République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Théorie Spéctrale

Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants Master Mathématiques des Universités

Par :

ABDERRAHMANE BENIANI

Centre Universitaire d'Ain Témouchent

Institut des Sciences

Départements Mathématiques et Informatiques

E-mail : a.beniani@yahoo.fr

AMIN BENAISSA CHER

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

E-mail : amine.banche@gmail.com

Année Universitaire 2020-2021

Avant-propos

Ce cours porte sur la théorie de spectrale pour des opérateurs bornés et non bornés. Il est destiné aux étudiants Master Mathématiques des Universités.

Il peut servir comme un support pédagogique, car il contient presque tous les éléments de la théorie de spectrale, tous les théorèmes sont démontrés avec des illustrations par des exemples et des exercices résolus à la fin de chaque chapitre.

Le cours comporte sept chapitres :

Le **premier chapitre** est un rappel sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert.

Dans le **deuxième chapitre** on introduit

Le **troisième chapitre** concerne

Auteurs : A. Benaissa Cherif, A. Beniani

Table des matières

1 | Rappels sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Topologie des espaces vectoriels normés

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel normé)**.** *Soit E un espace vectoriel. Un norme sur E est une fonction $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$, qui satisfait les axiomes suivants :*

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(N_2) *Pour tout* $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(N_3) *Pour tout* $x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

*L'espace vectoriel E muni de la norme $\|.\|$ est appelé **espace vectoriel normé**, et noté $(E, \|.\|)$.*

Exemple 1.1.1 (Normes sur $\mathbb{R}^n$.)**.** *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \{1, 2, .., n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned}
&\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| , \\
&\|x\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i| , \\
&\|x\|_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2}, \qquad \textit{Norme Euclidienne} \\
&\|x\|_9 = \left[\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} , \quad p \in [1, +\infty[
\end{aligned}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.2. *On définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ de la maniérer suivante*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| .$$

Remarque. *La distance d est appelée distance associée à la norme $\|.\|$.*

Remarque. *Il est immédiat de vérifier que la distance ainsi définie vérifie bien les propriétés d'une distance.*

Remarque. *Toutes les propriétés des distances ont une traduction en termes de norme dans les espaces vectoriels normés.*

Définition 1.1.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé*

$i)$ Une partie A de E est **bornée**, s'il existe $r \in \mathbb{R}^+$, tel que

$$\|x\| \leq r, \qquad \text{pour tout } a \in A.$$

$ii)$ Le **diamètre** d'une partie bornée A est

$$\delta(A) = \sup \{d(a,b) = \|a-b\| : a, b \in A\}.$$

$iii)$ Soit $x \in E$ et $r > 0$, les ensembles suivants

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) = \|x-y\| < r\},$$

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) = \|x-y\| \leq r\},$$

$$S(x,r) = \{y \in E : d(x,y) = \|x-y\| = r\},$$

sont appelés respectivement **boule ouverte**, **boule fermée** et **sphère** de centre x et de rayon r.

Définition 1.1.3. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, un ensemble $\mathcal{U}$ est appelé ouvert si,*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0 \quad \textit{tel que } B(x,r) \subset \mathcal{U}.$$

Définition 1.1.4. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, un ensemble F est appelé fermé si, F^c est est un ouvert*

Proposition 1.1.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé*

$i)$ *Une boule ouverte dans E est un ouvert.*

$ii)$ *Une boule fermée dans E est un fermé.*

Définition 1.1.5. *La topologie de E est l'ensemble des ouverts de E. On la note $\mathcal{T}$.*

Proposition 1.1.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, pour tout $a \in E$, $r > 0$, on a* *i)* $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

ii) $\left(\overline{B}(a,r)\right)^{\circ} = B(a,r)$.

Définition 1.1.6 (Normes équivalentes)**.** *Deux norme sur un espace vectoriel normé sont dit équivalente si les topologie associer a ces normes sont équivalentes.*

Proposition 1.1.3. *Soit* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes sur* E*. Les propriétés suivante sont équivalente*

(i) $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes.*

(ii) S'il existe des constantes $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$ *telles que*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \qquad \text{pour tout } x \in E$$

Exemple 1.1.3. *Sur* $\mathbb{R}^n$*, les normes* $\|.\|_\infty$*,* $\|.\|_1$ *et* $\|x\|_2$ *sont équivalentes.*
Plus précisément, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 1.1.4. *Deux normes sur un espace vectoriel* E *de dimension fini sont toujours équivalentes.*

Proposition 1.1.5. *Dans e.v.n de dimension fini*

$$A \text{ compact} \Leftrightarrow A \text{ fermé et bornée.}$$

1.1.2 Suites et Séries dans un espace vectoriel normé

Définition 1.1.7. *Soit* $(E, \|.\|)$*, un espace vectoriel normé, et* $u = (u_n)_n$*, une suite de* $(E, \|.\|)$*. On dit que* u *a pour limite* $a \in E$ *dans* $(E, \|.\|)$ *si, et seulement si* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\to+\infty}} \|u_n - a\| = 0$*, cela s'écrit encore :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - a\| \leq \varepsilon.$$

Remarque. *La notion de convergence dans un espace vectoriel normé est donc étroitement liée au choix de la norme sur cet espace.*

Proposition 1.1.6. *Soit* $(E, \|.\|)$*, un espace vectoriel normé*

i) Si une suite converge dans E*, alors sa limite est unique.*

ii) Toute suite convergente de E *est bornée.*

Proposition 1.1.7. *Si* $(E, \|.\|)$ *est un e.v.n et* H *un s.e.v de* E*, alors* $\overline{H}$ *est un s.e.v de* E*.*

Proposition 1.1.8. *Soit* E*, un espace vectoriel, et* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$*, deux normes sur* E*.*
$\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes si et seulement si toute suite convergeant vers* 0_E *pour une norme converge vers* 0_E *pour l'autre norme.*

Définition 1.1.8 (Notion de densité dans un espace vectoriel normé)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$*, un espace vectoriel normé, et* X *une partie de* E*. On dit que* X *est dense dans* E *si, et seulement si* $\overline{X} = E$*.*

Proposition 1.1.9. *Soit* $(E, \|.\|)$*, un espace vectoriel normé, les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) A est dense dans E.

ii) Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n$ dans A qui converge vers x.

iii) Pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}$ de E, on a $\mathcal{U} \cap E \neq \emptyset$.

Exemple 1.1.4. *L'esnsemble* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $(\mathbb{R}, |.|)$*.*

Définition 1.1.9 (Suites de Cauchy)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$*, un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* E *est une suite de Cauchy si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_0 \quad \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.10. *Soit* $(E, \|.\|)$*, un espace vectoriel normé, alors*

i) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

ii) Toute suite de Cauchy est une suite bornée.

Définition 1.1.10 (Séries dans un espace vectoriel normé)**.** *Soit* E *e.v.n et* $(x_n)_n$ *une suite dans* E*. On dit que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} x_k$ *est convergente.*
On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *est normalement convergente si et seulement si la a série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ *est convergente dans* $\mathbb{R}^+$*.*

Définition 1.1.11. *Un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est appelé espace de Banach*[1] *si* E*, muni de la distance canonique associée à* $\|.\|$ *est un espace métrique complet.*

1. **Stefan Banach** (1892 – 1945) est un Mathématicien polonais.

Proposition 1.1.11. *Soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes sur un espace vectoriel* E *sont équivalentes, alors* $(E, \|.\|_1)$ *est un espace de Banach si et seulement si* $(E, \|.\|_2)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.12. *Tout espace vectoriel normé de dimension fini est un espace de Banach.*

Exemple 1.1.5. $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$ *sont des espace de Banach, car : la dimension de* n *est finie.*

Théorème 1.1.1. *Soit* E *un espace vectoriel normé. Les deux propriétés suivantes de* E *sont équivalentes*

(a) E est un espace de Banach.

(b) Toute série d'éléments de E normalement convergente est convergente.

Proposition 1.1.13. *Soit* $(E, \|.\|)$ *est un espace de Banach et* F *s.e.v fini, alors* $(F, \|.\|)$ *est un espace de Banach.*

1.1.3 Exemples

L'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ Soit $[a,b]$ un intervalle dans $\mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$.

On sait que toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est bornée (et atteint ses bornes), ce qui permet de définir la norme uniforme de la fonction f en posant

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

L'espace $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \| \, . \, \|_\infty)$ est un espace de Banach.

L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Ensemble des suites réelles, noté, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ c'est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{u : u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}.$$

On définit des opérations sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles à partir des opérations sur $\mathbb{R}$. De même pour la relation d'ordre à partir de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées réelles, c'est-à-dire

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_n \text{ est bornée}\right\},$$

On définir la norme sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|, \qquad \text{pour tout } u \in \ell^\infty(\mathbb{R}).$$

Soit $p \geq 1$, on considère $\ell^p(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p$ soit convergente, c'est-à-dire

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\}.$$

On définir la norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$ par :

$$\|u\|_p = \left[\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{pour tout } u \in \ell^p(\mathbb{R}).$$

L'espace $(\ell^p(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.2 Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des espace vectoriels ou complexe, de dimension finie ou infinie, dans lesquels on peut faire de la géométrie comme on a l'habitude de le faire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou hermitien $\mathbb{C}^n$. En particulier on peut décomposer leurs éléments dans des bases orthonormées.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.2.1 Produit scalaire

Définition 1.2.1. *On appelle forme **sesquilinéaire** sur E tout application telle que u est linéaire par rapport à la 1^{er} variable et semi linéaire par rapport à la $2^{ième}$ variable c-à-d, $\forall x, y, z \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,*

$$u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x, y) + \beta u(y, z), \quad u(z, \alpha x + \beta y,) = \overline{\alpha} u(z, x) + \overline{\beta} u(z, y).$$

*u est dit **hermitienne** si $\forall x, y \in E$, $u(x, y) = \overline{u(y, x)}$.*

Exemple 1.2.1. *Soit $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application définie par $u(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, alors u est forme sesquilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 1.2.2. *Soit $u : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une application définie par $u(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$, alors u est forme sesquilinéaire $\mathbb{C}^n$.*

Remarque. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors **sesquilinéaire** devient bilinéaire et **hermitienne** devient symétrique.*

Proposition 1.2.1. *Soit u une forme sesquilinéaire sur E, les propriétés suivantes sont équivalentes* *(i) u hermitienne,*

(ii) pour tout $x \in E$, $u(x,x) \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.2. *Une forme sesquilinéaire est dit* ***positive*** *si $u(x,x) \geq 0$, $\forall x \in E$, elle est dite* ***définie positive*** *si $u(x,x) \geq 0$, $\forall x \in E - \{0\}$.*

Définition 1.2.3. *On appelle* ***produit scalaire*** *sur E tout forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive. On note un produit scalaire par $\langle .,. \rangle$.*

Exemple 1.2.3.

(i) Sur $\mathbb{C}^n$, on définit le produit scalaire suivante :

$$\langle x, y \rangle = \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}.$$

(ii) Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, on définit le produit scalaire suivante :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Lemme 1.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et Minkoskey.)**.** *Si $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire, alors $\forall x, y \in E$,*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

$$\langle x+y, x+y \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.2.4. *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit un espace* ***préhilbertien****.*

Proposition 1.2.2. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien, alors l'application ; $N : E \to \mathbb{R}^+$, $x \to N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme.*

Remarque. *Tout préhilbertien est un e.v.n pour la norme $\sqrt{\langle .,. \rangle}$.*

Définition 1.2.5. *Un Espace de Hilbert*[2] ***espace de Hilbert*** *est un espace préhilbertien complet.*

2. **David Hilbert**, né en 1862 à KönigsbergH 1 et mort en 1943 à Göttingen, est un mathématicien allemand.

1.2.2 Orthogonalité

Définition 1.2.6. *Soit E un espace de Hilbert, on dit que x est* ***orthogonal*** *y et on écrit $x \perp y$ si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Proposition 1.2.3. *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert, on a*

1. $\forall x \in E$, $0 \perp x$.
2. $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \perp y \Rightarrow \alpha x \perp \beta y$.
3. $\forall x \in E$, $y_i \in E, \forall \alpha_i \in \mathbb{K}$, $i \in \overline{1,n}$, $\left(x \perp y_i, i \in \overline{1,n}\right) \Rightarrow x \perp \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i y_i$.

Définition 1.2.7. *Soit $F \subset E$, on dit que x est orthogonal F et on écrit $x \perp F$ si*

$$\forall y \in E, \qquad \langle x, y\rangle = 0.$$

On pose

$$F^{\perp} := \{x \in E : x \perp F\}.$$

Soit $G \subset E$, on dit que G est orthogonal F et on écrit $G \perp F$ si

$$\forall y \in E, \quad x \in G, \quad \langle x, y\rangle = 0.$$

Proposition 1.2.4. *Soient $A, B \subset E$ et $a \in E$, alors*

1. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. $E^{\perp} = \{0\}$.
3. $A \cap A^{\perp} = \begin{cases} 0 \\ \emptyset \end{cases}$
4. $\{a\}^{\perp}$ *est un s.e.v fermé.*

Proposition 1.2.5. *Soit $A \subset E$, alors*

1. $A^{\perp}$ *est fermé.*
2. $A^{\perp} = [A]^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$.

Proposition 1.2.6 (Identité de parallélogramme)**.** *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors $\forall x, y \in E$, on a*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \qquad ((*))$$

Inversement, si $(E, \|.\|)$ est e.v.n telle que vérifier $(*)$, alors il existe un produit scalaires sur E dont la norme $\|.\|$.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

Proposition 1.2.7 (Identité de Pythagore)**.** *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien, alors $\forall x, y \in E$, on a*

$$x \perp y \Leftrightarrow \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{cases}$$

Définition 1.2.8 (Projection hilbertienne)**.** *Soit E un e.v.n et F s.e.v fermée et soit $a \in E$. On appelle projection de a sur F tout point $b \in F$, telle que*

$$\|a-b\| = d(a, F) = \inf_{x \in F} d(a, x).$$

Théorème 1.2.1 (de projection)**.** *Soit E un espace préhilbertien et F s.e.v complet dans E, alors $\forall a \in E$, a admet un projection $b \in F$, de plus b est unique point qui vérifier $a - b \perp F$. Le point b est note par $P_F(a)$.*

Proposition 1.2.8. *Soit E un espace Hilbert et $F \subset E$, alors*

$$F^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \overline{[F]} = E.$$

Définition 1.2.9. *Soit E un espace de Hilbert et F un s.e.v fermée dans E. On appelle projection sur F note $P_F(x)$, l'application qui associé à tout point $x \in E$ la projection b sur E.*

$$\begin{aligned} P_F : \quad & E \to F \\ & x \to P_F(x) = b : d(x, F) = \|a-b\|. \end{aligned}$$

donc $P_F(x)$ est l'unique point de F qui vérifier

$$x - P_F(x) \in F^{\perp} \Leftrightarrow \langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \forall y \in F.$$

Proposition 1.2.9. *Soit E un espace de Hilbert et F un s.e.v fermée dans E, alors*

1. $F = \{x \in E : x = P_F(x).\}$
2. *P_F est un application linéaire continue.*
3. $\ker P_F = F^{\perp}$.
4. $E = F^{\perp} \oplus F$.
5. $\forall x \in E : x = P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x)$.
6. $\forall x \in E : \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|^2$.

Proposition 1.2.10. *Soit F une partie dans un espace Hilbert E, alors*

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{[F]}.$$

Définition 1.2.10 (Bases Hilbertiennes)**.** *Une famille infini $(a_n)_n$ est dit linéairement indépendante, si toute famille fini $(a_{n_k})_{k=1}^{k=n}$ est linéairement indépendante.*

La famille $(a_n)_n$ est dit orthonormale si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \langle a_n, a_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Théorème 1.2.2 (Théorème de Gram-Schmidt)**.** *Soit E un espace de Hilbert et $(a_n)_n$ une famille libre dans E, alors il existe une famille orthonormale $(c_n)_n$, tel que*

$$[(a_n)_n] = [(c_n)_n].$$

Définition 1.2.11. *Soit $(a_n)_n$ une famille orthogonaux dans un espace Hilbert E.*

- *$\forall x \in E$, le scalaire $\xi_k = \langle x, a_n \rangle$ est appelé la composante d'ordre n (le coefficient de Fourier[3]) .*
- *La série $\sum_n \xi_n a_n$ est appelé la série de Fourier.*

Proposition 1.2.11. *Soit $(a_k)_{k=1}^{k=n}$ une famille fini orthonormé dans un espace Hilbert E. Si $x = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k a_k$, alors*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{k=n} |\lambda_k|^2.$$

Proposition 1.2.12 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $(a_n)_n$ une famille orthonormé dans un espace Hilbert E, alors*

- *$\forall x \in E$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, a_n \rangle|^2$ est converge.*
- *$\forall x \in E$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^2 \leq \|x\|^2$. (Inégalité de Bessel[4])*

Définition 1.2.12. *Soit $(a_n)_n$ une famille orthonormé dans un espace préhilbertien E. On dit que $(a_n)_n$ est une base hilbertien si*

$$\forall x \in E, \qquad x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n a_n.$$

Proposition 1.2.13. *Soit $(a_n)_n$ est une base hilbertien si et seulement si*

$$(\forall b \in E, \quad b \perp a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (b = 0).$$

Proposition 1.2.14. *Soit E un un espace préhilbertien et $(a_n)_n$ une famille orthonormé, les assertion suivantes sont équivalentes*

3. **Jean Baptiste Joseph Fourier** est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris

4. **Friedrich Wilhelm Bessel** (22 juillet 1784, Minden-17 mars 1846, Königsberg) est un astronome, mathématicien, géodésiste et physicien allemand.

1. $(a_n)_n$ *est une base hilbertien*
2. $\forall x, y \in E$, *de composante* $(\xi_n)_n$ *et* $(\eta_n)_n$, *la série* $\sum_n \xi_n \overline{\eta_n}$ *est converge vers* $\langle x, y \rangle$.
3. $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, a_n \rangle|^2$ *(égalité de Bessel)* .
4. $\forall x \in E$, *la série* $\sum_n \xi_n a_n$ *est converge vers* x.

Proposition 1.2.15. *Soit* E *un espace de Hilbert séparables alors* E *admet une base hilbertien.*

1.2.3 Le Théorème de représentation de Riesz

Lemme 1.2.2. *Soit* E *un espace de Hilbert. Pour* $a \in E$, *on pose*

$$\psi_a : E \to \mathbb{C}, \qquad x \to \psi_a(x) = \langle x, a \rangle .$$

Alors L'application $\psi_a \in E'$.

On définit alors une application $T : E \to E'$ par :

$$a \to Ta = \psi_a.$$

Théorème 1.2.3 (Théorème de Riesz[5])**.** *Soit* E *un espace de Hilbert. Alors*

1) *L'application* T *est une isométrie i.e.*

$$\textit{pour tout } a \in E : \|Ta\|_{E'} = \|a\|_E .$$

2) *Soit* A *est forme linéaire continue i.e.* $A \in E'$, *alors il existe un unique* $a \in E$, *tel que*

$$A = Ta \qquad \textit{et} \qquad \|A\|_{E'} = \|a\| .$$

5. **Frigyes Riesz** né le 22 janvier 1880 à et mort le 28 février 1956 à Budapest, est un mathématicien hongrois. Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle

2 | Opérateurs linéaires bornés

2.1 Définitions et propriétés

Tout au long du cours, on travaillera sur un corps $\mathbb{K}$, qui sera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. Soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.1 (Opérateur linéaire)**.** *On appelle un opérateur linéaire de E dans F toute application A de E dans F vérifiant, pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:*

(a) condition additive : $A(x+y) = A(x) + A(y)$,

(b) condition homogène :$A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

L'opérateur identité de E dans E sera noté par Id.

Exemple 2.1.1. *L'opérateur identité de E dans E est un opérateur linéaire.*

Définition 2.1.2. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application. On dit que $\mathcal{F}$ est bornée si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F i.e. $\mathcal{F}$ (bornée) est bornée.*

Remarque. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application bornée, i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que*

$$\text{pour tout } x \in E : \|x\|_E \leq \varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x)\|_F \leq \delta.$$

Proposition 2.1.1. *Soit A une application linéaire de E dans F, alors A est bornée si et seulement s'il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout x dans E*

$$\|A(x)\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Si A est une application bornée, alors il existe $M > 0$, tel que

$$\|A(x)\|_F \leq M, \qquad \text{pour tout } x \in \overline{B_E}(0,1),$$

Soit $x \in E - \{0\}$, alors $\dfrac{x}{\|x\|} \in \overline{B_E}(0,1)$, cela nous donne

$$\|A(x)\|_F \leq M \|x\|_E\,,, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in E$, tel que $\|x\|_E \leq \varepsilon$, on obtient

$$\|A(x)\|_F \leq M\varepsilon,$$

ça signifie $\delta = M\varepsilon$, d'où A est bornée. □

Définition 2.1.3 (Opérateur bornée). *On appelle un de E dans F toute application linéaire borné de E dans F. En d'autres termes, s'il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout x dans E*

$$\|A(x)\|_F \leq M \|x\|_E\,.$$

Notation. *On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.*

Exemple 2.1.2. *On munit l'espace $E = L^2([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_2$. Soit $\varphi \in E$, On définit l'opérateur $T_\varphi : E \to \mathbb{R}$ par :*

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt.$$

Montrer que $T_\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, en effet, c'est claire que T_φ est linéaire. Par l'inégalité de Hölder,on a

$$\begin{aligned} ||T_\varphi(f)| &\leq \int_0^1 |f(t)|\,|\varphi(t)|\,dt \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 |\varphi(t)|^1\,dt}\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt} \leq \|\varphi\|_2\|f\|_2. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur $T_\varphi(f)$ est borné.

2.1.1 Continuité des opérateurs linéaire

Définition 2.1.4. *Soient $a \in E$ et $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. On dit que $\mathcal{F}$ est continue au point a si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour $x \in E$, on a*

$$\|x - a\|_E < \delta \qquad \textit{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a)\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.1.1. *Soit A une application linéaire de E dans F, alors A est continu, si et seulement si, il est borné.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que l'opérateur A est borné, il existe une constante $M > 0$, tel que

$$\|A(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Pour $x, y \in E$, on a

$$\|A(x) - A(y)\|_F = \|A(x - y)\|_F \leq M \|x - y\|_E .$$

ça signifie que l'opérateur A est $M-$lipschitzienne, donc A est continue sur E.

($\Leftarrow$) Comme l'opérateur A est continue au point 0, alors, il existe $\rho > 0$, tel que

$$\|A(x)\|_F \leq 1, \qquad \text{pour tout } x \in \overline{B}(0, \rho).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, tel que $\|x\| \leq \varepsilon$, alors $\frac{\rho}{\varepsilon} x \in \overline{B}(0, \rho)$, donc

$$\left\| A\left(\frac{\rho}{\varepsilon} x\right) \right\|_F \leq 1,$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\rho},$$

ça signifie que $\delta = \frac{\varepsilon}{\rho}$, ce qu'implique l'opérateur A est borné. □

Théorème 2.1.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est continue sur E.*

(2) *A est continue en 0_E.*

(3) *A est bornée sur $\overline{B}(0, 1)$.*

(4) *A est bornée sur $S(0, 1)$.*

(5) *Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $\|Ax\|_F \leq \|x\|_E$.*

(6) *A est uniformément continue sur E.*

Démonstration.

$(1) \Rightarrow (2)$, est évident.

$(2) \Rightarrow (3)$, si A est continue en 0_E, alors il existe $\delta > 0$, tel que

$$\text{si } x \in \overline{B}(0, \delta) : A(x) \in \overline{B}(0, 1).$$

Soit $x \in \overline{B}(0, 1)$, alors $\delta x \in \overline{B}(0, \delta)$, donc $A(\delta x) \in \overline{B}(0, 1)$, comme $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\forall x \in \overline{B}(0, 1), \qquad A(x) \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{\delta}\right),$$

donc A est bornée sur $\overline{B}(0,1)$.

$(3) \Rightarrow (4)$, est évident.

$(4) \Rightarrow (5)$, si A est bornée sur $S(0,1)$, alors il existe $M>0$, tel que

$$\forall x \in S(0,1), \qquad \|A(x)\| \leq M.$$

Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq M.$$

d'où

$$\forall x \in E, \qquad \|A(x)\| \leq M\|x\|.$$

$(5) \Rightarrow (6)$ Soit $x, y \in E$, on a

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| \leq M\|x-y\|.$$

Alors A est M-lipschitzienne, d'où A est uniformément continue sur E.

$(6) \Rightarrow (1)$, est évident. □

Théorème 2.1.3. *Soit A un opérateur borné de E dans F. Posons :*

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \tfrac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \\
N_2 &= \sup_{x \in S(0,1)} \|Ax\|_F. \\
N_3 &= \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|Ax\|_F. \\
N_4 &= \inf\{M \in \mathbb{R}^+ : \|Ax\|_F \leq M\|x\|_E\}.
\end{aligned}$$

Alors, $N_1 = N_2 = N_3 = N_4$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, alors

$$\|Ax\|_F \leq N_2, \quad \text{pour } x \in S(0,1).$$

Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc

$$\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq N_2, \quad \text{pour } x \in E \setminus \{0\},$$

donc

$$N_1 = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq N_2.$$

Soit $x \in \overline{B}(0,1)$, alors $\|Ax\|_F \leq N_3$, donc

$$\|Ax\|_F \leq N_3, \qquad \text{pour } x \in S(0,1),$$

d'où

$$N_2 \leq \sup_{x \in S(0,1)} \|Ax\|_F \leq N_3.$$

Par la définition de N_4, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tel que

$$0 \leq M_\varepsilon \leq \varepsilon + N_4 \quad \text{et} \quad \|Ax\|_F \leq M_\varepsilon \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors,

$$\|Ax\|_F \leq M_\varepsilon \|x\|_E \leq (\varepsilon + N_4) \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Par suite

$$N_3 = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|Ax\|_F \leq \varepsilon + N_4.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient $N_3 \leq N_4$.

