République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Analyse Fonctionnelle 1

Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants Master Mathématiques des Universités

Par :

AMIN BENAISSA CHER

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

E-mail : amine.banche@gmail.com

ABDERRAHMANE BENIANI

Centre Universitaire d'Ain Témouchent

Institut des Sciences

Départements Mathématiques et Informatiques

E-mail : a.beniani@yahoo.fr

Année Universitaire 2020-2021

Avant-propos

Ce document de cours Analyse Fonctionnelle I est destiné aux étudiants de Master 1 en Mathématiques. L'analyse fonctionnelle est maintenant à la base de toute l'analyse et d'autres branches des Mathématique.

Analyse Fonctionnelle signifie ici analyse sur des espaces de fonctions. Il s'agit d'un domaine des mathématiques qui s'est développé dans la première moitié du 20^{eme} siècle grâce en particulier aux travaux de M. Fréchet, S. Banach, D. Hilbert. Les espaces fonctionnels utilisés sont des espaces vectoriels toplogique, ainsi que leurs applications linéaires. On y démontre et utilise le Théorèmes de Riesz. Toute solution proposée est faite pour réfléchir aux méthodes employées. Nous espérons que ce nouvel ouvrage pourra rendre des services aux étudiants et collègues qui utiliseront, et nous accueillerons avec plaisir et intérêt toutes les remarques des lecteurs suivantes :

Auteurs : A. Benaissa Cherif, A. Beniani

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1 Structure d'espace vectoriel

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) un ensemble E muni de deux lois :*

i) Une loi interne, notée $+$, telle que $(E,+)$ soit un groupe commutatif.

L'élément nul est noté 0_E.

ii) Une loi externe, notée $\cdot$, qui est une application de $\mathbb{K}\times E$ dans E vérifiant :

a) $\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\forall x\in E : (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot y$.

b) $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\forall\,(x,y)\in E^2 : \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$.

c) $\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\forall x\in E : \alpha.\,(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$.

d) $\forall x\in E : 1\cdot x = x$.

1.1.2 Famille de vecteurs

Définition 1.1.2. *Une* ***combinaison linéaire*** *de la famille finie de vecteurs $(x_1,..,x_n)$ de E est un vecteur $x\in E$s'écrivant*

$$x=\sum\nolimits_{i=1}^{i=n}\alpha_i x_i,$$

où les α_i sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$).

Remarque. *Une combinaison linéaire d'une famille quelconque* $(x_i)_{i\in I}$ *est un vecteur* x *s'écrivant*

$$x = \sum\nolimits_{i\in I} \alpha_i x_i,$$

où tous les α_i*, sauf un nombre fini, sont nuls.*

Définition 1.1.3. *Une famille finie de vecteurs* $(x_1, .., x_n)$ *est* ***libre*** *si, pour tout choix de* $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\sum\nolimits_{i=1}^{i=n} \alpha_i x = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad \forall i \in \{1, .., n\}.$$

Remarque.

1) *Une famille quelconque de vecteurs est libre si toute sous-famille finie extraite est libre.*

2) *Une famille qui n'est pas libre est une famille liée.*

Définition 1.1.4. *Une famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est génératrice de* E *si tout vecteur de* E *est combinaison linéaire des* $(x_i)_{i\in I}$.

1.1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.1.5. *Une partie* F *de* E *est un sous-espace vectoriel de* E *si* F *est non-vide et si* F *est stable par* $+$ *et* $\cdot$. *Dans ce cas,* F *est lui-même un espace vectoriel.*

Proposition 1.1.1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)**.** *Une partie* F *de* E *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) $0_E \in F$,

2) *Pour tous* $(x, y) \in F^2 : x + y \in F$,

3) *Pour tout* $x \in F$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot X \in F$

1.1.4 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.1.6. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *On appelle somme de* F *et* G *l'espace vectoriel noté* $F + G$ *défini par*

$$F + G = \{x + y : x \in F, y \in G\}.$$

Deux sous-espaces F *et* G *sont en* ***somme directe*** *si la décomposition de tout vecteur de* $F + G$ *comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G *est unique. On note alors* $F \oplus G$.

Proposition 1.1.2. *Deux sous-espaces* F *et* G *sont en* ***somme directe*** *si et seulement si* $F \cap G = \{0\}$.

1.1.5 Applications linéaires

Définition 1.1.7. *Une application $f : E \to F$ est appelée une* ***application linéaire*** *si, pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Remarque. *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*
$\mathcal{L}(E)$ si $E = F$. Une application linéaire de E dans E s'appelle aussi un endomorphisme de E.

Définition 1.1.8. *On dit qu'une application linéaire $f : E \to F$ est un isomorphisme si elle est bijective.*

Remarque.

1) *La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.*
2) *L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F.*
3) *L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 1.1.9. *On appelle noyau de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ le sous-espace vectoriel de E*

$$\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}.$$

Définition 1.1.10. *On appelle image de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ le sous-espace vectoriel de F*

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) : x \in E\}.$$

Proposition 1.1.3. *$f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$.*

1.2 Espaces métriques

Définition 1.2.1. *Soit E un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur E, est la donnée d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiants les axiomes suivants*

(d_1) *$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (propriété de séparation).*

(d_2) *pour tout $x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$, (propriété de symétrie).*

(d_3) *pour tout* $x, y, z \in E : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, *(inégalité triangulaire)*

Définition 1.2.2. *On appelle espace métrique tout couple* (E, d) *où* $E \neq \emptyset$ *est un ensemble et* d *est une distance sur* E.

Exemple 1.2.1.

1) *Si* $E = \mathbb{R}$, *soit* $x, y \in \mathbb{R} : d(x,y) = |x - y|$.

2) *Si* $E = \mathbb{R}^n$, *on a les distances sont définie par*

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|, \\ d_1(x,y) &= \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|^2}, \quad \text{métrique euclidienne} \end{aligned}$$

Avec $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *ou* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

3) *Soit* E *un ensemble quelconque. On définit la topologie discrète par la distance définie par : pour tout* $x, y \in E$ *on pose*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1.2.1 Boules ouvertes, fermées. Sphères. Parties bornées

Définition 1.2.3. *Soit* a *un point de* E *et* $r > 0$ *un nombre réel.*

1) *Une* ***boule fermée*** *de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E : d(x,a) \leq r\}.$$

2) *Une* ***boule ouverte*** *de centre* a *et de rayon* r *est*

$$B(a,r) = \{x \in E : d(x,a) \leq r\}.$$

3) *Une* ***sphère*** *de centre* a *et de rayon* r *est*

$$S(a,r) = \{x \in E : d(x,a) = r\}.$$

Définition 1.2.4. *Une* ***partie bornée*** A *de* E *est une partie de* E *pour laquelle on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de* A.

1.2.2 Ouverts et Fermés

Définition 1.2.5. *Une partie ouverte (ou un ouvert) de E est une partie $\mathcal{U}$ si*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

Une partie fermée (ou un fermé) de E est une partie telle que son complémentaire $\mathcal{U}$ dans E est un ouvert.

Remarque. *E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.*

Proposition 1.2.1. *Dans un espace métrique (E, d), on a*

1) *Une boule ouverte est un ouvert.*

2) *Une boule fermée est un fermé.*

Définition 1.2.6. *Soit E un ensemble non-vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. On appelle topologie l'ensemble des ouverts $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1) *E et $\emptyset$ sont des éléments de τ.*

2) *Toute intersection finie d'éléments de τ appartient à τ.*

3) *Toute réunion d'éléments de τ appartient à τ.*

Définition 1.2.7. *Position d'un point par rapport à une partie de (E, d)). Soit $A \subset$,*

1) *On dit que a est **intérieur** à A si on peut trouver un ouvert $\mathcal{U} \subset E$, tel que .*

$$a \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \mathcal{U} \subset A.$$

   L'intérieur de A, noté A°, est le plus grand ouvert inclus dans A.

2) *On dit que a est un point**frontière** de A si tout ouvert $\mathcal{U} \subset E$ contenant a rencontre à la fois A et le complémentaire de A.*

3) *On dit que a est **adhérent** à A si tout ouvert $\mathcal{U} \subset E$ contenant a rencontre A.*

4) ***L'adhérence** de A, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé qui contient A.*

Définition 1.2.8. *On dit qu'une partie V de (E, d) est un voisinage de $x \in E$ si V contient un ouvert contenant x.*

Remarque. *L'équivalence avec la définition suivante : On dit que $V \subset E$ est un **voisinage** de x si et seulement si*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, \varepsilon) \subset V.$$

1.2.3 Espaces complets

Définition 1.2.9. *Un espace métrique est dit complet si ses suites de Cauchy sont convergentes.*

Théorème 1.2.1. *Chaque sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet.*

Chapitre 2

Espaces de Banach et applications linéaires continues

2.1 Espaces vectoriels normés

2.1.1 Définition et exemples

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1 (Espace vectoriel normé). *Soit E un espace vectoriel. Un norme sur E est une fonction $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$, qui satisfait les axiomes suivants :*

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N_2) *Pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.*

(N_3) *Pour tout $x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

L'espace vectoriel E muni de la norme $\|.\|$ est appelé ***espace vectoriel normé****, et noté $(E, \|.\|)$.*

Remarque. *L'axiome (N_3) est appelée inégalité* ***triangulaire****.*

Exemple 2.1.1 (Normes sur $\mathbb{R}^n$.). *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \{1, 2, .., n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned}
&\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|, \\
&\|x\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|, \\
&\|x\|_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2}, \qquad \textit{Norme Euclidienne} \\
&\|x\|_9 = \left[\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty[
\end{aligned}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.2. *On définit une norme sur l'espace vectoriel* $\mathcal{C}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\right)$ *de la maniérer suivante*

$$\left\Vert f\right\Vert_{\infty}=\sup_{x\in\left[a,b\right]}\left\vert f\left(x\right)\right\vert .$$

2.1.2 Distance associée à une norme

Proposition 2.1.1 (Distance associée à une norme)**.** *L'espace vectoriel normé est naturellement un **espace métrique**, avec la métrique induite définie par*

$$\begin{aligned} d: \quad & E\times E\rightarrow\mathbb{R}^{+} \\ & \left(x,y\right)\rightarrow d\left(x,y\right)=\left\Vert x-y\right\Vert . \end{aligned}$$

Démonstration.

Les axiomes de la norme, et en particulier l'inégalité triangulaire, montrer que c'est en effet une métrique. □

Remarque. *La distance* d *est appelée distance associée à la norme* $\left\Vert .\right\Vert$ *.*

Remarque. *Il est immédiat de vérifier que la distance ainsi définie vérifie bien les propriétés d'une distance.*

Remarque. *Toutes les propriétés des distances ont une traduction en termes de norme dans les espaces vectoriels normés.*

Proposition 2.1.2. *Soit* $\left(E,\left\Vert .\right\Vert\right)$ *un espace vectoriel normé, alors pour tout* x *et tout* y *dans* E*, on a*

$$\left\vert\left\Vert x\right\Vert-\left\Vert y\right\Vert\right\vert\leq\left\Vert x-y\right\Vert .$$

Définition 2.1.2. *Soit* $\left(E,\left\Vert .\right\Vert\right)$ *un espace vectoriel normé*

$i)$ Une partie A de E est **bornée**, s'il existe $r\in\mathbb{R}^{+}$, tel que

$$\left\Vert x\right\Vert\leq r,\qquad\text{pour tout } a\in A.$$

$ii)$ Le **diamètre** d'une partie bornée A est

$$\delta\left(A\right)=\sup\left\{d\left(a,b\right)=\left\Vert a-b\right\Vert : a,b\in A\right\}.$$

$iii)$ Soit $x\in E$ et $r>0$, les ensembles suivants

$$B\left(x,r\right)=\left\{y\in E: d\left(x,y\right)=\left\Vert x-y\right\Vert<r\right\},$$

$$\overline{B}\left(x,r\right)=\left\{y\in E: d\left(x,y\right)=\left\Vert x-y\right\Vert\leq r\right\},$$

$$S\left(x,r\right)=\left\{y\in E: d\left(x,y\right)=\left\Vert x-y\right\Vert=r\right\},$$

sont appelés respectivement **boule ouverte**, **boule fermée** et **sphère** de centre x et de rayon r.

2.2 Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 2.2.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, un ensemble $\mathcal{U}$ est appelé ouvert si,*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0 \quad \textit{tel que } B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

Définition 2.2.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, un ensemble F est appelé fermé si, F^c est est un ouvert*

Proposition 2.2.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé*

i) Une boule ouverte dans E est un ouvert.

ii) Une boule fermée dans E est un fermé.

Démonstration.
(i) Soient $a \in E$, $r > 0$ et $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans E. Soit $x \in B(a, r)$, on pose $\rho := r - \|x - a\| > 0$, nous montrerons que $B(x, \rho) \subset B(a, r)$. En effet, soit $y \in B(x, \rho)$, alors

$$\begin{aligned} \|y - a\| &\leq \|y - x\| + \|x - a\| \\ &< \rho + \|x - a\| = r, \end{aligned}$$

donc $B(a, r)$ est un ensemble ouvert dans E.
(ii) Considérons maintenant la boule fermée $\overline{B}(a, r)$. Pour vérifier que c'est en fait un fermé de $(E, \|.\|)$, il suffit de vérifier que $\left[\overline{B}(a, r)\right]^c$ est ouvert. Soit $x \in \left[\overline{B}(a, r)\right]^c$, alors, $\|x - a\| > r$, on pose $\rho = \|x - a\| - r > 0$. nous montrerons que $B(x, \rho) \subset \left[\overline{B}(a, r)\right]^c$. En effet, soit $y \in B(x, \rho)$, D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

De manière équivalente,

$$\begin{aligned} \|y - a\| &\geq \|x - a\| - \|x - y\| \\ &> \|x - a\| - \rho \\ &= r. \end{aligned}$$

donc $\left[\overline{B}(a, r)\right]^c$ est un ensemble ouvert dans E. □

Nous allons à présent définir la notion de topologie sur un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

Définition 2.2.3. *La topologie de E est l'ensemble des ouverts de E. On la note $\mathcal{T}$.*

Proposition 2.2.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, pour tout $a \in E$, $r > 0$, on a*

i) $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

ii) $\left(\overline{B}(a,r)\right)^{\circ} = B(a,r)$.

Démonstration.

(i) On a $B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$, par passage l'adhérence, $\overline{B(a,r)} \subset \overline{\overline{B}(a,r)}$, et nous avons l'ensemble $\overline{B}(a,r)$ est fermé, donc

$$\overline{B(a,r)} \subset \overline{\overline{B}(a,r)} = \overline{B}(a,r).$$

L'inclusion inverse, soit $x \in \overline{B}(a,r)$, on a deux cas, si $\|x-a\| < r$, alors

$$x \in B(a,r) \subset \overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r).$$

Si $\|x-a\| = r$, montrons que $x \in \overline{B(a,r)}$, cela signifie, pour tout $\rho > 0 : \overline{B}(x,\rho) \cap B(a,r) \neq \emptyset$, il suffit de montrer que

$$\forall \rho \in (0,r) : \overline{B}(x,\rho) \cap B(a,r) \neq \emptyset.$$

Posons

$$y = \frac{\rho}{r}a + \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)x.$$

Alors

$$\|y-x\| = \frac{\rho}{r}\|a-x\| = r,$$
$$\|y-a\| = \left(1-\frac{\rho}{r}\right)\|a-x\| = r-\rho < r,$$

donc $y \in \overline{B}(x,\rho) \cap B(a,r)$, et nous en concluons $\overline{B}(x,\rho) \cap B(a,r) \neq \emptyset$.

(ii) On a $B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$, alors $[B(a,r)]^{\circ} \subset \left[\overline{B}(a,r)\right]^{\circ}$, et nous avons l'ensemble $B(a,r)$ est ouvert, donc

$$B(a,r) = [B(a,r)]^{\circ} \subset \left[\overline{B}(a,r)\right]^{\circ}.$$

L'inclusion inverse, soit $x \in \left[\overline{B}(a,r)\right]^{\circ}$, alors $\|x-a\| \leq r$, montrons que $x \in B(a,r)$. Donc supposons par l'absurde que $\|x-a\| = r$.

Comme $\left[\overline{B}(a,r)\right]^{\circ}$ est ouvert, alors il existe un $\varepsilon > 0$, tel que $B(x,\varepsilon) \subset \left[\overline{B}(a,r)\right]^{\circ}$. Posons

$$y = x + \frac{\varepsilon}{2r}(x-a).$$

On a $\|y-x\| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, donc $y \in B(x,\varepsilon)$. Alors que

$$\|y-a\| = \left(1+\frac{\varepsilon}{2r}\right)\|x-a\| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r$$

Donc $y \notin B(a,r)$, alors $B(x,\varepsilon)$ n'est pas incluse dans $\left[\overline{B}(a,r)\right]^{\circ}$, ce qui la contradiction. Donc il est impossible que $\|x-a\| = r$. □

2.2.1 Normes équivalentes

Définition 2.2.4. *Deux norme sur un espace vectoriel normé sont dit équivalente si les topologie associer a ces normes sont équivalentes.*

Proposition 2.2.3. *Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E. Les propriétés suivante sont équivalente*

(i) $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes.*

(ii) S'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \qquad \textit{pour tout } x \in E$$

Démonstration.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes, alors les ouverts de l'un sont des ouverts pour l'autre. Soit

$$\begin{aligned} Id: \quad (E, \|.\|_1) \quad & \to (E, \|.\|_2) \\ x \qquad & \to Id(x) = x. \end{aligned}$$

Id est homomorphisme, donc Id est continue en 0, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E : \|x\|_1 \leq \alpha \Rightarrow \|x\|_2 \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in E$, tel que $x \neq 0$, posons $y = \dfrac{\alpha}{\|x\|_1} x$, alors $\|y\|_1 = \alpha$, donc $\|y\|_2 \leq \varepsilon$, ce qui implique

$$\|x\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \|x\|_1.$$

Il existe $C_1 > 0$, $\forall x \in E : \|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1$, avec $C_1 = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$.

De la même manière, on trouver qu'il existe $C_2 > 0$, tel que

$$\forall x \in E : \|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1,$$

Donc, on trouver la propriété (ii).

$(i) \Rightarrow (ii)$

Ils sont réalisés dans les espace métrique, donc ils sont réalisés dans l'espaces vectoriels normés.

