpha t, \tag{3.8}$$

pour tout $\phi \in C^\alpha_{a,b;rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$. Puisque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^N)$, d'après l'équation (3.6), nous avons

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u^\sigma_m(t) - u^\sigma_n(t)|^p \Delta^\alpha t \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0, \tag{3.9}$$

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |\mathcal{U}_\alpha(u_n)(t) - \mathcal{U}_\alpha(u_m)(t)|^p \Delta^\alpha t \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \tag{3.10}$$

D'après les théorèmes 3.1.2, 3.1.3 et les équations (3.9), (3.10), on a

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_m(t)-u_n(t)|^p \Delta^\alpha t &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |(u_m^\sigma(t)-u_n^\sigma(t)) - \mu(t)t^{\alpha-1}(\mathcal{U}_\alpha(u)_m(t)-\mathcal{U}_\alpha(u)_n(t))|^p \Delta^\alpha t\\ &\leq 2^{p-1}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_m^\sigma(t)-u_n^\sigma(t)|^p \Delta^\alpha t\\ &\quad +2^{p-1}a^{p(\alpha-1)}(\sigma(a)-a)^p \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |\mathcal{U}_\alpha(u)_m(t)-\mathcal{U}_\alpha(u)_n(t)|^p \Delta^\alpha t \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

D'autre part, par le théorème 3.2.3 et (3.10), il existe $u, g \in L^p_{\alpha,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\|u_n - u\|_{L^p_{\alpha,\Delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{3.11}$$

$$\|\mathcal{U}_\alpha(u)_n - g\|_{L^p_{\alpha,\Delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.12}$$

Combiner (3.8) avec (3.11) et (3.12), nous obtenons

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (u(t), \mathcal{U}_\alpha(\phi)(t))\, \Delta^\alpha t = -\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (g(t), \phi^\sigma(t))\, \Delta^\alpha t, \tag{3.13}$$

pour tout $\phi \in C^\alpha_{a,b;rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$. Alors on conclut que $u \in W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$.
D'autre part, d'après le théorème 3.2.3 et (3.12) , (3.11) implique que :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_n^\sigma(t)-u^\sigma(t)|^p \Delta^\alpha t &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |(u_n(t)-u(t)) + \mu(t)t^{\alpha-1}(\mathcal{U}_\alpha(u_n)(t)-\mathcal{U}_\alpha(u)(t))|^p \Delta^\alpha t\\ &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |(u_n(t)-u(t)) + \mu(t)t^{\alpha-1}(\mathcal{U}_\alpha(u_n)(t)-g(t))|^p \Delta^\alpha t\\ &\leq 2^{p-1}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |u_n(t)-u(t)|^p \Delta^\alpha t\\ &\quad +2^{p-1}a^{p(\alpha-1)}(\sigma(a)-a)^p \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} |\mathcal{U}_\alpha(u)_n(t)-g(t)|^p \Delta^\alpha t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la remarque 3.2.1, il existe $x \in V^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N) \subset W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\|u_n - x\|_{W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Alors on conclut que $W^{\alpha,p}_{\Delta;a,b}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^N)$ est un espace de Banach.
Clairement, l'ensemble $H^\alpha_{\Delta;a,b}$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donnée

$$\langle u, v\rangle_{H^\alpha_{\Delta;a,b}} = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (u^\sigma(t), v^\sigma(t))\, \Delta^\alpha t + \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (\mathcal{U}_\alpha(u)(t), \mathcal{U}_\alpha(v)(t))\, \Delta^\alpha t, \qquad \forall u, v \in H^\alpha_{\Delta;a,b}.$$

Ce qui complète la preuve. □

# *Conclusion*

Dans ce travail on a étudie les espaces de Sobolev fractionnaire conformable sur les échelles de temps. Les résultats de mémoire sont représentés dans la possibilité de construire des espaces de Sobolav fractionnaire conformable sur les échelles de temps, à travers lesquels il est possible d'étudier des équations différentielbes fractionnaire conformable sur échelles de temps et de leur trouver des solutions, et d'appliquer des théories des points fixes et de trouver des solutions aux problèmes de limites et il intéresse ce domaine et les travaursur les équations différentielbes partiellement fractionnaire conformable sur les échelles de temps.

# Bibliographie


[1] T. Abdeljawed, *On conformable fractional calculus*, Comput. AppLMath. 279(2015),57-66.

[2] M.F. Aticiand G.S. Guseinov , *on Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales* J. Comput. Appl. Math. 141(2002).

[3] B.Bayour , *Contributions dans les échelles de temps* Phd thesis, 2017.

[4] A. Benaissa Cherif, *Contributions Topologiques sur les échelles de temps et leurs applications dans les équations différentielles*, Thèse de doctorat, Universitée Djillali Liabes-Sidi BelAbbès. Année 2014-2015.