Par la définition de N_1, on a

$$\|Ax\|_F \leq N_1 \|x\|_E, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors

$$N_1 \in \left\{ M \in \mathbb{R}^+ : \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E \right\}.$$

Donc

$$N_4 = \inf \left\{ M \in \mathbb{R}^+ : \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E \right\} \leq N_1.$$

À la fin, nous avons trouvé la relation suivante

$$N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq N_4 \leq N_1.$$

Cela signifie

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4.$$

□

Définition 2.1.5. *Si A est une application linéaire continue de E dans F, on pose :*

$$\|A\|_{L(E,F)} = N_1 = N_2 = N_3 = N_4.$$

$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ s'appelle la triple norme ou norme subordonnée à la norme de E et F. On a en particulier :

$$\|Ax\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E, \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Théorème 2.1.4. *Soit E un espace normé et F un espace de Banch, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banch.*

Démonstration.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L(E,F)$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n,m \geq n_0 : \|A_n - A_m\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon$$

Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\|_F &= \|(A_n - A_m)x\|_{L(E,F)} \\ &\leq \|A_n - A_m\|_{L(E,F)} \|x\|_E \\ &\leq \varepsilon \|x\|_E. \end{aligned}$$

Cela signifie, pour tout $x \in E$, $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F. Par la la complétude de F nous permet d'affirmer que $A_n x$ converge dans F vers une certaine limite que nous notons Ax.
Nous allons montrer que l'application $A : E \to F$ est linéaire. Soientt $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to+\infty} A_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha \lim_{n\to+\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to+\infty} A_n y \\ &= \alpha A x + \beta A y. \end{aligned}$$

Montrons que A est continuité, soit $x \in \overline{B}_E(0,1)$, alors

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\| \\ &\leq M\|x\|, \end{aligned}$$

avec $M = \sup\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite borné, d'où la continuité de A.
Montrons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers A dans $L(E,F)$. Soit $x \in \overline{B}_E(0,1)$, on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n,m \geq n_0 : \|A_n x - A_m x\|_F \leq \varepsilon.$$

Lorsque $m \to +\infty$, on trouver

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \|A_n x - Ax\|_F \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \|A_n - A\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon.$$

Ce qui établit la convergence de la suite $(A_n)_n$ vers A dans l'espace $L(E,F)$. □

Proposition 2.1.2. *Soient E, F et G, trois espaces vectoriels normés, $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors, $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$ et*

$$\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)}.$$

Démonstration.

Soit $x \in \overline{B}_E(0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
\|(B \circ A)(x)\|_G &= \|B(A(x))\|_G \\
&\leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|Ax\|_F \\
&\leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \\
&\leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(E,G)} &= \sup \left\{ \|(B \circ A)(x)\|_G : x \in \overline{B}_E(0,1) \right\} \\
&\leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.3. *Soient E et F, deux espaces vectoriels normés, avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire dans E de dimension finie est continue.*

Démonstration.

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Pour tout $x \in \overline{B}_E(0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_F &= \left\| A\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i\right)\right\|_F \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=n} |x_i| \|Ae_i\|_F \\
&\leq \max_{i\in\{1,..,n\}} |x_i| \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \|Ae_i\|_F N_\infty(x)
\end{aligned}$$

Comme $\dim E = n < \infty$, alores toutes les normés sont équivalentes, alors

$$\exists \alpha > 0 : \forall x \in E, \qquad N_\infty(x) \leq \alpha \|x\|_E.$$

Donc

$$\|Ax\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|Ae_i\|_F \alpha\right) \|x\|_E.$$

d'où la continuité de A. □

Définition 2.1.6 (Dual topologique). *On appelle dual topologique de l'esapce E et que note E^* l'espace de Banach des des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$*

2.1.2 Convergence dans $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 2.1.7 (Converge uniforme). *Soit $(A_n)_n$ une suit d'opérateur linaire bornées de E dans F et A un opérateur linaire bornée de E dans F. On dit que $(A_n)_n$ converge uniforme vers A, si la suite $(A_n)_n$ est converge vers A dans $\mathcal{L}(E, F)$ ou encore*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$$

Définition 2.1.8 (Converge fortement). *Soit $(A_n)_n$ une suit d'opérateur linaire bornées de E dans F et A un opérateur linaire bornée de E dans F. On dit que $(A_n)_n$ converge fortement vers A si pour tout $x \in E$, la suite $(A_n x)_n$ est converge vers Ax dans F ou encore*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_F = 0, \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Définition 2.1.9 (Converge faiblement). *Soit E un espace de Hilbert, soit $(A_n)_n$ une suit d'opérateur linaire bornées de E dans E et A un opérateur linaire bornée de E dans E. On dit que (A_n) converge faiblement vers A ou $(A_n)_n \xrightarrow{w} A$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle, \quad \textit{pour tout } x, y \in E.$$

Exemple 2.1.3. *Considérons l'opérateur $(A_n)_n : \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ défini par :*

$$A_n (x_m)_m = (0, ..., x_n, x_{n+1}, ...).$$

Alors $(A_n)_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$ et $\|A_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrons que la suite $(A_n)_n$ converge fortement vers $A = 0$, en effet, soit $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, alors

$$\|A_n x\|^2_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2,$$

Comme $\left(|x_n|^2\right)_n$ est le terme général d'une série convergente, alors

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\|^2_{\ell^2(\mathbb{R})} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 = 0.$$

Mais la suite $(A_n)_n$ ne converge pas uniforme vers $A = 0$, car $\|A_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))} = 1$.

Proposition 2.1.4. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateurs linaire bornée E dans F, alors la convergente uniforme implique la convergente forte.*

Démonstration.
Soit $(A_n)_n$ une suite converge uniforme vers A, pour tout $x \in E$, on a

$$\|(A_n - A)x\|_F \leq \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} . \|x\|_E$$

cela implique que $(A_n)_n$ converge fortement vers A. $\square$

Proposition 2.1.5. *Soit E un espace de Hilbert, soit $(A_n)_n$ une suit d'opérateur linaire bornées de E dans E, alors la convergente forte implique la convergente faiblement.*

Démonstration.

Soit $(A_n)_n$ une suite converge fortement vers A, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} |\langle A_n x, y\rangle - \langle Ax, y\rangle| &= |\langle A_n x - Ax, y\rangle| \\ &\leq \|(A_n - A)x\|_F \|y\|_E \end{aligned}$$

cela implique que $(A_n)_n$ converge faiblement vers A. □

2.2 Inversibilité des opérateurs bornés

Définition 2.2.1 (Opérateur inversible)**.** *Soit E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que A est inversible s'il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que*

$$A \circ B = Id_F \qquad et \qquad B \circ A = Id_F$$

On l'appelle opérateur inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Notation. *On note $\mathcal{L}_i(E, F)$ l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{L}(E, F)$ inversibles.*

Exemple 2.2.1. *Soient $E = L^2([0,1])$ et $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. On considère l'opérateur $A_\varphi : E \longrightarrow E$ défini par $A_\varphi f = \varphi f$.*
Si $\varphi(t) = t + 1$, montrons que A_φ est inversible et $A_\varphi^{-1} = A_{\frac{1}{\varphi}}$. En effet,

$$\left(A_\varphi \circ A_{\frac{1}{\varphi}}\right) f = A_\varphi \left(\frac{f}{\varphi}\right) = f \ \ et \ \ \left(A_{\frac{1}{\varphi}} \circ A_\varphi\right) f = A_{\frac{1}{\varphi}}(\varphi f) = f.$$

Donc $A_\varphi A_{\frac{1}{\varphi}} = A_{\frac{1}{\varphi}} \circ A_\varphi = Id_E$. D'où A_φ est inversible, ave $A_\varphi^{-1} = A_{\frac{1}{\varphi}}$.

Théorème 2.2.1 (Baire)**.** *Soit E un espace métrique complet et $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts denses de E. Alors $\bigcap_{n\geq 1} \mathcal{U}_n$ est dense dans E.*
De même, si $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, alors $\bigcup_{N\geq 1} F_n$ est d'intérieur vide dans E.

Démonstration.

Soit $B_0 \subset E$ un ouvert non vide. Comme $\mathcal{U}_1$ est dense dans E, alors $\mathcal{U}_1 \cap B_0 \neq \emptyset$, donc il existe $x_1 \in \mathcal{U}_1 \cap B_0$, comme $\mathcal{U}_1 \cap B_0$ est un ouvert, alors il existe $r_1 < 1$, tel que

$$\overline{B_1} = \overline{B}(x_1, r_1) \subset \mathcal{U}_1 \cap B_0.$$

Ensuite, comme $\mathcal{U}_2$ est dense, il existe une boule B_2, de centre x_2 et de rayon $r_2 \leq \frac{1}{2}$ telle que

$$\overline{B_2} = \overline{B}\left(x_2, r_2\right) \subset \mathcal{U}_2 \cap B_1.$$

De proche en proche, on construit B_n , de centre x_n et de rayon $r_n \leq 2^{-n}$, telle que

$$\overline{B_n} = \overline{B}\left(x_n, r_n\right) \subset \mathcal{U}_n \cap B_{n-1}.$$

En particulier, la suite $\left(\overline{B_n}\right)_n$ est décroissante, c'est-à-dire

$$\overline{B_n} \subset B_{n-1}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, en effet, on a $x_n \in \overline{B_{n-1}}\left(x_{n-1}, r_{n-1}\right)$, c'est-à-dire

$$d\left(x_n, x_{n-1}\right) \leq r_{n-1} \leq 2^{-(n-1)}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, avec $m > n$, alors

$$\begin{aligned} d\left(x_m, x_n\right) &\leq d\left(x_m, x_{m-1}\right) + d\left(x_{m-1}, x_{m-2}\right) + ... + d\left(x_{n+1}, x_n\right) \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + ... + \frac{1}{2^n} \\ &= \sum\nolimits_{k=n}^{k=m-1} \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Mais $(2-^{n})_n$ est le terme général d'une série convergente, série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, cela justifie le fait que $(x_n)_n$ est de Cauchy, donc converge, soit x sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x \in \overline{B_n} \subset \mathcal{U}_n,$$

Donc

$$x \in \bigcap\nolimits_{N \geq 1} \mathcal{U}_n.$$

Comme on a aussi $x \in B_0$, alors

$$B_0 \cap \left(\bigcap\nolimits_{n \geq 1} \mathcal{U}_n\right) \neq \emptyset,$$

on a montr que l'ensemble $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{U}_n$ intersecte tout ouvert est est dense.

Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E. Puisque

$$\overline{F_n^C} = \left(int\left(F_n\right)\right)^c = E, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

alors $\left(F_n^C\right)_{n \geq 1}$ est une suite d'ouverts dense dans E, par la première partie, on a $\bigcap_{n \geq 1} \overline{F_n^C}$ est dense dans E.

En passant au complémentaire, on obtient

$$\emptyset = \bigcup\nolimits_{n \geq 1} \left(\overline{F_n^C}\right)^C = \bigcup\nolimits_{n \geq 1} int\left(F_n\right).$$

□

Théorème 2.2.2 (Application ouverte)**.** *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur surjectif, alors pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset E$, alors $A(\mathcal{U})$ est ouvert.*

Démonstration.

Comme A est linéaire, il suffit de montrer que l'image de la boule-unité contient un voisinage de 0.

Soit $B = B(0,1)$ la boule-unité ouverte de E.

D'autre part, soit $x \in E - \{0\}$, alors $\|x\| > 0$, donc il exsite $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, tel que $n\|x\| \leq 1$, c'est-à-dire $x \in \overline{nB(0,1)}$, ça signifie $E \subset \bigcup_{n\geq 1} \overline{nB(0,1)}$, d'où

$$E = \bigcup\nolimits_{n\geq 1} \overline{nB(0,1)}.$$

Comme A est surjectif, alors

$$\begin{aligned} E &= A(E) = A\left(\bigcup\nolimits_{n\geq 1} \overline{nB(0,1)}\right) \\ &= \bigcup\nolimits_{n\geq 1} nA\left(\overline{B}(0,1)\right). \end{aligned}$$

Par le théorème de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}$ que $nA\left(\overline{B}(0,1)\right)$ est d'intérieur non vide.

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, tel que

$$B(x,\varepsilon) \subset nA\left(\overline{B}(0,1)\right)$$

On a aussi

$$B(-x,\varepsilon) \subset nA\left(\overline{B}(0,1)\right)$$

donc $nA\left(\overline{B}(0,1)\right)$ étant convexe, $B(x,\varepsilon) \subset nA\left(\overline{B}(0,1)\right)$ et donc $B \subset A(\lambda B)$ avec $\lambda = \dfrac{n}{\varepsilon}$.

Montrons que cela implique que $B \subset A(\lambda B)$. Soit $z \in B$, comme $z \in A(\lambda B)$, il existe x_1, tel que

$$\|x_1\| < \lambda \quad \text{et} \quad \|z - Ax_1\| < \frac{1}{2}.$$

De même, comme $z - Ax_1 \in \overline{A\left(\frac{\lambda}{2}B\right)}$, il existe x_2 tel que

$$\|x_2\| < \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad \|z - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{1}{4}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite $(x_k)_k$ vérifiant

$$\|x_k\| < \frac{\lambda}{2^5} \quad \text{et} \quad \|z - (Ax_1 + Ax_2 + ... + Ax_k)\| < \frac{1}{2^k}.$$

La série convergeant normalement, on peut poser

$$x = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} x_k \quad \text{et} \quad \|x_k\| < 2\lambda,$$

donc $x \in 2\lambda B$. Comme A est continue, on a $Ax = z$. Ainsi $z \in A(2\lambda B)$. $\square$

Proposition 2.2.1. *Soit E un espace de Banach, et F un espace vectoriel normé. Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$, on suppose que A est une bijection. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) L'inverse (ensembliste) $A^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ continu.

ii) Il existe $c > 0$ tel que $\|Ax\| \geq c\|x\|$, pour tout $x \in E$.

iii) F est un espace de Banach.

Démonstration.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Si $A^{-1} : F \to E$ est continue, alors il existe $M > 0$ tel que

$$\left\|A^{-1}y\right\| \leq M\|y\|, \qquad \text{pour tout } y \in F.$$

Nous prenons $y = Ax$, pour tout $x \in E$, on obtient

$$\|x\| \leq M\|Ax\|, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Ça signifie (ii) avec $c = \frac{1}{M}$.
$(ii) \Rightarrow (ii)$ Montrons que F est un espace complet. Soit $(y_n)_n$ une suite est de Cauchy dans F, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il exsite $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geq n_0 : \|y_n - y_m\| \leq c\varepsilon.$$

Comme A est bijective, alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans E telle que $(y_n)_n = (Ax_n)_n$, par (ii), on obtient

$$n, m \geq n_0 : c\|x_n - x_m\| \leq \|Ax_n - Ay_m\| \leq c\varepsilon.$$

Ça signifie que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qu'est complet, alors $(x_n)_n$ est converge vers un élément $x \in E$, puisque A est continue, donc $(y_n)_n = (Ax_n)_n$ est converge vers $Ax = y \in F$, d'où F est un espace de Banach.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Utiliser le théorème de l'application ouverte, on a $A \in \mathcal{L}(E,F)$, E et F sont des espace de Banach et A est bijective, alors A est ouverte, c'est-à-dire, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de E, alors $A(\mathcal{U})$ est un ouvert dans F, cela entraîne que A^{-1} est continue. □

Proposition 2.2.2. *Soient E, F deux espaces de Banach, soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$,il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

i) Il existe $c > 0$, tel que $\|Ax\| \geq c\|x\|$, pour tout $x \in E$.

ii) A est injectif et ImA est fermée dans F.

Démonstration.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $x \in$ker$A$, alors $Ax = 0$ implique $c\|x\| \leq 0$, donc ker$A = \{0\}$. Ça signifie A est injectif.

Soient $(y_n)_n$ une suite de ImA qui converge vers $y \in F$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans E telle que $(Ax_n)_n = (y_n)_n$, dpnc

$$\|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| \geq c\|x_n - x_m\|$$

entraine que $(x_n)_n$ est de Cauchy. Si x désigne la limite de $(x_n)_n$, on a alors $y = Ax$, donc $y \in$ImA.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On a $A : E \rightarrow$Im$A \subset F$.

Comme ImA est un sous-espace fermé de F, donc ImA est complet.

Puisque $A : E \rightarrow$ImA est continue et bijective. On applique la proposition précédente à $A : E \rightarrow$ImA. □

Corollaire 2.2.1. *Soient E, F deux espaces de Banach. $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible si et seulement si, il existe $c > 0$, tel que*

$$\overline{\mathrm{Im}A} = F \quad et \quad \|Ax\| \geq c\|x\|, \quad pour\ tout\ x \in E.$$

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ On a $\|Ax\| \geq c\|x\|$, comme A est inversible, elle est en bijection et donc Im$A = F$.

$(\Leftarrow)$ Comme$\|Ax\| \geq c\|x\|$, pour tout $x \in E$. Par la proposition 2.2.2, l'opérateur A est surjectif et ImA est fermé dans F.

Cependant : Im$A = F$, par hypothèse, donc Im$A = \overline{\mathrm{Im}A} = F$. Ainsi, $A : E \rightarrow F$ est linéaire, continue, bijective. Puisque E et F sont complets, par la proposition 2.2.1, l'application réciproque T^{-1} est forcément continues. □

Théorème 2.2.3. *Soit E un espace de Banach. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|A\| \leq 1$, alors $Id - A$ est inversible et l'application réciproque est :*

$$(Id - A)^{-1} = \sum\nolimits_{n\geq 0} A^n = Id + A + A^2 + ...$$

Démonstration.

Posons

$$S_n = \sum\nolimits_{n=0}^{k=n} A^k = Id + A + A^2 + ... + A^n.$$

Montrons que $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E)$. En effet : Soit $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n > m$, on a

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\|\sum\nolimits_{n=m+1}^{k=n} A^k\right\| \leq \sum\nolimits_{n=m+1}^{k=n} \|A^k\| \\ &= \sum\nolimits_{n=m+1}^{k=n} \|A\|^k. \end{aligned}$$

Mais $(\|A\|^n)_n$ est le terme général d'une série convergente, série géométrique de raison $\|A\| < 1$, cela justifie le fait que $(S_n)_n$ est de Cauchy. On note que

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum\nolimits_{n=0}^{k=\infty} A^k.$$

Vérifions que $(Id - A)\, S = S\,(Id - A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(Id - A)\, S_n = IdS_n - AS_n = \sum\nolimits_{n=0}^{k=n} A^k - \sum\nolimits_{n=0}^{k=n} A^{k+1} = Id,$$

$$S_n\,(Id - A) = S_nId - S_nA = \sum\nolimits_{n=0}^{k=n} A^k - \sum\nolimits_{n=0}^{k=n} A^{k+1} = Id,$$

Ensuite, on passe à la limite dans $n \to \infty$, on a

$$(Id - A)\, S_n = Id \qquad \text{et} \qquad S_n\,(Id - A) = Id.$$

□

Lemme 2.2.1. *Soient E, F et G des espaces de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$ sont deux opérateurs inversibles. Alors, $AB \in \mathcal{L}(E,G)$ est inversible et l'on a*

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Démonstration.

Soient $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$ sont deux opérateurs inversibles, alors

$$\left(A^{-1}B^{-1}\right)(BA) = A^{-1}\underbrace{\left(B^{-1}B\right)}_{Id}A = A^{-1}A = Id,$$

$$(BA)\left(A^{-1}B^{-1}\right) = B\underbrace{\left(AA^{-1}\right)}_{Id}B^{-1} = BB^{-1} = Id,$$

ça signifie que l'opérateur BA est inversible et $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. □

Corollaire 2.2.2. *L'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}_i(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration.

Soit $A_0 \in \mathcal{L}_i(E)$, c'est-à-dire $A_0 \in \mathcal{L}(E)$ inversible. Montrons que

$$B_{\mathcal{L}(E)}\left(A_0, \left\|A_0^{-1}\right\|^{-1}\right) \subset \mathcal{L}_i(E).$$

Soit $B \in B_{\mathcal{L}(E)}\left(A_0, \left\|A_0^{-1}\right\|^{-1}\right)$, alors $\left\|A_0^{-1}\right\| \|B - A_0\| < 1$, d'autre part

$$A_0^{-1}(B - A_0) = A_0^{-1}B - Id \qquad \text{et} \qquad \left\|Id - A_0^{-1}B\right\| \leq 1,$$

selon la théorème l'opérateur $Id - \left(Id - A_0^{-1}B\right)$ est inversible, ça signifie $A_0^{-1}B$ est inversible. Comme A_0 est inversible. Alors

$$A_0\left(A_0^{-1}B\right) = B \text{ est inversible.}$$

Finalement, on trouve une boule ouvert incluse dans $\mathcal{L}_i(E)$, ça signifie que $\mathcal{L}_i(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. □

2.3 Opérateur adjoint

Définition 2.3.1. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, lL'opérateur adjoint de $A : E \to F$ est l'opérateur linéaire $A^* : F \longrightarrow E$ caractérisé par*

$$\langle Ax, y\rangle_F = \langle x, A^*y\rangle_E, \quad \textit{pour tout } x \in E,\ y \in F.$$

Théorème 2.3.1. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe un unique un opérateur $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$, tel que por tout $x \in E$ et pour $y \in F$, on ait*

$$\langle Ax, y\rangle_F = \langle x, A^*y\rangle_E.$$

On a de plus

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F,E)}.$$

Démonstration.

1) *Existence* **:** Pour tout $y \in F$, on définit l'application $B_y : E \to \mathbb{C}$ par $B_y(x) = \langle Ax, y\rangle_F$. Montrons que $B_y \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, en effet, soient $x_1, x_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
B_y(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle A(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle \\
&= \langle A(\alpha x_1) + A(\beta x_2), y\rangle \\
&= \langle A(\alpha x_1), y\rangle + \langle A(\beta x_2), y\rangle \\
&= \alpha\langle A(x_1), y\rangle + \beta\langle A(x_2), y\rangle \\
&= \alpha B_y(x_1) + \beta B_y(x_2).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|B_y(x)| = \langle Ax, y\rangle &\leq \|Ax\|_F \|y\|_F \\
&\leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \|y\|_F.
\end{aligned}$$

Alors $B_y \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, de plus

$$\|B_y\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|y\|_F$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément unique $z_y \in E$, tel que

$$B_y(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Cette égalité définie un opérateur ? noté $A^* : F \longrightarrow E$, tel que $A^* y = z_y$, alors

$$B_y(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle .$$

Unicité : Supposons que A_1^* et A_2^* deux opérateurs adjoints de l'opérateur A, pour tout $x \in E$ et pour $y \in F$, on a

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A_1^* y \rangle = \langle x, A_1^* y \rangle .$$

Alors, pour tout $y \in F$: $A_1^* y = A_2^* y$, c'est-à-dire $A_1^* = A_2^*$.
Linéarité de l'opérateur adjoint A^* : Pour tout $x \in E$, $y_1, y_2 \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\
&= \langle Ax, \alpha y_1 \rangle + \langle Ax, \beta y_2 \rangle \\
&= \overline{\alpha} \langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\beta} \langle Ax, y_2 \rangle \\
&= \overline{\alpha} \langle x, A^* y_1 \rangle + \overline{\beta} \langle x, A^* y_2 \rangle \\
&= \langle x, \alpha A^* y_1 \rangle + \langle x, \beta A^* y_2 \rangle \\
&= \langle x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2.$$

Egalité des normes **:** Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\|A^* x\|^2 = \langle A^* x, A^* x \rangle &= \langle AA^* x, x \rangle \\
&\leq \|AA^* x\| \, \|x\| \\
&\leq \|A\| \, \|A^* x\| \, \|x\|
\end{aligned}$$

Après simplification $\|A^* x\| \leq \|A\| \, \|x\|$, en déduit que $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$et $\|A^*\| \leq \|A\|$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle &= \langle A^* Ax, x \rangle \\
&\leq \|A^* Ax\| \, \|x\| \\
&\leq \|A^*\| \, \|Ax\| \, \|x\|
\end{aligned}$$

Après simplification $\|Ax\| \leq \|A^*\| \, \|x\|$, en déduit que $\|A\| \leq \|A^*\|$.

Finalement, on obtient l'égalité des normes $\|A\| = \|A^*\|$. $\square$

Exemple 2.3.1. *Soient $E = L^2(\Omega, \mu)$, $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ et $M_f : E \to E$ un opérateur défini par :$T\varphi(f) := \varphi f$.*

Il est clair que $T\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$, nous cherchons l'opérateur adjoint de M_f, soit $g, h \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\langle T\varphi(f), h\rangle &= \int_\Omega M_\varphi(f)(x)\,\overline{h(x)} d_\mu x = \int_\Omega \varphi(x)\, f(x)\, \overline{h(x)} d_\mu x \\
&= \int_\Omega f(x)\, \overline{\overline{\varphi(x)} h(x)} d_\mu x \\
&= \langle f, T\overline{\varphi}(h)\rangle = \langle f, T^*\varphi(h)\rangle .
\end{aligned}$$

Donc, l'adjoint de $T\varphi$ est

$$T^*\varphi = T\overline{\varphi}.$$

Proposition 2.3.1. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, nous avons les propriétés suivants*

a) $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$,

b) $(A^*)^* = A$,

c) $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$,

d) $\|A^* A\|_{\mathcal{L}(E,E)} = \|A\|^2_{\mathcal{L}(E,F)} = \|AA^*\|_{\mathcal{L}(F,F)}$.

Démonstration.

a) Pour tout $x \in E$, $y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle x, (\lambda A + \mu B)^* y\rangle &= \langle(\lambda A + \mu B)x, y\rangle \\
&= \lambda\langle Ax, y\rangle + \mu\langle Bx, y\rangle \\
&= \lambda\langle x, A^* y\rangle + \mu\langle x, B^* y\rangle \\
&= \langle x, \overline{\lambda} A^*\rangle + \langle x, \overline{\mu} B^*\rangle \\
&= \left\langle x, \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*\right\rangle ,
\end{aligned}$$

ce qu'implique $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$.

b) Pour tout $x \in E$, $y \in F$, on a

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \langle x, A^* y\rangle = \overline{\langle A^* y, x\rangle} \\
&= \overline{\langle y, (A^*)^* x\rangle} = \langle (A^*)^* x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Alors $(A^*)^* = A$.

c) Pour tout $x \in E$, et $y \in F$, on a

$$\begin{aligned}\langle x, (B \circ A)^* y\rangle &= \langle (B \circ A)x, y\rangle = \langle B\left(Ax\right), y\rangle \\ &= \langle Ax, B^* y\rangle = \langle x, A^*\left(B^* y\right)\rangle \\ &= \langle x, \left(A^* \circ B^*\right) y\rangle,\end{aligned}$$

d'où $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$.

d) Pour tout $x \in E$, alors

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle = \langle \left(A^* \circ A\right) x, x\rangle \\ &\leq \|\left(A^* \circ A\right) x\| \, \|x\| \\ &\leq \|A^* A\| \, . \, \|x\|^2 \, .\end{aligned}$$

Ce qu'implique que

$$\|A\|^2 \leq \|A^* \circ A\| \, .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|\left(A^* \circ A\right) x\|^2 &= \langle \left(A^* \circ A\right) x, \left(A^* \circ A\right) x\rangle \\ &= \langle \left(\left(A \circ A^*\right) \circ A\right) x, Ax\rangle \\ &\leq \|Ax\| \, \|\left(\left(A \circ A^*\right) \circ A\right) x\| \\ &\leq \|A \circ A^*\| \, \|Ax\|^2 \\ &\leq \|A \circ A^*\| \, \|A\|^2 \, \|x\|^2\end{aligned}$$

Ce qu'implique que, $\|A^* \circ A\| \leq \|A\|^2$. Finalement, on obtient que $\|A\|^2 = \|A^* \circ A\|$. □

Proposition 2.3.2. *Soit A un opérateur linéaire défini sur E dans F, alors*

i) $kerA = (\mathrm{Im}A^*)^{\perp}$,

ii) $kerA^* = (\mathrm{Im}A)^{\perp}$,

iii) $\overline{(\mathrm{Im}A} = (\ker A^*)^{\perp}$.