□

Exemple 2.2.1. *Sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|x\|_2$ sont équivalentes.*

Plus précisément, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.2 Espace vectoriel de dimension finie

Proposition 2.2.4. *Tout norme sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme $\|.\|_\infty$.*

Démonstration.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i, \quad \text{avec} \quad e_1 = (0, .., \underset{i}{1}, 0, .., 0),$$

donc

$$\begin{aligned} N(x) &= N\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{i=n} |x_i| N(e_i) \\ &\leq \max_{i \in \overline{1,n}} |x_i| \sum_{i=1}^{i=n} N(e_i) \\ &= C_1 \|x\|_\infty . \end{aligned}$$

Inversement, posons

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\} .$$

L'ensemble S est férme et borné, donc S est compacte. Soit $N : (\mathbb{R}^n, \|.\|) \to (\mathbb{R}, |.|)$, on a $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| &\leq N(x - y) \\ &\leq C \|x - y\|_\infty . \end{aligned}$$

alors N est C-lipschitzienne, donc N est continue. Comme S est compacte, alors l'application est atteint ses bornes sur l'ensemble S,

$$\exists x_0 \in S : N(x_0) = \min_{x \in S} N(x) = C_2 > 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, on a $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, alors

$$N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq C_2,$$

donc

$$N(x) \geq C_2 \|x\|_\infty ,$$

En fin, N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. □

Corollaire 2.2.1. *Deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont toujours équivalentes.*

Démonstration.

Si N_1 et N_1 sont des normes sur $\mathbb{R}^n$, alors $N_1 \sim \|.\|_\infty$ et $\|.\|_\infty \sim N_2$, d'où $N_1 \sim N_2$. □

Proposition 2.2.5. *Tout $(E, \|.\|)$ e.v.n de dimension n est algébriquement isomorphe* $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$.

Démonstration.

Soit E un espace vectoriel et de dimension n, alors il existe $u_1, ..., u_n \in E$, tel que $\{u_1, ..., u_n\}$ une base pour E, avec

$$\forall x \in E : \exists x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}, \qquad x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i u_i.$$

Posons

$$\begin{array}{lll} \varphi : & \mathbb{R}^n & \to E \\ & \lambda = (\lambda_1, .., n\lambda) & \to \varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i. \end{array}$$

Il est claire que l'application φ est linéaire.

L'application φ est injective, car

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \varphi(\lambda) = 0\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i = 0\right\}. \end{aligned}$$

Puisuque $\{u_1, ..., u_n\}$ une base pour E, si $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i = 0$, alors $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, donc

$$\ker \varphi = \{0\}.$$

Comme $\dim E = \dim \mathbb{R}^n = n$, alors l'application φ est isomorphisme algébrique. □

Proposition 2.2.6. *Deux normes sur un espace vectoriel E de dimension fini sont toujours équivalentes.*

Démonstration.

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E, alors $N_1 \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ et $N_2 \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ sont normes sur $\mathbb{R}^n$, donc $N_1 \circ \varphi$ et $N_2 \circ \varphi$ sont équivalentes, il existe $\alpha, \beta > 0$, tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n : \alpha (N_1 \circ \varphi)(\lambda) \leq (N_2 \circ \varphi)(\lambda) \leq \beta (N_1 \circ \varphi)(\lambda).$$

Comme l'application est bijective

$$\forall x \in E, \quad \exists! \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad x = \varphi(\lambda).$$

Alors, pour tou $x \in E$,

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x),$$

c'est-à-dire $N_1 \sim N_2$. □

Proposition 2.2.7. *Soit E, un espace vectoriel de dimension n et soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base pour E. L'application $N_\infty : E \to \mathbb{R}^+$, $x \to N_\infty(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ avec $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$ est une norme sur E et l'application φ est une isométrie de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ dans (E, N_∞).*

Démonstration.

Il est claire que (E, N_∞) espace vectoriel normé de dimension n.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} N_\infty(\varphi(\lambda)) &= N_\infty\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i\right)\right) \\ &= \max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i| = \|\lambda\|_\infty . \end{aligned}$$

Par suite, on déduire que l'application φ est 1-lipschitzienne, donc φ est continue. □

Corollaire 2.2.2. *Tout e.v.n de dimension fini est topologiquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration.

Soit (E, N) espace vectoriel normé de dimension n. Soit

$$(E, N) \overset{Id_E}{\to} (E, N_\infty) \overset{\varphi^{-1}}{\to} (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) \overset{Id_{\mathbb{R}^n}}{\to} (\mathbb{R}^n, \|.\|),$$

alors $\varphi^{-1} : (E, N) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est linéaire, bijective et continue. □

Proposition 2.2.8. *Dans e.v.n de dimension fini*

$$A \text{ compact} \Leftrightarrow A \text{ fermé et bornée.}$$

Corollaire 2.2.3. *Si F s.e.v de E avec $\dim F < \infty$, alors F fermé.*

2.3 Suites et Séries dans un espace vectoriel normé

2.3.1 Suites et convergence dans un espace vectoriel normé

Définition 2.3.1. *Soit $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé, et $u = (u_n)_n$, une suite de $(E, \|.\|)$. On dit que u a pour limite $a \in E$ dans $(E, \|.\|)$ si, et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - a\| = 0$, cela s'écrit encore :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - a\| \leq \varepsilon.$$

Remarque. *La notion de convergence dans un espace vectoriel normé est donc étroitement liée au choix de la norme sur cet espace.*

Proposition 2.3.1. *Soit $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé* *i) Si une suite converge dans E, alors sa limite est unique.*

ii) Toute suite convergente de E est bornée.

Proposition 2.3.2. *Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n et H un s.e.v de E, alors $\overline{H}$ est un s.e.v de E.*

Démonstration.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \overline{H}$, alors il existe deux suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n \in H$, tels que

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \quad \text{et} \quad y = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Comme H un s.e.v de E, alors $(\alpha x_n + \beta y_n)_n$. Ainsi,

$$\|\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)\| \leq |\alpha| \|x_n - x\| + |\beta| \|y_n - y\|,$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)\| = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha x_n + \beta y_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha x + \beta y$$

donc $\alpha x + \beta y \in \overline{H}$, d'où $\overline{H}$ est un s.e.v de E. □

Proposition 2.3.3. *Soit E, un espace vectoriel, et $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, deux normes sur E. $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si toute suite convergeant vers 0_E pour une norme converge vers 0_E pour l'autre norme.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, deux normes sur E, tel que $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que

$$\forall x \in E : \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite dans E, si $(x_n)_n$ converge vers 0 dans $(E, \|.\|_1)$, alors

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_2 \leq \lim_{n\to\infty} \beta \|x_n\|_1 = 0,$$

donc $(x_n)_n$ converge vers 0 dans $(E, \|.\|_2)$, l'inverse de même méthode.
$(\Rightarrow)$ Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, on définit la suite $(x_n)_n$ sur E par :

$$(x_n)_n = \left(\frac{1}{(n+1)\|x\|_1} x\right)_n.$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty_1} \|x_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

Alors $(x_n)_n$ converge vers 0 dans $(E, \|.\|_1)$, par l'hypothèse $(x_n)_n$ converge vers 0 dans $(E, \|.\|_2)$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n_0}\|_2 \leq 1,$$

Par suite

$$\|x_{n_0}\|_2 = \frac{\|x\|_2}{(n_0+1)\,\|x\|_1} \leq 1.$$

Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E, \quad \|x\|_2 \leq (n_0+1)\,\|x\|_1\,,$$

Cela signifie

$$\exists \alpha = n_0 + 1 > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x\|_2 \leq \alpha\,\|x\|_1\,.$$

De même méthode, on trouve

$$\exists \beta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq \beta\,\|x\|_1\,.$$

À partir des deux dernières inégalités, nous concluons $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$. □

2.3.2 Notion de densité dans un espace vectoriel normé

Définition 2.3.2. *Soit* $(E, \|.\|)$, *un espace vectoriel normé, et* X *une partie de* E. *On dit que* X *est dense dans* E *si, et seulement si* $\overline{X} = E$.

Proposition 2.3.4. *Soit* $(E, \|.\|)$, *un espace vectoriel normé, les propriétés suivantes sont équivalentes*

$i)$ A est dense dans E.

$ii)$ Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n$ dans A qui converge vers x.

$iii)$ Pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}$ de E, on a $\mathcal{U} \cap E \neq \emptyset$.

Exemple 2.3.1. *L'esnsemble* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $(\mathbb{R}, |.|)$.

2.3.3 Suites de Cauchy un espace vectoriel normé

Définition 2.3.3 (Suites de Cauchy)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$, *un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* E *est une suite de Cauchy si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_0 \quad \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.3.5. *Soit* $(E, \|.\|)$, *un espace vectoriel normé, alors*

$i)$ Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

$ii)$ Toute suite de Cauchy est une suite bornée.

2.3.4 Séries dans un espace vectoriel normé

On sait que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les séries absolument convergentes sont convergentes, on sait également qu'une série normalement convergente de fonctions continues est uniformément convergente vers une limite continue. Plus généralement

Définition 2.3.4. *Soit E e.v.n et $(x_n)_n$ une suite dans E. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} x_k$ est convergente. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est normalement convergente si et seulement si la a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.*

2.3.5 Espaces de Banach

Définition 2.3.5. *Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est appelé espace de Banach*[1] *si E, muni de la distance canonique associée à $\|.\|$ est un espace métrique complet.*

Proposition 2.3.6. *Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E sont équivalentes, alors $(E, \|.\|_1)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \|.\|_2)$ est un espace de Banach.*

Démonstration.
Soient $\|.\|_1$ et $(E, \|.\|_2)$ deux normes sur E, tel que

$$\|.\|_1 \sim \|.\|_2.$$

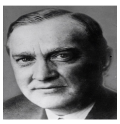
Alors, il existe $\alpha, \beta > 0$,

$$\forall x \in E : \alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2. \qquad (*)$$

Supposons que $(E, \|.\|_1)$ espace de Banach.
Soit $(x_n)_n$ suite de cauchy dans $(E, \|.\|_2)$, par la formule $(*)$, nous concluons que $(x_n)_n$ suite de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$ qui est complet, alors il existe $x \in E$, tel que la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans $(E, \|.\|_1)$. Par la formule $(*)$ on obtient que la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans $(E, \|.\|_2)$, d'où $(E, \|.\|_2)$ espace de Banach. □

Proposition 2.3.7. *Tout espace vectoriel normé de dimension fini est un espace de Banach.*

Démonstration.
Soit $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé de dimension m, alors il existe $e_1, ..., e_n \in E$, tel que

1.  **Stefan Banach** (1892 – 1945) est un Mathématicien polonais.

$\{e_1, ..., e_n\}$ une base pour E, avec

$$\forall x \in E, \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \quad x = \sum\nolimits_{i=1}^{i=m} \lambda_i e_i.$$

Montrer que (E, N_∞) espace de Banach, en effet : Soit $(x_n)_n$ suite de Cauchy dans (E, N_∞), alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall\, p, q \geq n_\varepsilon : N_\infty(x_p - x_q) < \varepsilon.$$

D'autre part : pour tout $n \in \mathbb{R}, \exists \lambda_1^n, \ldots, \lambda_m^n \in \mathbb{R}$, tel que

$$x_n = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \lambda_i^n e_i,$$

Alors

$$N_\infty(x_p - x_q) = \max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i^p - \lambda_i^q| \leq \varepsilon.$$

De la dernière formule, on trouver $(\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $\mathbb{R}$ qui qui est complet, alors il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_i^n \to \lambda_i, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Posons $x = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i e_i E$, alors

$$N_\infty\left(x_n - x\right) = \max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i^n - \lambda_i| \to 0, \text{ lorsque } n \to \infty,$$

donc la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans (E, N_∞), d'où (E, N_∞) est espace de Banach.
Comme $\dim E = m < +\infty$, alors $N_\infty \sim \|.\|$, Nous en concluons que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. □

Exemple 2.3.2. *$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espace de Banach, car : la dimension de n est finie.*

Théorème 2.3.1. *Soit E un espace vectoriel normé. Les deux propriétés suivantes de E sont équivalentes*

(a) E est un espace de Banach.

(b) Toute série d'éléments de E normalement convergente est convergente.

Démonstration.
Montrons que $(a) \Longrightarrow (b)$
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E, tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ est onvergente.
On pose

$$S_n = \sum\nolimits_{k=0}^{k=n} x_k, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(S_n)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$, ce qui implique $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, avec $m > n$, on a

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum\nolimits_{k=0}^{k=n} x_k - \sum\nolimits_{k=0}^{k=m} x_k \right\| \\ &= \left\| \sum\nolimits_{k=n+1}^{k=m} x_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{k=m} \|x_k\|, \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ est onvergente, alors $S_n^0 = \sum_{k=0}^{k=,} x_k$ est une suite de Cauchy dans E, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } n, m \geq n_0 : \sum\nolimits_{k=n+1}^{k=m} \|x_k\| < \varepsilon,$$

On déduit que, $(s_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E qui est complet, donc la suite $(s_n)_n$ est convergente dans E. ce qui signifie la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est convergente dans E.

Montrons que $(b) \Longrightarrow (a)$

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_\varepsilon, \quad \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous choisissons $\varepsilon := \dfrac{1}{2^k}$, alors

$$\exists n_k \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_k \quad \text{tel que} \quad \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{2^k},$$

Pour $p = n_k$ et $q = n_{k+1}$, nous trouvons

$$\left\| n_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Comme la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$ est convergente, alors par le critére de comparaison, on obtient que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\| n_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\|$ est convergente, par (2), Conclure que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(n_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right)$ est convergente. Alors $S_m = \sum_{k\in\mathbb{N}}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ converge dans E, nous avons

$$S_m = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} - x_{n_0},$$

Comme la suite $(S_m)_m$ est est convergente, alors il existe $S \in E$, tel que :

$$S = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} x_{n_m} - x_{n_0},$$

C'est-à-dire

$$\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = S + x_{n_0} := x,$$

alors, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n_m \geq m_0 : \|x_{n_m} - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, pour tout $n \geq m_0$, on a

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &\leq \|x_n - x_{n_m}\| + \|x_{n_m} - x\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donc la suite $(x_n)_n$ est converge vers x dans E.

D'où E est un espace de Banach. □

Proposition 2.3.8. *Soit $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et F s.e.v fini, alors $(F, \|.\|)$ est un espace de Banach.*

Démonstration.

Soit (x_n) suite de Cauchy dans $(F, \|.\|)$, alors $(x_n)_n$ suite de Cauchy dans $(E, \|.\|)$ qui est complet, donc il existe $x \in E$, tel que $(x_n)_n$ est converge vers x dans $(E, \|.\|)$, comme F est fermé, donc $x \in F$ et $(x_n)_n$ est converge vers x dans F, d'où $(F, \|.\|)$ est un espace de Banach. □

2.4 Applications linéaires continues

Notation.

i) $\mathcal{L}(E, F)$, *l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

ii) $L(E, F)$, *l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.*

Théorème 2.4.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est continue sur E.*

(2) *A est continue en 0_E.*

(3) *A est bornée sur $\overline{B}(0, 1)$.*

(4) *A est bornée sur $S(0, 1)$.*

(5) *Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $\|Ax\|_F \leq \|x\|_E$.*

(6) *A est uniformément continue sur E.*

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) , est évident.

(2) $\Rightarrow$ (3) , si A est continue en 0_E, alors il existe $\delta > 0$, tel que

$$\text{si } x \in \overline{B}(0,\delta) : A(x) \in \overline{B}(0,1).$$

Soit $x \in \overline{B}(0,1)$, alors $\delta x \in \overline{B}(0,\delta)$, donc $A(\delta x) \in \overline{B}(0,1)$, comme $A \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$$\forall x \in \overline{B}(0,1), \qquad A(x) \in \overline{B}\left(0,\frac{1}{\delta}\right),$$

donc A est bornée sur $\overline{B}(0,1)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) , est évident.

(4) $\Rightarrow$ (5) , si A est bornée sur $S(0,1)$, alors il existe $M > 0$, tel que

$$\forall x \in S(0,1), \qquad \|A(x)\| \leq M.$$

Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq M.$$

d'où

$$\forall x \in E, \qquad \|A(x)\| \leq M\|x\|.$$

(5) $\Rightarrow$ (6) Soit $x, y \in E$, on a

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| \leq M\|x-y\|.$$

Alors A est M-lipschitzienne, d'où A est uniformément continue sur E.

(6) $\Rightarrow$ (1) , est évident.

□

Théorème 2.4.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Supposons de plus que u est continue. Posons :*

$$N_1 = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$
$$N_2 = \sup_{x \in S(0,1)} \|Ax\|_F.$$
$$N_3 = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|Ax\|_F.$$
$$N_4 = \inf\left\{M \in \mathbb{R}^+ : \|Ax\|_F \leq M\|x\|_E\right\}.$$

Alors, on a :

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4.$$

Démonstration.

Soit $x \in E$, alors

$$\|Ax\|_F \leq N_2, \quad \text{pour } x \in S(0,1).$$

Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc

$$\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq N_2, \quad \text{pour } x \in E \backslash \{0\},$$

donc

$$N_1 = \sup_{x \in E \backslash \{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq N_2.$$

Soit $x \in \overline{B}(0,1)$, alors $\|Ax\|_F \leq N_3$, donc

$$\|Ax\|_F \leq N_3, \qquad \text{pour } x \in S(0,1),$$

d'où

$$N_2 \leq \sup_{x \in S(0,1)} \|Ax\|_F \leq N_3.$$

Par la définition de N_4, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tel que

$$0 \leq M_\varepsilon \leq \varepsilon + N_4 \quad \text{et} \quad \|Ax\|_F \leq M_\varepsilon \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors,

$$\|Ax\|_F \leq M_\varepsilon \|x\|_E \leq (\varepsilon + N_4) \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Par suite

$$N_3 = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|Ax\|_F \leq \varepsilon + N_4.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient $N_3 \leq N_4$.

Par la définition de N_1, on a

$$\|Ax\|_F \leq N_1 \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors

$$N_1 \in \left\{ M \in \mathbb{R}^+ : \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E \right\}.$$

Donc

$$N_4 = \inf \left\{ M \in \mathbb{R}^+ : \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E \right\} \leq N_1.$$

À la fin, nous avons trouvé la relation suivante

$$N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq N_4 \leq N_1.$$

Cela signifie

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4.$$

□

Définition 2.4.1. *Si A est une application linéaire continue de E dans F, on pose :*

$$\|A\|_{L(E,F)} = N_1 = N_2 = N_3 = N_4.$$

$\|A\|_{L(E,F)}$ *s'appelle la triple norme ou norme subordonnée à la norme de E et F. On a en particulier :*

$$\|Ax\|_F \leq \|A\|_{L(E,F)} \|x\|_E, \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Proposition 2.4.1.

i) $L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

ii) L'application $L(E,F) \to \mathbb{R}^+$, $A \to \|A\|_{L(E,F)}$ est une norme sur $L(E,F)$.