[5] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Esidtence of solutions for conformable fractional problems with nonlinear functional boundary condition, submitted.*

[6] B. Bendouma,*Diffrential equation on times scales.* PhD thesis, 2019.

[7] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic Equations on Time scales ; An Introduction with Applications. Birkäuser*, Boston, (2001).

[8] N. Benkhetou, S. Hassani and D. F. M. Torres, *A conformable fractional calculus on arbitrary time scales*, J. King Saud Univ. Sci. 28 (2016), on 1, 93-98.

[9] O.T. Birgania, S. Chandokb, N. Dedovicc , S. Radenovicd, A *note on some recent results of the conformable derivative*(2019) No. 1, 11-17.

[10] M. Bohner And A. Peterson, *Advences in Dynamic Equations On Time scales*, Boston, (2003).

[11] A. Cabada, D. Vivero, *Expression of the Lebesgue* $\Delta\_$ *integral on time scales as a usual Lebesgue integral ; application to the calculus of* $\Delta\_$ *antiderivatives*, Mathematical and Computer Modelling, 194-207. 43 (2006).

[12] W. S. Chung , *Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative*, Compul. APpL Malh. 290 (2015), 150-158.

[13] S. G. Georgiev, *Functional Dynamic equations on time scales Springer international publishing* (2019).

[14] S. G. Georgiev , *integral equations on time scales* - Atlatis press (2016).

[15] A. Gokdogan, E. Unal and E. Celik, *Existence and uniqueness theorems for sequenial linear conformable fractional dierential equation*, arXiv preprint, 2015.

[16] T. Gulsen, E. YILMAZAND S. GoKTAS, *Conformable fractional Dirac system on time scales*, InequalAppl. 2017,1-10.

[17] SH. Guseinov, *Integration on time scales*, J. Math. Anal Appl, 285(1) :107-127, 2003.

[18] S. Hilger , *Ein Mabtkettenkalkül Ein Matkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsman nigfaltigketen*, Ph. D. Thesis, Universtät Wüurzburg. WiRurzburg Germany (1988).

[19] U. N. Katugampola, *A new fractional derivative with properties, preprint*,2014.

[20] U. N. Katugampola, *A new fractional derivative with classical properties*, preprint, 2014.

[21] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and L. Sababheh,*A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appm. Math. 264, 65-70, 2014.

[22] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujiloo, *Theory and application of fractional differential equation*, North-holland mathematics studies 204. (2016).

[23] P. Ravi Agarwal, V. Otero Espinar, K. Perera, And Dolores R. Vivero, Basic Properties of Sobolev's Spaces on Time Scales, Hindawi Publishing Corporation. *Advances in Difference Equation*, Article ID 38121, Pages 1-14, (2006).

[24] S. Sarer, M. Kenawy, G. Alnemer AND M. Zakarya, *Some fractional dynamic inequalities of Hardy's type via conformable calculus*, Published : 16 Mareh 2020.

[25] Y. Wang, J. Zhou et Y. Li, *Fractional sobolev's Spaces ou Time Scales via Confrmable Fractional Calculus and Their Application to Fractional Differential Equation on Time Scales*. Advances in Mathematical physies(2016), 1-21.

[26] P. A. Williams, *Unifying fractional calculus with time scales* July, 2012.

[27] D. Zhao and T. Li , *On conformable delta fractional calculus on time scales* J. Math. Computer Sci. 16, 324-335, 2016.

Résumé

Ce travail est organisé en trois parties.
La première partie introduisons les définitions et notions fondamentales sur l'échelle de temps. Dans la seconde partie introduisons la définition de la $\Delta$_dérivée fractionnaire conformable d'ordre $\alpha \in ]0,1]$ et leurs propriétés importantes, nous introduisons et développons la notion de la $\Delta$_intégrale fractionnaire conformable $\alpha \in ]0,1]$ sur l'échelle de temps. Dans la dernière partie, on s'intéresse à les espaces de Sobolev fractionnaire conformable sur les échelles de temps.


***Mots clés*** :
Échelles de temps, Dérivée fractionnaire conformable, Intégrale fractionnaire conformable, Calcul fractionnaire conformable sur l'échelle de temps, Espace de Sobolev fractionnaire conformable sur les échelles de temps.


# *Abstract*

This work is organized in three parts.
The first part introduces the definitions and the fondamental nations on time scale. In the second part we introduce the definitions of $\Delta$_conformable fractional derivative order $\alpha \in ]0,1]$ and their important properties, we introduce and develop the notion of the $\Delta$_conformable fractional integral $\alpha \in ]0,1]$ on the time scale. In the last part, we are interested in the conformable fractional Sobolev spaces on the time scales.


***Key words :***
Time scales, Conformable fractional derivative, Conformable fractional integral, Conformable fractional calculus on time scale, Fractional Sobolev space conformable on time scales.