Démonstration.

Soit A un opérateur linéaire défini sur E dans F, on a

$$\begin{aligned}\ker A &= \{x \in E : Ax = 0\} \\ &= \{x \in E : \forall y \in F, \ \langle Ax, y\rangle = 0\} \\ &= \{x \in E : \forall y \in F, \ \langle x, A^* y\rangle = 0\} \\ &= (\mathrm{Im}A^*)^{\perp} \, .\end{aligned}$$

D'après la première affirmation, on remplace A par A^*, on obtient

$$\ker A^* = (\mathrm{Im} A^{**})^{\perp} = (\mathrm{Im} A)^{\perp}.$$

D'après la première affirmation, on a

$$(\ker A^*)^{\perp} = (\mathrm{Im} A)^{\perp\perp} = \overline{[\mathrm{Im} A]}.$$

Comme $\mathrm{Im}A$ est un sous espace vectoriel, alors $[\mathrm{Im}A] = \mathrm{Im}A$, donc

$$(\ker A^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im} A}.$$

□

Proposition 2.3.3. *Soit E un espace de Hilbert, G un sous espace de E, alors $AG \subset G$ si et seulement si $A^*G^{\perp} \subset G^{\perp}$.*

Démonstration.
($\Rightarrow$)Supposons que $AG \subset G$ et montrons que $A^*G^{\perp} \subset G^{\perp}$. En effet, soit $x \in G$ et $y \in G^{\perp}$, alors $\langle y, Ax \rangle = 0$, car $Ax \in G$. Puisque,

$$0 = \langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle.$$

Alors $A^*y \in G^{\perp}$, pour tout $y \in G^{\perp}$, ça signifie $A^*G^{\perp} \subset G^{\perp}$.
($\Leftarrow$) Supposons que $A^*G^{\perp} \subset G^{\perp}$ et montrons que $AG \subset G^{\perp}$. En effet, soit $x \in G$ et $y \in G^{\perp}$, alors $A^*y \in G^{\perp}$ et $\langle A^*y, x \rangle = 0$, c'est-à-dire $\langle y, Ax \rangle = 0$, alors $y \in G^{\perp}$, ça signifie $Ax \subset G$. □

2.3.1 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, auto-adjoints

Définition 2.3.2. *Soit A un opérateur linéaire défini sur E dans lui même, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(E, E) := \mathcal{L}(E)$,*

1) *Un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si $A^* = A$.*

2) *Un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **unitaire** si*

$$A^* \circ A = Id_E \quad et \quad A \circ A^* = Id_F.$$

C'est à dire $A^* = A^{-1}$.

3) *Un élément $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé **isométrique** si pour tout $x \in E$: $\langle Ax, Ax \rangle_F = \langle x, x \rangle_E$ où encore $\|A(x)\|_F = \|x\|_E$.*

4) *Un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **normale** si $A^* \circ A = A \circ A^*$.*

5) *Un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ est appelé* ***anti auto-adjoint*** *si, on a $A = -A^*$.*

6) *Un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ est appelé p**ositif** (notation : $A \geq 0$) si A est autoadjoint et si pour tout $x \in E : \langle x, Ax \rangle \geq 0$.*

Remarque. *Le produit de deux opérateurs auto-adjoints n'est pas en général un opérateur auto-adjoints.*

Proposition 2.3.4. *Soit $A, B \in \mathcal{L}(E)$ deux opérateur auto-adjoints sont auto adjoint alors l'opérateur $A \circ B$ est un opérateur auto adjoint.*

Démonstration.

Soit $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle (A \circ B)x, y \rangle &= \langle Bx, A^* y \rangle = \langle x, (B^* \circ A^*)\, y \rangle \\ &= \langle x, (B \circ A)\, y \rangle = \langle (A \circ B)^* x, y \rangle. \end{aligned}$$

Alors $A \circ B = (A \circ B)^*$. □

Proposition 2.3.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur auto adjoint, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$A^n := \underbrace{A \circ A \circ ... \circ A}_{n \text{ fois}}.$$

Alors l'opérateur A^n est un opérateur auto-adjoint.

Démonstration.

Montrons par récurrence, soit $x, y \in E$, pour $n = 1$, on a A est auto adjoint.

On pose

$$\mathcal{P}_n : \langle A^n x, y \rangle = \langle x, A^n y \rangle$$

On suppose que la relation $\mathcal{P}_n$ est vrais et monteronq que la relation $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, en effet

$$\begin{aligned} \langle A^{n+1} x, y \rangle &= \langle (A^n \circ A)\, x, y \rangle = \langle Ax, (A^n)^*\, y \rangle \\ &= \langle x, A^* \circ (A^n)^*\, y \rangle \\ &= \langle x, (A \circ A^n)\, y \rangle = \langle x, A^{n+1} y \rangle, \end{aligned}$$

ça signifie $A^{n+1} = (A^{n+1})^*$, donc A^{n+1} est un opérateur auto-adjoint. □

Proposition 2.3.6. *Soit $(A_n)_n \in \mathcal{L}(E)$ une suite des opérateurs auto-adjoint, si $(A_n)_n$ converge faiblement vers A, alors A est un opérateur auto-adjoint.*

Démonstration.

Pour tout $x, y \in E$, on a

$$\langle A_n x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

En passant à la limite, on obtient

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, A_n y\rangle = \langle x, Ay\rangle,$$

ça signifie $A = A^*$, c'est-à-dire A est un opérateur auto-adjoint. □

Remarque. *Soit E un espace de Hilbert, on note $\mathcal{L}_{auto}(E)$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoint dans $\mathcal{L}(E)$.*

Corollaire 2.3.1. *oit E un espace de Hilbert, alors $\mathcal{L}_{auto}(E)$ est un ensemble fermé dans $\mathcal{L}(E)$*

Démonstration.

Soit $(A_n)_n$ une suite des opérateurs dans $\mathcal{L}_{auto}(E)$, tel que $(A_n)_n$converge vers A dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0,$$

alors $(A_n)_n$ converge faiblement vers A, alors $A \in \mathcal{L}_{auto}(E)$. Cela signifie que nous avons prouvé $\mathcal{L}_{auto}(E)$ est un ensemble fermé dans $\mathcal{L}(E)$. □

Théorème 2.3.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

Soit A est un opérateur auto-adjoint, pour tout $x \in E$, on a

$$a = \langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} = \overline{\langle A^* x, x\rangle} = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{a}.$$

Comme $a = \overline{a}$, ça signifie $a = \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Réciproquement : soit $x, y \in E$, on pose

$$\begin{aligned} a &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle\langle A(x-y), x-y\rangle \\ &= 2\left[\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \langle A(x+iy), x+iy\rangle - \langle A(x-iy), x-iy\rangle \\ &= -2i\left[\langle Ay, x\rangle - \langle Ax, y\rangle\right] \end{aligned}$$

On sait que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, alors a et b sont réelles. De plus, on a

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{4}i=\langle Ay, x\rangle \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{4}-\frac{b}{4}i=\langle Ax, y\rangle .$$

Alors

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \frac{a}{4}-\frac{b}{4}i=\overline{\left(\frac{a}{4}-\frac{b}{4}i\right)}=\overline{\langle Ay, x\rangle}\\ &= \langle x, Ay\rangle.\end{aligned}$$

donc A est un opérateur auto adjoint. □

Proposition 2.3.7. *Soient E, F deux espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$, alors il existe deux opérateurs linéaire borné, auto-adjoint U et V tels que*

$$A = U + iV.$$

Démonstration.
Il suffit de prendre

$$U=\frac{1}{2}(A+A^*) \quad \text{et} \quad V=\frac{1}{2i}(A-A^*).$$

Alors

$$U^*=\frac{1}{2}(A+A^*)^*=\frac{1}{2}\left(A^*+A^{**}\right)=U.$$

De même $V=V^*$. □

Proposition 2.3.8. *Soient E et F deux espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E)$ les condition suivant sont équivalents :*

i) L'opérateur A est unitaire.

ii) L'opérateur A est surjectif et $A^* \circ A = Id_E$.

iii) L'opérateur A est isométrie.

Démonstration.
(**??**) $\Longrightarrow$ (**??**) Si A est unitaire, on a $A^* \circ A = Id_E$, nous en concluons que l'opérateur A est surjective.
(**??**) $\Longrightarrow$ (**??**), si $A^* \circ A = Id_E$, alors pour tout $x \in E$ on a

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, x\rangle = \langle (A^*\circ A)\, x, x\rangle\\ &= \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 .\end{aligned}$$

ça signifie A est isométrie de E sur F.

(??) $\Longrightarrow$ (??), si A est isométrie de E sur F, pour tout $x \in E$, on a

$$\langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, (A^* \circ A)\, x\rangle = \langle (A^* \circ A)\, x, x\rangle$$

ça signifie $(A^* \circ A)\, x = (A^* \circ A)\, x = x$, nous en concluons que A est unitaire. □

Exemple 2.3.2. *Soit $A : \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ un opérateur défini par $Ax = (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. On a $A \in \mathcal{L}\left(\ell^2(\mathbb{R})\right)$, nous recherchons l'opérateur adjoint de A^*, en effet, soit $x, y \in \ell^2(\mathbb{R})$, alors*

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \sum\nolimits_{n\geq 0} (Ax)_n\, y_n = \sum\nolimits_{n\geq 0} x_{2n} y_n \\ &= x_0 y_0 + x_2 y_1 + .. = \sum\nolimits_{n\geq 0} x_n\, (A^* y)_n\,.\end{aligned}$$

Avec

$$(A^* y)_n = \begin{cases} y_{\frac{n}{2}}, & si\ n\ pair \\ 0, & si\ n\ impair \end{cases}$$

Exemple 2.3.3. *Soit $a \in \mathbb{R}^n$, on définit l'opérateur de Translation $\tau_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ par : $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$.*

Nous recherchons l'opérateur adjoint de τ_A^*, en effet, soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \tau_a f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} (T_a f)(x).\overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-a).\overline{g(x)} dx$$

On pose $y = x - a$, alors $dy = dx$ et

$$\langle \tau_a f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(y).\overline{g(y+a)} dy = \langle f, \tau_{-a} g\rangle,$$

ça signifie $\tau_a^* = \tau_{-a}$, on en déduire que $\tau_a^* \neq \tau_{-a}$, donc τ_a n'est pas auto-adjoint.

D'autre part, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, nous avons

$$(\tau_a^* \circ \tau_a)\, f = (\tau_{-a} \circ \tau_a)\, f = f,$$

alors $\tau_a^* \circ \tau_a = \tau_a \circ \tau_a^* = Id$, donc l'opérateur A est normal.

Proposition 2.3.9. *Soient A et B deux opérateurs linéaires positifs sur E, Pour tout $\lambda, \mu \geq 0$, alors le combinaison linéaire $\lambda A + \mu B$ est un opérateur positif.*

Démonstration.

Soit $\lambda, \mu \geq 0$, alors $\lambda A + \mu B$ est auto adjoint. Soit $x_i \in E$, on a :

$$\langle (\lambda A + \mu B)x, x\rangle = \lambda\langle Ax, x\rangle + \mu\langle bx, x\rangle \geq 0.$$

donc $\lambda A + \mu B \geq 0$. □

Proposition 2.3.10. *Soit A un opérateur linéaire positifs défini sur E dans E alors A est un opérateur auto adjoint.*

Démonstration.
Soit A un opérateur linéaire positifs, alors pour tout $x \in E$, on a $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, ça signifie $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}^+$, donc A est opérateur auto adjoint. □

Proposition 2.3.11. *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors les assertion suivantes sont équivalentes :*

i) *A est isométrique.*

ii) $A^* \circ A = Id$.

Démonstration.
Supposons que A est isométrique, montrons que

$$\langle (A^* \circ A)\, x, y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Rappelons l'**identité de polarisation** est donné comme suit

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left[(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle) + i(\langle x+iy, x+iy\rangle - \langle x-iy, x-iy\rangle)\right] \\ &= \langle Ax, Ay\rangle,\end{aligned}$$

Comme $\|Ax\| = \|x\|$, on en déduit que

$$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle (A^* \circ A)x, y\rangle,$$

ça signifie $A^* \circ A = Id$.
Supposons que $A^* \circ A = Id$, alors pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, x\rangle = \langle (A^* \circ A)x, x\rangle \\ &= \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que A est bien isométrique. □

Proposition 2.3.12. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur normale, alors, $kerA = kerA^*$.*

Démonstration.
Soit $x \in \ker A$, alors

$$\begin{aligned}\|A^*x\|^2 &= \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle (A \circ A^*)\, x, x\rangle \\ &= \langle A^*(Ax), x\rangle = 0.\end{aligned}$$

En déduit que $A^*x = 0$, alors $x \in \ker A^*$, ça signifie $\ker A \subset \ker A^*$.

Réciproquement, puisque, on a $\ker A \subset \ker A^*$, alors

$$\ker A^* \subset \ker (A^*)^* = \ker A.$$

Finalement, on obtient $\ker A = \ker A^*$. □

Proposition 2.3.13. *Soit $A, B \in \mathcal{L}(E)$ deux opérateurs unitaires, alors*

Proposition 2.3.14.

a) *A est isométrique.*

b) $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

c) *A^{-1} et A^* sont unitaires.*

d) *$A \circ B$ est unitaire.*

Démonstration.

Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle = \langle (A^* \circ A)\, x, x\rangle \\ &= \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \end{aligned}$$

Alors $\|Ax\| = \|x\|$, cela nous donne A est isométrique et $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Par hypothèse A est unitaire, alors

$$A^* \circ (A^*)^* = A^*.A = Id \quad \text{et} \quad (A^*)^* \circ A^* = A \circ A^* = Id,$$

donc l'opérateurA^* est unitaire. De plus, on a

$$A^{-1} \circ \left(A^{-1}\right)^* = A^{-1} \circ (A^*)^{-1} = (A^* \circ A)^{-1} = Id$$

et

$$\left(A^{-1}\right)^* \circ A^{-1} = (A^*)^{-1} \circ A^{-1} = (A \circ A^*)^{-1} = Id.$$

Alors l'opérateur A^{-1} est unitaire.

Soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$ deux opérateurs unitaires, alors

$$\begin{aligned} (A \circ B)^* \circ (A \circ B) &= B^* \circ \underbrace{(A^* \circ A)}_{id} \circ B \\ &= B^* \circ Id \circ B = B^* \circ B = Id. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \circ B) \circ (A \circ B)^* &= A \circ \underbrace{(B \circ B^*)}_{Id} \circ A^* \\ &= A \circ Id \circ A^* = A \circ A^* = Id\end{aligned}$$

Cela signifie que $A \circ B$ est un opérateur unitaire. □

Remarque. *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint ou unitaires est normal. Mais la réciproque est fausse.*

2.3.2 Comparaison des opérateur

Définition 2.3.3. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $A \geq B$ si $A - B$ est un opérateur positif, c'est à dire*

$$A \geq B \Leftrightarrow \langle (A - B)(x), x \rangle \geq 0, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Remarque. *Soit E un espace de Hilbert, alors $(\mathcal{L}(E), \geq)$ est une relation d'ordre. En effet, soit $A, B, C \in \mathcal{L}(E)$, on a*

i) Réflexive : $A \geq A$, pour tout $x \in E$, $\langle (A - A)(x), x \rangle = 0 \geq 0$,

ii) Transitive : si $A \geq B$ et $B \geq C$, pour tout $x \in E$: $\langle (A-B)(x), x \rangle \geq 0$ et $\langle (B-C)(x), x \rangle \geq 0$, alors

$$0 \leq \langle (A - B)(x), x \rangle + \langle (B - C)(x), x \rangle = \langle (A - C)(x), x \rangle, \qquad \text{pour tout } x \in E,$$

ça signifie $A \geq C$.

iii) Anti-symétrique : si $A \geq B$ et $B \geq A$, alors $\langle (A - B)(x), x \rangle = 0$, pour tout $x \in E$, ça signifie $A = B$.

Lemme 2.3.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors les opérateurs $A \circ A^*$ et $A^* \circ A$ sont des opérateur positifs.*

Démonstration.
Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle (A \circ A^*)(x), x \rangle &= \langle A^* x, A^* x \rangle \\ &= \|A^* x\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ce qui implique que $A \circ A^*$ est positif. De même,

$$\begin{aligned}\langle (A^* \circ A)(x), x \rangle &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \|Ax\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ce qui implique que $A^* A$ est positif. □

Corollaire 2.3.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur auto-adjoint alors, l'opérateur $A^2 = A \circ A$ est un opérateur positifs.*

Démonstration.

Puisque A est auto adjoint, alors $A = A^*$ et d'après le Lemme **??**, on a

$$A^2 = A \circ A = A^* \circ A = A \circ A^*,$$

donc A^2 est un opérateur positif. □

Proposition 2.3.15. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif et auto-adjoint, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur A^n est positif.*

Démonstration.

1^{er} cas : Si n est paire, c'est-à-dire $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors l'opérateur A^kauto adjoint. D'autre part, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle A^n x, x\rangle &= \langle A^{2k} x, x\rangle = \langle \left(A^k \circ A^k\right) x, x\rangle \\ &= \langle A^k x, \left(A^k\right)^* x\rangle = \left\langle A^k x, A^k x\right\rangle = \|A^k x\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

$2^{iéme}$ cas : Si n est impaire, c'est-à-dire $n = 2k+1$, pour tout $x \in E$, on pose $y = A^k x$, alors

$$\begin{aligned}\langle A^n x, x\rangle &= \langle A^{2k+1} x, x\rangle = \langle \left(A^k \circ A \circ A^k\right) x, x\rangle \\ &= \langle A \circ \left(A^k x\right), \left(A^k\right)^* x\rangle = \langle A \circ \left(A^k x\right), A^k x\rangle \\ &= \langle Ay, y\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.3 (Théorème de Cauchy Schwartz généralisé)**.** *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif. Alors,*

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \langle Ay, y\rangle, \qquad \textit{pour tout } x, y \in E.$$

Démonstration.

Pour tout $x, y \in H$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$a = \langle A(x - \lambda y), x - \lambda y\rangle \geq 0.$$

De plus, il vient

$$a = \langle Ax, x\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle Ay, y\rangle - \lambda \langle Ay, x\rangle - \overline{\lambda} \langle Ax, y\rangle \geq 0.$$

D'où, avec A auto-adjoint, on écrit

$$\begin{aligned} a &= |\lambda|^2 \langle Ay, y\rangle - \lambda \langle y, Ax\rangle - \overline{\lambda} \langle Ax, y\rangle + \langle Ax, x\rangle \\ &= + \langle Ax, x\rangle + |\lambda|^2 \langle Ay, y\rangle - \lambda \langle y, Ax\rangle - \overline{\lambda \langle y, Ax\rangle} \geq 0. \end{aligned}$$

Prennons $\lambda = \dfrac{\langle Ax, y\rangle}{\langle Ay, y\rangle}$, on obtient

$$\begin{aligned} a &= + \langle Ax, x\rangle + \left|\frac{\langle Ax, y\rangle}{\langle Ay, y\rangle}\right|^2 \langle Ay, y\rangle - \frac{\langle Ax, y\rangle}{\langle Ay, y\rangle} \langle y, Ax\rangle - \overline{\frac{\langle Ax, y\rangle}{\langle Ay, y\rangle} \langle y, Ax\rangle} \\ &= + \langle Ax, x\rangle + \frac{|\langle Ax, y\rangle|^2}{\langle Ay, y\rangle} - \frac{1}{\langle Ay, y\rangle} \left[\langle Ax, y\rangle \langle y, Ax\rangle - \overline{\langle Ax, y\rangle \langle y, Ax\rangle}\right] \\ &= \langle Ax, x\rangle - \frac{|\langle Ax, y\rangle|^2}{\langle Ay, y\rangle} \geq 0 \end{aligned}$$

D'où, le résultat voulu

$$\langle Ax, x\rangle \langle Ay, y\rangle \geq |\langle Ax, y\rangle|^2 .$$

□

Théorème 2.3.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif, tel que $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$ alors, l'opérateur $I - A$ est un opérateur positif et $\|Id - A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.*

Démonstration.

On définit l'opérateur B par $B = Id - A$, alors $B \in \mathcal{L}(E)$.

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle Bx, x\rangle = \langle (Id - A)x, x\rangle &= \langle x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle Ax, x\rangle \\ &\geq \|x\|^2 - \|Ax\| \, \|x\| \\ &\geq \|x\|^2 - \|A\| \, \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 (1 - \|A\|) \geq 0. \end{aligned}$$

ça signifie $\langle (Id - A)\, x, x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in E$, d'où l'opérateur $Id - A$ est positif.

De plus, d'après le Théorème de Cauchy Schwartz généralisé, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} |\langle Bx, y\rangle|^2 &\leq \langle Bx, x\rangle \langle By, y\rangle \\ &\leq (\langle x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle)(\langle y, y\rangle - \langle Ay, y\rangle) \\ &= \left(\|x\|^2 - \langle Ax, x\rangle\right)\left(\|y\|^2 - \langle Ay, y\rangle\right) \\ &\leq \|x\|^2 \|y\|^2 + \langle Ax, x\rangle \langle Ay, y\rangle - \left[\|x\|^2 \langle Ay, y\rangle + \|y\|^2 \langle Ax, x\rangle\right] \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle \leq \|A\| \|x\|^2 \langle Ay, y\rangle \leq \|x\|^2 \langle Ay, y\rangle,$$

alors

$$\begin{aligned} |\langle Bx, y\rangle|^2 &\leq \|x\|^2 \|y\|^2 - \|y\|^2 \langle Ax, x\rangle \\ &\leq \|x\|^2 \|y\|^2 . \end{aligned}$$

En particulier, quand nous prenons $y = Bx$, on obtient

$$|\langle Bx, Bx\rangle|^2 = \|Bx\|^4 \leq \|x\|^2 \|Bx\|^2 ,$$

ce qui donne

$$\|Bx\| \leq \|x\| , \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

ça signifie $\|B\|_{\mathcal{L}(E)} = \|Id - A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1.$ □

Théorème 2.3.5. *Soit $(A_n)_n \in \mathcal{L}(E)$ une suite auto-adjoint, tel que*

$$A_{n+1} \geq A_n, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite $\left(\|A_n\|_{\mathcal{L}(E)}\right)_n$ est bornée, alors il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax, \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Démonstration.

Soit $(A_n)_n \in \mathcal{L}(E)$ une suite auto-adjoint, tel que $A_{n+1} \geq A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq m$, alors $A_n \geq A_m$, c'est-à-dire l'opérateur $A_n - A_m$ est positif, alors pour tout $x \in E$, on a $\langle (A_n - A_m)x, x\rangle \geq 0$. De lui, nous trouvons

$$\langle A_n x, x\rangle \geq \langle A_m x, x\rangle, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors $(\langle A_n x, x\rangle)_n$ est une suite croissante. Comme la suite $\left(\|A_n\|_{\mathcal{L}(E)}\right)_n$ est bornée, alors il exsite $M > 0$, tel que

$$\|A_n\| \leq M, , \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle A_n x, x\rangle| &\leq \|A_n x\|\|x\| \leq \|A_n\|\|x\|^2 \\ &\leq M\|x\|^2. \end{aligned}$$

Alors la suite $(\langle A_n x, x\rangle)_n$ est bornée. Cela nous donne que $(\langle A_n x, x\rangle)_n$ est une suite convergente, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il exsite $n_0 \geq \mathbb{N}$, tel que

$$n, m \geq n_0 : \langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle \leq \frac{\varepsilon^2}{2M}.$$

D'après le Théorème de Cauchy Schwartz généralisé, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} |\langle (A_n - A_m)x, y\rangle|^2 &\leq |\langle (A_n - A_m)y, y\rangle| \, . \, |\langle (A_n - A_m)x, x\rangle| \\ &\leq \| (A_n - A_m) \| . \|y\|^2 . \langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle \\ &\leq \varepsilon^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Prenons le cas particulier $y = A_n x - A_m x$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle (A_n - A_m)x, y\rangle|^2 &= \|(A_n - A_m)x\|^4 \\ &\leq \varepsilon^2 \|(A_n - A_m)x\|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$n, m \geq n_0 : \|(A_n - A_m)x\|^2 \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $x \in E$, la suite $(A_n x)_n$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert E, donc la suite $(A_n x)_n$ est converge vers un élément noté Ax, i.e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$.
Montrons que $A \in \mathcal{L}(E)$, soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} A(\lambda x + y) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x + y) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n y \\ &= \lambda Ax + Ay. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'opérateur A est linéaire. D'autre part

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq M\|x\|, \qquad \text{pour tout } n \leq \mathbb{N}$$

Par passge à la limite

$$\|Ax\| \leq M\|x\|,$$

Cela signifie que l'opérateur A est continue. □

2.3.3 Opérateur racine carré

Définition 2.3.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif, l'opérateur positif R est dit racine carrée de l'opérateur A si, on a la relation :*

$$A = R^2 = R \circ R \qquad \textit{ou encore} \qquad R := \sqrt{A}.$$

Lemme 2.3.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif, tel que $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, alors suite récurrents (U_n) définie par :*

$$U_1 = 0, \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(I - A + U_n^2\right), \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

converge vers un opérateur linéaire continue U de norme $\|U\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.

Démonstration.