Démonstration.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $A, B \in L(E,F)$, il existe $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ tel que

$$\|Ax\|_F \leq M_1 \|x\|_E \quad \text{et} \quad \|Bx\|_F \leq M_2 \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|(\alpha A + \beta B) x\|_F &= \|\alpha Ax + \beta Bx\|_F \\ &\leq |\alpha| \|Ax\|_F + |\beta| \|Bx\|_F \\ &\leq (\alpha M_1 + \beta M_2) \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E. \end{aligned}$$

Donc, l'application $\alpha A + \beta B$ est continue, cela signifie $\alpha A + \beta B \in L(E,F)$, d'où $L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. □

Proposition 2.4.2. *Si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet, alors $L(E,F)$ est également un espace vectoriel normé complet.*

Démonstration.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L(E,F)$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq n_0 : \|A_n - A_m\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon$$

Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\|_F &= \|(A_n - A_m)\, x\|_{L(E,F)} \\ &\leq \|A_n - A_m\|_{L(E,F)} \|x\|_E \\ &\leq \varepsilon \|x\|_E . \end{aligned}$$

Cela signifie, pour tout $x \in E$, $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F. Par la la complétude de F nous permet d'affirmer que $A_n x$ converge dans F vers une certaine limite que nous notons Ax.

Nous allons montrer que l'application $A : E \to F$ est linéaire. Soientt $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to+\infty} A_n (\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha \lim_{n\to+\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to+\infty} A_n y \\ &= \alpha Ax + \beta Ay. \end{aligned}$$

Montrons que A est continuité, soit $x \in \overline{B}_E(0,1)$, alors

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\| \\ &\leq M \|x\|, \end{aligned}$$

avec $M = \sup\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite borné, d'où la continuité de A.

Montrons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers A dans $L(E,F)$. Soit $x \in \overline{B}_E(0,1)$, on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq n_0 : \|A_n x - A_m x\|_F \leq \varepsilon.$$

Lorsque $m \to +\infty$, on trouver

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \|A_n x - Ax\|_F \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \|A_n - A\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon.$$

Ce qui établit la convergence de la suite $(A_n)_n$ vers A dans l'espace $L(E,F)$. □

Proposition 2.4.3. *Soient E, F et G, trois espaces vectoriels normés, $A \in L(E,F)$ et $B \in L(F,G)$. Alors, $B \circ A \in L(E,G)$ et*

$$\|B \circ A\|_{L(E,G)} \leq \|A\|_{L(E,F)} \|B\|_{L(F,G)} .$$

Démonstration.

Soit $x \in \overline{B}_E(0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
\|(B \circ A)(x)\|_G &= \|B(A(x))\|_G \\
&\leq \|B\|_{L(F,G)} \|Ax\|_F \\
&\leq \|B\|_{L(E,F)} \|A\|_{L(E,F)} \|x\|_E \\
&\leq \|B\|_{L(E,F)} \|A\|_{L(E,F)} .
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|B \circ A\|_{L(E,G)} &= \sup \left\{ \|(B \circ A)(x)\|_G : x \in \overline{B}_E(0,1) \right\} \\
&\leq \|B\|_{L(E,F)} \|A\|_{L(E,F)} .
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4.4. *Soient E et F, deux espaces vectoriels normés, avec E de dimension finie. Alors $L(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$, autrement dit, toute application linéaire dans E de dimension finie est continue.*

Démonstration.

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Pour tout $x \in \overline{B}_E(0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_F &= \left\| A \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \right) \right\|_F \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=n} |x_i| \|Ae_i\|_F \\
&\leq \max_{i \in \{1,..,n\}} |x_i| \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \|Ae_i\|_F N_\infty(x)
\end{aligned}$$

Comme $\dim E = n < \infty$, alores toutes les normés sont équivalentes, alors

$$\exists \alpha > 0 : \forall x \in E,\ N_\infty(x) \leq \alpha \|x\|_E .$$

Donc

$$\|Ax\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|Ae_i\|_F \alpha \right) \|x\|_E .$$

d'où la continuité de A. □

2.5 Les espaces de Banach classiques

2.5.1 Espaces de fonctions continues

Soit $[a, b]$ un intervalle dans $\mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$.

On sait que toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est bornée (et atteint ses bornes), ce qui permet de définir la norme uniforme de la fonction f en posant

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Théorème 2.5.1. *L'espace* $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\ .\ \|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Alors

$$\forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cela signifie, $\forall x \in [a, b]$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complét, nous permet d'affirmer que $(f_n x)_n$ converge vers une certaine limite que nous notons $f(x)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Comme les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues. Soit $x_0 \in [a, b]$, on a

$$\exists \delta_0 > 0, \quad |x - x_0| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, si $|x - x_0| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

d'où la continuité de f.

Montrons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq n_0 : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [a, b]$$

Lorsque $m \to +\infty$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [a, b].$$

Donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \|f_n - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

Ce qui établit la convergence de la suite $(f_n)_n$ vers f dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. $\square$

2.5.2 Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles

Ensemble des suites réelles, noté, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ c'est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{u : u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}.$$

On définit des opérations sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles à partir des opérations sur $\mathbb{R}$. De même pour la relation d'ordre à partir de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni des deux lois :

Notation.

- *Addition : Soit* $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_n + (u_n)_n = (u_n + v_n)_n.$
- *Multiplication :Soit* $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_n \times (u_n)_n = (u_n \times v_n)_n.$
- *L'élément neutre de l'addition est la suite nulle :* $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 0.$

On considère $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées réelles, c'est-à-dire

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_n \text{ est bornée}\right\},$$

On définir la norme sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \qquad \text{pour tout } u \in \ell^\infty(\mathbb{R}).$$

Soit $p \geq 1$, on considère $\ell^p(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p$ soit convergente, c'est-à-dire

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty\right\}.$$

On définir la norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$ par :

$$\|u\|_p = \left[\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{pour tout } u \in \ell^p(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.5.1. *L'espace* $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration.

Soit $(u^m)_m$ une suite de Cauchy dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$u^m = (u_n^m)_n\,, \qquad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que,

$$\forall p, q \geq m_0, \qquad \|u^p - u^q\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n^p - u_n^p| < \varepsilon,$$

Alors,

$$\forall p, q \geq m_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n^p - u_n^p| < \varepsilon,$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n^m)_m$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet. Alors, la suite $(u_n^m)_m$ converge vers une limite que l'on note $u_n \in \mathbb{K}$,

$$u_n = \lim_{m\to\infty} u_n^m, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On note $u := (u_n)_n$, montrons que $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on a

$$\forall p, q \geq m_0, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n^p - u_n^p| < \varepsilon,$$

lorsque $q \to +\infty$,on trouver

$$\forall p \geq m_0, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n^p - u_n| < \varepsilon,$$

Finalement, la suite $(u_n)_n$ est bornée et la suite $(u_n)_n$ converge vers u pour la norme $\|.\|_\infty$. □

2.6 Exercices

2.6.1 Énoncés

Exercice 1. *Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose*

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2}.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Soit n un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_k$ des réels deux à deux distincts. On considère l'application $\|\|_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\|P\|_k = \sum_{i=0}^{i=k} |P(a_i)|\,.$$

A quelle condition cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. *On considère sur* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *les deux normes définies par*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \qquad et \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 4. *Pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, on pose*

$$N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|).$$

(i) *Montrer que* N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

(ii) *Dessiner la boule fermé de centre* $(0, 0)$ *et de rayon* 1.

Exercice 5. *Soit* (E, d) *un espace vectoriel muni d'une distance vérifiant*

(i) *Pour tous* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$.

(ii) *Pour tous* $x, y, z \in E$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Montrer que d *provient d'une norme, c'est-à-dire qu'il existe une norme* N *sur* E *telle que pour tous* $x, y \in E$, $d(x, y) = N(x - y)$.

Exercice 6. *Montrer que si un sous-espace vectoriel* F *d'un espace vectoriel normé* E *est ouvert alors* $F = E$.

Exercice 7. *Dans* $E = \mathbb{R}[X]$*, on considère les normes*

$$\|p\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)| \qquad et \qquad \|p\|_2 = \sup_{t\in[1,2]} |p(t)|.$$

Soit l'ensemble Ω *dans* $\mathbb{R}[X]$ *donné par :*

$$\Omega = \{p \in E : p(0) \neq 0\}.$$

1) *Montrer que* Ω *est ouvert dans* $(E, \|.\|_1)$.

2) *Montrer que* Ω *n'est pas ouvert dans* $(E, \|.\|_2)$.

Exercice 8. *Soient* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *normé par* $\|.\|_\infty$ *et la partie*

$$A = \left\{ f \in E : f(0) = 0 \ et \ \int_0^1 f(t)\, dt \geq 1 \right\}.$$

Montrer que A *est une partie fermée.*

Exercice 9. *Soient* $E = \ell^1(\mathbb{N})$ *normé par* $\|.\|_1$ *et la partie*

$$F = \left\{ u \in \ell^1(\mathbb{N}) : \exists m \geq 2 \ tel\ que\ u_n = 0, \forall n \geq m \right\}.$$

1) *Montrer que l'ensemble F est fermé.*

2) *L'ensemble F est-il borné ?*

Exercice 10. *Soient $E = \ell^{\infty}(\mathbb{N})$ normé par $\|.\|_{\infty}$ et les sous-ensembles suivants*

$$\mathcal{A} = \{(x_n)_n : (x_n)_n \text{ suite convergent } \}.$$

$$\mathcal{B} = \left\{(x_n)_n : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\} = \ell^1(\mathbb{N}).$$

i) Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est fermé dans $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$.

ii) Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ n'est pas fermé dans $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$.

Exercice 11. *On considère l'espace des fonctions continues $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in E$ une fonction qui ne s'annule pas sur $[a,b]$. Posons*

$$\|f\|_{\varphi} = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t) f(t)|, \qquad \text{pour } f \in E$$

L'espace $\left(E, \|.\|_{\varphi}\right)$ est-il complet ?

Exercice 12. *Dans $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, on considère la norme*

$$N(f) = \|f\|_{\infty} + \left\|f'\right\|_{\infty}, \qquad \text{pour } f \in E$$

L'espace (E, N) est-il complet ?

Exercice 13. *On considère l'espace normé $(\mathbb{R}, |.|)$. On pose*

$$\mathbb{D} = \left\{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1. *Montrer que $\mathbb{D}$ est stable par addition et multiplication.*
2. *Posons $u = \sqrt{2} - 1$. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que*

$$0 < u^n < b - a \qquad \text{et} \qquad a < mu^n < b.$$

3. *Déduire que $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$.*

Exercice 14. *Soit E un un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :*

$$x_0 + A = \{x_0 + x : x \in A\} \qquad \text{et} \qquad A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

Montrer que si A est ouvert, alors $x_0 + A$ et $A + B$ sont ouverts.

Exercice 15. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, et $a_1, a_2, ..., a_m \in [0,1]$, on note*

$$\omega_m(t) := (t - a_1)(t - a_2)....(t - a_m).$$

On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, posons

$$N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |\omega_m(t) f(t)|, \qquad \text{pour tout } f \in E.$$

L'espace (E, N) est-il normé ?

2.6.2 Correction des exercices

Solution 1.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$N(x) = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2} = \|(x_1 + x_2, x_2)\|_2 .$$

Comme $\|.\|_2$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$, *alors*

(*i*) $N(x) = 0 \Leftrightarrow \|(x_1 + x_2, x_2)\|_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ *et* $x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(*ii*) *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}^2$, *alors*

$$N(\lambda x) = \|(\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2)\|_2 = |\lambda| \|(x_1 + x_2, x_2)\|_2 = |\lambda| N(x) .$$

(*iii*) *Soit* $x, y \in \mathbb{R}^2$, *alors*

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \|(x_1 + x_2, x_2) + (y_1 + y_2, y_2)\|_2 \\ &\leq \|(x_1 + x_2, x_2)\|_2 + \|(y_1 + y_2, y_2)\|_2 \\ &= N(x) + N(y) , \end{aligned}$$

d'où N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

Solution 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, *tel que* $a_i \neq a_j$, *pour* $i \neq j$. *On a*

(*i*) *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, *alors*

$$\begin{aligned} \|\lambda P\|_k &= \sum_{i=0}^{i=k} |(\lambda P)(a_i)| = \sum_{i=0}^{i=k} |\lambda P(a_i)| \\ &= |\lambda| \sum_{i=0}^{i=k} |P(a_i)| = |\lambda| \|P\|_k . \end{aligned}$$

(*ii*) *Pour* $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, *on a*

$$\begin{aligned} \|P+Q\|_k &= \sum_{i=0}^{i=k} |(P+Q)(a_i)| = \sum_{i=0}^{i=k} |P(a_i) + Q(a_i)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{i=k} |P(a_i)| + \sum_{i=0}^{i=k} |Q(a_i)| \\ &= \|P\|_k + \|Q\|_k . \end{aligned}$$

Donc $\|.\|_k$ *est une norme sur* $\mathbb{R}_n[X]$, *si* $\|P\|_k = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

Si $\|P\|_k = 0$, *alors*

$$\sum_{i=0}^{i=k} |P(a_i)| = 0 \Rightarrow \forall i \in \{0, 1, ..., k\} : P(a_i) = 0,$$

donc le polynôme P *admet* $k+1$ *racines sont d'ordre* 1, *on deux cas,*

1^{er}*cas :* *Si $k > n = \deg P$, alors le polynôme P admet n racines, c'est-à-dire*

$$P(x) = c(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n),$$

comme $P(a_k) = 0$ et $a_i \neq a_j$, pour $i \neq j$, on trouver

$$c(a_k - a_0)(a_k - a_2)\dots(a_k - a_n) = 0 \Rightarrow c = 0,$$

donc $P = 0$, d'où $\|.\|_k$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$2^{iéme}$ *cas : Si $k \leq n$, alors il exite une polynôme Q de degré $n - k - 1$ tel que*

$$P(x) = Q(x)(x - a_0)(x - a_2)\dots(x - a_k),$$

cela ne signifie pas que $P = 0$, donc $\|.\|_k$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution 3.

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on a

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt = \|f\|_\infty,$$

Suppons qu'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_1, \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}).$$

Posons

$$f_n(x) = x^n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

On a

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n + 1 \to \infty, \text{ lorsque } n \to \infty,$$

d'où la contradiction.

Solution 4.

(i) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

a) Si $N(x, y) = 0$,alors

$$|x| = |y| = |x - y| = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0.$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, alors*

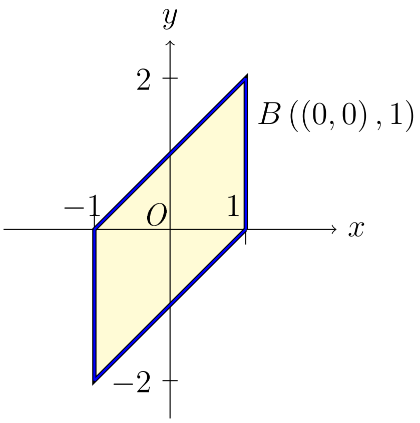
$$\begin{aligned} N[\lambda(x,y)] &= \max(|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda x - \lambda y|) \\ &= |\lambda| \max(|x|, |y|, |x-y|) = |\lambda| N(x,y). \end{aligned}$$

c) Soit $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$*, alors*

$$\begin{aligned} N[(x,y)+(u,v)] &= \max(|x+u|, |y+v|, |(x+u)-(y+v)|) \\ &\leq \max(|x|, |y|, |x-y|) + \max(|u|, |v|, |u-v|) \\ &= N(x,y) + N(u,v). \end{aligned}$$

(ii) La boule fermé de centre $(0, 0)$ *et de rayon* 1*.*

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N(x,y) \leq 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |x-y| \leq 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in [-1,1]^2 : -1+x \leq y \leq 1+x\right\}. \end{aligned}$$



Solution 5.

Soit $x \in E$*, on pose* $N(x) = d(x, 0)$*. Montrons que* N *est une norme sur* E*.*

(i) Si $N(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*.*

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x \in E$*, on a*

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= d(\lambda x, 0) = d(\lambda x, \lambda.0) \ \text{ par } (i) \\ &= |\lambda| d(x,0) = |\lambda| N(x). \end{aligned}$$

(iii) Soit $x, y \in E$*, alors*

$$\begin{aligned} N(x+y) &= d(x+y,0) = d(x+y,-y+y) \ \textit{par (ii)} \\ &= d(x,-y), \ \textit{inégalité triangulaire} \\ &\leq d(x,0) + d(0,-y), \ d \ \textit{espace asymétrique} \\ &= d(x,0) + d(-y,0) \ \textit{par (i)} \\ &= d(x,0) + d(y,0) \\ &= N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Donc N *est une norme sur* E*.*

La distance $\widetilde{d}$ *associée à la norme* N *est donnée par*

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(x,y) &= N(x-y) = d(x-y,0) \\ &= d(x-y,y-y) \ \textit{par (ii)} \\ &= d(x,y). \end{aligned}$$

Solution 6.

On a F *est un sous-espace vectoriel, alors* $0_E \in F$*.*

Comme F *est ouvert, alors il existe* $\varepsilon > 0$*, tel que*

$$B(0,\varepsilon) \subset F.$$

Soit $x \in E$*, tel que* $x \neq 0$*, posons* $y = \dfrac{\varepsilon x}{2\|x\|}$*, alors* $\|y\| = \frac{\varepsilon}{2}$*, donc*

$$y \in B(0,\varepsilon) \subset F.$$

D'autre part, F *est un sous-espace vectoriel, alors*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda y \in F.$$

Si $\lambda = \dfrac{2}{\varepsilon}\|x\| \in \mathbb{R}$*, alors*

$$\lambda y = x \in F.$$

Donc $E \subset F$*, ce qu'implique* $E = F$*.*

Solution 7.