D'après le théorème précédente, il suffit de montrer que la suite d'éléments $(U_n)_n$ est **croissante** et de normes bornées $\|U_n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$. Comme A un opérateur positif et $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, alors par le lemme précédente, on $\|Id - A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$. Nous démontrons par récurrence l'assertions suivante

$$\mathcal{P}_n : \begin{cases} \|U_n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1. \\ U_n \geq 0, \\ U_{n+1} - U_n \geq 0 \end{cases}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

Comme A un opérateur positif et $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, alors par le lemme précédente, on l'opérateur $I - A$ est un opérateur positif. Pour $n = 1$, on a $\|U_1\|_{\mathcal{L}(E)} = 0 \leq 1$, $U_1 \geq 0$ et $U_2 - U_1 = \frac{1}{2}(I - A) \geq 1$, cela signifie que l'assertion $\mathcal{P}_1$ est vraie, ensuite, nous démontrons que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, en effet, comme A un opérateur positif et $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, alors par le lemme précédente, on $\|Id - A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|U_{n+1}\| &= \frac{1}{2}\left\|I - A + U_n^2\right\| \leq \frac{1}{2}\|I - A\| + \frac{1}{2}\left\|U_n^2\right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|I - A\| + \frac{1}{2}\|U_n\|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

D'autre part, on a $I - A$ et U_n^2 des opérateurs positifs, donc

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(I - A + U_n^2\right) \geq 0,$$

ça signifie U_{n+1} est opérateurs positif.

Pour tout $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (U_n \circ U_{n-1})\, x, x\rangle = \langle U_{n-1}x, U_n x\rangle = \overline{\langle U_n x, U_{n-1}x\rangle} \\ &= \langle U_n x, U_{n-1}x\rangle = \langle (U_{n-1} \circ U_n)\, x, x\rangle, \end{aligned}$$

Cela nous donne $U_n \circ U_{n-1} = U_{n-1} \circ U_n$, nous concluons

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{2}\left(U_n^2 - U_{n-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(U_n - U_{n-1}\right)\left(U_n + U_{n-1}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on $U_n - U_{n-1} \geq 0$ et comme $U_n + U_{n-1} \geq 0$, ça signifie $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

En fin, nous avons trouvé l'assertion $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifié.

D'où, l'existence d'un opérateur $U \in \mathcal{L}(E)$, tel que

$$\lim_{n\to\infty} U_n x = Ux, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Avec $\|U\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$. □

Lemme 2.3.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif, tel que $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, alors tout opérateur $B \in \mathcal{L}(E)$ commute avec A il commute avec la suite des opérateurs*

$$U_1 = 0, \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(I - A + U_n^2\right), \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et il commute avec l'opérateur U limite de la suite

$$\lim_{n\to\infty} U_n x = Ux, \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Autrement dit,

$$AB = BA \textit{ implique } U_n B = BU_n \textit{ et } UB = BU.$$

Démonstration.

Soit $B \in \mathcal{L}(E)$ commute avec A, nous démontrons par récurrence que l'opérateur U_n commute avec l'opérateur B, on pose

$$\mathcal{P}_n : U_n B = BU_n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Pour $n = 1$, on a $U_1 = 0$ commute avec A, cela signifie que l'assertion $\mathcal{P}_1$ est vraie, ensuite, nous démontrons que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, en effet, on a

$$(Id - A)\,B = B - AB = B - BA = B\,(Id - A)\,,$$

ça signifie que l'opérateur B commute avec l'opérateur $Id - A$, donc

$$\begin{aligned}
BU_{n+1} &= \frac{1}{2}B\left(I - A + U_n^2\right) \\
&= \frac{1}{2}B\,(I - A) + \frac{1}{2}BU_n^2 \\
&= \frac{1}{2}\,(I - A)\,B + \frac{1}{2}U_n B U_n \\
&= \frac{1}{2}\,(I - A)\,B + \frac{1}{2}U_n^2 B \\
&= \frac{1}{2}\left(I - A + U_n^2\right)B \\
&= U_{n+1}B.
\end{aligned}$$

En fin, nous avons trouvé l'assertion $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifié.

D'où, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} BUx &= B\left(\lim_{n\to\infty} U_n x\right) = \lim_{n\to\infty} BU_n x \\ &= \lim_{n\to\infty} U_n (Bx) = UBx. \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 2.3.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif alors, l'opérateur A admet une racine carrée positif unique $R = \sqrt{A}$.*

De plus, l'opérateur R commute avec tout opérateur commutant avec A.

Autrement dit, pour tout opérateur $D \in \mathcal{L}(E)$ tel que $AD = DA$ on a :

$$R.D = D.R \quad \textit{ou encore} \quad \sqrt{A}.D = D.\sqrt{A}.$$

Démonstration.

Existence : On peut admettre que la norme $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$. Il est clair que l'opérateur A commute avec lui même.

Par le lemme 2.3.3, l'opérateur A commute avec les éléments de la suite U_n telle que

$$U_1 = 0, \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(I - A + U_n^2\right), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par le lemme 2.3.3, l'opérateur U_n commute avec l'opérateur U, tel que

$$\lim_{n\to\infty} U_n x = Ux, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

C'est-à-dire $U_nU = UU_n$, avec $\|U_n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$ et $\|U\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$. D'où, il vient

$$\begin{aligned} \left\|U_n^2 x - U^2 x\right\| &= \|(U_n + U)(U_n - U)x\| \\ &\leq \|U_n + U\|_{\mathcal{L}(E)} \|U_n x - Ux\| \\ &\leq 2\|U_n x - Ux\|. \end{aligned}$$

Autrement dit, la suite $U_n^2 x$ converge vers $U^2 x$ dans E, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} U_n^2 x = U^2 x, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Par conséquent, il est aisé de trouver la limite de la suite récurrente U_{n+1}. D'où, pour tout $x \in E$, on a

$$\lim_{n\to\infty} U_{n+1} x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(I - A + U_n^2\right) x.$$

Donc, il vient

$$Ux = \frac{1}{2}\left(I - A + U^2\right)x.$$

ou encore

$$Ax = \left(I - 2U + U^2\right)x.$$

Prenons l'opérateur $R := Id - U$, comme U est un opérateur positif et $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, par le lemme l'opérateur $I - A$ est un opérateur positif et $\|Id - U\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} R^2 &= (Id - U)(Id - U) = Id^2 - IdU - UId + U^2 \\ &= Id - 2U + U^2, \end{aligned}$$

Donc $R^2 = A$ ou encore

$$R = Id - U = \sqrt{A}.$$

D'où, l'existence de l'opérateur racine carré $\sqrt{A}$.

Unicité : Soient R_1 et R_2 deux opérateurs racines carrées de l'opérateur positif A. ces deux opérateurs commutent avec A, alors elles se commutent entre elles, c'est-à-dire

$$R_1^2 = R_2^2 = A \Rightarrow R_1 R_2 = R_2 R_1.$$

Les opérateurs R_1 et R_2 étant positifs alors, il existent deux opérateurs racines carrées S_1 et S_2 telles que

$$S_1^2 = R_1 \qquad \text{et} \qquad S_2^2 = R_2.$$

De plus, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|S_1 y\|^2 + \|S_2 y\|^2 &= \langle S_1 y, S_1 y\rangle + \langle S_2 y, S_2 y\rangle \\ &= \left\langle S_1^2 y, y\right\rangle + \left\langle S_2^2 y, y\right\rangle \\ &= \langle R_1 y, y\rangle + \langle R_2 y, y\rangle \\ &= \langle (R_1 + R_2) y, y\rangle . \end{aligned}$$

Prenons la cas où $y = (R_1 - R_2)x$, alors il vient

$$\begin{aligned} \|S_1 y\|^2 + \|S_2 y\|^2 &= \langle (R_1 + R_2)(R_1 - R_2)x, y\rangle \\ &= \left\langle \left(R_1^2 - R_2^2\right)x, y\right\rangle \\ &= \langle (A - A)x, y\rangle = 0. \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$S_1 y = S_2 y = 0.$$

La composition du premier membre par l'opérateur S_1 et le second par S_2 nous donne

$$S_1^2 y = S_1 (S_1 y) = 0 \qquad \text{et} \qquad S_2^2 y = S_2 (S_2 y) = 0.$$

Autrement dit, on obtient

$$R_1 y = 0 \qquad \text{et} \qquad R_2 y = 0.$$

ou encore

$$(R_1 - R_2)\, y = 0.$$

D'où, pour tout $x \in E$, on écrit

$$\begin{aligned}
\|(R_1 - R_2)\, x\|^2 &= \langle (R_1 - R_2)\, x, (R_1 - R_2)\, x \rangle \\
&= \langle (R_1 - R_2)(R_1 - R_2)\, x, x \rangle \\
&= \langle (R_1 - R_2)\, y, x \rangle = 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne par la suite $\|(R_1 - R_2)\, x\| = 0$. Autrement dit, l'expression

$$R_1 = R_2.$$

D'où l'unicité de l'opérateur racine carré $\sqrt{A}$. □

Théorème 2.3.7. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$ positifs alors, pour que l'opérateur $A.B$ soit un opérateur positif il faut et il suffit qu'ils commutent c'est -à -dire $A.B = B.A$.*

Démonstration.
Par le Théorème **??**, l'opérateur $R = \sqrt{A}$ commute avec l'opérateur B, c'est-à-dire

$$RB = BR$$

Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\langle (A.B)\, x, x \rangle &= \langle \left(R^2.B\right) x, x \rangle \\
&= \langle (R.B)\, x, Rx \rangle \\
&= \langle (B.R)\, x, Rx \rangle \geq 0
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\langle (A.B)\, x, x \rangle \geq 0, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

ou encore

$$A.B \geq 0.$$

□

Proposition 2.3.16. *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert E dans un espace de Hilbert F admet un invers A^{-1}, alors l'opérateur adjoint A^* admet aussi un inverse. De plus, on a*

$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

Démonstration.

L'opérateur étant inversible, alors on a

$$AA^{-1} = Id \qquad \text{et} \qquad A^{-1}A = Id.$$

Par passage à l'adjoint des deux membres, on obtient

$$\left(AA^{-1}\right)^* = \left(A^{-1}\right)^* A^* = Id \quad \text{et} \qquad \left(A^{-1}A\right)^* = A^* \left(A^{-1}\right)^* = Id.$$

D'où l'existence de l'opérateur invers $\left(A^{-1}\right)^*$ de A^*.

Autrement dit, on écrit

$$\left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$$

□

2.4 Opérateurs compacts

Définition 2.4.1. *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est opérateur compact s'il enboie tout ensemble borné G dans à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

Notation. *On note par $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F et par $\mathcal{K}(E)$ si $E = F$.*

Lemme 2.4.1 (Ensemble relativement compacts)**.** *Un ensemble G est relativement compact si pour tout suite $(x_n)_n$ de G, il existe une sous suite $(x_{n_k})_n$ qui converge dans F.*

Théorème 2.4.1 (critère de compacité)**.** *Soit $A : E \to F$ un opérateur, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) l'opérateur A est compact.

ii) pour tout suite bornée $(x_n)_n$ de E, la suite $(Ax_n)_n$ contient une sous suite convergente de F.

Démonstration.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E, alors il exsite $\varepsilon > 0$, tel que $(x_n)_n \in B(0, \varepsilon)$, c'est-à-dire $\|x_n\|_E \leq \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N} \in B(0, \alpha)$, comme l'opérateur A est compact, alors $A(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ est relativement compact, alors on peut extraire de $(Ax_n)_n$ une sous suite convergente.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Soientt G une partie borné de E et $(y_n)_n$ une suite de $\overline{A(G)}$, alors il existe une suite $(z_n)_n$ de $A(G)$, telle que

$$\|z_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_n$ admet une sous suite convergente, la suite $(y_n)_n$ aussi.

Donc $A(G)$ est relativement compact. D'où A est compact. □

Remarque. *Tout opérateur compact est borné car sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée telle que $\|Ax_n\| \longrightarrow +\infty$, est une contradiction avec la compacité.*

Théorème 2.4.2. *Soient $A, B : E \to F$ deux opérateurs compacts et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors la combinaison lineaire $\lambda A + \mu B$ est opérateur compact.*

Démonstration.

Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de E. Comme A est opérateur compact, alors la suite $(Ax_n)_n$ contient une sous suite convergente de F, c'est-à-dire, il existe une suite $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que (Ax_{n_k}) est convergente. Puisque B est opérateur compact, alors la suite $(Bx_{n_k})_k$ contient une sous suite convergente de F, c'est-à-dire, il existe une suite $\left\{x_{n_{k,m}} : m \in \mathbb{N}\right\} \subset \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ telle que $\left(Ax_{n_{k,m}}\right)$ est converge. Nous en concluons que la suite

$$(\lambda A + \mu B)\left(x_{n_{k,m}}\right) = \lambda A x_{n_{k,m}} + \mu B x_{n_{k,m}}$$

est converge, d'où $\lambda A + \mu B$ est opérateur compact. □

Remarque. *Selon la théorème précédente, nous concluons que l'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous espace vectoriel dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

Théorème 2.4.3. *Soient $A \in \mathcal{L}(F, G)$ et $B \in \mathcal{L}(E, F)$. Si A ou B est compact alors le produit AB est compact.*

Démonstration.

Si A est compact.

Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de E, alors $\{Bx_n\}_n$ est aussi bornée dans F. Puisque A est compact, alors il existe une sous suite $(ABx_n)_n$ qui converge.

D'où AB est compact.

Si B est compact.

Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de E, alors la suite $(Bx_n)_n$ contient une sous suite $(Bx_{n_k})_k$ convergente de F, comme A est un opérateur continue, alors la suite $(ABx_{n_k})_k$ est converge.

D'où AB est compact. □

Théorème 2.4.4. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Démonstration.

Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de E, l'opérateur A_1 étant compact, on peut extraire de la suite $(A_1x_n)_n$ une sous suite convergente. Soit $(x_n^1)_n$ une sous suite de $(x_n)_n$ telle que $(A_1x_n^1)_n$ soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite $(A_2x_n^1)_n$ une sous suite convergente. Soit $(x_n^2)_n$ une sous suite de $(x_n^1)_n$ telle que $(A_2x_n^2)_n$ soit convergente.

Remarquons, la suite $(A_1x_n^2)_n$ une sous suite de la suite convergente $(A_1x_n^1)_n$ qui à sons tour convergentee.

En raisonnant de la même façon, pour opérateurs $A_1, A_2, ..., A_p, ...$, on détermine les suites $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n, ..., (x_n^p)_n, ...$ Im est à remerque que la suite $(x_n^p)_n$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précédent et que les suites $(A_kx_n^p)_n$ sont convergentes pour $k \in \{1, 2, ..., p\}$.

Comme l'espace F est complet, pour la compacité de l'opérateur A il suffit de montrer que la suite $(Ax_n^p)_n$ est une suite Cauchy, alors

$$\|Ax_n^p - Ax_n^q\| \leq \|Ax_n^p - A_nx_n^p\| + \|A_nx_n^p - A_nx_n^q\| + \|A_nx_n^q - Ax_n^q\|.$$

On a $(x_n)_n$ une suite bornée de E, alors il exsite $\rho > 0$, tel que $\|x_n\| \leq \rho$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$n \geq n_0 : \|A_n - A\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Comme $(A_n x_n^p)$ est converge, alors il existe $n_0^2 \in \mathbb{N}$, tel que $p \geq n_0^1$ et $q \geq n_0^1$, on a

$$\|A_n x_n^p - A_n x_n^q\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dans ces conditions, on aura pour tout $p \geq n_0^1$ et $q \geq n_0^1$,

$$\begin{aligned}\|Ax_n^p - Ax_n^q\| &\leq \|A - A_n\| \left(\|x_n^p\| + \|x_n^q\|\right) + \|A_n x_n^p - A_n x_n^q\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3M} \left(\|x_n^p\| + \|x_n^q\|\right) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4.1. *Soit A un opérateur linéaire borné de E dans F, à image Im(A) de dimension fini. Alors A est un opérateur compact.*

Démonstration.

Soit $G \subset E$ un ensemble borné, puisque l'opérateur A est borné, alors $A(G)$ est ensemble borné dans F. Puisque $A(G) \subset$Im(A) et Im(A) de dimension fini. Finalement, $\overline{A(G)}$ est fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie Im(A), donc $\overline{A(G)}$ est compact dans Im(A), d'où A est compact. □

Corollaire 2.4.1. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires bornés de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F, tel que Im(A_n) de dimension fini, Alors A est un opérateur compact.*

Démonstration.

Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires bornés de E dans F, comme Im(A_n) de dimension fini, alors par la proposition 2.4.1, les opérateurs $(A_n)_n$ sons compacts. Puisque la suite $(A_n)_n$ est converge vers A dans $\mathcal{L}(E, F)$, par la Théorème 2.4.4, nous concluons que l'opérateur A est compact. □

Lemme 2.4.2. *Soit G un sous espace fermé d'un espace normé E tel que $G \neq E$, alors il existe un élément $x \in E$, avec $\|x\| = 1$ tel que pour tout $y \in G$, on a*

$$\|y - x\| \geq \alpha, \qquad \textit{avec } 0 < \alpha < 1.$$

Démonstration.

Puisque $G \neq E$, alors il exsite un élément $z \in E$ et $z \notin G$, alors on a

$$\inf_{u \in E} \|z - u\| = \beta > 0,$$

donc, il exsite un élément $y \in G$, tel que

$$\beta \leq \|z - y\| \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

alors $\alpha \in (0, 1)$. Soit x est donné par

$$x = \frac{z - y}{\|z - y\|},$$

alors $\|x\| = 1$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \|x - u\| &= \left\| x - \frac{z - y}{\|z - y\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|z - y\|} \|z - (x \|z - y\| + y)\| \\ &\geq \frac{\beta}{\|z - y\|} \geq \alpha. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.4.5. *L'opérateur identique Id de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration.
($\Leftarrow$) Si E est est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}(Id) = E$ de dimension fini, par la proposition précédente l'opérateur A est compact.
($\Rightarrow$)Par la raisonnement contraposée, montrons si dimension de E infini ($\dim E < \infty$), alors l'opérateur identiqueId de E dans E est compact, c'est-à-dire, il existe une suite bornée mais elle ne contient acune sous suite convergente. En effet,
Soit x_1 un élément de E, tel que $\|x_1\| = 1$, alors $G_1 = [x_1] = \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sous espace fermé de E, car G_1 est de dimension finie. D'aprés le lemme 2.4.2, il existe un élément $x_2 \in E$, tel que

$$\|x_2\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}.$$

Prenons une deuxiéme fois le sous espace fermé $G_1 = [x_1, x_2] = \{\lambda x_1 + \mu x_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$, il existe un élément $x_3 \in G_2$, tel que

$$\|x_3\| = 1, \quad \|x_1 - x_3\| > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|x_2 - x_3\| > \frac{1}{2}.$$

On répete la même procédure jusqu'à l'obtention d'un suite $(x_n)_n$ vérifant

$$\|x_3\| = \quad \text{et} \quad \|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout } n \neq m.$$

Il est à remarquer que cette suite $(x_n)_n$ est bornée mais elle ne contient acune sous suite convergente. □

Corollaire 2.4.2. *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Démonstration.
Comme la boule unité $B(0,1)$ est sa propre image dans l'esapce E de dimension infinie par l'opérateur identique Id de E dans E, alors par la Théorème 2.4.5 la boule unité $B(0,1)$ n'est pas compact.par □

Théorème 2.4.6. *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Démonstration.
Soit $A : E \to F$ est un opérateur compact, soit la boule unité $B(0,1)$ est un ensemble bornée, alors l'ensemble $\overline{A(B(0,1))}$ est compact, donc l'ensemble $A(B(0,1))$ borné, c'est à dire, il existe $M > 0$, tel que

$$\|Ax\| \leq M, \qquad \text{pour tout } x \in B(0,1),$$

ce qui signifie que l'opérateur A est borné. □

Exemple 2.4.1 (Contre Exemple)**.** *Si E est de dimension infinie. l'opérateur identique Id de E dans E est borné, car $\|Idx\| = \|x\|$, mais il n'est pas compact.*

Théorème 2.4.7. *Soient E et F deux espace de Hilbert, soit A un opérateur compact de E dans F, alors, l'opérateur adjoint A^* est aussi un opérateur compact.*

Démonstration.
Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de E, alors il existe $M > 0$, tel qye $(x_n)_n \in B_E(0,M) < M$
L'opérateur A étant compact de E dans E et l'opérateur A^* est borné de F dans E, alors l'opérateur produit AA^* défini de F dans F est un opérateur compact, cra le produit de deux opérateur l'un compact et l'autre borné.
Donc, il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$, tel que la suite $\{(AA^*)\,x_{n_k}\}_k$ est converge dans F, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p, q \geq n_0 : \left\|AA^*x_{n_p} - AA^*x_{n_q}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\|A^*x_{n_p} - A^*x_{n_q}\|^2 &= \|A^*(x_{n_p} - x_{n_q})\|^2 \\ &= \left\langle A^*(x_{n_p} - x_{n_q}), A^*(x_{n-p} - x_{n_q})\right\rangle \\ &= \left\langle AA^*(x_{n_p} - x_{n_q}), x_{n_p} - x_{n_q}\right\rangle \\ &= \left\langle AA^*x_{n_p} - AA^*x_{n_q}, x_{n_p} - x_{n_q}\right\rangle\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}\|A^*x_{n_p} - A^*x_{n_q}\|^2 &\leq \left\|AA^*x_{n_p} - AA^*x_{n_q}\right\| \left\|x_{n_p} - x_{n_q}\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M}\left(\left\|x_{n_p}\right\| + \left\|x_{n_Q}\right\|\right) \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre que $(A^*x_{n_k})_k$ est une suite de Cauchy, donc la convergence de cette suite $(A^*x_{n_k})_k$ dans E, ça signifie que l'opérateur A^* est compact. □

Corollaire 2.4.3. *Soient E et F deux espace de Hilbert, soit A un opérateur de E dans F, alors l'opérateur A est compact si et seulement si l'opérateur A^* est compact.*

Démonstration.

Par la théorème 2.4.7, on a A est compact implique A^* est compact, comme $(A^*)^* = A$, nous obtenons A^* est compact implique A est compact. □

Théorème 2.4.8. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalents*

i) A est compact.

ii) Il existe une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rang finie qui converge vers A.

Démonstration.

Il suffit de prouver $(i) \Rightarrow (ii)$, car le contraire est le corollaire 2.4.1.

Soit $D = \overline{\mathrm{Im}A}$. Si D est de dimension finie, le résultat est évident.

Sinon soit $(e_1, e_2, ...)$ une base hilbertienne de D. Soit P_n la projection orthogonale sur

$$[e_1, ..., e_n] = \left\{\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i : \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}\right\}.$$

On pose $A_n = P_n A$, alors $(A_n) \in \mathcal{L}(E)$ et on a

$$\mathrm{Im}A_n = \mathrm{Im}P_n A \subset [e_1, ..., e_n],$$

alors le rang de opérateur A_n est fini. On vérifie que la suite $(A_n)_n$ converge vers A dans $\mathcal{L}(E)$. En effet, posons $\alpha_n = \langle Ax, e_n \rangle$, alors

$$A_n x = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_k e_k,$$

donc

$$\|A_n x - Ax\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2,$$

Comme la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ converge, cette $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ tend vers 0, lorsque n tend vers ∞. Si A est compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'eensemble $\overline{A(B(0,\varepsilon))}$ es compact, comme

$$\overline{A(B(0,\varepsilon))} = \bigcup_{x \in B(0,\varepsilon)} B\left(Ax, \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

alors $A(B(0,\varepsilon))$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini de boules de rayon $\dfrac{\varepsilon}{3}$.
Soient $Ax_1, ..., Ax_m$ les centres de ces boules. Si $\|x\| \leq 1$, il existe un j tel $\|Ax - Ax_1\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\| &\leq \|Ax - Ax_j\| + \|Ax_j - A_n x_j\| + \|A_n x_j - A_n x\| \\ &\leq 2\|Ax - Ax_j\| + \|A_n x_j - A_n x\| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|A_n x_j - A_n x\| \end{aligned}$$

D'aprés le lemme, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si

$$n \geq n_0 : \|A_n x_j - A_n x\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } j$$

Ainsi

$$\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } \|x\| \leq 1,$$

donc $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$. pour $n \geq n_0$, ce qui montre que la suite (A_n) converge vers A. □

Proposition 2.4.2. *Soit E un espace normé complet. Soit $A : E \to E$ un opérateur compact, alors*

i) ker$(I - A)$ est de dimension finie.

ii) Im$(I - A)$ est fermé.

iii) $I - A$ inversible $\Leftrightarrow$ $I - A$ surjectif.

Démonstration.
$i)$ On note $C :=\ker(I - A) = \{x \in E : Ax = x\}$, alors

$$\begin{aligned} A(C) &= \{Ax \in E : x \in \ker(I - A)\} \\ &= \{Ax \in E : Ax = x\} \\ &= \ker(I - A) = C. \end{aligned}$$

Soit $\overline{B}_C(0,1)$ la boule unité fermée dans $\ker(I - A)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \overline{B}_C(0,1) &= \overline{B}(0,1) \cap \ker(I - A) \\ &= \{x \in E : Ax = x \text{ et } \|x\| \leq 1\}, \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} A\left(C \cap \overline{B}(0,1)\right) &= \{Ax : x \in C \text{ et } \|x\| \leq 1\} \\ &= \{Ax : Ax = x \text{ et } \|x\| \leq 1\} \\ &= C \cap \overline{B}(0,1). \end{aligned}$$

D'autre part, ona

$$\begin{aligned}\overline{B}_C(0,1) &= C\cap\overline{B}(0,1) = A\left(C\cap\overline{B}(0,1)\right)\\ &\subset A(C)\cap A\left(\overline{B}(0,1)\right)\\ &= C\cap A\left(\overline{B}(0,1)\right).\end{aligned}$$

Comme A est compact, alors $A\left(\overline{B}(0,1)\right)$ est un ensemble compact dans E, d'où $\overline{B}_C(0,1)$ est une partie compacte dans $\ker(I-A)$, D'après le théorème de Riesz, le sous-espace $\ker(I-A)$ est donc de dimension finie.

$ii)$ Soit $(y_n)_n$ une suite de $\mathrm{Im}(I-A)$ qui converge vers $y\in E$. On veut montrer que $y\in\mathrm{Im}(I-A)$, on écrit :

$$y_n=(I-A)\,x_n \quad \text{où} \quad (x_n)_n\in E.$$

On a

$$y_n = x_n - Ax_n \to y \quad \text{dans } E. \tag{$*$}$$

1^{er} cas : $(x_n)_n$ est bornée. Puisque A est compact, alors il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ et $z\in E$, tel que :

$$Ax_{n_k k}\to z \quad \text{dans } E.$$

D'après $(*)$, on obtient

$$x_{n_k}\to y+z \quad \text{dans } E.$$

On compose par A pour obtenir

$$Ax_{n_k k}\to A(y+z) \quad \text{dans } E.$$

Par l'unicité de la limite $z=A(y+z)=Ay+Az$. Ensuite on réécrit ceci en

$$y=(z+y)-A(y+z)=(I-A)(z+y)-A(y+z)=$$

donc, $y\in\mathrm{Im}(I-A)$.

$2^{ème}$ cas : $(x_n)_n$ n'est pas bornée :

$$y_n = x_n - Ax_n \to y \text{ dans } E.$$

Posons

$$\begin{aligned} d_n \;&:= d\left(x_n, \ker(I-A)\right)\\ &= \inf\left\{\|x_n - z\| : z\in\ker(I-A)\right\}\end{aligned}$$

Puisque $\dim \ker (I-A)$ est finie, il existe $(z_n)_n \in \ker (I-A)$, tel que :

$$d_n := d\left(x_n, \ker (I-A)\right) = \|x_n - z_n\| .$$

Alors

$$x_n - Ax_n = (x_n - z_n) - (Ax_n - z_n) \to y \text{ dans } E.$$

Montrons que $(x_n - z_n)_n$ est bornée, nous supposons le contraire, c'est-à-dire $(x_n - z_n)_n$ n'est pas bornée alors il existe une sous-suite $(x_{n_k} - z_{n_k})_k$ tend vers ∞ lorsque $k \to \infty$, donc

$$\lim_{k\to\infty} d_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - z_{n_k}\| = \infty.$$

On considère la suite $\left\{\frac{1}{d_n}(x_n - z_n)\right\}_n$ qui est une suite bornée, car

$$\left\|\frac{1}{d_n}(x_n - z_n)\right\| = \frac{1}{d_n}\|x_n - z_n\| = 1.$$

Puisque A est un opérateur compact, alors il existe une sous-suite $d_{n_m}^{-1}(x_{n_m} - z_{n_m})_m$ tel que :

$$\frac{1}{d_{n_m}} A(x_{n_m} - z_{n_m}) \to u \text{ dans } E.$$

Récrivons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_{n_m}} A(x_{n_m} - z_{n_m}) &= \frac{1}{d_{n_m}}(Ax_{n_m} - Az_{n_m}) \\
&= \frac{1}{d_{n_m}}(Ax_{n_m} - x_{n_m}) + \frac{1}{d_{n_m}}(z_{n_m} - x_{n_m}).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite :

$$u = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{d_{n_m}}(z_{n_m} - x_{n_m}),$$

car

$$\lim_{m\to\infty} Ax_{n_m} - x_{n_m} = y \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} d_{n_m} = \infty.$$

En appliquant A, on obtient

$$Au = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{d_{n_m}} A(z_{n_m} - x_{n_m}) = u.$$

Alors $u \in \ker (I-A)$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$m \geq m_0 : \left\|\frac{1}{d_{n_m}}(z_{n_m} - x_{n_m}) - u\right\| \leq \frac{1}{2},$$

ou encore

$$m \geq m_0 : \|x_{n_m} - (d_{n_m} u - z_{n_m})\| \leq \frac{d_{n_m}}{2}.$$

Comme $d_{n_m}u - z_{n_m} \in \ker(I - A)$, alors $d_{n_m} \leq \frac{d_{n_m}}{2}$. Cela nous donne une contradiction.

Donc $(x_n - z_n)_n$ est bornée, comme A est compact, alors il existe une sous suite $(x_{n_k} - z_{n_k})_k$ et $v \in E$, tel que :

$$A(x_{n_k k} - z_{n_k}) \to v \quad \text{dans } E.$$

Alors, par le cas précédent, on obtient que $y \in \mathrm{Im}(I - A)$. □

Définition 2.4.2 (Equicontinuité). *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_E)$ espaces normés et $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(E, F)$. On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \eta \qquad \textit{implique} \qquad \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E.

Remarque. *Le point important, η ne dépend pas de f.*

Théorème 2.4.9 (Arzéla-Ascoli). *Soit K un sous-ensemble compact dans E et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(K, F)$. Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(K, F)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\mathcal{H}$ est équicontinue

ii) $\forall x \in K$, $\mathcal{H}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compacte dans F.

Exemple 2.4.2. *On pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Soit l'**opérateur de Volterra** $A : E \longrightarrow E$ défini par*

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad \textit{pour tou } x \in [0,1].$$

Montrons que A est compact.

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble bornée, il existe $\rho > 0$, tel que

$$\mathcal{B} \subset B(0, \rho) = \{x \in E : \|x\|_\infty \leq \rho\}$$

Montrons que $\mathcal{H} = A(\mathcal{B})$ est relativement compacte. En effet, soit $x \in \mathcal{B}$, pour tous $t_1, t_2 \in [0,1]$, on a

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} x(s)ds \right| \leq \rho \, |t_1 - t_2|,$$

Alors les élémrnts de $\mathcal{H}$ sont ρ-lipschitzien, donc $\mathcal{H}$ est équicontinu.

De plus,$\mathcal{H}_x$ est une partie de $\mathbb{R}$, donc si $\mathcal{H}_x$ est bornée alors $\mathcal{H}_x$ est relativement compacte.

Soit $t \in [0,1]$, pour tout $x \in \mathcal{B}$, on a

$$|Ax(t)| \leq \int_0^1 |x(s)| \, ds \leq \rho,$$

alors $\mathcal{H}_x \subset [-\rho, \rho]$. Par le Théorème d'Arzéla-Ascoli, $\mathcal{H} = A(\mathcal{B})$ est relativement compacte, d'où A est compact.

Exemple 2.4.3. *Soient* $E = L^p((0,1), \mathbb{R})$*,* $p \geq 1$ *et* A *l'opérateur défini sur* E *par*

$$Af(t) = \int_0^1 ts(1-ts)x(s)dy, \quad \text{pour tout } t \in (0,1).$$

Pour tout $x \in E$*, on a*

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_0^1 ts(1-ts)x(s)dy \\ &= \left(\int_0^1 sx(s)ds\right)t - \left(\int_0^1 s^2 f(s)ds\right)t^2. \end{aligned}$$

Alors $Im(A) \subset \mathbb{R}_2[X]$*, où* $\mathbb{R}_2[X]$ *l'espace des polynômess à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux.*

Comme $\mathbb{R}_2[X]$ *est de dimension finie, l'opérateur* $\mathbb{R}_2[X]$ *est est compact.*

2.5 Spectre d'un opérateur borné

Rappelons que si A est une matrice carrée $n \times n$, un nombre complexe λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$ et tel que $Ax = \lambda x$, ce qui signifie que $(A - \lambda I)x = 0$, c' est-à -dire $A - \lambda I$ n'est pas inversible, où I est la matrice identité sur $\mathbb{R}^n$.

Comme les valeurs propres ont de nombreuses applications en dimension finie. Dans cette partie on va étendre ces notion au espaces de Hilbert.

Définition 2.5.1 (Ensemble résolvant, Résolvante)**.** *Soit* $A \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est valeur résolvante si* $\lambda I - A$ *est inversible. On note* $\rho(A)$ *l'ensemble des valeurs* ***résolvantes*** *de* A*. C'est-à-dire*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est inversible}\}.$$

Définition 2.5.2 (Spectre)**.** *Soit* $A \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est* ***valeur spectrale*** *si* $\lambda I - A$ *n'est pas inversible. On note* $\sigma(A)$ *l'ensemble des valeurs spectrales de* A*, c'est-à-dire*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas inversible }\}.$$

Définition 2.5.3 (Spectre ponctuel)**.** *Soit* $A \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est* ***valeur propre*** *si* $\lambda I - A$ *n'est pas injectif, on note* $\sigma_p(A)$ *l'ensemble des valeurs propres de* A*, c'est-à-dire*

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}\}.$$

Définition 2.5.4 (Spectre continu). *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **spectre continu** de A et on note à par $\sigma_c(A)$, l'ensemble $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans E, c'est-à-dire*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - A) = \{0\},\ \mathrm{Im}(\lambda I - A) \neq E \text{ et } \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} = E\}.$$

Définition 2.5.5 (spectre résiduel). *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **spectre résiduel** de A et on note à par $\sigma_r(A)$, l'ensemble $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans E, c'est-à-dire*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - A) = \{0\},\ \mathrm{Im}(\lambda I - A) \neq E \text{ et } \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} \neq E\}.$$

Remarque. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors l'ensemble $\sigma(A)$ se décompose en l'union disjointe*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

Exemple 2.5.1. *On pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on considère l'opérateur de Volterra $A : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ donné par :*

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Soit $\lambda \in \ker(\lambda I - A)$, alors $\int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, alors

$$\lambda f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

donc $\lambda \neq 0$ si et seulement si $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$, ça signifie

$$\sigma(A) = \{0\}.$$

Définition 2.5.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **résolvante** de A, l'application de $R(.,A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(E)$ donné par :*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \qquad \text{pour tout } \lambda \in \rho(A).$$

*L'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la **résolvante** de A en λ.*

Proposition 2.5.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors*

i) $\sigma(A) \subset \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|A\|) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|A\|\}$ équivalent à $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \in \rho(A)$,

ii) $\sigma(A)$ est un compact non vide de $\mathbb{K}$.

iii) $\rho(A)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$.

Démonstration.

i) Soit $\lambda \notin \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|A\|)$, c'est-à-dire $|\lambda| > \|A\|$ et $\lambda \neq 0$, donc $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, on déduit que $I - \lambda^{-1}A$ est inversible, il résulte que $\lambda \in \rho(A)$ ou $\lambda \notin \sigma(A)$, ça signifie que $\sigma(A) \subset \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|A\|)$.

ii) On considère l'application $\varphi : \mathbb{K} \to \mathcal{L}(E)$ donné par :

$$\varphi(\lambda) = \lambda I - A, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\|_{\mathcal{L}(E)} &= \|\lambda I - A - \mu I + A\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &= \| \|(\lambda - \mu)I\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &= |\lambda - \mu| \|I\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &= |\lambda - \mu|_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

ça signifie que l'application φ est 1−lipschitzien, donc φ est continue, comme $\mathcal{L}_i(e)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Alors $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_i(E))$ est un ouvert dans $\mathbb{K}$, donc

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathcal{L}_i(E)) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) \in \mathcal{L}_i(E)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \in \mathcal{L}_i(E)\} \\ &= \rho(A). \end{aligned}$$

On en déduit que $\rho(A)$ est un ouvert dans $\mathbb{K}$.

iii) Comme A est un ouvert dans $\mathbb{K}$, $\sigma(A) = \mathbb{K} \backslash \rho(A)$ et $\sigma(A) \subset \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|A\|)$, donc $\sigma(A)$ est fermé et borné dans $\mathbb{K}$, ce qui donne $\sigma(A)$ est compact. □

Proposition 2.5.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors*

i) $(\lambda, \mu) \in \rho(A) \times \rho(A)$, *on a*

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) \\ &= (\mu - \lambda) R(\mu, A) R(\lambda, A) \end{aligned}$$

ii) *La résolvante $\rho(A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(E)$ est dérivable et*

$$R'(\lambda, A) = -R^2(\lambda, A).$$

Démonstration.

ii) Soit $(\lambda, \mu) \in \rho(A) \times \rho(A)$, on

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}[I - (\lambda I - A)(\mu I - A)^{-1}] \\ &= (\lambda I - A)^{-1}[(\mu I - A) - (\lambda I - A)](\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \end{aligned}$$

On échange λ et μ :

$$R(\mu, A) - R(\lambda, A) = (\lambda - \mu)R(\mu, A)R(\lambda, A).$$

d'où

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A).$$

ii) Dérivabilité de $R(., A)$, on a

$$\frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = -R(\mu, A)R(\lambda, A).$$

On fait tendre μ vers λ dans $\mathbb{K}$. À droite la limite entre vaut $-R(\mu, A)R(\lambda, A)$. En effet : $\mu \to R(\mu, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est continue comme composée d'applications continues. Ainsi, $\mu \to R(\mu, A)$ est dérivable en tout point $\lambda \in \rho(A)$ et sa dérivée vaut $-R^2(\lambda, A)$. □

Proposition 2.5.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on a*

i) $\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}$,

ii) $\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \sigma(A)\}$,

iii) Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$: $R(\lambda, A^*) = [R(\overline{\lambda}, A)]^*$.

Démonstration.

i) Soit $\lambda \in \rho(A^*)$, alors $\lambda I - A^*$ est inversible, c'est équivale $(\lambda I - A^*)^*$ est inversible, comme

$$(\lambda I - A^*)^* = \overline{\lambda} I - A^{**} = \overline{\lambda} I - A^*,$$

alors $\overline{\lambda} \in \rho(A)$, ça signifie $\rho(A^*) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}$, D'autre part

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \rho(A^{**}) \\ &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \rho(A^*)\} \\ &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\overline{\lambda}} \in \rho(A)\} \\ &= \rho(A). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\rho(A^*) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\right\}$.

ii) Comme

$$\begin{aligned}
\sigma(A^*) &= \mathbb{C}\backslash\rho\,(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \rho(A^*)\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \notin \rho(A)\right\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \sigma(A)\right\}.
\end{aligned}$$

iii) On a : $\lambda \in \rho(A^*)$ si et seulement si $\overline{\lambda} \in \rho(A)$, c'est-à-dire $\lambda I - A^*$ est inversible équivalent à $\overline{\lambda} I - A$ est inversible, donc

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A^*) &= (\lambda I - A^*)^{-1} = \left[(\overline{\lambda} I - A)^*\right]^{-1} \\
&= \left[(\overline{\lambda} - A)^{-1}\right]^* = \left[R(\overline{\lambda}, A)\right]^*.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur auto-adjoint, on a*

i) $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.

ii) $\lambda \in \sigma_p(A)$ *si et seulement si* $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} \neq E$.

iii) *Si* $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, *alors* $ker(\lambda I - A)\, \perp ker(\mu I - A)$.

Démonstration.

i) Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe $x \in E - \{0\}$, tel que $Ax = \lambda x$, comme A est auto-adjoint, on a $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, donc

$$\lambda = \frac{\langle \lambda x, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R},$$

d'où $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.

ii) Soit $\lambda \in \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda I - A)^* = \overline{\lambda} I - A^* = \lambda I - A,$$

donc

$$\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} = [\ker(\lambda I - A)^*]^\perp = [\ker(\lambda I - A)]^\perp.$$

Comme $\ker(\lambda I - A)$ est un sous espace vectoriel fermé, alors

$$\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)}^\perp = [\ker(\lambda I - A)]^{\perp\perp} = \ker(\lambda I - A)$$

Par la définition de $\sigma_p(A)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)}^\perp \neq \{0\}\right\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} \neq \{0\}^\perp\right\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} \neq E\right\},
\end{aligned}$$

ça signifie $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} \neq E$.

$iii)$Soient $x \in \ker(\lambda I - A)$ et $y \in \ker(\mu I - A)$, alors

$$Ax = \lambda x \qquad \text{et} \qquad Ay = \mu y.$$

Comme $A = A^*$et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle - \langle x, \mu y\rangle \\ &= \langle Ax, y\rangle - \langle x, Ay\rangle \\ &= \langle Ax, y\rangle - \langle Ax, y\rangle = 0 \end{aligned}$$

Il résulte $\langle x, y\rangle = 0$, car $\lambda \neq \mu$, d'où $\ker(\lambda I - A) \perp \ker(\mu I - A)$. □

Proposition 2.5.5. *Soit E est un espace de Hilbert. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur normal, alors*

$i)$ *pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ est un opérateur normal.*

$ii)$ $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Démonstration.

$i)$ Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^*(\lambda I - A) &= (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) \\ &= \overline{\lambda}\lambda I - \overline{\lambda} A - \lambda A^* + A^*A \\ &= \overline{\lambda}\lambda I - \overline{\lambda} A - \lambda A^* + AA^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)(\lambda I - A)^* &= (\lambda I - A)(\overline{\lambda} I - A^*) \\ &= \lambda\overline{\lambda} I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + AA^*, \end{aligned}$$

comme $AA^* = A^*A$, alors $(\lambda I - A)^*(\lambda I - A) = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^*$, c'est-à-dire $\lambda I - A$ est un opérateur normal.

Soit $\lambda \in \sigma_r(A)$ alors $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ et $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} \neq E$, comme $\lambda I - A$ est un opérateur normal, alors

$$\{0\} = \ker(\lambda I - A)^* = (\mathrm{Im}(\lambda I - A))^{\perp}.$$

donc

$$(\mathrm{Im}(\lambda I - A))^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp}.$$

Puisque $\mathrm{Im}(\lambda I - A)$ est un sous espace vectoriel, alors

$$\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} = E.$$

Nous concluons que λ introuvable, cest-à-dire $\sigma_r(A) = \emptyset$. □

Corollaire 2.5.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur auto-adjoint ou unitaire alors $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Démonstration.

Si $A \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur auto-adjoint ou unitaire, alors A est normal, donc $\sigma_r(A) = \emptyset$. □

Définition 2.5.7 (Rayon spectral)**.** *Soit E un espace de Hilbert. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on pose*

$$r(A) = \begin{cases} \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}, & si\ \sigma(A) \neq \emptyset, \\ 0 & si\ \sigma(A) = \emptyset. \end{cases}$$

On appelle $r(A)$ le ***rayon spectral*** *de A.*

Lemme 2.5.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors la suite $\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right)_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Plus précisément,*

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|.$$

Démonstration.

On sait que $0 \leq \|A^n\| \leq \|A\|^n$, ça signifie $0 \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|$. Cela entraîne :

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|.$$

Notons $\ell = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\sqrt[n_\varepsilon]{\|A^{n_\varepsilon}\|} \leq \ell + \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la division euclidienne par n_ε, nous trouvons

$$n = \alpha_n n_\varepsilon + r_n \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_n \leq n_\varepsilon - 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\|A^n\|} &= \sqrt[n]{\|A^{\alpha_n n_\varepsilon + r_n}\|} \leq \sqrt[n]{\|A^{\alpha_n n_\varepsilon}\|} \sqrt[n]{\|A^{r_n}\|} \\ &\leq \sqrt[n]{\|A^{n_\varepsilon}\|^{\alpha_n}} \sqrt[n]{\|A\|^{r_n}} \\ &= \left(\|A^{n_\varepsilon}\|^{\frac{1}{n_\varepsilon}}\right)^{\frac{\alpha_n}{n} n_\varepsilon} \|A\|^{\frac{r_n}{n}}. \end{aligned}$$

Nous concluons

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq (\ell + \varepsilon)^{\frac{\alpha_n}{n} n_\varepsilon} \|A\|^{\frac{r_n}{n}}$$

Mais

$$\alpha_n n_\varepsilon \leq n = \alpha_n n_\varepsilon + r_n \leq (\alpha_n + 1) n_\varepsilon.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n n_\varepsilon}{n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = 0.$$

Ainsi, par passage à la lim sup,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} &\leq \limsup_{n\to\infty} (\ell+\varepsilon)^{\frac{\alpha_n}{n} n_\varepsilon} \|A\|^{\frac{r_n}{n}} \\ &= \ell+\varepsilon,\end{aligned}$$

ça signifie

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} + \varepsilon.$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

□

Proposition 2.5.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\widetilde{r}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|$. Alors*

$$\sigma(A) \subset \overline{B}_{\mathbb{C}}(0, \widetilde{r}(A)).$$

Démonstration.

La série entière $z \to \sum_{n\geq 0} A^n z^n$ possède $\widetilde{r}(A)$ comme rayon de convergence.

Donc si $|\lambda| > \widetilde{r}(A)$ la série $\sum_{n\geq 0} A^n \lambda^{-(n+1)}$ converge absolument. On a

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)\sum_{n\geq 0} A^n \lambda^{-(n+1)} &= \sum_{n\geq 0} A^n \lambda^{-n} - \sum_{n\geq 0} A^{n+1} \lambda^{-(n+1)} \\ &= Id + \sum_{n=1} A^n \lambda^{-n} - -\sum_{n\geq 0} A^{n+1}\lambda^{-(n+1)} \\ &= Id,\end{aligned}$$

ça signifie $\lambda \in \rho(A)$, d'où $\sigma(A) \subset \overline{B}_{\mathbb{C}}(0, \widetilde{r}(A))$. □

Remarque. *Puisque $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \widetilde{r}(A)\} \subset \rho(A)$, on a :*

$$r(A) \leq \widetilde{r}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|.$$

Théorème 2.5.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors*

$$r(A) = \widetilde{r}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|.$$

Démonstration.

1ère étape : Si $|\lambda| > \widetilde{r}(A)$ la série $\sum_{n\geq 0} A^n \lambda^{-(n+1)}$ converge absolument. Par la proposition précédente 2.5.6, on a

$$(\lambda I - A)\sum_{n\geq 0} A^n \lambda^{-(n+1)} = Id$$

Alors l'opérateur $\lambda I - A$ est inversible, c'est l'inverse

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n \lambda^{-(n+1)}.$$

Prenons $t > \widetilde{r}(A)$ et posons $\lambda = te^{i\theta}$. On sait que la série $\sum_{n \geq 0} A^n \lambda^{-(n+1)}$ converge normalement sur le cercle $S(0, t) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = t\}$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} R\left(te^{i\theta}, A\right)\left(te^{i\theta}\right)^p &= \left(te^{i\theta} I - A\right)^{-1}\left(te^{i\theta}\right)^p = \sum_{n \geq 0} A^n \left(te^{i\theta}\right)^{-(n+1)}\left(te^{i\theta}\right)^p \\ &= \sum_{n \geq 0} A^n t^{p-n-1}\left(e^{i\theta}\right)^{p-n-1}. \end{aligned}$$

Par intégration, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\left(te^{i\theta}, A\right)\left(te^{i\theta}\right)^p d\theta = \sum_{n \geq 0} A^n t^{p-n-1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta}\right)^{p-n-1} d\theta$$

Puisque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta}\right)^{p-n-1} d\theta = \delta_{p,n+1} = \begin{cases} 1, & \text{si } p = n+1, \\ 0, & \text{si } p \neq n+1, \end{cases}$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\left(te^{i\theta}, A\right)\left(te^{i\theta}\right)^p d\theta = \sum_{n \geq 0} A^n t^{p-n-1} \delta_{p,n+1} = A^p.$$

Donc, on ala formule suivante :

$$\forall p \geq 0, \quad \forall t > \widetilde{r}(A), \quad J_p(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\left(te^{i\theta}, A\right)\left(te^{i\theta}\right)^p d\theta = A^p.$$

2ème étape : On a $r(A) \leq \widetilde{r}(A)$, il reste donc à montrer que :

$$r(A) \geq \widetilde{r}(A)$$

Soit $t \geq r(A)$, alors

$$\begin{aligned} \|A^p\| &= \left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\left(te^{i\theta}, A\right)\left(te^{i\theta}\right)^p d\theta \right\| \\ &\leq \frac{t^{p+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|R\left(te^{i\theta}, A\right)\right\| d\theta \\ &\leq t^{p+1} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left\|R\left(te^{i\theta}, A\right)\right\| \\ &= t^{p+1} M. \end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt[p]{\|A^p\|} \leq t \sqrt[p]{Mt}.$$

Si p tend vers ∞, on obtient

$$\lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\|A^p\|} \leq t.$$

c'est-à-dire

$$\widetilde{r}(A) \leq t, \qquad \text{pour tout } t > r(A).$$

Finalement

$$\widetilde{r}(A) \leq r(A).$$

$\square$

Exemple 2.5.2. *Considérons l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$ défini par :*

$$A(x_n)_n = (x_{n+1})_n.$$

Alors

$$A^m(x_n)_n = (x_{n+1+m})_n.$$

On a $\|A^m\| \leq 1$, pour tout $m \geq 1$. Si nous prenons $x_m = (0, ..., \underbrace{0}_{1+1}, 1, 0, ..)$, $A^m x_m = (1, 0, ...)$, comme $\|A^m x_m\| = \|x_m\| = 1$, alors $\|A^m\| = 1$ et

$$r(A) = \lim_{m \longrightarrow \infty} \sqrt[M]{\|A^m\|} = 1.$$

Proposition 2.5.7. *Soit E un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal. Alors*

$$r(A) = \|A\|.$$

Démonstration.

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur auto-adjoint, montrons que $r(A) = \|A\|$. En effet, on a $\|A^*.A\| = \|A\|^2$, comme A est auto-adjoint, alors

$$\|A^2\| = \|A\|^2.$$

On déduit par récurrence la relation

$$\text{pour tout } n \geq 0 : \|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}.$$

Donc

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|A\|.$$

Supposons maintenant que A est normal, c'est-à-dire $A^*.A = A.A^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
(A^*.A)^2 &= (A^*.A)(A^*.A) = A^*.(A.A^*).A \\
&= A^*.(A^*.A).A = (A^*.A^*).(A.A) \\
&= (A^*)^2.A^2
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$\text{pour tout } n \geq 0 : (A^*.A)^n = (A^*)^n .A^n = (A^n)^* .A^n$$

Comme l'un opérateur $A^*.A$ est auto-adjoint, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\| (A^*.A)^{2^n} \| = \|A^*.A\|^{2^n} = \|A\|^{2^{n+1}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} r(A.A^*) &= \lim_{n\to\infty} \| (A.A^*)^n \|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \| (A.A^*)^{2^n} \|^{2^{-n}} \\ &= \|A\|^2. \end{aligned}$$

donc

$$r(A) = \sqrt{r(A.A^*)} = \|A\|.$$

□

Corollaire 2.5.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal et injectif alors ImA est dense dans E.*

Démonstration.

Comme A est opérateur normal, alors $\sigma_r(A) = \emptyset$, puisique A est injectif, ça signifie $\ker(A) = \{0\}$, alors $\lambda = 0 \notin \sigma_p(A)$, d'autre part, nous avons $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$, donc $\lambda = 0 \in \sigma_p(A)$, ça signifie que Im$A$ est dense dans E. □

Théorème 2.5.2. *Soit E un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E)$, alors*

i) Si A un opérateur auto adjoint, alors $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.

ii) Si A est positif, alors $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}^+$.

iii) Si A est unitaire, alors $\sigma_p(A) \subseteq S(0,1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Démonstration.

i) Si l'opérateur A est auto adjoint, alors

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe $x_0 \neq 0$, tel que $Ax_0 = \lambda x_0$, donc

$$\langle Ax_0, x_0\rangle = \langle \lambda x_0, x_0\rangle = \lambda \|x_0\|^2 \in \mathbb{R}$$

ça signifie $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.

ii) Si l'opérateur A es positif, alors

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe $x_0 \neq 0$, tel que $Ax_0 = \lambda x_0$, donc

$$\langle Ax_0, x_0\rangle = \langle \lambda x_0, x_0\rangle = \lambda \|x_0\|^2 \geq 0,$$

ce qu'implique $\lambda \in [0, \infty)$.

iii) Si l'opérateur A est unitaire. Soit$\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe $x_0 \neq 0$, tel que $Ax_0 = \lambda x_0$,

$$\begin{aligned}\langle A^* Ax_0, x_0\rangle &= \langle Ax_0, Ax_0\rangle = \|Ax_0\|^2 \\ &= |\lambda|^2 \|x_0\|^2,\end{aligned}$$

d'autre part

$$\langle A^* Ax_0, x_0\rangle = \langle x_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2,$$

ce qu'implique $|\lambda| = 1$, c'est-à–dire $\sigma_p(A) \subseteq S(0, 1)$. □

Proposition 2.5.8. *Soit A un opérateur linéaire borné de E, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.*

Avec

$$E_\lambda := \{x \in E : \lambda x = Ax\}.$$

Démonstration.