1) *Montrons que* Ω *est un ouvert pour la norme* $\|.\|_1$*.*

Soit $p_0 \in \Omega$*, alors* $p_0(0) \neq 0$*, c'est-à-dire* $|p_0(0)| > 0$*, montrons que*

$$B(p_0,\varepsilon) \subset \Omega, \qquad \textit{avec} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}|p_0(0)| > 0.$$

En effet, soit $p \in B(0, \varepsilon)$*, alors*

$$\|p - p_0\|_1 = \sup_{t \in [0,1]} |p(t) - p_0(t)| < \varepsilon,$$

donc

$$p_0(t) - \varepsilon < p(t) < p_0(t) + \varepsilon, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1],$$

De lui, nous trouvons

$$p_0(0) - \frac{1}{2}|p_0(0)| < p(0) < p_0(0) + \frac{1}{2}|p_0(0)|.$$

On a deux cas,

1^{er} *cas Si* $p_0(0) > 0$*, on trouver*

$$\frac{1}{2}p_0(0) < p(0) < \frac{3}{2}p_0(0) \quad \text{ce qu'implique} \quad p(0) > 0.$$

2^{ieme} *cas Si* $p_0(0) < 0$*, on trouver*

$$\frac{3}{2}p_0(0) < p(0) < \frac{1}{2}p_0(0) \quad \text{ce qu'implique} \quad p(0) < 0.$$

Dans les deux cas, nous trouvons $p(0) \neq 0$*, donc* $p \in \Omega$*, d'où* Ω *est un ouvert.*

2) *Montrons que* Ω *n'est pas un ouvert pour la norme* $\|.\|_2$*, c'est-à-dire*

$$\exists p_0 \in \Omega, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \overline{B}(p_0, \varepsilon) \nsubseteq \Omega.$$

En effet, on pose $\forall t \in \mathbb{R} : p_0(t) = 1$*, on a* $p_0 \in \mathbb{R}[X]$*,* $p_0(0) = 1 \neq 0$*, alors* $p_0 \in \Omega$*.*

Pour tout $\varepsilon > 0$*, soit* $p_\varepsilon \in \mathbb{R}_2[X]$*, tel que*

$$p_\varepsilon(0) = 0, \quad p_\varepsilon(1) = 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad p_\varepsilon(2) = 1 + \varepsilon,$$

donc

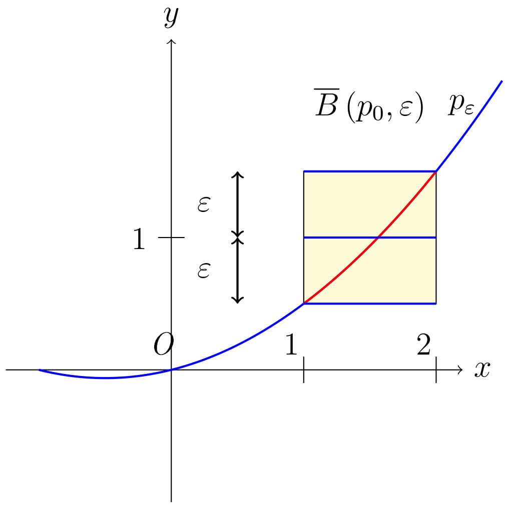
$$p_\varepsilon(t) = at^2 + bt, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Avec

$$a + b = 1 - \varepsilon \text{ et } 2a + b = \frac{1+\varepsilon}{3} \quad \text{ce qu'implique} \quad a = \frac{3\varepsilon - 1}{2} \text{ et } b = \frac{3 - 5\varepsilon}{2}.$$

Alors $p_\varepsilon \notin \Omega$*, car* $p_\varepsilon(0) = 0$ *et comme*

$$\|p_\varepsilon - p_0\|_2 = \varepsilon.$$



donc $p_1 \in \overline{B}(p_0, \varepsilon)$*, d'où* Ω *n'est pas est un ouvert.*

Solution 8.

Soit $(f_n)_n$ *une suite dans* A *telles que* $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* E*. Pour montrer que* A *est une partie fermée dans* E*, il suffit de montrer que* $f \in A$*. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = 0,$$

ce qu'implique

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1].$$

Comme $f_n(0) = 0$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, par l'unicité de la limite* $f(0) = 0$*.*

On a $(f_n)_n \in A$*, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f_n(t)\, dt \geq 1.$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt \geq 1.$$

D'autre part $(f_n)_n$ *suite borné dans* E*, c'est-à-dire*

$$\exists \rho > 0, \quad \forall t \in [0,1], \quad |f_n(t)| \leq \rho.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt \geq 1, \quad \textit{ce qu'implique} \quad \int_0^1 f(t)\, dt \geq 1.$$

Enfin, nous avons trouver que $f \in A$*.*

Solution 9.

1) *L'ensemble F est fermé*

Soit $(x^k)_k$ *une suite dans* F *telles que* $(x^k)_k$ *converge vers* x *dans* E*. Pour montrer que* F *est une partie fermée dans* E*, il suffit de montrer que* $x \in F$*. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^k - x\right\|_1 = \lim_{k\to\infty} \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \left|x_n^k - x_n\right| = 0.$$

Comme

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \qquad \left|x_n^k - x_n\right| \leq \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \left|x_n^k - x_n\right| = 0,$$

alors $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^k = x_n$*, on a*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \exists m_k \geq 2 \text{ tel que } x_n^k = 0, \qquad \forall n \geq m_k,$$

lorsque $k \to +\infty$

$$\exists m \geq 2 \text{ tel que } x_n = 0, \qquad \forall n \geq m.$$

donc $x \in F$*.*

2) *L'ensemble* F *n'est pas borné. Nous supposons le contraire,*

$$\exists \rho > 0 : F \subset B(0, \rho).$$

Posons

$$u^0 = (u_n^n)_n = \begin{cases} \rho, & si\ n \leq 3, \\ 0, & si\ n \geq 4, \end{cases}$$

Alors $u^0 \in F$*, mais* $u^0 \notin B(0,\rho)$*, car*

$$\left\|u^0\right\|_1 = 3\rho > \rho.$$

C'est une contradiction.

Solution 10.

1) *Soit* $(x^k)_k$ *une suite dans* $\mathcal{A}$ *telles que* $(x^k)_k$ *converge vers* x *dans* E*. Pour montrer que* $\mathcal{A}$ *est une partie fermée dans* E*, il suffit de montrer que* $x \in \mathcal{A}$*. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^k - x\right\|_\infty = 0,$$

avec $(x^k)_k = \left((x_n^k)_n\right)_k$ *et* $x = (x_n)_n$*.*

Comme $(x^k)_k \in \mathcal{A}$*, alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, la suite* $(x_n^k)_n$ *est converge vers un élément noté* x^k*, c'est-à-dire*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^k = x^k.$$

Pour tout, $n, m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq \left|x_n - x_n^k\right| + \left|x_n^k - x_m^k\right| + \left|x_m^k - x_m\right| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|x_n - x_n^k\right| + \left|x_n^k - x_m^k\right| + \sup_{M\in\mathbb{N}} \left|x_m^k - x_m\right| \\
&\leq 2\left\|x^k - x\right\|_\infty + \left|x_n^k - x_m^k\right| \\
&\leq 2\left\|x^k - x\right\|_\infty + \left|x_n^k - x^k\right| + \left|x_m^k - x^k\right|,
\end{aligned}$$

lorsque $n, m \to \infty$, *on a*

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| &\leq 2\left\|x^k - x\right\|_\infty + \lim_{n,m\to\infty} \left|x_n^k - x^k\right| + \left|x_m^k - x^k\right| \\
&\leq 2\left\|x^k - x\right\|_\infty, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

lorsque $k \to \infty$, *on a*

$$\lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0.$$

Alors, la suite $(x_n)_n$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$, *qui est complet, donc* $(x_n)_n$ *est convergente, c'est-à-dire* $x \in \mathcal{A}$.

2) *L'ensemble* $\mathcal{B}$ *n'est pas fermé dans* $\ell^\infty(\mathbb{N})$, *c'est-à-dire, il existe* $\left(x^k\right)_k \in \mathcal{B}$, *tel que la suite* $\left(x^k\right)_k$ *converge vers* x *dans* E, *mais* $x \notin \mathcal{B}$.

Posons

$$\left(x^k\right)_k = \left(\left(x_n^k\right)_n\right)_k = \left((n+1)^{-\frac{k+2}{k+1}}\right)_{n,k}.$$

On a $\left(x^k\right)_k \in \mathcal{B}$, *car*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \left|x_n^k\right| = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{k+2}{k+1}}} \simeq \sum\nolimits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < \infty,$$

Série de Riemann, avec $\alpha = \frac{k+2}{k+1} > 1$.

Comme

$$\lim_{k\to\infty} x_n^k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{k+2}{k+1}}} = \frac{1}{n+1}, \text{ pour tout } \mathbb{N}$$

et

$$\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = \infty$$

Alors $\left(x^k\right)_k$ *converge vers* $x = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ *dans* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *et* $x \notin \mathcal{B}$.

Solution 11.

Soit $(f_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* E, *alors*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, p, q \geq n_0 : \|f_p - f_q\|_\varphi < \varepsilon,$$

Comme

$$\|f_p - f_q\|_\varphi = \|\varphi f_p - \varphi f_q\|_\infty ,$$

Nous concluons $(f_n\varphi)_n$ *est suite de Cauchy dans* $(E, \| \,.\, \|_\infty)$ *qui est complet, alors :* $\exists\, g \in E$, *tel que* $(f_n\varphi)_n$ *converge vers* g *de* $(E, \| \,.\, \|_\infty)$. *Comme* $\varphi(x) \neq 0$, *pour tout* $x \in [a, b]$, *posons :*

$$f := \frac{g}{\varphi} \in E.$$

Montrons que $(f_n)_n$*converge vers* f *dans* $(E, \| \,.\, \|_\varphi)$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\varphi &= \lim_{n\to+\infty} \|\varphi f_n - \varphi f\|_\infty \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|\varphi f_n - g\|_\infty = 0,\end{aligned}$$

d'où $(E, \| \,.\, \|_\varphi)$ *est complet.*

Solution 12.

Soit $(f_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* E, *alors*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, p, q \geq n_0 : N(f_p - f_q) < \varepsilon,$$

Comme

$$\forall\, p, q \geq n_0 : N(f_p - f_q) = \|f_p - f_q\|_\infty + \left\|f_p^{'} - f_q^{'}\right\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qu'implique

$$\forall\, p, q \geq n_0 : \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon \qquad et \qquad \left\|f_p^{'} - f_q^{'}\right\|_\infty \leq \varepsilon,$$

Alors les deux suites $(f_n)_n$ *et* $(f_n')_n$ *sont de Cauchy dans* $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *qui est complet, alors il exsite* $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ *tel que*

$$(f_n)_n \to f \qquad et \qquad \left(f_n^{'}\right)_n \to g \text{ dans } \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}).$$

D'autre part

$$f_n(t) = \int_a^t f_n^{'}(s)\, ds + f_n(a), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } t \in [a, b].$$

Lorsque $n \to +\infty$,

$$f(t) = \int_a^t g(s)\, ds + f(a), \quad \text{pour } t \in [a, b].$$

Alors la fonction f *est est dérivable sur* $[a, b]$ *et* $f^{'} = g$, *donc*

$$(f_n)_n \to f \qquad et \qquad \left(f_n^{'}\right)_n \to f^{'} \qquad pour \|.\|_\infty .$$

ce qu'implique

$$(f_n)_n \to f \qquad pour\ N.$$

d'où (E, N) *est un espace de Banach.*

Solution 13.

1. *Soient* $d_1 = p_1 + q_1\sqrt{2}$ *et* $d_2 = p_2 + q_2\sqrt{2}$ *deux éléments de* $\mathbb{D}$. *Alors*

$$d_1 + d_2 = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2}$$

$$d_1.d_2 = (p_1p_2 + 2p_1p_2) + (p_2q_1 + q_2p_2)\sqrt{2}$$

sont des éléments de $\mathbb{D}$.

2. *On a* $u \in (0,1)$, *alors* $\lim\limits_{k\to} u^k = 0$. *Donc pour* $\varepsilon = b - a$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$k \geq n : u^k < b - a.$$

Posons $m = \left[\dfrac{a}{u^n}\right] + 1$. *Alors*

$$m - 1 \leq \frac{a}{u^n} < m.$$

L'inégalité de droite donne $a < mu^n$. *L'inégalité de gauche s'écrit aussi* $mu^n - u^n \leq a$, *ce qui implique*

$$mu^n \leq u^n + a \leq b - a + a$$

d'où

$$a < mu^n < b.$$

3. *Déduisons que* $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$, *on a*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad \exists m, n \in \mathbb{N}, \quad u^n \in [a,b] \ \text{ et } mu^n \in \mathbb{D},$$

car $u \in \mathbb{D}$ *et par* (1) *en déduire que* $u^n \in \mathbb{D}$.

Solution 14.

Montrons que $x_0 + A$ *est ouvert. Soit* $y \in x_0 + A$, *alors*

$$\exists x \in A, \qquad \text{tel que} \qquad y = x_0 + x.$$

Comme A *est ouvert, alors*

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \text{tel que} \qquad B(x, \varepsilon) \subset A.$$

Montrons que $B(y, \varepsilon) \subset x_0 + A$. *En effet, soit* $z \in B(y, \rho)$, *c'est-à-dire* $\|z - y\| < \rho$, *ce qu'implique*

$$\|(z - x_0) - x\| < \rho,$$

Alors

$$z - x_0 \in B(x, \varepsilon) \subset A,$$

donc $z \in x_0 + A$, *d'où* $x_0 + A$ *est ouvert.*

D'autre part, on a

$$A + B = \bigcup_{y \in B} y + A.$$

Pour tout $y \in B$, *on a* $y + A$ *est ouvert, donc* $A + B$ *est ouvert.*

Solution 15.

Soit $f \in E$, *on a*

$$N(f) = \|\omega_m f\|.$$

i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $f \in E$, *on a*

$$N(\lambda f) = \|\omega_m (\lambda f)\| = |\lambda| \|\omega_m f\| = |\lambda| N(f).$$

ii) Soit $f, g \in E$, *alors*

$$\begin{aligned} N(f+g) &= \|\omega_m (f+g)\| \leq \|\omega_m f\| + \|\omega_m g\| \\ &\leq N(f) + N(g). \end{aligned}$$

Donc N *est une norme sur* E, *si* $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Si $N(f) = 0$, *alors*

$$\forall t \in [a,b] : \omega_m(t) f(t) = 0,$$

donc

$$\forall t \in [a,b] \setminus D : f(t) = 0, \qquad \text{avec } D = \{a_1, a_2, ..., a_m\}.$$

Si $t = a_k$, *pour* $k \in \{1, 2, .., m\}$, *on suppose que* $f(a_k) \neq 0$, *comme* f *est continue, alors*

$$\exists \varepsilon > 0 : f(t) \neq 0, \qquad \text{pour } t \in (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) \cap [a,b].$$

C'est une contradiction.

Donc $f = 0$, *d'où* (E, N) *est un espace normé*

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des espace vectoriels ou complexe, de dimension finie ou infinie, dans lesquels on peut faire de la géométrie comme on a l'habitude de le faire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou hermitien $\mathbb{C}^n$. En particulier on peut décomposer leurs éléments dans des bases orthonormées.
Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1 Produit scalaire

Définition 3.1.1. *On appelle forme **sesquilinéaire** sur H tout application telle que u est linéaire par rapport à la 1^{er} variable et semi linéaire par rapport à la $2^{ième}$ variable c-à-d, $\forall x, y, z \in H$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,*

$$u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x, y) + \beta u(y, z), \quad u(z, \alpha x + \beta y,) = \overline{\alpha} u(z, x) + \overline{\beta} u(z, y).$$

*u est dit **hermitienne** si $\forall x, y \in H$, $u(x, y) = \overline{u(y, x)}$.*

Exemple 3.1.1. *Soit $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application définie par $u(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, alors u est forme sesquilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 3.1.2. *Soit $u : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une application définie par $u(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$, alors u est forme sesquilinéaire $\mathbb{C}^n$.*

Remarque. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors **sesquilinéaire** devient bilinéaire et **hermitienne** devient symétrique.*

Proposition 3.1.1. *Soit u une forme sesquilinéaire sur H, les propriétés suivantes sont équivalentes* *(i) u hermitienne,*

(ii) pour tout $x \in H$, $u(x,x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$

Si u hermitienne, pour tout $x \in E$, on a $u(x,x) = \overline{u(x,x)}$, donc $u(x,x) \in \mathbb{R}$.

Montrons $(ii) \Rightarrow (i)$

Soit $x, y \in H$, alors $u(x+y, x+y) \in \mathbb{R}$, comme u une forme sesquilinéaire sur H,

$$\begin{aligned} u(x+y,x+y) &= u(x,x+y) + u(y,x+y) \\ &= u(x,x) + u(x,y) + u(y,x) + u(y,y), \end{aligned}$$

Alors

$$u(x,y) + u(y,x) = u(x+y,x+y) - u(x,x) - u(y,y) := \alpha \in \mathbb{R},$$

D'autre part

$$\begin{aligned} u(x+iy,x+iy) &= u(x,x+iy) - iu(y,x+iy) \\ &= u(x,x) - iu(x,y) + iu(y,x) + u(y,y), \end{aligned}$$

Alors

$$-iu(x,y) + iu(y,x) = u(x+iy,x+iy) - u(x,x) - u(y,y) = \beta \in \mathbb{R},$$

Dinalement, on trouver

$$\begin{cases} u(x,y) + u(y,x) = \alpha, \\ -u(x,y) + u(y,x) = -i\beta, \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} u(y,x) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta), \\ u(x,y) = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta), \end{cases}$$

Donc $u(y,x) = \overline{u(x,y)}$, d'où la forme u hermitienne. □

Définition 3.1.2. *Une forme sesquilinéaire est dit **positive** si $u(x,x) \geq 0$, $\forall x \in H$, elle est dite **définie positive** si $u(x,x) \geq 0$, $\forall x \in H - \{0\}$.*

Définition 3.1.3. *On appelle **produit scalaire** sur H tout forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive. On note un produit scalaire par $\langle .,. \rangle$.*

Exemple 3.1.3.

(i) Sur $\mathbb{C}^n$, on définit le produit scalaire suivante :

$$\langle x, y\rangle = \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}.$$

(ii) Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, on définit le produit scalaire suivante :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Lemme 3.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et Minkoskey.)**.** *Si $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire, alors $\forall x, y \in H$,*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle , \qquad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\langle x+y, x+y\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} . \qquad \text{(Inégalité de Minkoskey)}$$

Démonstration.

Comme u est définie positive, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \lambda\langle x, \lambda x + y\rangle + \langle y, \lambda x + y\rangle \\ &= \lambda\langle x, \lambda x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0 \\ &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Soit

$$\lambda = \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle}, \qquad \text{avec} \qquad \langle x, x\rangle \neq 0.$$

La formule $(*)$ devient

$$-\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle \geq 0.$$

C'est-à-dire

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

En fin, on trouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout $x, y \in H$, on pose $a = \langle x+y, x+y\rangle \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} a &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle x,y\rangle &\leq |\mathrm{Re}\langle x,y\rangle| \leq |\langle x,y\rangle| \\ &\leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}a &\leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \\ &= \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\langle x+y, x+y\rangle \leq \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2.$$

En fin, on trouver l'inégalité de de Minkoskey. □

Définition 3.1.4. *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit un espace* ***préhilbertien****.*

Proposition 3.1.2. *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien, alors l'application ; $N : H \to \mathbb{R}^+$, $x \to N(x) = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme.*

Démonstration.

Montrer que N est une norme.

(i) Soit $x \in H$, tel que $N(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0$, comme $\langle .,.\rangle$ définie positive, alors $x = 0$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}N(x) &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle} \\ &= |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda| N(x).\end{aligned}$$

(iii) Soit $x, y \in H$, par l'inégalité de de Minkoskey, on a

$$\begin{aligned}N(x+y) &= \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \\ &\leq \langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2} \\ &= N(x) + N(y).\end{aligned}$$

□

Remarque. *Tout préhilbertien est un e.v.n pour la norme $\sqrt{\langle .,.\rangle}$.*

Définition 3.1.5. *Un Espace de Hilbert*[1] ***espace de Hilbert*** *est un espace préhilbertien complet.*

3.2 Orthogonalité

Définition 3.2.1. *Soit H un espace de Hilbert, on dit que x est* ***orthogonal*** *y et on écrit $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Proposition 3.2.1. *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, on a*

1. $\forall x \in H,\ 0 \perp x$.
2. $\forall x, y \in H,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x \perp y \Rightarrow \alpha x \perp \beta y$.
3. $\forall x \in H,\ y_i \in H, \forall \alpha_i \in \mathbb{K},\ i \in \overline{1, n},\ \big(x \perp y_i, i \in \overline{1, n}\big) \Rightarrow x \perp \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i y_i$.