Soit $x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$, il est clair que $x \in E_{\lambda_1}$ et $x \in E_{\lambda_2}$, cest-à-dire

$$\lambda_1 x - Ax = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 x - Ax = 0.$$

On en déduit que

$$\lambda_1 x - Ax + (\lambda_2 x - Ax = (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0,$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc $x = 0$, par suite $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. □

Remarque. *En dimension finie, un opérateur linéaire injectif est bijective. Ainsi $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ est simplement l'ensemble des valeurs propres de A dans ce cas.*

Exemple 2.5.3. *Considérons dans $\ell^2(\mathbb{R})$ l'opérateur $A : \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ définit par*

$$(Ax)_n = (0, x_n)_n$$

Montrons que $\sigma_p(A) = \emptyset$. En effet, supposons que $\sigma_p(A) \neq \emptyset$, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda x = Ax$.

Si $\lambda = 0$, alors $Sx = 0$ ce qui donne que $x = 0$ contradiction avec $x \in \ell^2(\mathbb{R}) - \{0\}$, donc $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A.

Si $\lambda \neq 0$, alors $(\lambda x_1, \lambda x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$,ce qui donne que $x = 0$ contradiction, donc λ n'est pas une valeur propre et par suite $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Théorème 2.5.3. *Soit $A : E \to E$ opérateur compact (E complet).*

1) *Si* $\dim E = \infty$, *alors* $0 \in \sigma(A)$.

2) *Pour tout* $\lambda \in \sigma(A)$, *alors* $\lambda \in \sigma_p(A)$ *et* $\dim E_\lambda(A) < \infty$.

Démonstration.

1) Supposons que $0 \notin \sigma(A)$, c'est-à-dire $0 \in \rho(A)$, donc A est inversible, comme A est compact, alors $AA^{-1} = Id$, donc Id est compact, cela signifie que E est de dimension finie, d'où la contraducation.

2)Soit $\lambda \in \sigma(A)$, tel que $\lambda \neq 0$, alors $\lambda I - A$ n'est pas inversible, donc $I - \frac{1}{\lambda}A$ n'est pas inversible.

On a $\frac{1}{\lambda}A$ est compact, on a déduit que $I - \frac{1}{\lambda}A$ n'est pas injectif, donc $\lambda I - A$ n'est pas injectif, alors $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Par la proposition précédente, $E_\lambda(A)$ =ker$(\lambda I - A)$ est de dimension finie. □

2.6 Exercices

2.6.1 Énoncés

Exercice 1. *Considérons l'opérateur* $(B_n)_n : \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ *défini par :*

$$B_n x = B_n (x_m)_m = (0, 0, ..., 0, x_n, x_{n+1}, ..).$$

1) *Montrer que* $(B_n)_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$.

2) *Montrer que* (B_n) *converge vers* $B = 0$ *dans* $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$.

Exercice 2. *Considérons l'opérateur* $(B_n)_n : \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ *défini par :*

$$B_m x = B_m (x_n)_n = \left(0, 0, ..., \underbrace{0}_{m}, x_1, x_2, ..\right).$$

1) *Montrer que* $(B_n)_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$.

2) *Montrer que* $(B_m)_m$ *converge faiblement vers* $B = 0$, *mais* $(B_m)_m$ *ne converge pas vers* $B = 0$ *dans* $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$.

Exercice 3. *On pose* $E = L^2([0, 1])$. *On définit sur* E *l'opérateur*

$$A : E \to E, \qquad f \mapsto Af, \qquad \text{avec } A(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

1) *Montrer que* $A : E \to E$ *est linéaire borné.*

2) *Déterminer l'opérateur* A^*.

3) *Montrer que* A *n'a pas de valeur propre.*

Exercice 4. *Soient* E *un espace de Hilbert et* $A, B \in \mathcal{L}(H)$. *Montrer que les opérateurs* AB *et* BA *ont même rayon spectral, c'est-à-dire*

$$r(AB) = r(BA).$$

Exercice 5. *Soit* $E = L^2(\mathbb{R})$ *un espace de Hilbert, on définit l'opérateur* $A : E \to E$ *par :*

$$Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

1) *Montrer que* A *est linéaire bornée.*

2) *Déterminer la norme de* A *avec* $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

3) *Montrer que* A *est auto-adjoint.*

4) *Déterminer le spectre de* A.

Exercice 6. *On définit l'opérateur* $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *par*

$$(A_n f)(x) = (\tau_{2n} f)(x) = f(x + 2n).$$

1) *Montrer que* A_n *est linéaire bornée et calculer sa norme.*

2) *Montrer que* A_n *converge faiblement vers* 0.

Exercice 7. *On pose* $E = \mathcal{C}([a, b])$, *on définit l'opérateur* $A : E \to \mathbb{R}$ *par :*

$$A(x) = \sum_{k=1}^{k=n} C_k x(t_k).$$

Avec $\left\{t_k : k \in \overline{1, n}\right\} \in [a, b]$, $a < t_1 < t_2 < ... < t_n < b$ *et* $\left\{C_k : k \in \overline{1, n}\right\} \subset \mathbb{R}$.
Montrer que A *est linéaire bornée et calculer sa norme.*

Exercice 8. *Soit* $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], [0, 2\pi])$ *l'espace de Banach des fonctions continue de* $[0, 2\pi]$ *sur* $[0, 2\pi]$ *muni de la norme de la convergence uniforme*

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Soit A *l'opérateur défini sur* E *par*

$$Ax(t) = \exp(it)x(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0, 2\pi].$$

1) *Montrons que* A *est linéaire borné.*

2) *Déterminer le spectre de A.*

Exercice 9. *On désigne par $E = L^2([0,1])$ l'espace de Hilbert complexe. On définit l'opérateur $A : E \to E$ par :*

$$Af(x) = ie^{i\pi x}\left(\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt - \int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right).$$

1) *Vérifier que pour toute $f \in E$, la fonction Af est continue sur $[0,1]$.*

2) *Monter que l'opérateur A est linéaire borné.*

3) *Monter que A est un opérateur compact de E dant E.*

4) *Montre que A hermitien.*

5) *Montre que lorsque f est continue sur $[0,1]$, la fonction Af est dérivable et vérifie une équation différentielle simple.*

6) *Compare $(Af)(0)$ et $(Af)(1)$.*

7) *Déterminer les valeurs propre non nulle de A et en déduire le spectre de A.*

Exercice 10. *On désigne par $E = L^2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ l'espace de Hilbert complexe. On définit l'opérateur $A : E \to E$ par :*

$$Af(t) = \cos(t)\int_0^t \sin(s)f(s)ds, \qquad \text{pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1) *Montrer que A est linéaire continue.*

2) *Déterminer l'adjoint A^* de l'opérateur A.*

3) *Monter que A est un opérateur compact de E dans E.*

Exercice 11. *On désigne par $E = L^2([0,1])$ l'espace de Hilbert complexe. On définit la suite des opérateurs $B_n : E \to E$ par :*

$$(B_nf)(x) = \begin{cases} f(x) & si \ |x| < n, \\ 0 & si \ |x| \geq n. \end{cases}$$

1) *Montrer que $(B_n)_n$ est linéaire borné.*

2) *Montrer que $(B_n)_n$ converge.*

3) *Montrer que $(B_n)_n$ est un projecteur.*

4) *En déduire que $(B_n)_n$ ne converge pas en norme vers Id.*

Exercice 12. *Soit A l'opérateur défini de $L^2([0,1])$ dans $L^2([0,1])$ par :*

$$Ax(t) = \int_0^1 \min(t,s)x(s)ds, \quad \text{pour tou } t \in [0,1]$$

Où

$$\min(t,s) = \begin{cases} t, & si \quad 0 < t < s < 1, \\ s, & si \quad 0 < s < t < 1. \end{cases}$$

1) *Montrer que A est linéaire borné.*

2) *Calculer l'adjoint de A*

3) *Montrer que A est compact.*

4) *Déterminer le spectre de A.*

2.6.2 Correction des exercices

Solution 1.

1) *Soit $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\begin{aligned} \|B_n x\|^2 &= \sum\nolimits_{m\geq 0} |(B_n x)_m|^2 = \sum\nolimits_{m=n} |x_m|^2 \\ &\leq \sum\nolimits_{m\geq 0} |x_m|^2 = \|x\|^2, \end{aligned}$$

ça signifie que $(B_n)_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$ et $\|B_n\|_{\mathcal{L}\ell^2} \leq 1$.

2) *Soit $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|B_n x\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum\nolimits_{m=n+1}^{\infty} |x_m|^2} = 0,$$

car $\sum_{m=n+1}^{\infty} |x_m|^2$ est le reste d'ordre n de la série converge $\sum_{m\geq 0} |x_m|^2$. D'où, l'opérateur B_n converge fortement en vers $B = 0$.

Solution 2.

1) *Soit $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\|B_n x\|^2 = \|(B_n x)_m\|^2 = \sum\nolimits_{n\geq 0} |x_n|^2 = \|x\|^2.$$

Alors $(B_n)_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}))$ et $\|C_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1$.

2) *Soient $x, y \in \ell^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\langle B_m x, y\rangle = \langle (0, ..., 0, x_1, x_2, ...), (y_0, y_1, ...)\rangle = \sum\nolimits_{k\geq 1} x_k y_{m+k},$$

alors

$$\begin{aligned} |\langle B_m x, y\rangle| &\leq \sum\nolimits_{k\geq 1} |x_k|\,|y_{m+k}| \leq \sqrt{\sum\nolimits_{k\geq 1} |x_k|}\sqrt{\sum\nolimits_{k\geq 1} |y_{m+k}|} \\ &\leq \|x\|.\sqrt{\sum\nolimits_{k\geq m+1} |y_k|}, \end{aligned}$$

car $\sum_{k\geq m+1}|y_k|$ *est le reste d'ordre n de la série converge* $\sum_{k\geq 0}|y_k|$, *alors* $\lim\limits_{m\to\infty}|\langle B_m x, y\rangle| = 0$, *c'est-à-dire la suite* $(B_m)_m$ *converge faiblement vers* $B = 0$.

Puisque

$$\lim_{m\to\infty}\|B_m x\| = \lim_{m\to\infty}\|x\| \neq 0.$$

Alors $(B_m)_m$ *ne converge pas fortement vers* 0.

Solution 3.

1) *Soit* $f \in E$, *on a*

$$|A(f)(x)| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \|f\|^2,$$

donne nous $\|Af\| \leq \|f\|$, *ça signifie* $A \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\|A\| \leq 1$.

2) *Soit* $f, g \in E$, *on a*

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle &= \int_0^1 g(x)\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx \\ &= \left(-\int_x^1 g(t)\,dt\right)\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\Big|_0^1 + \int_0^1\left(\int_x^1 g(t)\,dt\right)f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 f(x)\left(\int_x^1 g(t)\,dt\right)dx = \langle f, A^* g\rangle,\end{aligned}$$

avec

$$A : E \to E, \qquad f \mapsto A^* f, \qquad A^*(f)(x) = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

3) *Soit* $\lambda \in \sigma_p(A)$, *il existe* $f \in E - \{0\}$, *tel que* $Af = \lambda f$, *si* $\lambda \neq 0$, *nous concluons*

$$f' = \frac{1}{\lambda}f \quad et \quad f(0) = 0,$$

donne nous $f(t) = \alpha e^{\frac{t}{\lambda}}$, *pour tout* $t \in [0,1]$, *puisque* $f(0) = 0$, *on trouver* $f = 0$.

Si $\lambda = 0$, *nous avons* $f = 0$, *donc A n'a pas de valeur propre.*

$$f' = \frac{1}{\lambda}f \quad et \quad f(0) = 0,$$

Solution 4.

On remarque que

$$(AB)^n = A(BA)^{n-1}B, \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$\sqrt[n]{\|(AB)^n\|} = \sqrt[n]{\left\|A(BA)^{n-1}B\right\|} \leq \sqrt[n]{\|A\|}\sqrt[n]{\|(BA)^{n-1}\|}\sqrt[n]{\|B\|}$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} r(AB) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| (AB)^n \|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A\|} \sqrt[n]{\| (BA)^{n-1} \|} \sqrt[n]{\|B\|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n-1]{\| (BA)^{n-1} \|} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n-1]{\| (BA)^{n-1} \|} \right) \\ &= r(BA). \end{aligned}$$

On prouve l'autre inégalité en échangeant A par B.

Solution 5.

1) *Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\begin{aligned} \|Ax\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |Ax(t)|^2 \, dt} &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |x(t) + x(-t)|^2 \, dt} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |x(-t)|^2 \, dt} \\ &= \frac{1}{2} (\|x\| + \|x\|) = \|x\|, \end{aligned}$$

alors $A \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ er $\|A\| \leq 1$.

2) *Nous prenons $x_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $x_0(t) = \dfrac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}$, on a*

$$\|x_0\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |x_0(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt} = 1,$$

Puisque $Ax_0(t) = x_0(t)$, alors $\|A\| \leq 1$.

3) *Soit $x, y \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_{\mathbb{R}} Ax(t)y(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x(-t)y(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(-t)(-dt) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x(t)y(-t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x(t)[y(t) + y(-t)]dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) \, Ay(t) \, dt \\ &= \langle x, yA \rangle, \end{aligned}$$

ça signifie $A^* = A$, c'est-à-dire A est auto-adjoint.

4) *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in L^2(\mathbb{R})$, si le $(\lambda I - A)\, x(t) = y(t)$, alors*

$$(2\lambda - 1)\, x(t) - x(-t) = 2y(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

ou encore

$$(2\lambda - 1)\, x(-t) - x(t) = 2y(-t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Si $\lambda \notin \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$, *on obtient*

$$(2\lambda - 1)^2\, x(t) - (x(t) + 2y(-t)) = 2(2\lambda - 1)\, y(t)$$

donc

$$x(t) = \frac{y(t)}{\lambda} - \frac{y(-t)}{\lambda(2\lambda - 1)}, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

ça signifie $Im(\lambda I - A) = L^2(\mathbb{R})$, *d'un autre côté, nous avonsAlors*

$$\operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \left\{x \in L^2(\mathbb{R}) : (2\lambda - 1)\, x(t) = x(-t)\right\}$$

donc $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$ *si et seulement si* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Finalement*

$$\rho(A) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad \textit{et} \quad \sigma(A) = \{0, 1\}$$

Solution 6.

1) *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *on a*

$$\|A_n f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |A_n f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x + 2n)|^2\, dx,$$

Si en prend $y = x + 2n$, *alors* $dy = dx$ *et*

$$\|A_n f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2\, dx = \|f\|^2,$$

Ça signifie, $(A_n)_n \in L(L^2(\mathbb{R}))$ *et* $\|A_n\| = 1$.

2) *Soit* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned}\langle A_n f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} A_n f(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x + 2n) g(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{-n} f(x + 2n) g(x) dx}_{I_n} + \underbrace{\int_{-n}^{+\infty} f(x + 2n) g(x) dx}_{J_n}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}|I_n| &\leq \int_{-\infty}^{-n} |f(x + 2n).g(x)|\, dx \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{-n} |f(x + 2n)|^2 dx}\sqrt{\int_{-\infty}^{-n} |g(x)|^2 dx} \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x + 2n)|^2 dx}.\sqrt{\int_{-\infty}^{-n} |g(x)|^2 dx} \\ &= \|f\| .\sqrt{\int_{-\infty}^{-n} |g(x)|^2 dx}\end{aligned}$$

De la même façon nous trouver

$$|J_n| \leq \|g\| . \sqrt{\int_n^{\infty} |f(x)|^2 dx}$$

Comme $g, f \in L^2(\mathbb{R})$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| + |J_n| \leq \|f\| . \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_{-\infty}^{-n} |g(x)|^2 dx} + \|g\| . \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_n^{\infty} |f(x)|^2 dx} = 0$$

ça signifie

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A_n f, g \rangle = 0.$$

donc la suite $(A_n)_n$ *converge faiblement vers* 0.

Solution 7.

Soient $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned} A(\alpha x + y) &= \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} C_k.(\alpha x(t_k) + y(t_k)) \\ &= \alpha \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} C_k x(t_k) + \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} C_k.y(t_k) = \alpha A(x) + A(y). \end{aligned}$$

donc A *est linéaire.*

Soit $x \in E$*, on a*

$$\begin{aligned} |T(x)| &= \left|\sum\nolimits_{k=1}^{k=n} C_k x(t_k)\right| \leq \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |C_k||x(t_k)| \\ &\leq \max_{k\in\overline{1,n}} |x(t_k)| \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |C_k| \leq \left(\sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |C_k|\right) \|x\|, \end{aligned}$$

alors $A \in E'$ *et* $\|A\| \leq \sum_{k=1}^{k=n} |C_k|$.

Nous définissons fonction de signal noté "sig" par

$$\operatorname{sig}(C_i) = \begin{cases} 1 & si\ C_i > 0 \\ -1 & si\ C_i \leq 0 \end{cases}, \quad pour\ k \in \overline{1,n}.$$

Soit $x_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction donné par*

$$x_0(t) = \begin{cases} d\left[(a,0), (t_1, \operatorname{sig}(C_i))\right], & si\ a \leq t < t_1 \\ d\left[(t_1, \operatorname{sig}(C_i) C_1), (t_2, \operatorname{sig}(C_2))\right] & si\ t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \vdots \\ d\left[(t_n, \operatorname{sig}(C_n)), (b,0)\right] & si\ t_n \leq t < b \end{cases}$$

Avec $d\left[(a_1,b_1),(a_2,b_2)\right]$ *est un segment droit entre les deux points* (a_1,b_1) *et* (a_2,b_2)*, c'est-à-dire*

$$d\left[(a_1,b_1),(a_2,b_2)\right] = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(t - a_1) + b_1,\ pour\ a \leq t \leq a_2,$$

Il est claire que $x_0 \in \mathcal{C}([a,b])$ *et nous avons*

$$Ax_0 = \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} C_k x_0(t_k) = \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} \operatorname{sig}(C_k)\, C_k = \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |C_k|.$$

D'autre part

$$\|x_0\| = \max\left\{|\operatorname{sig}(C_i))| : k \in \overline{1,n}\right\} = 1.$$

Sa signification

$$|Ax_0| = \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |C_k| = \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |C_k|\, \|x_0\|\,,$$

d'où

$$\|A\|_{E'} = \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |C_k|.$$

Solution 8.

1) *Soit* $x \in \mathcal{C}([0,2\pi],[0,2\pi])$*, on a*

$$\|Ax\|_\infty = \sup\{|\exp(it)x(t)| : t \in [0,2\pi]\} = \|x\|_\infty$$

donc $A \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\|A\| = 1$.

2) *On a* $\sigma(A) \subset B(0,\|A\|) = B(0,1)$.
Soit $y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*, tel que* $(\lambda I - A)(x) = y$*, donc*

$$x(t)(\lambda - e^{it}) = y(t), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,2\pi].$$

Si $\lambda \neq e^{it}$*, pour tout* $t \in [0,2\pi]$*, alors*

$$x_\lambda(t) = \frac{y(t)}{\lambda - e^{it}}, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,2\pi].$$

Où x_λ *est unique. De là, nous concluons que* $\lambda I - A$ *est inversible si et seulement si* $\lambda \neq e^{it}$*, pour tout* $t \in [0,2\pi]$*, ça signifie*

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists t \in [0,2\pi] \textit{ tel que } \lambda = e^{it}\right\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = S(0,1)\,.\end{aligned}$$

Solution 9.

1) *Soit* $f \in E$*, alors les fonctions* $x \to ie^{i\pi x}$ *et* $x \to \int_0^x e^{-i\pi t} f(t)dt$ *sont continue sur* $[0,1]$*, donc* Af *est continue sur* $[0,1]$.

2) *Soient* $f, g \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\begin{aligned}A(\alpha f + g)(x) &= ie^{i\pi x}\left(\int_0^x e^{-i\pi t}(\alpha f(t) + g(t))\, dt - \int_x^1 e^{-i\pi t}(\alpha f(t) + g(t))\, dt\right) \\ &= \alpha A(f)(x) + A(g)(x),\end{aligned}$$

cela signifie que A est linéaire.

$$\begin{aligned}
|A(f)(x)| &= \left| ie^{i\pi x}\left(\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt - \int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right)\right| \\
&\leq \left|\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt\right| + \left|\int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^x \left|e^{-i\pi t}f(t)\right| dt + \int_x^1 \left|e^{-i\pi t}f(t)\right| dt \\
&= \int_0^x |f(t)|\, dt + \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq 2\int_0^1 |f(t)|\, dt \\
&\leq 2\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\, dt} = 2\,\|f\|\,,
\end{aligned}$$

alors $\|A(f)\| \leq 2\,\|f\|$*, donc* A *est bornée de norme* $\|A\| \leq 1$*.*

3) *On a* $E = L^2([0,1])$ *espace separable, soit* $(f_n)_n$ *une siute borné sur* $L^2([0,1])$ *qui contient une sons suite* $f_{n_k} \to f$ *dans* $L^2([0,1]))$*. Montrer que* $Af_{n_k} \to Af$ *dans* $L^2([0,1])$ *Il suffit de prouver que* $Af_{n_k} \to Af$ *faiblement et* $\|A(f_{n_k})\| \to \|A(f)\|$*. En effet, soit* $g \in L^2([0,1])$*, on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \langle Af_{n_k}, g\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle f_{n_k}, A^*g\rangle = \langle f, A^*g\rangle = \langle Af, g\rangle\,,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} |\|A(f_{n_k})\| - \|A(f)\|| &\leq \lim_{k\to+\infty} \|A(f_{n_k}) - A(f)\| \\
&\leq 2\lim_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - f\| = 0,
\end{aligned}$$

donc A *est compact.*

4) *Soit* $f \in L^2([0,1]))$*, on a*

$$\begin{aligned}
\langle Af, f\rangle &= \int_0^1 Af\,(x)\,\overline{f\,(x)}dx = \int_0^1 ie^{i\pi x}\left(\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt - \int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right)\overline{f\,(x)}dx \\
&= \underbrace{\int_0^1 ie^{i\pi x}\left(\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt\right)\overline{f\,(x)}dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 ie^{i\pi x}\left(\int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right)\overline{f\,(x)}dx}_{I_2}
\end{aligned}$$

Par l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= i\left(\int_0^x e^{i\pi t}\overline{f\,(t)}dt\right)\left(\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt\right)\Big|_0^1 - i\int_0^1\left(\int_0^x e^{i\pi t}\overline{f\,(t)}dt\right)e^{-i\pi x}f(x)dx \\
&= i\left|\int_0^1 e^{i\pi t}\overline{f\,(t)}dt\right|^2 + \overline{I_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -i\left(\int_x^1 e^{i\pi t}\overline{f\,(t)}dt\right)\left(\int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right)\Big|_0^1 dx - i\int_0^1\left(\int_x^1 e^{i\pi t}\overline{f\,(t)}dt\right)e^{-i\pi x}f(x)dx \\
&= i\left|\int_0^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right|^2 + \overline{I_2}
\end{aligned}$$

Alors

$$\langle Af, f\rangle = I_1 - I_2 = \overline{I_1 - I_2} = \overline{\langle Af, f\rangle}$$

c'est-à-dire $\langle Af, f\rangle \in \mathbb{R}$, *ce qui signifie* $A^* = A$.

5) *Soit* f *est continue sur* $[0,1]$, *la fonction* Af *est dérivable*

$$\begin{aligned}(Af)'(x) &= -\pi e^{i\pi x}\left(\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt - \int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right) + ie^{-i\pi x}[e^{-i\pi x}f(x) + e^{-i\pi x}f(x)] \\ &= i\pi Af(x) + i2f(x)\end{aligned}$$

6) *Soit* $f \in E$, *on a*

$$(Af)(0) = -i\int_0^1 e^{-i\pi t}f(t)dt \text{ et } (Af)(1) = -i\int_0^1 e^{-i\pi t}f(t)dt,$$

donc $(Af)(0) = (Af)(1)$, *pour tout* $f \in E$.

7) *Comme* A *est compact et hermitien, alors* $\sigma_r(A) = \sigma_c(A) = \emptyset$, *donc* $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. *Soit* $\lambda \in \sigma_p(A)$ *avec* $\lambda \neq 0$, *alors il existe* $f \in E$ *tel que* $Af = \lambda f$. *Nous concluons*

$$(Af)' = \lambda f',$$

donc

$$\begin{aligned}\lambda f' &= i\pi(Af) + 2if = i\pi\lambda f + 2if \\ &= i(\pi\lambda + 2)f,\end{aligned}$$

ou

$$\frac{f'}{f} = i\left(\frac{\pi\lambda + 2}{\lambda}\right),$$

Par intégration, on trouver

$$f(x) = \exp i\left(\pi + \frac{1}{\lambda}\right)x, \quad \text{pour tout } x \in [0,1]$$

On a $(Af)(0) = (Af)(1)$, *alors* $f(0) = f(1)$, *c'est-à-dire*

$$1 = \exp i\left(\pi + \frac{1}{\lambda}\right) = -\exp\frac{i}{\lambda}$$

donc $\frac{1}{\lambda} = (2k+1)\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$, *d'où*

$$\sigma(A) = \left\{\frac{1}{(2k+1)\pi} : k \in \mathbb{Z} - \{-1\}\right\} \cup \{0\}.$$

Solution 10.

1) *Soit* $f \in L^2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, *on a*

$$|Af(t)| \leq |\cos(t)| \left| \int_0^t \sin(s) f(s) ds \right| \leq \int_0^t |\sin(s)| |f(s)| ds \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(s)| ds$$
$$\leq \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} ds} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(s)|^1 ds} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f\|,$$

Alors $\|Af\| \leq \dfrac{\pi}{2} \|f\|$, *d'où* $A \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\|Af\| \leq \dfrac{\pi}{2}$.

2) *Soient* $f, g \in E$, *on a*

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Af(t) g(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(t) g(t)}_{u'} \underbrace{\left(\int_0^t \sin(s) f(s) ds \right)}_{v} dt.$$

Par l'intégrale par partie

$$\begin{aligned}
\langle Af, g \rangle &= \left(-\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) g(s) ds \right) \left(\int_0^t \sin(s) f(s) ds \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) f(t) \left(\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) g(s) \right) ds \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \left(\sin(t) \int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) g(s) \right) ds = \langle f, A^* g \rangle,
\end{aligned}$$

acec

$$A^* f(t) = \sin(t) \int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) f(s) ds, \qquad \text{pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

3) *Il suffit de montrer que* $(f_n)_n \in B(0,1)$ *converge faiblement vers* 0, *les images convergent vers* 0 *en norme.*

Si $(f_n)_n$ *converge faiblement vers* 0, *alors*

$$|(Af_n)(t)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f\| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \text{pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

D'après la convergence dominée de Lebegue

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |(Af_n)(t)|^2 dt = 0.$$

Donc A *est compact.*

Solution 11.

1) *Soit* $f \in E$, *on a*

$$\|B_n f\| = \sqrt{\int_{\{|x| \leq n\}} |f(x)|^2 dx} \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} = \|f\|,$$

Alors $(B_n)_n \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\|B_n\| \leq 1$.

2) *Soit $f \in E$, on a*

$$\|(B_n - Id)\, f\|^2 = \int_{|x|\geq n} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\chi_{\{|x|\geq n\}}(x)\, |f(x)|^2}_{\varphi_n(x)}\, dx$$

Puisque

$$|\varphi_n| \leq |f|^2 \in L^1(\mathbb{R}) \;\; et \;\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

D'aprés la théorème de convergence dominée de Lagrange

$$\lim_{n\to\infty} \|(B_n - Id)\, f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, dx = 0,$$

d'où $(B_n)_n$ converge vers Id.

3) *Soit $f \in E$, on a*

$$\begin{aligned} B_n^2 f(x) &= B_n((B_n f))(x) = \begin{cases} B_n f(x) & si \;\; |x| < n, \\ 0 & si \;\; |x| \geq n, \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) & si \;\; |x| < n, \\ 0 & si \;\; |x| \geq n, \end{cases} = B_n f(x). \end{aligned}$$

4) *On a*

$$\begin{aligned} (Id - B_n) \circ (Id - B_n) &= Id(Id - B_n) - B_n(Id - B_n) \\ &= Id - B_n - B_n + B_n^2 \\ &= Id - B_n \end{aligned}$$

Alors $Id - B_n$ est un projecteur, donc $\|Id - B_n\| = 1$, ça signifie que B_n ne converge pas en norme vers l'Identité.

Solution 12.

1) *Soit $f \in E$, on a*

$$\begin{aligned} |(Ax)(t)| &\leq \int_0^1 |\min(t,s)x(s)|\, ds \leq \int_0^1 |x(s)|\, ds \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 |x(s)|^2\, ds} = \|f\| \end{aligned}$$

alors $\|Af\| \leq \|f\|$, ça signifie que A est borné et $\|A\| = 1$.

2) *Soit $f, g \in E$, on a*

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \min(t,s)x(s)ds \right) y(t)dt = \int_0^1 \int_0^1 \min(t,s)x(s)y(t)dsdt \\ &= \int_0^1 x(s) \left(\int_0^1 \min(t,s)y(t)dt \right) ds = \langle x, Ay \rangle\,, \end{aligned}$$

Alors A est auto-adjoint.

3) *Soit* (x_n) *suite bornée dans* $L^2([0,1])$ *qui est séparable, donc il existe* (x_{n_k}) *qui converge faiblement vers* x *dans* $L^2([0,1])$.

On a

$$Ax_{n_k}(t) = \int_0^1 \underbrace{\min(t,s)}_{\varphi \in L^2([0,1])} x_{n_k}(s)\, ds = \langle \varphi, x_{n_k} \rangle .$$

Alors

$$\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k}(t) = \lim_{k\to\infty} \langle \varphi, x_{n_k} \rangle = \langle \varphi, x \rangle = Ax$$

Comme (x_{n_k}) *borneé, il existe* $\rho > 0$, *tel que*

$$|Ax_{n_k}(t)| \leq \|x_{n_k}\| \leq \rho,$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue $Ax_{n_k}(t) \to Ax$ *dans* $L^2([0,1])$, *d'où* A *est compact.*

4) *Puisque* A *est un opérateur Auto-adjoint et compact alors* $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$, *donc* $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ *avec* $\lambda \neq 0$, *c'est-à-dire il existe* $x \in E$ *tel qye* $\lambda x = Ax$, *donc*

$$\lambda x(t) = \int_0^1 \min(t,s) x(s) ds = \int_0^t s x(s) ds + \int_t^1 t x(s) ds,$$

alors la fonction x *est dérivable*

$$\lambda x'(t) = t x(t) + \int_t^1 x(s) ds - t x(t) = \int_t^1 x(s) ds$$

Cela signifie qu'une fonction $x^{(1)}$ *est dérivable*

$$x^{(2)}(t) = \frac{1}{\lambda} x(t), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Si $\lambda > 0$, *on obtient* $x(t) = c_1 \cos(\sqrt{1/\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{1/\lambda}t)$. *Comme* $x(0) = x^{(1)}(0) = 0$, *on trouver* $\cos(\sqrt{1/\lambda}) = 0$, *donc*

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \frac{4k+1}{2}\pi \quad ou \quad \lambda = \frac{4}{(4k+1)^2 \pi^2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si $\lambda < 0$, *on obtient* $x(t) = c_1 \exp(\alpha t) + c_2 \exp(-\alpha t)$. *Comme* $x(0) = x^{(1)}(0) = 0$, *on trouver* $x = 0$.

Finalement

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{4}{(4k+1)^2 \pi^2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}.$$

3 | Opérateurs non bornés

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1. *Un opérateur dans E est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ à valeurs dans E. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur.*
On note un opérateur par $(A, \mathcal{D}(A))$ et on dit que A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$.

Remarque. *On dit qu'un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ dans E est borné si : $\mathcal{D}(A) = E$* et $A : E \to E$ est continue.

Exemple 3.1.1. *On considère l'opérateur $A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ défini par*

$$Ax = \frac{dx}{dt} = x^{(1)}(t).$$

L'opérateur A n'est pas bornée. Soit la suite $(x_n(t))_n = (e^{-nt})_n$, alors

$$\|x_n\| = 1 \qquad et \qquad \|Ax_n\| = n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Finalement, on obtient que $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \infty$.

Exemple 3.1.2. *Soit A l'opérateur de multiplication par x défini de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par :*

$$Af(x) = xf(x).$$

L'opérateur A n'est pas bornée. Pour $f_0(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R})$, mais $xf_0(x) \notin L^2(\mathbb{R})$. Alors le domaine de définition

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Exemple 3.1.3. *On considère l'opérateur $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ défini par*

$$Ax = A(x_n)_n) = (nx_n)_n.$$

L'opérateur A n'est pas bornée, avec le domaine de définition

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum\nolimits_{n \geq 0} n^2 |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Remarque. *Soit A et B sont des domaine $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(B)$ non borné resp, alors*

i) La somme $A + B$ est definie par :

$$(A + B)x = Ax + Bx, \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A + B).$$

avec

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B).$$

ii) L'operateur produite AB est definie par :

$$(AB)\, x = A(Bx), \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(AB).$$

Avec

$$\mathcal{D}(AB) = \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(A)\}.$$

iii) L'opérateur λA est definie par :

$$(\lambda A)\, x = \lambda A x, \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A),$$

avec $\mathcal{D}(\lambda A) = \mathcal{D}(A)$.

3.2 Opérateurs fermés

Définition 3.2.1 (Graphe d'un opérateur)**.** *Soit A est un opérateur linéaire non borné avec un domaine de définition $\mathcal{D}(A)$. Le graphe de l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to E$ est un sous-espace vectoriel dans $E \times E$ défini par*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Définition 3.2.2 (Opérateurs fermés)**.** *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné sur E, on dit que $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans $E \times E$, c'est-à-dire*

$$\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A).$$

Exemple 3.2.1. *Soit A l'opérateur de multiplication par x défini de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par :*

$$Af(x) = xf(x).$$

L'opérateur A n'est pas bornée, avec domaine de définition

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Montrons que $\mathcal{D}(A)$ est fermé dans $L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$, soit $(f_n, xf_n) \in \mathcal{D}(A)$ est converge vers (f, g) dans $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire f_n et xf_n sont converge vers f et g dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ réspéctivement, car $L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, donc $xf = g$ dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d'où $(f, g) = (f, xf) \in \mathcal{D}(A)$, ça signifie que l'opérateur A est fermé.

Exemple 3.2.2. *Soit $E = L^2([0, 1])$, on considére l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}(A) = H^1(0, 1)$ par :*

$$Af = \frac{df}{dt}.$$

Comme $H^1(0, 1)$ est fermé dans $L^2([0, 1])$, alors l'opérateur A est fermé.

Remarque. *Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathcal{D}(A)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad et \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n = y.$$

Alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$.

Proposition 3.2.1. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné sur E, alors les assertion suivantes sont équivalentes :*

i) $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé,

ii) Pour tout $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{cases} x_n \to x \ dans \ E \\ A(x_n) \to y \ dans \ E \end{cases} \quad implique \quad x \in \mathcal{D}(A) \ et \ y = Ax.$$

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ ii) Soit $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$, tel que $x_n \to x$ dans E et $A(x_n) \to y$ dans E, ce qu'implique $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ dans $E \times E$, puisque $(x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$ qu'est fermé dans $E \times E$, donc $(x, y) \in \Gamma(A)$, ça signifie $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$.

ii) $\Rightarrow$ i) Soit $(z_n)_n \in \Gamma(A)$ tel que $z_n \to z$ dans $E \times E$, comme $(z_n)_n \in \Gamma(A)$, alors il existe $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$, tel que $z_n = (x_n, Ax_n) \to z = (x, y)$ dans $E \times E$, par (*ii*), on obtient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$, donc $z = (x, Ax) \in \Gamma(A)$, ça signifie que $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé. □

Proposition 3.2.2. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné sur E, alors les assertion suivantes sont équivalentes :*

i) $(A, \mathcal{D}(A))$ *est fermé,*

ii) $\mathcal{D}(A)$ *est complet pour la norme* $\|.\|_A$*, où*

$$\|x\|_A = \|x\|_E + \|Ax\|_E\,, \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

Dans ce cas : $A : \mathcal{D}(A) \to E$ *est borné et* $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A),E)} \leq 1$.

Démonstration.

$i) \Rightarrow ii)$ Soit $(x_n)_n$ suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(A)$, alors

$$\|x_n - x_m\|_E \to 0 \quad \text{et} \quad \|Ax_n - Ax_m\|_E \to 0, \text{ lorsque } n, m \to +\infty,$$

comme E est complet, alors il existe $x, y \in E$, tel que

$$x_n \to x \quad \text{et} \quad Ax_n \to y \text{ dans } E.$$

Puisque $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé, alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans $\mathcal{D}(A)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Soit $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ tel que $x_n \to x$ dans E et $A(x_n) \to y$ dans E, alors

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|_A &= \|x_n - x_m\|_E + \|Ax_n - Ax_m\|_E \\ &\leq \|x_n - x\|_E + \|Ax_n - y\|_E + \|x_m - x\|_E + \|Ax_m - y\|_E\end{aligned}$$

donc $(x_n)_n$ est suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(A)$ qu'est complet, il existe $x^1 \in \mathcal{D}(A)$, tel que $x_n \to x^1$ dans E, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_n \to x^1 \text{ dans } E \\ A(x_n) \to Ax^1 \text{ dans } E \end{cases}$$

Par l'unicité de la limite dans E, alors $x = x^1 \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$, d'où l'opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé.

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, alors

$$\|Ax\|_A \leq \|x\|_E + \|Ax\|_E = \|x\|_A\,,$$

donc l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to E$ est borné et $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A),E)} \leq 1$. □

Proposition 3.2.3. *Soit A est un opérateur linéaire borné et et injective, alors l'opérateur A^{-1} est fermée et de domaine $\mathcal{D}(A^{-1})$ =Im(A).*

Démonstration.

Soit $A : E \to$Im(A) est est bijective, donc A^{-1} :Im$(A) \to E$, c'est-à-dire $\mathcal{D}(A^{-1})$ =Im(A).

Montrons que $(A^{-1}, \mathrm{Im}\,(A))$ est fermée, en effet, soit $(x_n)_n \in \mathrm{Im}\,(A)$, tel que

$$x_n \to x \text{ dans } E \quad \text{et} \quad A^{-1}(x_n) \to y \text{ dans } E$$

Puisque A est borné, alors

$$\left(A \circ A^{-1}\right)(x_n) \to Ay \text{ dans } E$$

Par l'unicité de la limite dans E, implique $Ay = x$, ça signifie $x \in \operatorname{Im}(A)$ et $y = A^{-1}x$, d'où A^{-1} est fermée. □

Définition 3.2.3 (Opérateurs extensions). *Soient $(A, \mathcal{D}(A))$ et $(B, \mathcal{D}(B))$ des opérateurs non bornées sur E, on dit que $(B, \mathcal{D}(B))$* ***extension*** *de $(A, \mathcal{D}(A))$ et on note $A \subset B$ si :*

i) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$

ii) Pour tout $x \in \mathcal{D}(A) : Bx = Ax$.

Définition 3.2.4 (Opérateurs fermables). *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné sur E, on dit que $(A, \mathcal{D}(A))$ est dit* ***fermable*** *si $(A, \mathcal{D}(A))$ admet une extension fermée.*

Lemme 3.2.1. *Un sous-espace G de $E \times E$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si*

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0.$$

Démonstration.
($\Rightarrow$) Si G est le graphe d'un opérateur, alors il existe $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné, tel que $G = \Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$, avec $\Gamma(A)$ est un sous-espace vectoriel dans $E \times E$, comme $(0, y) \in G$, alors

$$x = 0 \quad \text{et} \quad Ax = y \Rightarrow y = 0.$$

($\Leftarrow$) Soit $(x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$. Nous considérons l'application $A : P_1G \to H$ qui associe à $x \in P_1G$, l'unique $y \in H$, tel que $(x, y) \in G$ est bien définie, montrons que A est linéaire, en effet, soient $x_1, x_2 \in P_1G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors il existe l'unique $y_1, y_2 \in H$, tel que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$, tel que $Ax_1 = y_1$ et $Ax_2 = y_2$, comme G est un sous-espace vectoriel, alors $(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) \in G$. De plus, s'il existe $(\lambda x_1 + x_2, z) \in G$ implique que $\lambda y_1 + y_2 = z$, ça signifie $A(\lambda x_1 + x_2) = \lambda y_1 + y_2 = \lambda Ax_1 + Ax_2$. Puisque

$$\mathcal{D}(A) = P_1G \quad \text{et} \quad \Gamma(A) = G.$$

Alors G est graphe l'opérateur A. □

Proposition 3.2.4. *Tout opérateur fermable $(A, \mathcal{D}(A))$ admet une plus petite extension fermée d'un opérateur fermable est appelée la fermeture de A notée $\overline{A}$. De plus, on a*

$$\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}.$$

Démonstration.

Pour toute extension B fermée de A, il en existe au moins une, on a $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ avec $\Gamma(A)$ un fermé de $E \times E$. D'où , on a $\overline{\Gamma(A)} \subset \overline{\Gamma(B)} = \Gamma(B)$. De plus, par lemme 3.2.1, on a $\overline{\Gamma(A)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, noté $\overline{A}$, puisque $(0, y) \in \overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(B)$ implique que $y = 0$. Enfin, il est claire $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A puisque $\Gamma\left(\overline{A}\right) = \overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(B)$ pour toute extension fermée B de A. □

Remarque. *On remarque aussi que si $(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur fermable alors*

$$\overline{\Gamma(A)} = \bigcap\nolimits_{i \in I} \Gamma(A_i)$$

où $((A_i, \mathcal{D}(A_i)))_{i \in I}$ est la famille de toutes les extensions fermés de $(A, \mathcal{D}(A))$.

Proposition 3.2.5. *Soient $(A, \mathcal{D}(A))$ et $(B, \mathcal{D}(B))$ deux opérateurs non bornés sur E, si A est fermable, B est fermé et $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset B$.*

Démonstration.

Puisque A est fermable, alors il existe $\overline{A}$ extension fermée de A, comme B extension fermée de A. Alors $A \subset B$, c'est-à-dire $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$, donc

$$\overline{\Gamma(A)} \subset \overline{\Gamma(B)} = \Gamma(B).$$

d'où $\overline{A} \subset B$. □

Proposition 3.2.6. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné sur E, alors les assertion suivantes sont équivalentes :*

i) A est fermable,

ii) Pour tout suite $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ converge vers 0 dans E et $(Ax_n)_n$ converge y alors $y = 0$.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Si l'opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable, alors il existe un opérateur $(\overline{A}, \mathcal{D}(\overline{A}))$ est fermée, tel que $A \subset \overline{A}$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\overline{A})$, tel que

$$x_n \to 0 \text{ dans } E \text{ et } A(x_n) \to y \text{ dans } E,$$

Alors $0 \in \mathcal{D}(\overline{A})$ et $y = A(0) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Soit $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)$, tel que $x_n \to x$ dans E, on définit l'opérateur $B : \overline{\mathcal{D}(A)} \to E$ par $Bx = \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n$.

S'il existe deux suites $(x_n)_n, (x_n^1)_n \in \mathcal{D}(A)$, tel que $x_n \to x$ et $x_n^1 \to x$ dans E, alors $x_n - x_n^1 \to 0$. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n \neq \lim_{n\to\infty} Ax_n^1.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n - \lim_{n\to\infty} Ax_n^1 = \lim_{n\to\infty} A\left(x_n - x_n^1\right) = y,$$

D'après(ii) nous trouvons la contradiction, alors l'opérateur B est bien défnie et fermée.

On a $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) = \overline{\mathcal{D}(A)}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a $Bx = Ax$, alors $\overline{A} \subset B$.

Nous devons prouver que $B \subset \overline{A}$, on a $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(\overline{A})$.

D'autre part, soit $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, alors il existe $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$, tel que $x_n \to x$ dans E, alors

$$Bx = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Bx = \lim_{n\to\infty} \overline{A}x_n.$$

Comme $\overline{A}$ est fermé, alors $\overline{A}x = Bx$, donc $B \subset \overline{A}$ et $\overline{A} \subset B$, ça signifie que $\overline{A} = B$, enfin nous concluons que A est fermable. $\square$

Exemple 3.2.3. *Soit l'opérateur $A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ defini par $Ax = x^{(1)}(0)$, alors*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in \mathcal{C}([0,1]) : x^{(1)}(0) \text{ existe et fini}\right\}$$

Soit $x_n(t) = \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t} \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\|x_n\| = \frac{1}{n+1} \quad et \quad |Ax_n| = 1, \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N},$$

ça signifie $x_n \to 0$ dans E et $|Ax_n| \nrightarrow 0$ dans $\mathbb{R}$, donc l'opérateur A n'est pas fermable.

Remarque. *Tout opérateur fermé est fermable mais l'inverse est faux.*

3.3 Adjoint des opérateurs non bornés

3.3.1 Opérateurs symétriques, Opérateurs auto-adjoints

Définition 3.3.1 (Opérateur densément défini)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach, un opérateur A de E dans F est dit densément défini si son domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, i.e :*

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = E.$$

Définition 3.3.2 (Opérateur symétrique)**.** *Soient E un espace de Hilbert et $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné. On dit que A est symétrique si*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \qquad pour\ tout\ x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Proposition 3.3.1. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur symétrique tel que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, alors $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable.*

Démonstration.

Soit $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$, $y \in \mathcal{D}(A)$ tel que $x_n \to 0$ et $Ax_n \to y$ dans E

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, alors il existe une suite $(y_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ tel que $y_n \to y$ dans E.

Alors

$$\langle y, y_k \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, y_k \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ay_k \rangle = 0,$$

donc

$$\langle y, y_k \rangle = 0, , \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

lorsque $k \to \infty$, on obtient que $\|y\|^2 = 0$, par conséquent $y = 0$. D'où A est fermable. □

Proposition 3.3.2. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $(A, \mathcal{D}(A))$ *est symétrique.*

ii) $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, *pour tou* $x \in \mathcal{D}(A)$.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Pour tout $x \in E$, on pose $z_x = \langle Ax, x \rangle$, alors

$$\overline{z_x} = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle = z_x,$$

donc, $z_x = \langle Ax, x \rangle$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Pour tout $x, y \in \mathcal{D}(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle A(\lambda x + y), \lambda x + y \rangle = |\lambda|^2 \langle Ax, x \rangle + \lambda \langle Ax, y \rangle + \overline{\lambda} \langle Ay, x \rangle + \langle Ay, y \rangle,$$

cela implique que

$$\lambda \langle Ax, y \rangle + \overline{\lambda} \langle Ay, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Comme $\mathrm{Im}(\lambda \langle Ax, y \rangle) = -\mathrm{Im}\left(\overline{\lambda} \langle Ay, x \rangle\right)$, alors

$$\mathrm{Im}\left(\lambda \langle Tx, y \rangle\right) = -\mathrm{Im}\left(\overline{\lambda} \langle Ty, x \rangle\right) = -\mathrm{Im}\left(\overline{\lambda \langle x, Ty \rangle}\right) = \mathrm{Im}\left(\lambda \langle x, Ty \rangle\right).$$

En choisissant $\lambda = 1$, on obtient Im$(\langle Tx, y \rangle)$ =Im$(\langle x, Ty \rangle)$ et $\lambda = i$, on obtient Im$(i\langle Tx, y \rangle)$ =Im$(i\langle x, Ty \rangle)$ en déduit que Re$\langle Ax, y \rangle$ = Re$\langle x, Ay \rangle$. Ce qui montre que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, d'où A est symétrique. □

Proposition 3.3.3. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné tel que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, alors il existe un opérateur noté $(A^*, \mathcal{D}(A^*))$ unique tel que*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \text{ , pour tout } x \in \mathcal{D}(A) \text{ et pour } y \in \mathcal{D}(A^*).$$

L'opérateur $(A^*, \mathcal{D}(A^*))$ est dit l'adjoint de $(A, \mathcal{D}(A))$.

Démonstration.
Posons

$$\mathcal{D}(A^*) = \{y \in E : \text{l'application } \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C},\ x \to \langle Ax, y\rangle \text{ admet un prolongement continue}\}$$

C'est-à-dire $y \in \mathcal{D}(A^*)$, il existe $L : E \to \mathbb{C}$ linéaire et continue telle que

$$L(x) = \langle Ax, y\rangle, \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

Soit $y \in \mathcal{D}(A^*)$, comme $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, d'aprés le théorème de Riez il existe unique $\psi_y \in E$ tel que

$$L(x) = \langle x, \psi_y\rangle, \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

On définit $A^*y = \psi_y$, alors ψ_y est bien définit car le prolongement de $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ est unique, en effet, soit $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$L_1(x) = L_2(x) = \langle Ax, y\rangle.$$

Soit $x \in E$, comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, alors il existe une suite $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ tel que $x_n \to x$ dans E. Alors

$$L_1(x) = L_1\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = L_2\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = L_2(x).$$

De plus, soient $y \in \mathcal{D}(A^*)$ et $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\langle Ax, y\rangle = L(x) = \langle x, \psi_y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

L'opérateur A^* est unique, supposons qu'il existe B tel que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\langle x, A^*y\rangle = \langle x, By\rangle, \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, on obtient $A^*y = By$, d'où $A^* = B$. □

Définition 3.3.3 (Opérateur auto-adjoint)**.** *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné tel que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, on dit que A est auto-adjoint si $(A, \mathcal{D}(A)) = (A^*, \mathcal{D}(A^*))$, i.e :*

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \quad \text{et} \quad Ax = A^*x, \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque. *Tout opérateur non borné auto-adjoint est symétrique par contre un opérateur symétrique n'est pas forcément auto-adjoint.*

Proposition 3.3.4. *Soit* $(A, \mathcal{D}(A))$ *un opérateur non borné tel que* $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* E*, alors* $(A, \mathcal{D}(A)) \subset (A^*, \mathcal{D}(A^*))$.

Démonstration.

Soit $y \in \mathcal{D}(A)$, alors il existe $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, tel que $L(y) = \langle x, Ay \rangle$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, alors

$$L(y) = \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle ,$$

donc $y \in \mathcal{D}(A^*)$, ça signifie $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$, puisque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, on obtient $A^* = A$. □

Proposition 3.3.5. *Soit* $(A, \mathcal{D}(A))$ *un opérateur non borné tel que* $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* E*, alors* $(A^*, \mathcal{D}(A^*))$ *est fermé.*

Démonstration.

Soit $(y_n)_n \in \mathcal{D}(A^*)$ tel que $y_n \to y$ et $A^* y_n \to z$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\langle Ax, y_n \rangle \to \langle Ax, y \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, A^* y_n \rangle \to \langle x, z \rangle,$$

alors

$$\langle Ax, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle Ax, y_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x, A^* y_n \rangle = \langle x, z \rangle$$

Posons $L(x) = \langle x, z \rangle$, pour tout $x \in E$, puisque $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, ça signifie $y \in \mathcal{D}(A^*)$ et $z = A^* y$, d'où l' opérateur A^* est fermé. □

Lemme 3.3.1. *Soit* $E \times E$ *un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle_H + \langle y, y' \rangle_H$$

Soit l'application $\phi : E \times E \to E \times E$ *est défini par :*

$$(x, y) \to \phi(x, y) = (-y, x),$$

alors,

i) ϕ *est un isométrie unitaire.*

ii) $\phi^2(x, y) = (x, y)$.

iii) Pour tour un ensemble $F \subset E \times E$: $[\phi(F)]^{\perp} = \phi\left(F^{\perp}\right)$.