Démonstration.

(1) Pour tout $x \in H$,

$$\langle 0_H, x \rangle = \langle 0_{\mathbb{K}}.0_H, x \rangle = 0_{\mathbb{K}} \langle 0_H, x \rangle = 0.$$

(2) Soit $x, y \in H$ tel que $x \perp y$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \langle \alpha x, \beta y \rangle = \alpha \overline{\beta} \langle x, y \rangle = 0.$$

(3) $\forall x \in H,\ y_i \in H, \forall \alpha_i \in \mathbb{K},\ i \in \overline{1, n},\ \big(x \perp y_i, i \in \overline{1, n}\big)$, on

$$\langle x, \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i y_i \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\alpha_i} \langle x, y_i \rangle = 0.$$

□

Définition 3.2.2. *Soit $F \subset H$, on dit que x est orthogonal F et on écrit $x \perp F$ si*

$$\forall y \in H, \qquad \langle x, y \rangle = 0.$$

On pose

$$F^{\perp} := \{x \in H : x \perp F\}.$$

Soit $G \subset H$, on dit que G est orthogonal F et on écrit $G \perp F$ si

$$\forall y \in H, \quad x \in G, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

1.  **David Hilbert**, né en 1862 à Königsberg et mort en 1943 à Göttingen, est un mathématicien allemand.

Proposition 3.2.2. *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, si $x \perp F$, alors $x \perp [F]$ ou $[F]$ est le s.e.v engendre par F.*

Démonstration.

Soit $F \subset H$, on a

$$[F] = \left\{ x \in E : \exists n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \exists x_1, ..., x_n \in F \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i \right\}$$

Soit $x \in H$ tel que $x \perp F$, montrons que $x \perp [F]$. Soit $y \in [F]$, alors il existe $n \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, $y_1, ..., y_n \in F$ tel que $y = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i y_i$, comme $(y_i)_{i \in \overline{1,n}} \in F$, alors $\langle x, y_i \rangle = 0$, pour $i \in \{1, ..., n\}$, donc

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\lambda_i} \langle x, y_i \rangle = 0,$$

ce qui signifie $x \perp y$, pour tout $y \in [F]$, d'où $x \perp [F]$. □

Proposition 3.2.3. *Soient $A, B \subset H$ et $a \in H$, alors*

1. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
2. $H^\perp = \{0\}$.
3. $A \cap A^\perp = \begin{cases} 0 \\ \emptyset \end{cases}$
4. $\{a\}^\perp$ *est un s.e.v fermé.*

Démonstration.

(1) Si $A \subset B$, soit $x \in B^\perp$, pour tout $a \in A$, comme $A \subset B$, on a $a \in B$, alors

$$\langle a, x \rangle = 0, \qquad \text{pour tout } a \in A.$$

donc $x \in A^\perp$, d'où $B^\perp \subset A^\perp$.

(2) Soit $x \in H^\perp$, pour tout $y \in H$, on $\langle x, y \rangle = 0$. Alors $\langle x, x \rangle = 0$, ce qui implique $x = 0_H$, donc $H^\perp \subset \{0\}$, d'où $H^\perp = \{0\}$.

(3) Soit $a \in A \cap A^\perp$, alors $a \in A$ et $a \in A^\perp$, donc

$$a \in A^\perp \Leftrightarrow \forall x \in A : \langle x, a \rangle = 0,$$

comme $a \in A$, alors

$$\|a\|^2 = \langle a, a \rangle = 0.$$

ce qui implique $a = 0$, si $0 \in A$, alors $0 \in A \cap A^{\perp}$ et $\{0\} \subset A \cap A^{\perp}$, donc $A \cap A^{\perp} = 0$

Si $0 \notin A$, alors $0 \notin A \cap A^{\perp}$ et $\{0\} \notin A \cap A^{\perp}$, donc $A \cap A^{\perp} = \emptyset$.

(4) Montrons que $a^{\perp}$ est sous espace vectoriel. Soit$x, y \in a^{\perp}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors$\langle$

$$x, a\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle y, a\rangle = 0.$$

donc

$$\langle \alpha x + y, a\rangle = \alpha\langle x, a\rangle + \langle y, a\rangle = 0,$$

ce qui implique $\alpha x + y \in a^{\perp}$, dons $a^{\perp}$ est sous espace vectoriel.

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) := \langle x, a\rangle, \qquad \text{pour tout } x \in H.$$

L'application f est linéaire, pour tout $x, y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$f(\alpha x + y) = \langle \alpha x + y, a\rangle = \alpha\langle x, a\rangle + \langle y, a\rangle = af(x) + f(y).$$

L'application f est continue, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle x, a\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}.\sqrt{\langle a, a\rangle} \\ &\leq \|a\| \, \|x\| , \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f\|_{L(H,\mathbb{R})} \leq \|a\| .$$

Comme $\{0\}$ est ensemble fermé dans $\mathbb{R}$ et f continue sur H, alors $f^{-1}(0)$ est ensemble fermé dans H,

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{x \in H : f(x) = 0\} \\ &= \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0\} \\ &= \left\{x \in H : x \in a^{\perp}\right\} = a^{\perp}. \end{aligned}$$

D'où, l'ensemble $a^{\perp}$ est fermé dans H. □

Proposition 3.2.4. *Soit $A \subset H$, alors*

1. *$A^{\perp}$ est fermé.*
2. *$A^{\perp} = [A]^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$.*

Démonstration.

(1) Soit $A \subset H$, on a

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \{x \in H : \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\} \\ &= \{x \in H : \forall a \in A,\ x \perp a\} \\ &= \left\{x \in H : x \in \{a\}^{\perp},\ \forall a \in A\right\} \\ &= \bigcap\nolimits_{a \in A} \{a\}^{\perp}. \end{aligned}$$

Pour tout $a \in A$, on a $\{a\}^{\perp}$ est fermé, alors $A^{\perp}$ est fermé.

(2) Montrons que $A^{\perp} = [A]^{\perp}$.

On a $A \subset [A]$, alors $[A]^{\perp} \subset A^{\perp}$. Inversement $A^{\perp} \subset [A]^{\perp}$, soit $x \in A^{\perp}$, montrons que $x \in [A]^{\perp}$, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } z \in [A] : \langle x, z\rangle = 0.$$

Comme $z \in [A]^{\perp}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K},\ z_1, ..., z_n \in A$ tel que $z = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i z_i$, donc

$$\langle x, z\rangle = \left\langle x, \sum\nolimits_{i=1}^{i=n} \lambda_i z_i \right\rangle = \sum\nolimits_{i=1}^{i=n} \overline{\lambda_i}\, \langle x, z_i\rangle = 0,$$

car, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$: $z_i \in A$ et $x \in A$: $\langle x, z_i\rangle = 0$.

Ce qui implique $x \in [A]^{\perp}$, d'où $A^{\perp} = [A]^{\perp}$.

Montrons que $[A]^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$.

On a $[A] \subset \overline{[A]}$, alors $\overline{[A]}^{\perp} \subset [A]^{\perp}$. Inversement, soit $x \in [A]^{\perp}$, alors

$$\text{pour tout } z \in [A] : \langle x, z\rangle = 0.$$

Soit $y \in \overline{[A]}$, alors il existe $(y_n)_n \in [A]$ tel que $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$$\langle x, z\rangle = \left\langle x, \lim_{n\to\infty} y_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0.$$

Ce qui implique $x \in \overline{[A]}^{\perp}$, d'où $\overline{[A]}^{\perp} = [A]^{\perp}$ □

Proposition 3.2.5 (Identité de parallélogramme)**.** *Soit $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors $\forall x, y \in H$, on a*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \qquad ((*))$$

Inversement, si $(H, \|.\|)$ est e.v.n telle que vérifier $(*)$, alors il existe un produit scalaires sur H dont la norme $\|.\|$.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

Démonstration.

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien, soit $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 . \end{aligned}$$

Inversement : Soit $(H, \|.\|)$ est e.v.n telle que vérifier $(*)$, tel que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On pose

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].$$

Montrons que $\langle .,. \rangle$ est définie positive

$$\forall x \in H - \{0\} : \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+x\|^2 = \|x\|^2 > 0.$$

La forme $\langle .,. \rangle$ est symétrique,

$$\langle y, x\rangle = \frac{1}{4}\left[\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right] = \langle x, y\rangle .$$

Montrons que $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire, il suffit de montrer que par rapport à la première varaible, c'est-à-dire

$$\forall x, y, z \in H,\ \lambda \in \mathbb{R} : \langle x+y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \text{ et } \langle \lambda x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle .$$

Posons

$$\varphi(x,y,z) = 4\left[\langle x+y, z\rangle - \langle x, y\rangle - \langle x, z\rangle\right], \quad \text{pour tout } x, y, z \in H.$$

Par définition

$$\varphi(x,y,z) = \|x+y+z\|^2 - \|y+x-z\|^2 - \|y+x\|^2 + \|y-x\|^2 - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 . \quad ((1))$$

D'autre part

$$\|x+y+z\|^2 = \|x+z+y\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+z-y\|^2 .$$

$$\|y+x-z\|^2 = \|x-z+y\|^2 = 2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-z-y\|^2 .$$

Alors

$$\varphi(x,y,z) = \|x-z-y\|^2 - \|x+z-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y+x\|^2 + \|y-x\|^2 . \quad ((2))$$

Par (1) et (2), nous trouvons

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \frac{1}{2}\left[\|x+y+z\|^2+\|x-z-y\|^2\right]-\frac{1}{2}\left[\|y+x-z\|^2+\|x+z-y\|^2\right]\\ &\quad+\|y-z\|^2-\|z+y\|^2\\ &= \left[\|x\|^2+\|z+y\|^2\right]-\left[\|x\|^2+\|y-z\|^2\right]+\|y-z\|^2-\|z+y\|^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x,y,z\in H, \langle x+y,z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle .$$

Montrons que

$$\forall x,y\in H,\ \lambda\in\mathbb{R}:\langle \lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle . \tag{(3)}$$

Il est claire que l'égalité (3) vraire pour $\lambda=0$.

Si $\lambda=-1$, on a

$$\begin{aligned}\langle -x,y\rangle &= \frac{1}{4}\left[\|y-x\|^2-\|y+x\|^2\right]\\ &= -\frac{1}{4}\left[\|y+x\|^2-\|y-x\|^2\right]=-\langle x,y\rangle .\end{aligned}$$

Si $\lambda=n\in\mathbb{N}^*$: On pose $P_n:\langle nx,y\rangle=n\langle x,y\rangle$, alors

$$\langle 2x,y\rangle=\langle x+x,y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,y\rangle=2\langle x,y\rangle .$$

La raisonnement par récurrence : Supposons que varie pour n et montrons pour $n+1$.

$$\begin{aligned}\langle (n+1)x,y\rangle &= \langle nx+x,y\rangle=\langle nx,y\rangle+\langle x,y\rangle\\ &= n\langle x,y\rangle+\langle x,y\rangle\\ &= (n+1)\langle x,y\rangle .\end{aligned}$$

Si $m\in\mathbb{Z}^-$, on a $-m\in\mathbb{N}$, alors

$$\langle mx,y\rangle=-\langle -mx,y\rangle=-(-m)\langle x,y\rangle=m\langle x,y\rangle .$$

Si $\lambda\in\mathbb{Q}$, alors il existe $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{Z}$, tel que $\lambda=\dfrac{m}{n}$, on a

$$\begin{aligned}\langle \lambda x,y\rangle &= \left\langle \frac{m}{n}x,y\right\rangle=m\left\langle \frac{1}{n}x,y\right\rangle=\frac{m}{n}\left[n\left\langle \frac{1}{n}x,y\right\rangle\right]\\ &= \frac{m}{n}\left[\left\langle \frac{n}{n}x,y\right\rangle\right]=\frac{m}{n}\langle x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle .\end{aligned}$$

Si $\lambda\in\mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe $(\lambda_n)_n\in\mathbb{Q}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=\lambda$, donc

$$\begin{aligned}\langle \lambda x,y\rangle &= \left\langle \lim_{n\to+\infty}\lambda_n x,y\right\rangle=\lim_{n\to+\infty}\langle \lambda_n x,y\rangle=\lim_{n\to+\infty}\lambda_n\langle x,y\rangle\\ &= \lambda\langle x,y\rangle .\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.6 (Identité de Pythagore)**.** *Soit* $(H, \langle .,. \rangle)$ *un espace préhilbertien, alors* $\forall x, y \in H$*, on a*

$$x \perp y \Leftrightarrow \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{cases}$$

Démonstration.

$(\Longrightarrow)$ Soit $x, y \in H : \langle x, y \rangle = 0$, alors

$$\begin{aligned} \|y+x\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|x+iy\|^2 &= \langle x+iy, x+iy \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Inversement,

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \|y+x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0,$$

$$i\langle y, x \rangle - i\langle x, y \rangle = \|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0,$$

Alors

$$0 = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle.$$

$$0 = i\langle y, x \rangle - i\langle x, y \rangle = i\langle y, x \rangle + \overline{i\langle y, x \rangle} = 2\mathrm{Re}\, i\langle x, y \rangle = -2\mathrm{Im}\langle x, y \rangle.$$

Ce qui implique

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle + i\langle x, y \rangle = 0$$

d'où $x \perp y$. □

Proposition 3.2.7. *Soit* $x_1, x_2, ..., x_n$ *des vecteurs non nul dans un espace préhilbertien,* 2 *à* 2 *orthogonaux, alors la famille* $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ *est libre.*

Démonstration.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i = 0$, pour tout $k = \overline{1, n}$,

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i, x_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \delta_{i,k} = \alpha_k.$$

Donc $\forall k = \overline{1, n} : \alpha_k = 0$, d'où $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ est libre. □

3.3 Projection hilbertienne

Définition 3.3.1. *Soit E un e.v.n et F s.e.v fermée et soit $a \in E$.*

On appelle projection de a sur F tout point $b \in F$, telle que

$$\|a-b\| = d(a,F) = \inf_{x\in F} d(a,x).$$

Exemple 3.3.1. *Soit E un espace vectoriel normé, soit*

$$F = \overline{B}(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Si $a \in \overline{B}(0,1)$, la rojection de a est lui même.
Si $a \notin \overline{B}(0,1)$, alors la rojection de a est $\frac{a}{\|a\|}$. En effet, il suffit de montrer que

$$d\left(a,\overline{B}(0,1)\right) = \left\|a - \frac{a}{\|a\|}\right\| = \left|1 - \frac{1}{\|a\|}\right| \|a\| = \|a\| - 1.$$

Si $y \in \overline{B}(0,1)$, alors

$$\|a\| - 1 \leq \|a\| - \|y\| \leq \|a-y\|,$$

ce qui implique

$$\|a\| - 1 \leq \inf_{y\in\overline{B}(0,1)} \|a-y\| = d\left(a,\overline{B}(0,1)\right),$$

d'autre part, on a $\frac{a}{\|a\|} \in \overline{B}(0,1)$, alors

$$\|a\| - 1 = \left\|a - \frac{a}{\|a\|}\right\| \geq d\left(a,\overline{B}(0,1)\right),$$

d'où $d\left(a,\overline{B}(0,1)\right) = \|a\| - 1$.

Lemme 3.3.1 (Indentié de médiane)**.** *Soit $a,b,c \in H$ un espace préhilbertien, alors*

$$\|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 = \frac{1}{2}\|b-c\|^2 + 2\left\|a - \frac{1}{2}(b+c)\right\|^2.$$

Démonstration.

Soit $a,b,c \in H$, on pose $x = a-b$ et $y = a-c$, alors

$$x - y = c - b \quad \text{et} \quad x + y = 2a - (b+c).$$

Par l'identité de parallélogramme, on a

$$\begin{aligned}\|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 &= \frac{1}{2}\|c-b\|^2 + \frac{1}{2}\|2a-(b+c)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|c-b\|^2 + 2\left\|a - \frac{1}{2}(b+c)\right\|^2.\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.1 (de projection)**.** *Soit H un espace préhilbertien et F s.e.v complet dans H, alors $\forall a \in H$, a admet un projection $b \in F$, de plus b est unique point qui vérifier $a - b \perp F$. Le point b est note par $P_F(a)$.*

Démonstration.
Posons
$$r = d(a, F) = \inf\{\|a - x\| : x \in F\}.$$
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in F$ tel que
$$r \leq \|a - x_n\| \leq r + \frac{1}{n}.$$
Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, par l'indentié médiane, on a
$$\|a - x_p\|^2 + \|a - x_q\|^2 = \frac{1}{2}\|x_p - x_q\|^2 + 2\left\|a - \frac{1}{2}(x_p + x_q)\right\|^2.$$
donc
$$\frac{1}{2}\|x_p - x_q\|^2 = \|a - x_p\|^2 + \|a - x_q\|^2 - 2\left\|a - \frac{1}{2}(x_p + x_q)\right\|^2.$$
Comme F s.e.v et $x_p, x_q \in F$, alors $\frac{1}{2}(x_p + x_q) \in F$, donc
$$\left\|a - \frac{1}{2}(x_p + x_q)\right\| \geq r.$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}\|x_p - x_q\|^2 = \|a - x_p\|^2 + \|a - x_q\|^2 - 2\left\|a - \frac{1}{2}(x_p + x_q)\right\|^2 \\ &\leq \left(r + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(r + \frac{1}{q}\right)^2 - 2r^2. \end{aligned}$$
Lorsque $p, q \to +\infty$, on trouver
$$\lim_{p,q \to +\infty} \|x_p - x_q\| = 0,$$
c'est-à-dire $(x_n)_n$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc convergente vers un point $b \in F$.
$$\|b - a\| = \left\|\lim_{n\to\infty} x_n - a\right\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = r,$$
donc
$$r = \|b - a\| = d(a, F).$$
Montrons que b est unique, supposons qu'il existe $b' \in F$, tel que $r = \|b' - a\|$. Par l'indentié médiane, on a
$$\|a - b\|^2 + \left\|a - b'\right\|^2 = \frac{1}{2}\left\|b - b'\right\|^2 + 2\left\|a - \frac{1}{2}\left(b + b'\right)\right\|^2,$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}\left\|b-b^{'}\right\|^{2}=\|a-b\|^{2}+\left\|a-b^{'}\right\|^{2}-2\left\|a-\frac{1}{2}b+b^{'}\right\|^{2} \\ &= 2r^{2}-2\left\|a-\frac{1}{2}\left(b+b^{'}\right)\right\|^{2}\leq 2r^{2}-2r^{2}=0, \end{aligned}$$

nous concluons $b=b^{'}$.

Montrons que b vérifier, $a-b\perp F$, c'est-à-dire

$$\forall x\in F:\langle a-b,x\rangle=0.$$

Comme F s.e.v, alors $\forall\lambda\in\mathbb{K}:b-\lambda x\in F$, donc

$$\begin{aligned} \|a-b\|^{2} &\leq \|a-(b-\lambda x)\|^{2} \\ &= \|(a-b)+\lambda x\|^{2} \\ &= \|a-b\|^{2}+|\lambda|^{2}\|x\|^{2}+2\mathrm{Re}\langle a-b,\lambda x\rangle . \end{aligned}$$

Si $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$\lambda^{2}\|x\|^{2}+2\lambda\mathrm{Re}\langle a-b,x\rangle\geq 0,\quad \text{pour tout } \lambda\in\mathbb{R}, \tag{(*)}$$

Alors $\mathrm{Re}\langle a-b,x\rangle=0$.

On remplace x par ix dans $(*)$, on trouver

$$\lambda^{2}\|x\|^{2}+2\lambda\mathrm{Im}\langle a-b,x\rangle\geq 0,\quad \text{pour tout } \lambda\in\mathbb{R},$$

Alors $\mathrm{Im}\langle a-b,x\rangle+0$, d'où $\langle a-b,x\rangle=0$, pour tout $x\in F$.

Supposons que, il existe $b^{'}\in F$ tel que $b^{'}\neq b$

$$\forall x\in F:\left\langle a-b^{'},x\right\rangle=0,$$

comme $b,b^{'}\in F$, alors $b-b^{'}\in F$ et $a-b^{'}\perp b-b^{'}$, donc

$$\left\|a-b^{'}\right\|^{2}+\left\|b-b^{'}\right\|^{2}=\|a-b\|^{2},$$

$$\left\|a-b^{'}\right\|^{2}>\|a-b\|^{2},$$

Impossible, car $\|a-b\|=d(a,F)$, donc absurde. □

Proposition 3.3.1. *Soit H un espace Hilbert et $F\subset H$, alors*

$$F^{\perp}=\{0\}\Leftrightarrow\overline{[F]}=H.$$

Démonstration.

($\Longrightarrow$)Soit $F \subset H$, tel que $\overline{[F]} = H$, alors

$$\overline{[F]}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\},$$

comme $F^{\perp} = \overline{[F]}^{\perp}$, donc $F^{\perp} = \{0\}$.

($\Leftarrow$)Suppons que $[\overline{F}] \neq H$, alors il exsite $x \in H$ et $x \notin [\overline{F}]$, comme $[\overline{F}]$ est un s.e.v fermé. D'après théorème de projection, il existe unique $y \in [\overline{F}]$, telle que $x - y \perp [\overline{F}]$, donc

$$x - y \in [\overline{F}]^{\perp} = F^{\perp} = \{0\},$$

c'est-a-dire $x = y$, absurde. $\square$

Définition 3.3.2. *Soit H un espace de Hilbert et F un s.e.v fermée dans H. On appelle projection sur F note $P_F(x)$, l'application qui associé à tout point $x \in H$ la projection b sur H.*

$$\begin{aligned} P_F : \quad & H \to F \\ & x \to P_F(x) = b : d(x, F) = \|a - b\|. \end{aligned}$$

donc $P_F(x)$ est l'unique point de F qui vérifier

$$x - P_F(x) \in F^{\perp} \Leftrightarrow \langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \forall y \in F.$$

Proposition 3.3.2. *Soit H un espace de Hilbert et F un s.e.v fermée dans H, alors*

1. $F = \{x \in H : x = P_F(x).\}$
2. *P_F est un application linéaire continue.*
3. $\ker P_F = F^{\perp}$.
4. $H = F^{\perp} \oplus F$.
5. $\forall x \in H : x = P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x)$.
6. $\forall x \in H : \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|^2$.

Démonstration.

Soit H un espace de Hilbert et F s.e.v fermé.

(1) Si $x \in F$, alors $P_F(x) = x$, donc $x \in \{x \in H : x = P_F(x)\}$. Si $x = P_F(x) \in F$, alors $x \in F$.

(2) **Linéarité :** Soit $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$, pour tout $z \in F$,

$$\langle \alpha x + y - (\alpha P_F(x) + P_F(y), z \rangle = \alpha \langle x - P_F(x), z \rangle + \langle y - P_F(x), z \rangle = 0,$$

donc $P_F(\alpha x+y)=\alpha P_F(x)+P_F(y)$, c'est-à-dire P_F est linéaire.

Continuité : Soit $x\in H$, on a $P_F(x)\in F$ et $x-P_F(x)\perp F$, alors $x-P_F\left(x\right)\perp P_F(x)$,

$$\|x\|^2=\|x-P_F(x)\|^2+\|P_F(x)\|^2\geq\|P_F(x)\|^2,$$

donc

$$\|P_F(x)\|\leq\|x\|,\qquad \text{pour tout } x\in H.$$

(3) Pour tout $x\in H$, on a $x-P_F\left(x\right)\in F^{\perp}$, alors

$$\begin{aligned}\ker P_F &= \{x\in H:P_F(x)=0\}\\ &= \left\{x\in H^{\perp}:x\in F^{\perp}\right\}\\ &= F^{\perp}\end{aligned}$$

(4) Soit $x\in H$, alors

$$x=P_F(x)+(x-P_F(x)),$$

On a $P_F(x)\in F$, $x-P_F(x)\in F^{\perp}$ et $F\cap F^{\perp}=\{0\}$, car F est sous espace vectoriel, d'où $H=F^{\perp}\bigoplus F$.

(5) Soit $x\in H$, montrons que $P_{F\perp}(x)=x-P_F(x)$. On a $x-P_F(x)\perp F$, c'est-à-dire $x-P_F(x)\in F^{\perp}$,

$$x-(x-P_F(x))=P_F(x)\in F=\left(F^{\perp}\right)^{\perp}=F,$$

d'où $x=P_F\left(x\right)+P_{F^{\perp}}\left(x\right).$

(6) Pour tout $x\in H$, on a $x=P_F\left(x\right)+P_{F^{\perp}}\left(x\right)$

$$x=P_F\left(x\right)+P_{F^{\perp}}\left(x\right)\qquad\text{et}\qquad P_F\left(x\right)\perp P_{F^{\perp}}\left(x\right).$$

Par l'identité de pythagore, on trouver

$$\|x\|^2=\|P_F\left(x\right)\|^2+\|P_{F^{\perp}}\left(x\right)\|^2.$$

□

Proposition 3.3.3. *Soit F une partie dans un espace Hilbert H, alors*

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp}=\overline{[F]}.$$

Démonstration.

On sait que $F^{\perp}=\overline{[F]}^{\perp}$. Montrons que $\left(\overline{[F]}^{\perp}\right)^{\perp}=\overline{[F]}$, si on pose $G=\overline{[F]}$, c'est-à-dire,

$\left(G^{\perp}\right)^{\perp} = G$, avec G est sous espace vectoriel férmé dans H.

Soit $x \in G$, alors

$$\langle x, z\rangle = 0, \qquad \text{pour tout } z \in G^{\perp},$$

donc $x \perp G^{\perp}$, c'est-à-dire $x \in \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$, d'où $G \subset \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.

Inversement, soit $x \in \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$, comme $H = G^{\perp} \bigoplus G$, alors

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{avec} \quad x_1 \in G \quad \text{et} \quad x_2 \in G^{\perp},$$

d'autre part, pour tout $z \in G^{\perp}$, on a

$$0 = \langle x, z\rangle = \langle x_1 + x_2, z\rangle = \langle x_1, z\rangle + \langle x_2, z\rangle .$$

Comme $z \in G^{\perp}$ et $x_1 \in G$, $\langle x_1, z\rangle = 0$, alors $\langle x_2, z\rangle = 0$, ce qui implique $x_2 \in \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$ et $x_2 \in G^{\perp}$, donc

$$x_2 \in \left(G^{\perp}\right)^{\perp} \cap G^{\perp} = \{0\},$$

Alors $x = x_1 \in G$, donc $\left(G^{\perp}\right)^{\perp} \subset G$, d'où $\left(G^{\perp}\right)^{\perp} = G$. □

3.4 Bases Hilbertiennes

Définition 3.4.1. *Une famille infini $(a_n)_n$ est dit linéairement indépendante, si toute famille fini $(a_{n_k})_{k=1}^{k=n}$ est linéairement indépendante.*

La famille $(a_n)_n$ est dit orthonormale si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \langle a_n, a_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

3.5 Théorème de Gram-Schmidt

ndexThéorème de Gram-Schmidt Soit H un espace de Hilbert et $(a_n)_n$ une famille libre dans H, alors il existe une famille orthonormale $(c_n)_n$, tel que

$$[(a_n)_n] = [(c_n)_n] .$$

Démonstration.

Posons

$$F_n = [a_1, a_2, ..., a_n], \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors F_n est sous espace vectoriel, tel que $\dim F_n = n < \infty$, donc F_n est fermée. De plus

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad F_n \subset F_{n+1}.$$

Posons

$$\begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_n = a_n - P_{F_{n-1}}(a_n), \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Montrons que $(b_n)_n$ est orthogonale, soit $n, m \in \mathbb{N}$, avec $m > n$,

$$\begin{aligned} \langle b_n, b_m \rangle &= \left\langle a_n - P_{F_{n-1}}(a_n), a_m - P_{F_{m-1}}(a_n) \right\rangle \\ &= \left\langle a_n, a_m - P_{F_{m-1}}(a_m) \right\rangle - \left\langle P_{F_{n-1}}(a_n), a_m - P_{F_{m-1}}(a_n) \right\rangle. \end{aligned}$$

Comme $n < m$, alors $n \leq m-1$, ce qui implique

$$F_n \subset F_{m-1} \subset F_m,$$

On a $a_n \in F_n \subset F_{m-1}$ et $a_m - P_{F_{m-1}}(a_m) \in F_{m-1}^{\perp}$, alors

$$\left\langle a_n, a_m - P_{F_{m-1}}(a_m) \right\rangle = 0.$$

De même $P_{F_{n-1}}(a_n) \in F_{n-1} \subset F_{m-1}$ et $a_m - P_{F_{m-1}}(a_n) \in F_{m-1}^{\perp}$, alors

$$\left\langle P_{F_{n-1}}(a_n), a_m - P_{F_{m-1}}(a_n) \right\rangle = 0.$$

Donc, $\forall n \neq m : \langle b_n, b_m \rangle = 0$.

Posons

$$c_n = \frac{b_n}{\|b_n\|}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\|c_n\| = 1, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

Pour $n \neq m$,

$$\begin{aligned} \langle c_n, c_m \rangle &= \left\langle \frac{b_n}{\|b_n\|}, \frac{b_m}{\|b_m\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|b_n\| \|b_m\|} \langle b_n, b_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc $(c_n)_n$ est orthonormale.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_1^n, .., \alpha_{n-1}^n \in \mathbb{K}$, tel que

$$P_{F_{n-1}}(a_n) = -\sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha_i a_i \in F_{n-1},$$

On pose $\alpha_n^n = 1$, alors

$$b_n = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^n a_i, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^n a_i, \qquad \text{avec } \lambda_i^n = \frac{\alpha_i^n}{\|b_n\|}.$$

Soit $x \in [(C_n)_n]$, il existe $\beta_1, .., \beta_m \in \mathbb{K}$, tel que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{k=m} \beta_k C_k = \sum_{k=1}^{k=m} \beta_k \left(\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i^n a_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} \mu_k a_k \in [(a_n)_n] \end{aligned}$$

avec $\mu_1, .., \mu_m \in \mathbb{K}$, donc $x \in [(a_n)_n]$, d'où $[(a_n)_n] = [(C_n)_n]$. □

Exemple 3.5.1. *On considère l'espace $H = \mathbb{R}[X]$ muni le produit scalaire*

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} dx, \qquad \textit{pour } P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

On considère la famille de vecteur $a_n \in H : a_n(x) = x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Calculons le terme de C_1 de de Gram-Schmidt,

$$b_0(x) = a_0(x) = 1.$$

$$F_0 = [a_0] = \{\lambda a_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad b_1(x) = a_1(x) - P_{F_0}(a_1)(x).$$

c'est-à-dire $b_1(x) = x - \lambda$, tel que $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 = \langle b_0, b_1 \rangle = \int_0^{+\infty} (x - \lambda) e^{-x} dx = -\lambda + 1,$$

Alors $b_1(x) = x - 1$. Comme $\|a_0\| = 1$ et $\|a_1\| = 2$, alors

$$c_0 = 1 \quad \textit{et} \quad c_1 = \frac{1}{2}(x - 1).$$

Définition 3.5.1. *Soit $(a_n)_n$ une famille orthogonaux dans un espace Hilbert H.*

- *$\forall x \in H$, le scalaire $\xi_k = \langle x, a_n \rangle$ est appelé la composante d'ordre n (le coefficient de Fourier[2]) .*
- *La série $\sum_n \xi_n a_n$ est appelé la série de Fourier.*

Exemple 3.5.2. *Sur $\mathbb{R}^n$, on a $e_k = (0, ..., 1, .., 0)$, alors $(e_k)_{k=1}^{k=n}$ une famille orthogonaux, alors $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, donc $\xi_i = x_i$, pour $i = \overline{1, n}$.*

2.  **Jean Baptiste Joseph Fourier** est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris

Proposition 3.5.1. *Soit* $(a_k)_{k=1}^{k=n}$ *une famille fini orthonormé dans un espace Hilbert* H*. Si* $x = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k a_k$*, alors*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{k=n} |\lambda_k|^2 .$$

Démonstration.

Soit $x \in H$, tel que $x = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k a_k$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k a_k, \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k a_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \langle \lambda_k a_k, \lambda_i a_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_k \overline{\lambda_i} \langle a_k, a_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_k \overline{\lambda_i} \delta_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{k=n} |\lambda_k|^2 . \end{aligned}$$

□

3.6 Inégalité de Bessel

Proposition 3.6.1. *Soit* $(a_n)_n$ *une famille orthonormé dans un espace Hilbert* H*, alors*

- $\forall x \in H$*, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, a_n\rangle|^2$ *est converge.*
- $\forall x \in H$*,* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^2 \leq \|x\|^2$*. (Inégalité de Bessel*[3]*)*

Démonstration.

On pose

$$x_n = \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_k\rangle a_k, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N} : x - x_n \perp x_n$,

$$\begin{aligned} \langle x - x_n, x_n\rangle &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_k\rangle a_k, \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_k\rangle a_k \right\rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_k\rangle a_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_k\rangle a_k, \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_k\rangle a_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \overline{\langle x, a_k\rangle} \langle x, a_k\rangle - \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_p\rangle \overline{\langle x, a_k\rangle} \langle a_p, a_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} |\langle x, a_k\rangle|^2 - \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{k=1}^{k=n} \langle x, a_p\rangle \overline{\langle x, a_k\rangle} \delta_{p,k} \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} |\langle x, a_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{k=n} |\langle x, a_k\rangle|^2 = 0. \end{aligned}$$

3. 

Friedrich Wilhelm Bessel (22 juillet 1784, Minden-17 mars 1846, Königsberg) est un astronome, mathématicien, géodésiste et physicien allemand.

Par l'identité de pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \|x - x_n\|^2 + \|x_n\|^2 \geq \|x_n\|^2, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &= \left\|\sum\nolimits_{k=1}^{k=n} \langle x, a_k\rangle \, a_k\right\|^2 \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |\langle x, a_k\rangle|^2 \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |\xi_p|^2 \\ &\leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

Alors $\sum_{k=1}^{k=n} |\xi_p|^2$ est la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} |\xi_n|^2$, donc $\sum_{n\geq 0} |\xi_n|^2$ est convergente et

$$\sum\nolimits_{n\geq 0} |\xi_n|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Définition 3.6.1. *Soit $(a_n)_n$ une famille orthonormé dans un espace préhilbertien H. On dit que $(a_n)_n$ est une base hilbertien si*

$$\forall x \in H, \qquad x = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n a_n.$$

Proposition 3.6.2. *Soit $(a_n)_n$ est une base hilbertien si et seulement si*

$$(\forall b \in H, \quad b \perp a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (b = 0).$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que $(a_n)_n$ est une base hilbertien.

Soit $b \in H$, tel que $\forall n \in \mathbb{N} : b \perp a_n$, alors

$$b \in [(a_n)_n]^\perp = \overline{[(a_n)_n]}^\perp = H^\perp = \{0\},$$

donc $b = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $b \in H$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b \perp a_n$, implique $b = 0$, d'autre part

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad b \perp a_n \quad &\Leftrightarrow b \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp \\ &\Leftrightarrow b \in [(a_n)_n]^\perp \\ &\Leftrightarrow b \in \overline{[(a_n)_n]}^\perp \end{aligned}$$

Alors $\overline{[(a_n)_n]}^\perp \subset \{0\}$, donc $\overline{[(a_n)_n]}^\perp = \{0\}$, ce qui implique

$$\left(\overline{[(a_n)_n]}^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = H$$

Comme $\overline{[(a_n)_n]}$ est sous espace vectoriel fermé, alors

$$\overline{[(a_n)_n]} = H.$$

d'où $(a_n)_n$ est une base sur H. $\square$

Proposition 3.6.3. *Soit H un un espace préhilbertien et $(a_n)_n$ une famille orthonormé, les assertion suivantes sont équivalentes*

1. *$(a_n)_n$ est une base hilbertien*
2. *$\forall x, y \in H$, de composante $(\xi_n)_n$ et $(\eta_n)_n$, la série $\sum_n \xi_n \overline{\eta_n}$ est converge vers $\langle x, y \rangle$.*
3. *$\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, a_n\rangle|^2$ (égalité de Bessel).*
4. *$\forall x \in H$, la série $\sum_n \xi_n a_n$ est converge vers x.*

Démonstration.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Il suffit de remplacer y par x dans (2).
(3) $\Rightarrow$ (4) : Soit $x \in H$, on pose

$$x_n = \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k a_k, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. On montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n - x \perp x_n$, par l'identité de pythagore, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 - \|x_n\|^2.$$

Mais,

$$\|x_n\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k a_k\right\| = \sum_{k=1}^{k=n} |\xi_k|^2.$$

D'aprés (3), on a $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^2$, c'est-à-dire

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} |\xi_k|^2.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x\|^2 - \|x_n\|^2 = 0.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) : Si pour tout $x \in H$, $x = \sum_n \xi_n a_n$, alors $(a_n)_n$ est une base hilbertien.
(1) $\Rightarrow$ (2) : Si $(a_n)_n$ est une base hilbertien, alors

$$\forall x \in H : x = \sum_{k\geq 0} \xi_k a_k.$$

On pose $x_n = \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k a_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ou $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|^2 &= \langle x - x_n, x - x_n\rangle = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - \left\langle x, \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k a_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k a_k, x \right\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - \sum_{k=1}^{k=n} \overline{\xi_k} \langle x, a_k\rangle - \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \langle a_k, x\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - \sum_{k=1}^{k=n} \overline{\xi_k}\xi_k - \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k\overline{\xi_k} \\
&= \|x\|^2 - \|x_n\|^2 .
\end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$, c'est-à-dire

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} |\xi_k| = \sum_{n\geq 1} |\xi_n| .$$

Par l'identité de parallélogramme

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] + \frac{i}{4}\left[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right],$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4}\left\{\left(|\xi_n+\eta_n|^2 - |\xi_n-\eta_n|^2\right) + i\left(|\xi_n+i\eta_n|^2 - |\xi_n-i\eta_n|^2\right)\right\} \\
&= \sum_{n\geq 1} \langle \xi_n, \eta_n\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \sum_{n\geq 1} \xi_n\overline{\eta_n}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.6.4. *Soit H un espace de Hilbert séparables alors H admet une base hilbertien.*

Démonstration.

Soit H un espace de Hilbert séparables, il existe $(a_n)_n$, tel que

$$\overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}} = H.$$

Comme $(a_n)_n \subset [(a_n)_n] \subset H$, alors

$$\overline{[(a_n)_n]} = H.$$

Soit $(b_n)_n$ une sous famille de $[(a_n)_n]$ libre et telle que

$$[(a_n)_n] = [(b_n)_n],$$

alors $\overline{[(b_n)_n]} = H$. Par Par le Théoréme de Gram-Schmidt, il existe $(c_n)_n$ orthonormal, tel que

$$[(c_n)_n] = [(b_n)_n],$$

donc

$$\overline{[(c_n)_n]} = \overline{[(b_n)_n]} = H,$$

d'où $(c_n)_n$ est une base sur H. □

3.7 Le Théorème de représentation de Riesz

Lemme 3.7.1. *Soit H un espace de Hilbert. Pour $a \in H$, on pose*

$$\psi_a : H \to \mathbb{C}, \qquad x \to \psi_a(x) = \langle x, a \rangle .$$

Alors L'application $\psi_a \in H^{'}$.

Démonstration.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} \psi_a(\alpha x + \beta y) &= \langle \alpha x + \beta y, a \rangle \\ &= \alpha \langle x, a \rangle + \beta \langle y, a \rangle \\ &= \alpha \psi_a(x) + \beta \psi_a(y) \end{aligned}$$

d'où ψ_a est linéaire.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\psi_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \|x\| ,$$

d'où la forme linéaire $\psi_a$est continue, donc un élément de $H^{'}$. □

On définit alors une application $T : H \to H^{'}$ par :

$$a \to Ta = \psi_a.$$

Théorème 3.7.1 (Théorème de Riesz[4]). *Soit H un espace de Hilbert. Alors*

1) *L'application T est une isométrie i.e.*

$$\textit{pour tout } a \in H : \|Ta\|_{H'} = \|a\|_H .$$

2) *Soit A est forme linéaire continue i.e. $A \in H^{'}$, alors il existe un unique $a \in H$, tel que*

$$A = Ta \qquad \textit{et} \qquad \|A\|_{H'} = \|a\| .$$

4.  **Frigyes Riesz** né le 22 janvier 1880 à et mort le 28 février 1956 à Budapest, est un mathématicien hongrois. Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle

Démonstration.

1) On a T est bien définie, car $\forall x \in H : Tx = \psi_x \in H'$.

L'application T est semi-linéaire, Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $a, b \in H$, on a

$$\begin{aligned} T(\alpha a + \beta b)(x) &= \psi_{\alpha a+\beta b}(x) = \langle x, \alpha a + \beta b\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x, a\rangle + \overline{\beta}\langle x, b\rangle \\ &= \overline{\alpha}\psi_a(x) + \overline{\beta}\psi_\beta(x) \\ &= \left(\overline{\alpha}\psi_a + \overline{\beta}\psi_\beta\right)(x) \\ &= \left(\overline{\alpha}Ta + \overline{\beta}Tb\right)(x). \end{aligned}$$

Donc $T(\alpha a + \beta b) = \overline{\alpha}Ta + \overline{\beta}Tb$ L'application T est semi-linéaire

Montrons que T est isométrie, pour tout $x, a \in H$, on a

$$|(Ta)(x)| = |\psi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\|_H \|a\|_H,$$

alors

$$\text{pour tout } a \in H, \quad \|Ta\|_{H'} \leq \|a\|_H.$$

Pour $x_0 = \dfrac{a}{\|a\|_H}$, avec $a \neq 0$, alors

$$(Ta)(x_0) = \psi_a(x_0) = \left\langle \frac{a}{\|a\|_H}, a\right\rangle = \|a\|_H = \|x_0\| \|a\|_H.$$

Donc

$$\text{pour tout } a \in H, \quad \|Ta\|_{H'} = \|a\|_H.$$

Soit A est forme linéaire continue, montrons que

$$\exists \text{ unique } a \in H : A = Ta.$$

Si $A = 0$, alors $a = 0$, donc

$$\psi_a(x) = \langle x, a\rangle = 0 = Ax.$$

Si $A \neq 0$, alors

$$\exists b \in H : Ab \neq 0.$$

Comme $A \in H'$, alors $\ker A$ est sous espace vectoriel fermé, donc

$$H = \ker A \oplus \ker A^{\perp}.$$

On a $b \in H$, alors

$$\exists b_1 \in \ker A \text{ et } b_2 \in \ker A^{\perp} \text{ tel que } b = b_1 + b_2,$$

Comme $b_1 \in \ker A$ et $b_2 \in \ker A^{\perp}$, alors $A(b_1) = 0$ et $A(b_2) \neq 0$, donc

$$A(b) = A(b_1 + b_2) = A(b_1) + A(b_2) = A(b_2) \neq 0.$$

Posons

$$y = x - \frac{A(x)}{A(b_2)} b_2, \qquad \text{pour tout } x \in H,$$

alors

$$A(y) = A\left(x - \frac{A(x)}{A(b_2)} b_2\right) = A(x) - A\left(\frac{A(x)}{A(b_2)} b_2\right) = 0.$$

c'est-à-dire $y \in \ker A$, comme $b_2 \in \ker A^{\perp}$, alors $\langle y, b_2 \rangle = 0$,

$$0 = \langle y, b_2 \rangle = \langle x, b_2 \rangle - \frac{A(x)}{A(b_2)} \langle b_2, b_2 \rangle .$$

Donc

$$A(x) = A(b_2) \frac{\langle x, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} = \left\langle x, \frac{\overline{A(b_2)}}{\|b_2\|^2} b_2 \right\rangle = (Ta)(x),$$

avec

$$a = \frac{\overline{A(b_2)}}{\|b_2\|^2} b_2 \in H,$$

comme T est une isométrie, alors $\|A\|_{H'} = \|a\|$. □

3.8 Exercices

3.8.1 Énoncés

Exercice 16. *Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel H, k un réel et $\Phi : H \times H \to \mathbb{R}$ l'application déterminée par*

$$\Phi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle .$$

Donner une condition nécessaire et suffisant pour que Φ soit un produit scalaire.

Exercice 17. *L'espace de Hilbert $L^2(]0,1[)$ est noté H et $\langle ., . \rangle$ désigne son produit scalaire. Soit*

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in H : \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

(*a*) *Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.*

(*b*) *Montrer que $\mathcal{F}^{\perp} = \mathbb{R}h$ où $h \in H$ est défini par $h = 1$, p.p sur $]0,1[$.*

(*c*) *Calculer la projection orthogonal de g sur $\mathcal{F}$ où $g \in H$ est défini par $g(x) = x^2$.*

Exercice 18. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire.*

(a) *Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\|\Phi x\|_2 = \|x\|_1$, *pour tout* $x \in H_1$.*(l'application* Φ *est une isométrie linéaire)*

(ii) $\langle \Phi x, \Phi y \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$, *pour tous* $x, y \in H_1$.

(b) *Montrer que, si* Φ *est une isométrie linéaire est est nécessairement injective.*

(c) *On suppose que* $\Phi : H_1 \to H_2$ *est une isométrie linéaire. Montrer que :*

(i) $\Phi(H_1)$ *est un espace de Hilbert, s'il est muni du produit scalaire de* H_2.

(ii) *Si* E_1 *est un s.e.v dense de* H_1, *alors* $\Phi(E_1)$ *est dense dans* $\Phi(H_1)$.

(iii) *Si* (e_j) *est une base hilbertienne de* H_1, *alors* $(\Phi(e_j))$ *est une base hilbertienne de* $\Phi(H_1)$.

Exercice 19. *L'espace* $L^p(\mathbb{R})$, *muni de sa norme usuelle avec* $1 \leq p < +\infty$, *est-il un espace de Hilbert.*

Exercice 20. *Soit* H *un espace préhilbertien et soit* $(x_n)_n \in H$.

– *Montrons que, si* $(\langle x_n, x \rangle)_n$ *converge vers* $\langle x, x \rangle$ *et* $\|x_n\|$ *converge vers* $\|x_n\|$, *alors* $(x_n)_n$ *converge vers* x.

Exercice 21. *Soient* M *et* N *des sous-espaces fermés de* H *tels que*

$$\forall u \in M,\ \forall v \in N, \qquad \langle u, v \rangle = 0.$$

Montrer que $M + N$ *est fermé dans* H.

Exercice 22. *Dans* $H = \ell^2(\mathbb{N})$, *on considère le produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle = \sum\nolimits_{n=0}^{n=+\infty} u_n v_n.$$

Soient $0 < \alpha < \beta$. *Pour* $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, *on pose*

$$\Phi(u) = \sum\nolimits_{n=0}^{n=+\infty} a_n u_n^2 + b_n u_n.$$

1. *où* $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ *sont des suites réelles avec* $(a_n)_n \in [\alpha, \beta]$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $b \in \ell^2(\mathbb{N})$.
   – *Vérifier que l'application* $\Phi : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *est bien définie et continue.*

Exercice 23. *On considère l'espace* $H = \ell^2(\mathbb{N})$,

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in \ell^2(\mathbb{N}) : u_{2n} = 0 \right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ u \in \ell^2(\mathbb{N}) : u_{2n} = 2^{-n} u_{2n-1},\ n \geq 1 \right\},$$

– *Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des fermés de $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Exercice 24. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $H = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ définie pour tout $P, Q \in H$ par*

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{k=n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0).$$

1) *Montrer que $(H, \langle .,. \rangle)$ est un espace pré hilbertien.*

2) *Calculer (x^p, x^q) pour tout $(p,q) \in \{1, 2, ..., n\}^2$.*

3) *En déduire une base orthonormée de $(H, \langle .,. \rangle)$.*

4) *Déterminer le projeté orthogonal de $q : t \to t^3 + t^2$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.*

Exercice 25. *On suppose $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par*

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, Q(t)\, dt.$$

1) *Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] : \int_{-1}^{1} |t|\, P(t)\, dt = 0 \right\}$ est un s.e.v fermé de H.*

2) *Soit $Q \in \mathcal{F}^{\perp}$, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,*

$$\int_{-1}^{1} p(t)\, Q(t)\, dt = \left(\int_{-1}^{1} |t|\, P(t)\, dt \right) \left(\int_{-1}^{1} Q(t)\, dt \right).$$

Exercice 26. *Soit $H = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in H$, on pose*

$$\varphi(f, g) = \int_{0}^{1} f'(t)\, g'(t)\, dt + f(1)\, g(0) + f(0)\, g(1).$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur H.

Exercice 27. *Soit $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

On pose

$$\mathcal{F} = \{ f \in H : f(t) = 0,\ \text{pour } t \in [-1, 0] \}$$

1) *Montrer que F est un s.e.v fermé de H.*

2) *Caractériser le sous-espace $\mathcal{F}^{\perp}$.*

3.8.2 Correction des exercices

Solution 16.

Il est claire que Φ est une forme bilinéaire et symétrique sur H.

Montrons que Φ est définie positive, en effet, soit $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(x,x) &= \langle x,x\rangle + k\langle x,a\rangle\langle x,a\rangle \\ &= \|x\|^2 + k\,|\langle x,a\rangle|^2 . \end{aligned}$$

Si $k \geq 0$, alors Φ est définie positive.

Si $k < 0$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \Phi(x,x) &\geq \|x\|^2 + k\,\|x\|^2\,\|a\|^2 \\ &= (k+1)\,\|x\|^2 . \end{aligned}$$

Si $k \geq -1$, alors Φ est définie positive. On trouve que $k \geq -1$ implique Φ est définie positive.

Montrons la réciproque, si Φ est définie positive, alors

$$\Phi(x,x) = \|x\|^2 + k\,|\langle x,a\rangle|^2 \geq 0.$$

Si $x = a$, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(a,a) &= \|a\|^2 + k\,|\langle a,a\rangle|^2 \\ &= 1 + k \geq 0, \end{aligned}$$

donc $k \geq -1$.

Solution 17.

(a) *Soit l'application $A : H \to \mathbb{R}$ est défini par :*

$$Af = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Par l'inégalité de cauchy-schwarz, on a

$$|Af| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \left[\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right]^{1/2} = \|f\|_{L^2} .$$

Alors $A \in L(H,\mathbb{R}) = H'$, comme $\ker A = \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

(b) *Comme $\mathcal{F}$ est un s.e.v fermé de H. Alors*

$$H = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}.$$

Soit $f \in H$, on pose

$$f_1(x) = f(x) - \int_0^1 f(x)\,dx \qquad et \qquad f_2(x) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Alors $f_1 \in \mathcal{F}$ et

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \int_0^1 \left(f(x) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) dx = 0,$$

Donc $f_2 \in \mathcal{F}^\perp$, d'où

$$\mathcal{F}^\perp = \{f \in H : f = const\ p.p\ sur\ ]0,1[\}.$$

(c) La projection orthogonal de g sur $\mathcal{F}$.

$$\langle g - P_{\mathcal{F}}(g), f \rangle = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

C'est-à-dire $g - P_{\mathcal{F}}(g) \in \mathcal{F}^\perp$, alors

$$g(x) - P_{\mathcal{F}}(g)(x) = C \in \mathbb{R},\ p.p\ sur\ ]0,1[$$

Comme $P_{\mathcal{F}}(g) \in \mathcal{F}$, alors

$$0 = \int_0^1 P_{\mathcal{F}}(g)(x)\,dx = \int_0^1 (g(x) - C)\,dx = \frac{1}{3} - C,$$

donc

$$P_{\mathcal{F}}(g)(x) = x^2 - \frac{1}{3}\ p.p\ sur\ ]0,1[.$$

Solution 18.

(a) $[(i) \Rightarrow (ii)]$ Soit $x, y \in H$, par (i), on a

$$\|\Phi(x)\|_2^2 = \|x\|_1^2, \quad \|\Phi(y)\|_2^2 = \|y\|_1^2, \quad \|\Phi(x+y)\|_2^2 = \|x+y\|_1^2.$$

Ainsi

$$\|x+y\|_1^2 = \langle x+y, x+y \rangle_1 = \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle_1,$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x+y)\|_2^2 &= \|\Phi(x) + \Phi(y)\|_2^2 = \langle \Phi(x) + \Phi(y), \Phi(x) + \Phi(y) \rangle_2 \\
&= \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle_2 + \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2 + \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle_2 + \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle_2 \\
&= \|\Phi(x)\|_2^2 + \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2 + \overline{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2} + \|\Phi(y)\|_2^2 \\
&= \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2.
\end{aligned}$$

Par les deux dernières égalités, on trouve

$$\mathrm{Re}\,\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2 = \mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle_1.$$

En remplaçant y par iy, on obtient

$$\operatorname{Re}\left(-i\left\langle \Phi\left(x\right),\Phi\left(y\right)\right\rangle_2\right)=\operatorname{Re}\left(-i\left\langle x,y\right\rangle_1\right)\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left\langle \Phi\left(x\right),\Phi\left(y\right)\right\rangle_2=\operatorname{Im}\left\langle x,y\right\rangle_1,$$

donc

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi\left(x\right),\Phi\left(y\right)\right\rangle_2 &= \operatorname{Re}\left\langle \Phi\left(x\right),\Phi\left(y\right)\right\rangle_2+i\operatorname{Im}\left\langle \Phi\left(x\right),\Phi\left(y\right)\right\rangle_2\\ &= \operatorname{Re}\left\langle x,y\right\rangle_1+i\operatorname{Im}\left\langle x,y\right\rangle_1\\ &= \left\langle x,y\right\rangle_1.\end{aligned}$$

$[(ii)\Rightarrow(i)]$ *Soit* $x\in H$, *par* (ii), *on a*

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi\left(x\right),\Phi\left(x\right)\right\rangle_2=\left\langle x,x\right\rangle_1 &\Leftrightarrow \left\|\Phi\left(x\right)\right\|_2^2=\left\|x\right\|_1^2\\ &\Leftrightarrow \left\|\Phi\left(x\right)\right\|_2=\left\|x\right\|_1\end{aligned}$$

(b) *Montrons que* Φ *est injective, c'est-à-dire* $\ker\Phi=\{0\}$

$$\begin{aligned}\ker\Phi &= \left\{x\in H:\Phi\left(x\right)=0\right\}\\ &= \left\{x\in H:\left\|\Phi\left(x\right)\right\|_2=0\right\}\\ &= \left\{x\in H:\left\|x\right\|_1=0\right\}\\ &= \left\{x\in H:x=0\right\}=\left\{0\right\}.\end{aligned}$$

(c) $[(i)]$ *Montrons que* $\Phi\left(H_1\right)$ *est un espace de Hilbert. On a*

$$\Phi\left(H_1\right)=\left\{\Phi\left(x\right):x\in H_1\right\}.$$

Montrons que $\Phi\left(H_1\right)$ *est une sous espace vectoriel fermé, en effet, soient* $y,z\in\Phi\left(H_1\right)$ *et* $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, *alors*

$$\exists u\in H_1,\quad \exists v\in H_1,\ \textit{tel que } y=\Phi\left(u\right)\quad \textit{et}\quad z=\Phi\left(v\right),$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\alpha y+\beta z &= \alpha\Phi\left(u\right)+\beta\Phi\left(v\right)\\ &= \Phi\left(\alpha u\right)+\Phi\left(\beta v\right)\\ &= \Phi\left(\alpha u+\beta v\right)\in\Phi\left(H_1\right),\ \textit{car } \alpha u+\beta v\in H_1.\end{aligned}$$

donc $\Phi\left(H_1\right)$ *est une sous espace vectoriel.*

Soit $\left(y_n\right)_n$ *une suite dans* $\Phi\left(H_1\right)$ *tel que* $\left(y_n\right)_n$ *est converge vers* y *dans* H_2. *Pour montrer que* $\Phi\left(H_1\right)$ *est une partie fermée dans* H_2, *il suffit de montrer que* $y\in\Phi\left(H_1\right)$. *Alors*

$$\exists\left(x_n\right)_n\in H_1,\qquad \textit{tel que}\qquad \left(y_n\right)_n=\left(\Phi\left(x_n\right)\right)_n.$$

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_1 &= \|\Phi(x_n - x_m)\|_1 = \|\Phi(x_n) - \Phi(x_m)\|_1 \\ &= \|y_n - y_m\|_2 . \end{aligned}$$

Comme $(y_n)_n$ *est une suite Cauchy dans* H_2, *alors* $(x_n)_n$ *est une suite Cauchy dans* H_1, *qu'est complet, alors* $(x_n)_n$ *est converge vers un élément* $x \in H_1$. *Ainsi,*

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \Phi(x) .$$

Donc $y = \Phi(x) \in \Phi(H_1)$. *Comme* $\Phi(H_1)$ *est une sous espace vectoriel fermé, alors* $(\Phi(H_1), \|.\|_2)$ *est une espace de Banach, puisque* $\|.\|_2$ *extrait de* $\langle ., . \rangle_2$, *donc* $(\Phi(H_1), \langle ., . \rangle_2)$ *est un espace de Hilbert.*

(c) [(*ii*)] *Montrons que* $\Phi(E_1)$ *est dense dans* $\Phi(H_1)$. *Soit* $y \in \Phi(H_1)$, *alors*

$$\exists x \in H_1, \qquad \textit{tel que} \qquad y = \Phi(x) .$$

Comme E_1 *est dense dans* H_1, *alors il existe une suite* $(x_n)_n \in E$, *tel que* $(x_n)_n$ *est converge vers* x *dans* H_1.

Posons

$$(y_n)_n = (\Phi(x_n))_n \in \Phi(E) .$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x) = y.$$

Alors $\overline{\Phi(E_1)} = \Phi(H_1)$.

(c) [(*iii*)] *Montrons que* $(\Phi(e_j))$ *est une base hilbertienne de* $\Phi(H_1)$.

Soit $y \in \Phi(H_1)$, *alors*

$$\exists x \in H_1, \qquad \textit{tel que} \qquad y = \Phi(x) .$$

Comme (e_j) *est une base hilbertienne de* H_1, *alors*

$$\exists (\lambda_j)_j \in \mathbb{K}, \qquad \textit{tel que} \qquad x = \sum\nolimits_j \lambda_j e_j,$$

donc

$$\begin{aligned} y &= \Phi(x) = \Phi\left(\sum\nolimits_j \lambda_j e_j\right) \\ &= \sum\nolimits_j \Phi(\lambda_j e_j) \\ &= \sum\nolimits_j \lambda_j \Phi(e_j) . \end{aligned}$$

d'où $(\Phi(e_j))$ *est une base hilbertienne de* $\Phi(H_1)$.

Solution 19.

Si $p=2$, *soit* $f,g\in L^2(\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\|f-g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}}|f(x)+g(x)|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|^2\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[|f(x)+g(x)|^2+|f(x)-g(x)|^2\right]dx\\ &= 2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx+2\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2\,dx\\ &= 2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+2\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Comme l'identité de parallélogramme est vérfait, alors $L^2(\mathbb{R})$ *est un espace de Hilbert.*

Si $p\neq 2$, *on pose*

$$f(x)=\chi_{[0,1]}(x)\quad et\quad g(x)=\chi_{[1,2]}(x),\quad pour\ tout\ x\in\mathbb{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned}&\|f+g\|^2_{L^p(\mathbb{R})}=\|f-g\|^2_{L^p(\mathbb{R})}=4^{\frac{1}{p}},\\ &\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=1.\end{aligned}$$

Donc

$$\underbrace{\|f+g\|^2_{L^p(\mathbb{R})}+\|f-g\|^2_{L^p(\mathbb{R})}}_{2.4^{\frac{1}{p}}}\neq\underbrace{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+2\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}_{4},$$

Comme l'identité de parallélogramme n'est par vérfait pour deux élements.

D'où $L^p(\mathbb{R})$ *n'est pas un espace de Hilbert.*

Solution 20.

$(\Rightarrow)$ *Soient* $(x_n)_n\in H$ *et* $x\in H$, *alors*

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|^2 &= \langle x_n-x,x_n-x\rangle=\langle x_n,x_n\rangle-\langle x_n,x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\langle x,x\rangle\\ &= \|x_n\|^2-\langle x_n,x\rangle-\overline{\langle x_n,x\rangle}+\|x\|^2\\ &= \|x_n\|^2-2\mathrm{Re}\langle x_n,x\rangle+\|x\|^2.\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n,x\rangle=\langle x,x\rangle,\ alors\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\langle x_n,x\rangle=\mathrm{Re}\langle x,x\rangle.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|^2=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|^2-2\mathrm{Re}\langle x_n,x\rangle+\|x\|^2=0.$$

d'où la suite $(x_n)_n$ *est converge vers* x.

$(\Leftarrow)$ *Soient* $(x_n)_n\in H$ *et* $x\in H$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|,$$

lorsque $n \to \infty$, *on trouve* $\|x_n\| \to \|x\|$.

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\langle x_n, x\rangle - \langle x, x\rangle| = |\langle x_n - x, x\rangle| \leq \|x\| \|x_n - x\|,$$

lorsque $n \to \infty$, *on trouve* $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$.

Solution 21.

Soit $(x_n)_n$ *une suite dans* $M+N$ *tel que* $(x_n)_n$ *converge vers* x *dans* H.

Montrons que $x \in M+N$, *en effet, on a* $(x_n)_n \in M+N$, *alors*

$$\exists (u_n)_n \in M \text{ et } \exists (v_n)_n \in N \text{ tel que } (x_n)_n = (u_n)_n + (v_n)_n.$$

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\langle u_n - u_m, v_n - v_m\rangle = \langle u_n, v_n\rangle + \langle u_n, v_m\rangle - \langle u_m, v_n\rangle - \langle u_m, v_m\rangle = 0.$$

Alors $u_n - u_m \perp v_n - v_m$, *pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$, *par l'Identité de Pythagore,*

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 &= \|u_n - u_m + v_n - v_m\|^2 \\ &= \|(u_n + v_n) - (u_m + v_m)\|^2 \\ &= \|x_n - x_m\|^2\end{aligned}$$

Comme $(x_n)_n$ *est convergente, alors* $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy, donc les deux suites* $(u_n)_n$*et* $(v_n)_n$ *sont des Cauchy dans* H, *qu'est complet,*

$$\exists u, v \in H \quad \text{tel que} \quad u = \lim_{n\to\infty} u_n \quad \text{et} \quad v = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Alors $u \in M$ *et* $v \in N$, *car* M *et* N *sont des fermés de* H. *Ainsi*

$$\begin{aligned}x &= \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = u + v\end{aligned}$$

Donc $x \in M+N$.

Solution 22.

(i) L'application $\Phi : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *est bien définie.*

Soit $u = (u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$, *alors*

$$\left(u_n^2\right)_n \in \ell^1(\mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad (b_n u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

Comme $(a_n)_n \in [\alpha, \beta]$, *alors* $(a_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, *donc* $(a_n u_n^2)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, *ce qu'implique*

$$\left(a_n u_n^2 + b_n u_n\right)_n \in \ell^1(\mathbb{N}),$$

c'est-à-dire la série $\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n u_n^2 + b_n u_n$ *la série est converge absolument, d'où*

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n u_n^2 + b_n u_n < \infty.$$

(ii) L'application $\Phi : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *est continue.*

Soient $u = (u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ *et* $v = (u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$, *alors*

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)| &= \left|\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n u_n^2 + b_n u_n - \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n v_n^2 + b_n v_n\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n \left(u_n^2 - v_n^2\right) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n (u_n - v_n)\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n \left(u_n^2 - v_n^2\right)\right| + \left|\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n (u_n - v_n)\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{n=+\infty} |a_n| \left|u_n^2 - v_n^2\right| + \sum_{n=0}^{n=+\infty} |b_n| |u_n - v_n| \\
&\leq \|a\|_\infty \sum_{n=0}^{n=+\infty} |u_n - v_n| |u_n - v_n| + \sum_{n=0}^{n=+\infty} |b_n| |u_n - v_n|
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)| &\leq \|a\|_\infty \|u - v\|_2 \|u + v\|_2 + \|b\|_2 \|u - v\|_2 \\
&= [\|a\|_\infty \|u + v\|_2 + \|b\|_2]_2 \|u - v\|_2 .
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{v \to u} |\Phi(u) - \Phi(v)| \leq \lim_{v \to u} [\|a\|_\infty \|u + v\|_2 + \|b\|_2]_2 \|u - v\|_2 = 0,$$

donc $\lim\limits_{v \to u} \Phi(v) = \Phi(u)$, *c'est-à-dire* Φ *est continue.*

Solution 23.

(i) Montrons que $\mathcal{A}$ *est fermé de* $\ell^2(\mathbb{N})$.

Soit $\left(u^k\right)_k$ *une suite dans* $\mathcal{A}$ *telles que* $\left(u^k\right)_k = \left(\left(u_n^k\right)_n\right)_k$ *converge vers* $u = (u_n)_n$ *dans* H. *Pour montrer que* $\mathcal{A}$ *est une partie fermée dans* H, *il suffit de montrer que* $u \in \mathcal{A}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\left|u_n^k - u_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} \left|u_n^k - u_n\right|^2} = \left\|u^k - u\right\|_2 .$$

Alors

$$\lim_{k \to \infty} \left|u_n^k - u_n\right| \leq \lim_{k \to \infty} \left\|u^k - u\right\|_2 = 0,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{k \to \infty} u_n^k = u_n$, *comme* $\left(u^k\right)_k \in \mathcal{A}$, *alors*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{2n}^k = 0.$$

Lorsque $k \to \infty$, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{2n} = 0,$$

donc $u \in \mathcal{A}$.

(i) Montrons que $\mathcal{B}$ est fermé de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Soit $\left(u^k\right)_k$ une suite dans $\mathcal{B}$ telles que $\left(u^k\right)_k = \left(\left(u_n^k\right)_n\right)_k$ converge vers $u = (u_n)_n$ dans H. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une partie fermée dans H, il suffit de montrer que $u \in \mathcal{B}$. On a $\lim\limits_{k\to\infty} u_n^k = u_n$, comme $\left(u^k\right)_k \in \mathcal{B}$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{2n}^k = 2^{-n} u_{2n-1}^k.$$

Lorsque $k \to \infty$, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{2n} = 2^{-n} u_{2n-1},$$

donc $u \in \mathcal{B}$.

Solution 24.

(1) *Il est claire $\langle .,. \rangle$ que est une forme bilinéaire et symétrique.*

Montrons que $\langle .,. \rangle$ est définié positive, en efftet, soit $P \in H$, alors

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle &= \sum\nolimits_{k=0}^{k=n} P^{(k)}(0)\, P^{(k)}(0) \\ &= \sum\nolimits_{k=0}^{k=n} \left|P^{(k)}(0)\right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\langle P, P \rangle = 0$, alors

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\} : P^{(k)}(0) = 0.$$

Comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors

$$P(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0,$$

donc $P = 0$, d'où $\forall p \in H - \{0\} : \langle P, P \rangle > 0$.

(2) *On pose $L_p(x) := x^p$, on a*

$$L_p^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{k!} x^{p-k} & si\ k \leq p, \\ 0 & si\ k > p. \end{cases}$$

Alors

$$L_p^{(k)}(0) = \begin{cases} p! & si\ k = p, \\ 0 & si\ k \neq p. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle x^p, x^q \rangle &= \langle L_p(x), L_q(x) \rangle \\ &= \sum\nolimits_{k=0}^{k=n} L_p^{(k)}(0)\, L_q^{(k)}(0) \\ &= \delta_{p,q} p! q!. \end{aligned}$$

(3)*La base orthonormée sur H, on a*

$$\langle x^p, x^q \rangle = \delta_{p,q} p!q! \Leftrightarrow \left\langle \frac{x^p}{p!}, \frac{x^q}{q!} \right\rangle = \delta_{p,q}.$$

Donc $\left(\frac{x^p}{p!}\right)_{p\in\{0,1,..,n\}}$ *une base orthonormée sur H.*

(4) *Le projeté orthogonal de q sur $\mathbb{R}_2[X]$.*

Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 < \infty$, *alors* $\mathbb{R}_2[X]$ *est une sous espace vectoriel fermé.*

D'après le théorème de propagation orthogonal, on pose $P_{\mathbb{R}_2[X]}(q) = h \in H$, *alors*

$$\langle q - h, p \rangle = 0, \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}_2[X].$$

Comme $h, p \in \mathbb{R}_2[X]$, *alors*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{pour tout } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

$$R(x) = q(x) - h(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x + (1 - \alpha_2) x^2 + x^3,$$

donc

$$p(0) = a_0, \quad p^{(1)}(0) = a_1, \quad p^{(2)}(0) = 2a_2$$

$$R(0) = -\alpha_0, \quad R^{(1)}(0) = -\alpha_1, \quad R^{(2)}(0) = 2(1 - \alpha_2), \quad R^{(3)}(0) = 6.$$

Puisque $\langle R, p \rangle = 0$, *alors*

$$-\alpha_0 a_0 - \alpha_1 a_1 + 4a_2(1 - \alpha_2) = 0, \quad \text{pour tout } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

donc $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ *et* $\alpha_1 = 1$, *d'où*

$$P_{\mathbb{R}_2[X]}(q)(x) = x^2.$$

Solution 25.

(1) *Montrons que $\mathcal{F}$ est un s.e.v fermé.*

Soit l'application $A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ *défini par*

$$AP = \int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt.$$

Il est claire que A est une forme linéaire. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, *on a*

$$\begin{aligned} |AP| &\leq \int_{-1}^{1} |t| |P(t)|\, dt \leq \int_{-1}^{1} |P(t)|\, dt \\ &\leq \sqrt{\int_{-1}^{1} dt} \sqrt{\int_{-1}^{1} |P(t)|^2\, dt} \\ &= \sqrt{2}\, \|P\|. \end{aligned}$$

Alors A est continue. Comme $\mathcal{F} = \ker A$. Puisque $\ker A$ est un s.e.v fermé, alors $\mathcal{F}$ est un s.e.v fermé.

(2) *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose*

$$P_0(t) = P(t) - \int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt.$$

Alors $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |t| P_0(t)\, dt &= \int_{-1}^{1} |t| \left[P(t) - \int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt\right] dt \\ &= \int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt - \left(\int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt\right) \int_{-1}^{1} |t|\, dt = 0,\end{aligned}$$

donc $P_0 \in \mathcal{F}$.

Soit $Q \in \mathcal{F}^{\perp}$, alors $\langle P_0, Q\rangle = 0$,

$$\begin{aligned}\langle P_0, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} Q(t) \left[P(t) - \int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt\right] dt \\ &= \int_{-1}^{1} Q(t) P(t)\, dt - \int_{-1}^{1} Q(t) \left[\int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt\right] dt \\ &= \int_{-1}^{1} Q(t) P(t)\, dt - \left[\int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt\right] \int_{-1}^{1} Q(t)\, dt = 0.\end{aligned}$$

donc

$$\int_{-1}^{1} Q(t) P(t)\, dt = \left[\int_{-1}^{1} |t| P(t)\, dt\right] \int_{-1}^{1} Q(t)\, dt.$$

Solution 26.

Il est claire que φ est une forme bilinéaire et symétrique sur H.

Montrons que φ est définie positive, en effet, soit $f \in H$, on a

$$\varphi(f, f) = \int_{0}^{1} \left|f'(t)\right|^2 dt + 2f(1) f(0).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}|f(1) - f(0)| &= \left|\int_{0}^{1} f'(t)\, dt\right| \leq \int_{0}^{1} \left|f'(t)\right| dt \\ &\leq \left(\int_{0}^{1} \left|f'(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\varphi(f, f) &= \int_{0}^{1} \left|f'(t)\right|^2 dt + 2f(1) f(0) \\ &\geq (f(1) - f(0))^2 + 2f(1) f(0) \\ &= f^2(1) + f^2(0) \geq 0.\end{aligned}$$

Donc, φ *est positive.*

Si $\varphi(f,f) = 0$, *pour tout* $f \in H$, *alors* $f^2(1) + f^2(0) = 0$, *ce qu'implique* $f(1) = f(0) = 0$, *donc*

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2 dt = 0.$$

Par suite $f'(t) = a \in \mathbb{R}$, *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors*

$$f(t) = at, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Comme $f(1) = 0$, *on trouvera* $= 0$, *alors* $f = 0$, *donc* φ *est définie positive.*

D'où φ *est un produit scalaire sur* H.

Solution 27.

1) *L'ensemble* F *est un s.e.v fermé de* H.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in \mathcal{F}$, *pour tout* $t \in [-1,0]$, *on a*

$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) = 0,$$

alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$, *donc* $\mathcal{F}$ *est un s.e.v.*

Soit $(f_n)_n$ *une suite dans* $\mathcal{F}$, *tel que* $(f_n)_n$ *est convergente vers* f *dans* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, *montrons que* $f \in \mathcal{F}$. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0,$$

Comme $f_n(t) = 0$, *pour* $t \in [-1,0]$, $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt &= \int_{-1}^0 |f_n(t) - f(t)|^2 dt + \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt \\ &= \int_{-1}^0 |f(t)|^2 dt + \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt \to 0, \text{ si } n \to \infty,\end{aligned}$$

donc

$$\int_{-1}^0 |f(t)|^2 dt = 0 \quad \text{ce qu'implique} \quad f(t) = 0, \text{ pour } t \in [-1,0].$$

d'où $\mathcal{F}$ *est fermé dans* H.

2) *Le sous-espace* $\mathcal{F}^\perp$.

$$\mathcal{F}^\perp = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \langle f, g\rangle = 0, \forall g \in \mathcal{F}\}.$$

Soit $g \in \mathcal{F}$, *alors*

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^1 f(t)\,g(t)\,dt = \int_{-1}^0 f(t)\,g(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt = 0,\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{F}^\perp = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f(t) = 0, \text{ pour } t \in [0,1]\}.$$

Bibliographie

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, (1999).

[2] B. Choudhary, S. Nanda, *Functional analysis with applications,* John Wiley & Sons, (1989).

[3] C. Zuily, H. Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, (1995).

[4] D. Li, *Cours analyse fonctionnelle*, ellipses, (2013).

[5] G. Lacombe , Pascal Massat, *Analyse fonctionnelle,* Dunod, (1999).

[6] J. Charles, Mostafa Mbekhta and Hervé Queffélec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateur,* Dunod, (2010).

[7] S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Topologie et analyse fonctionnelle,* Ellipses, (1996).

[8] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe,* Masson, (1995).

Index