Démonstration.

i) l'application ϕ est linéaire,

$$\|\phi(x,y)\|_{E\times E} = \|(-y,x)\|_{E\times E} = \sqrt{\|-y\|_E^2 + \|x\|_E^2} = \|(x,y)\|_{E\times E}\,.$$

d'où ϕ est un isométrie unitaire.

ii) Soit $(x,y) \in E \times E$, alors

$$\phi^2(x,y) = (\phi \circ \phi)\,(x,y) = \phi(-y,x) = (x,y).$$

ii) Soit F un ensemble dans $E \times E$, soit $z \in [\phi(F)]^{\perp}$, alors

$$\langle z, \phi(w)\rangle = 0, \qquad \text{pour tout } w \in F.$$

Comme $\phi^2 = Id_{E\times E}$, pour tout $w \in F$, on a

$$\langle z, \phi(w)\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \phi\,(z)\,, \phi^2(w)\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \phi\,(z)\,, -w\rangle = 0 \Leftrightarrow \phi\,(z) \in F^{\perp}.$$

Par suite

$$\phi\,(z) = w_0 \in F^{\perp} \Leftrightarrow -z = \phi\,(w_0) \in F^{\perp}$$

ça signifie $[\phi(F)]^{\perp} = \phi\left(F^{\perp}\right)$. □

Proposition 3.3.6. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné de domaine dense dans E. Alors,*

i) $\Gamma(A^*) = \{\phi\,(\Gamma\,(A))\}^{\perp}$.

ii) $\overline{\Gamma\,(A)} = \{\phi\,(\Gamma(T^*))\}^{\perp}$.

Démonstration.

i) Soit $z = (x,y) \in \{\phi\,(\Gamma\,(A))\}^{\perp}$, ceci s'écrit

$$\langle (x,y), \phi(\omega)\rangle = 0, \quad \text{pour tout } \omega = (u,v) \in \Gamma\,(A)\,,$$

Alors, pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$0 = \langle (x,y), (-Au, v)\rangle = \langle x, -Au\rangle + \langle y, u\rangle,$$

Il en résulte que

$$\langle A^*x, u\rangle = \langle x, Au\rangle = \langle y, u\rangle, \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}(A).$$

Par la densité de $\mathcal{D}(A)$ dans E, on a $A^*x = y$, pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, $(x,y) \in \Gamma(A^*)$.

ii) D'après (*i*), on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma\,(A)} &= \left\{(\Gamma\,(A))^{\perp}\right\}^{\perp} = \left\{\phi^2\left(\Gamma\,(A)^{\perp}\right)\right\}^{\perp} \\
&= \left\{\phi\left(\phi\left((\Gamma\,(A))^{\perp}\right)\right)\right\}^{\perp} \\
&= \{\phi\,(\Gamma\,(A)^*)\}^{\perp}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.7. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné de domaine dense dans E. Alors, si $\mathcal{D}(A^*)$ dense dans E, l'opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable et dans ce cas on a*

$$(\overline{A}, \mathcal{D}(\overline{A})) = (A^{**}, \mathcal{D}(A^{**})).$$

Démonstration.

Par la proposition 3.3.6, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(A^{**}) &= \Gamma((A^*)^*) = \{\phi(\Gamma(A)^*)\}^{\perp} \\
&= \left\{\phi\left(\phi\left(\Gamma(A)^{\perp}\right)\right)\right\}^{\perp} = \left\{\phi^2\left(\Gamma(A)^{\perp}\right)\right\}^{\perp} \\
&= \left(\Gamma(A)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\Gamma(A)}.
\end{aligned}$$

D'où, $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable et $\overline{A} = A^{**}$. $\square$

Proposition 3.3.8. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné de domaine dense dans E. Si $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable, alors $\mathcal{D}(A^*)$ est dense dans E et $(\overline{A}, \mathcal{D}(\overline{A})) = (A^{**}, \mathcal{D}(A^{**}))$.*

Démonstration.

Supposons que $\mathcal{D}(A^*)$ n'est pas dense dans E, alors $\{\mathcal{D}(A^*)\}^{\perp} \neq \{0\}$, c'est-à-dire il existe $y \in \{\mathcal{D}(A^*)\}^{\perp}$ et $y \neq 0$, tel que

$$\langle x, y\rangle = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A^*),$$

donc

$$\langle (0, y), (-A^*x, x)\rangle = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A^*),$$

ou encore

$$\langle (0, y), \phi(x, A^*x)\rangle = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A^*),$$

Alors $(0, y) \in \{\phi(\Gamma(A^*))\}^{\perp} = \overline{\Gamma(A)} = \Gamma\left(\overline{A}\right)$, donc $y = \overline{A}0 = 0$ absurd avec $y \neq 0$.
Comme $\mathcal{D}(A^*)$ est dense dans E, Par la proposition 3.3.7, on obtient $(\overline{A}, \mathcal{D}(\overline{A})) = (A^{**}, \mathcal{D}(A^{**}))$.
$\square$

Remarque. *Si $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur symétrique de domaine dense dans E, alors $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable et*

$$A \subset \overline{A} = A^{**} \subset A^*.$$

Car $(A, \mathcal{D}(A))$ est symétrique $A \subset A^*$, alors $\overline{A} \subset \overline{A^*} = A^*$, d'où $A \subset \overline{A} = A^{**} \subset A^*$.

Proposition 3.3.9. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur symétrique et fermé de domaine dense dans E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$(A, \mathcal{D}(A))$ est auto-adjoint*

ii) *$(A^*, \mathcal{D}(A^*))$ est symétrique.*

Démonstration.

$i) \Rightarrow ii)$ on a

$$A = \overline{A} = A^{**} \subset A^* = A.$$

Alors $A^{**} = A^*$, ça signifie que A^* est symétrique.

$ii) \Rightarrow i)$ Comme A^* est symétrique, alors

$$A^* \subset \overline{A^*} \subset A^{**} = \overline{A} = A,$$

donc $A^* \subset A$ et puisque A^* est symétrique, alors $A \subset A^*$, d'où $A^* = A$. □

Remarque. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné*

i) *Un opérateur symétrique A est toujours fermable puisque $\mathcal{D}(A^*) \supset \mathcal{D}(A)$ est dense.*

ii) *Si A est un opérateur symétrique alors A^* et A^{**} sont deux extensions fermées de A averc $A \subset A^{**} \subset A^*$.*

iii) *Si A est un opérateur symétrique fermé alors $A = A^{**} \subset A^*$.*

iv) *Si A est un opérateur auto-adjoint alors $A = A^{**} = A^*$.*

Proposition 3.3.10. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné à domaine dense dans E. Alors,*

1) $\mathrm{Ker}A^* = \{\mathrm{Im}A\}^{\perp}$ *et* $\{\mathrm{Ker}A^*\}^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}A}$

2) *Si $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable, alors*

$$\mathrm{Ker}\overline{A} = \{\mathrm{Im}A^*\}^{\perp} \quad et \quad \left\{\mathrm{Ker}\overline{A}\right\}^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}A^*}.$$

Démonstration.

1) Soit $y \in \mathrm{Ker}A^*$, alors $y \in \mathcal{D}(A^*)$ et $A^*y = 0$. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle = 0.$$

donc $y \in \{\mathrm{Im}A\}^{\perp}$, d'où $\mathrm{Ker}A^* \subset \{\mathrm{Im}A\}^{\perp}$.

Soit $y \in \{\mathrm{Im}A\}^{\perp}$, alors l'application $\mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}$, $x \to \langle Ax, y \rangle = 0$, car $Ax \in \mathrm{Im}A$. Il existe un prolongement continue $f(x) = \langle Ax, y \rangle$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, donc $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Nous avons, pour $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle = 0,$$

Par la densité de $\mathcal{D}(A)$ dans E, on obtient que $A^*y = 0$, d'où $y \in \mathrm{Ker}A^*$.

Puisque $\mathrm{Ker}A^* = \{\mathrm{Im}A\}^\perp$, par passage l'orthogonalité, on trouver

$$\{\mathrm{Ker}A^*\}^\perp = \{\mathrm{Im}A\}^{\perp\perp} = \overline{[\mathrm{Im}A]} = \overline{\mathrm{Im}A}$$

2) Puisque $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable, alors $\mathcal{D}(A^*)$ est dense dans E, nous remplaçons A par A^*, alors

$$\mathrm{Ker}A^{**} = \{\mathrm{Im}A^*\}^\perp \quad \text{et} \quad \{\mathrm{Ker}A^{**}\}^\perp = \overline{\mathrm{Im}A^*}$$

Comme $A^{**} = \overline{A}$, on trouver

$$\mathrm{Ker}\overline{A} = \{\mathrm{Im}A^*\}^\perp \quad \text{et} \quad \left\{\mathrm{Ker}\overline{A}\right\}^\perp = \overline{\mathrm{Im}A^*}.$$

□

Théorème 3.3.1. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné symétrique à domaine dense dans E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A est auto-adjoint.

ii) A est fermé et $\ker(A^* \pm iI) = \{0\}$.

iii) $\mathrm{Im}(A \pm iI) = E$.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Soit A est un opérateur auto-adjoint, alors A est fermé et $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$, soit $x \in \ker(A^* \pm iI)$, c'est-à-dire $(A^* \pm iI)x = 0$, donc $\langle (A \pm iI)x, x\rangle = 0$. De là, nous concluons

$$\pm i\langle x, x\rangle = \langle \mp ix, x\rangle = \langle A^*x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle = \mp i\langle x, x\rangle$$

donc, $x = 0$, ça signifie $\ker(A^* \pm iI) = \{0\}$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* On a $\ker(A^* \pm iI) = \{0\}$, alors $\{\ker(A^* \pm iI)\}^\perp = \{0\}^\perp = E$, par la proposition 3.3.10, on obtient $\overline{\mathrm{Im}(A \pm iI)} = E$. Il reste à montrer que $\mathrm{Im}(A \pm iI)$ est fermé.

Comme A est symétrique, alors

$$\|(A \pm iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2, \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A)$$

Donc, si $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ telle que $z_n = (A \pm iI)x_n \to z$ dans E, alors $(z_n)_n$ suite de Cauchy, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\|^2 &= \|(A \pm iI)x_n - (A \pm iI)x_m\|^2 = \|(A \pm iI)(x_n - x_m)\|^2 \\ &= \|Ax_n - Ax_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2, \end{aligned}$$

ce qu'implique que $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont suite de Cauchy, alors $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$ dans E. Comme A est fermé, on en déduit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$, d'où $z = (A \pm iI)x \in$Im$(T \pm iI)$. Finalement on obtient que $\mathrm{Im}(A \pm iI) = E$.

iiI) $\Rightarrow$ *i)* Comme A est symétrique, alors $A \subset A^*$. Inversement, montrons que $A^* \subset A$. Soit $x \in \mathcal{D}(A^*)$, puisque $\mathrm{Im}(A \pm iI) = E$, alors il existe $y \in \mathcal{D}(A)$ tel que

$$(A \pm iI)y = (A^* \pm iI)x.$$

Comme $A \subset A^*$, alors

$$x - y \in \mathcal{D}(A^*) \quad \text{et} \quad (A^* \pm iI)(x - y) = 0.$$

Donc

$$x - y \in \ker(A^* \pm iI) = \{\mathrm{Im}(A^* \pm iI)\}^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}.$$

D'où $x = y \in \mathcal{D}(A)$, ça signifie $A = A^*$. □

Proposition 3.3.11. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné fermé à domaine dense dans E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *$A : \mathcal{D}(A) \to E$ est inversible, d'inverse borné*

ii) *il existe $\alpha > 0$, tel que*

$$\begin{cases} \|Ax\| \geq \alpha \|x\|, & \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A) \\ \|A^*x\| \geq \alpha \|x\|, & \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A^*) \end{cases}$$

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ *ii)* On a $A^{-1} \in \mathcal{L}(E, \mathcal{D}(A))$, donc il existe $c > 0$, tel que

$$\left\|A^{-1}y\right\| \leq C \|y\|, \quad \text{pour tout } y \in E,$$

Si $y = Ax$, avec $x \in \mathcal{D}(A)$, on obtient

$$\|x\| \leq C \|Ax\|, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A),$$

Soit $x \in \mathcal{D}(A^*)$, on a

$$\left\langle \left(A^{-1}\right)^* A^*x, y\right\rangle = \left\langle A^*x, A^{-1}y\right\rangle = \left\langle x, AA^{-1}y\right\rangle = \langle x, y\rangle,$$

alors $\left(A^{-1}\right)^* A^* = Id_{\mathcal{D}(A^*)}$.

Soit $y \in E$, $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\left\langle A^* \left(A^{-1}\right)^* x, y\right\rangle = \left\langle \left(A^{-1}\right)^* x, Ay\right\rangle = \left\langle x, A^{-1}Ay\right\rangle = \langle x, y\rangle,$$

alors $A^*\left(A^{-1}\right)^* = Id_{\mathcal{D}(A)}$, comme $\mathcal{D}(A^*)$ et $\mathcal{D}(A)$ sont dense dans E, alors

$$\left(A^{-1}\right)^* A^* = Id \quad \text{et} \quad A^*\left(A^{-1}\right)^* = Id.$$

Soit $x \in \mathcal{D}(A^*)$, alors

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\|\left(A^{-1}\right)^* A^* x\right\| \\ &\leq C\left\|\left(A^{-1}\right)^*\right\| \|A^* x\| \\ &= C\left\|A^{-1}\right\| \|A^* x\|.\end{aligned}$$

Enfin on trouve $\alpha = \frac{1}{C}\min\left(1, \|A^{-1}\|\right)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Comme $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$, alors $A : \mathcal{D}(A) \to E$ est injective.

De même pour A^*, on a $\ker A^* = \{0\} = \{\mathrm{Im}A\}^{\perp}$, alors $\overline{\mathrm{Im}A} = E$.

Montrons que $\mathrm{Im}A$ est fermé, soit $(y_n)_n = (Ax_n)_n$ converge vers y, avec $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|A(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|,$$

alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans E, puisque A est fermé, alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax \in \mathrm{Im}A$, d'où $\mathrm{Im}A = E$, ça signifie que A est surjective.

Soit $x \in E$, alors $A^{-1}x \in \mathcal{D}(A)$, donc

$$\left\|AA^{-1}x\right\| \geq \alpha \left\|A^{-1}x\right\|,$$

ou encore

$$\left\|A^{-1}x\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|,$$

d'où A^{-1} est borné. □

3.3.2 Opérateur essentiellement auto-adjoints

Définition 3.3.4. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné symétrique à domaine dense dans E. On dit que A est essentiellement auto-adjoint si sa fermeture est auto-adjointe, ie :*

$$(\mathcal{D}((\overline{A})^*), (\overline{A})^*) = (\mathcal{D}(\overline{A}), \overline{A}).$$

Proposition 3.3.12. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné symétrique à domaine dense dans E. Si A est essentiellement auto-adjoint, alors A possède une unique extension auto-adjointe.*

Démonstration.

Soient$A$ est essentiellement auto-adjoint et B est une extension auto-adjoint de A, c'est-à-dire

$$B^* = B = \overline{B} \quad A \subset B, \quad \text{et} \quad (\overline{A})^* = \overline{A} \tag{$*$}$$

comme B est fermé alors donc

$$\overline{A} \subset B \quad \text{et} \quad B^* \subset \left(\overline{A}\right)^*. \tag{$**$}$$

Montrons que $B \subset \overline{A}$.

Par $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$\left(\overline{A}\right)^* = \overline{A} \subset B = B^* \subset \left(\overline{A}\right)^*,$$

ça signifie

$$B = \overline{B} = \left(\overline{A}\right)^*,$$

ou encore

$$B^* = \left(\overline{A}\right)^{**} = \overline{A},$$

comme $B = B^*$ et A est symétrique, on trouver que $B = \overline{A}$ et

$$(A^*)^* = A^{**} = \overline{A} = A^*.$$

On en déduit que A^* est auto-adjoint.

Soit B auto-adjoint tel que $A \subset B$ et montrons que $A^* \subset B$. Alors $A \subset B$ implique $\overline{A} \subset \overline{B} = B$, donc $A^* = A \subset B$. □

Remarque. *Soit $(\mathcal{D}(A), T)$ un opérateur non borné à domaine dense dans E.*

i) Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.

ii) Si A est essentiellement auto-adjoint, alors A^* est la plus petite extension fermé de A.

iii) Si A et B sont deux opérateur auto-adjoint et $A \subset B$ alors $A = B$.

Corollaire 3.3.1. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné symétrique à domaine dense dans E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A est essentiellement auto-adjoint.

ii) $ker(A^* \pm iI) = \{0\}$.

iii) $Im(A \pm iI)$ est dense dans E.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Si A est essentiellement auto-adjoint, alors $\left(\overline{A}\right)^* = \overline{A}$, ça signifie que $\overline{A}$ est auto-adjoint. Par le théorème 3.3.1, nous concluons que

$$\{0\} = \ker(\left(\overline{A}\right)^* \pm iI) = \ker(\overline{A} \pm iI),$$

comme $A^* = A \subset \overline{A}$, alors $A^* \pm iI \subset A^* \pm iI$, donc

$$\ker(A^* \pm iI) \subset \ker(\overline{A} \pm iI) = \{0\}\,.$$

$ii) \Rightarrow ii)$On a $\{\mathrm{Im}(A \pm iI)\}^{\perp}$ =ker$(A^* \pm iI) = \{0\}$, donc

$$\{\mathrm{Im}(A \pm iI)\}^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A \pm iI)} = \{0\}^{\perp} = E.$$

$iii) \Rightarrow i)$ Puisque A^* est fermable, alors

$$\begin{aligned} \left\{\mathrm{Ker}\left(\overline{A} \pm iI\right)\right\}^{\perp} &= \left\{\mathrm{Ker}\overline{A \pm iI}\right\}^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\left(A^* \pm iI\right)^*} \\ &= \overline{\mathrm{Im}\left(A^{**} \pm iI\right)} = \overline{\mathrm{Im}\left(\overline{A} \pm iI\right)}. \end{aligned}$$

On a $A \subset \overline{A}$, alors $\mathrm{Im}(A \pm iI) \subset \mathrm{Im}\left(\overline{A} \pm iI\right)$, puisque $\overline{\mathrm{Im}(A \pm iI)} = E$, alors $\overline{\mathrm{Im}\left(\overline{A} \pm iI\right)} = E$, donc

$$\left\{\mathrm{Ker}\left(\overline{A^*} \pm iI\right)\right\}^{\perp} = E,$$

ça signifie

$$\left\{\mathrm{Ker}\left(\overline{A^*} \pm iI\right)\right\}^{\perp\perp} = \mathrm{Ker}\left(\overline{A^*} \pm iI\right) = \{0\}$$

Par le théorème 3.3.1, nous concluons que $\overline{A}$ est auto-adjoint, c'est-à-dire A est essentiellement auto-adjoint. □

3.3.3 Opérateurs normaux

Définition 3.3.5 (Opérateur normal)**.** *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné à domaine dense dans E. On dit que A est un opérateur normal si :*

i) $(\mathcal{D}(A), A)$ est fermé

ii) $AA^* = A^*A$ sur $\mathcal{D}(A)$.

Proposition 3.3.13. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné à domaine dense dans E. Si A est normal, alors :*

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \quad \text{et} \quad \|Ax\| = \|A^*x\|, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

Démonstration.

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, alors

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*),$$

Si $x \in \mathcal{D}(A^*)$, alors $A^*x \in \mathcal{D}(A)$, puisque A est normal, nous avons

$$(AA^*, \mathcal{D}(A)) = (A^*A, \mathcal{D}(A)).$$

alors $AA^*x = A^*Ax$, donc $x \in \mathcal{D}(A)$, ça signifie $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$, nous concluons $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.
Soit $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$, alors alors

$$\begin{aligned} \|A^*x\|^2 &= \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle x, AA^*x\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle \\ &= \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2, \end{aligned}$$

d'où $\|Ax\| = \|A^*x\|$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$. □

Corollaire 3.3.2. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné à domaine dense dans E. Si A est auto-adjoint, alors A est normal.*

Démonstration.
Comme A est auto-adjoint, alors A est fermé, soit $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$, alors

$$\langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle.$$

Puisque $\mathcal{D}(A)$ dense dans E, alors $AA^* = A^*A$, d'où A est normal. □

Proposition 3.3.14. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné fermé à domaine dense dans E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *A est normal.*

ii) *A^* est normal.*

iii) *$A^*A = AA^*$.*

Démonstration.
i) $\Rightarrow$ *ii)* Si A est normal, alors $(\mathcal{D}(A), A)$ est fermé à domaine dense dans E, alors $(\mathcal{D}(A^*), A^*) = (\mathcal{D}(A), A^*)$ est fermé, comme $AA^* = A^*A$ sur $\mathcal{D}(A)$, alors $(\mathcal{D}(A), A^*)$ est normal.
ii) $\Rightarrow$ *ii)* Si A^* est normal, comme $(\mathcal{D}(A), A)$ est fermé, alors

$$(\mathcal{D}(A^{**}), A^{**}) = (\mathcal{D}(\overline{A}), \overline{A}) = (\mathcal{D}(A), A),$$

puisque $(A^*)^* A^* = A^* (A^*)^*$, ça signifieo $\overline{A}A^* = A^*\overline{A}$, comme $(\mathcal{D}(\overline{A}), \overline{A}) = (\mathcal{D}(A), A)$, alors $AA^* = A^*A$.
iii) $\Rightarrow$ *i)* C'est une définition que l'opérateur $(\mathcal{D}(A), A)$ est normal. □

Remarque. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné normal dans E, alors $A + \lambda$ est aussi normal, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.*

3.4 Inversibilité des opérateurs non bornés

Définition 3.4.1. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire bijectif.*
On définit l'opérateur $A^{-1} : F \longrightarrow E$ tel que

$$\begin{cases} AA^{-1}y = y, \quad \textit{pour tout } y \in F \\ A^{-1}Ax = x, \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

L'opérateur A^{-1} est dit l'inverse de A.

Proposition 3.4.1. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to G \subset F$ est fermé et injectif, alors $A^{-1} : G \subset F \to \mathcal{D}(A)$ est aussi fermé.*

Démonstration.
Soit $(y_n)_n$ une suite dans G tel que

$$y_n \to y \quad \text{et} \quad A^{-1}y_n \to x.$$

Alors $(x_n)_n = (A^{-1}y_n)_n \in \mathcal{D}(A)$, nous concluons alors alors

$$Ax_n = y_n \to y \quad \text{et} \quad x_n = A^{-1}y_n \to x$$

Puisque A fermé, on obtient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, qui implique $x = A^{-1}y$. □

Proposition 3.4.2. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur densément défini tel que son inverse est borné, alors*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Proposition 3.4.3. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ un opérateur non borné dense dans E.*

i) Si $A : \mathcal{D}(A) \to F$ est auto-adjoint qui est une bijection son image dense dans F. Alors l'opérateur inverse A^{-1} est auto-adjoint.

ii) Si A est symétrique tel que $\mathcal{D}(A) = E$ alors $A = A^*$.

iii) Si $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, pour $x, y \in \mathcal{D}(A)$ et $Im(A+\lambda I) = F$, pour $\lambda \in R$. Alors $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$ et $(\mathcal{D}(A), A) = (\mathcal{D}(A^*), A^*)$.

Démonstration.
i) On a $\Gamma(A^*) = \phi\left(\Gamma\left(A\right)\right)^{\perp}$, alors $A = A^*$ si et seulement si $\phi\left(\Gamma\left(A\right)\right)^{\perp} = \Gamma\left(A\right)$. Soit l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} U: & E \times E & \to & E \times E \\ & (x, y) & \to & U(x, y) = (x, y) \end{array}$$

Alors $\Gamma(A^{-1}) = U(\Gamma(A))$, donc

$$\phi(U(\Gamma(A)))^{\perp} = U(\Gamma(A)),$$

cette relation est une conséquence immédiate d'auto-adjoint de A et $U.V = -V.U.$

ii) On a : $A \subset A^*$ et $\mathcal{D}(A) = E$, d'où on conclut que $A^* = A$.

iii) Comme $\mathrm{Im}(A+\lambda I) = F$ implique $\ker(A+\lambda I) = \{0\}$, d'où l'opérateur $A+\lambda I$ est inversible. son inverse est un opérateur symétrique défini su F, donc il est auto-adjoint. La relation

$$\{\mathcal{D}(A)\}^{\perp} = \left\{\mathrm{Im}(A+\lambda I)^{-1}\right\}^{\perp} = \ker(A+\lambda I)^{-1} = \{0\}$$

Par conséquent, $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, par (i), on obteient que $A+\lambda I$ est auto-adjoint, d'où A est auto-adjoint. □

3.5 Spectrale d'opérateur non bornée

3.5.1 Définitions et propriétés

Tout au long du partie, on travaillera sur E espace de Banach sur $\mathbb{K}$.

Définition 3.5.1. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ opérateur non borné sur E. On définit l'ensemble résolvante de A et on note à par $\rho(A)$, l'ensemble $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

i) $\mathrm{Im}(\lambda I - A)$ *dense dans E,*

ii) $\lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to \mathrm{Im}(\lambda I - A)$ *est inversible d'inverse borné,* $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(\lambda I - A), \mathcal{D}(A))$,

Définition 3.5.2. *ou* $\mathrm{Im}(\lambda I - A)$ *est muni de la norme induite.*

Définition 3.5.3. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ opérateur non borné sur E. On définit le spectre de A noté par $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$*

Définition 3.5.4. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ opérateur non borné. On appelle spectre ponctuel de A l'ensemble des* ***valeurs propres*** *de A on note à l'ensemble des valeur propre $\sigma_p(A)$*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas inversible } \}$$

Définition 3.5.5. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ opérateur non borné. On appelle* ***spectre continu*** *de A et on note à par $\sigma_c(A)$, l'ensemble*

$$\begin{aligned} \sigma_c(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe et non borné, } \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} = E\right\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(\lambda I - A) = \{0\}, \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} = E \text{ et } (A - \lambda I)^{-1} \text{ non borné}\}. \end{aligned}$$

Définition 3.5.6. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ opérateur non borné. On appelle **spectre résiduel** de A et on note à par $\sigma_r(A)$, l'ensemble*

$$\begin{aligned}\sigma_r(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, } \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} \neq E\right\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_p(A) \text{ et } \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} \neq E\}.\end{aligned}$$

Exemple 3.5.1. *Soit A un opérateur de multiplication non borné de $E = L^2(\mathbb{R})$ dans E définit par :*

$$Af(x) = xf(x).$$

De domaine

$$\mathcal{D}(A) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\right\}.$$

Alors $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et A est auto-adjoint, on a

$$\sigma_p(A) = \emptyset, \quad \sigma_c(A) = \mathbb{R}, \quad \sigma_r(A) = \emptyset, \quad \rho(A) = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Remarque. *Soit $(\mathcal{D}(A), A)$ opérateur non borné.*

1) *Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ ce qui implique $(\lambda I - A) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow Im(\lambda I - A)$ est non inversible, c'est à dire non injective,*

$$\exists x \in \mathcal{D}(A), \text{ telq ue } x \neq 0 \text{ et } Ax = \lambda x.$$

2) *Soit $\lambda \in \sigma_c(A)$, c'est à dire $(\lambda I - A)$ injective, alors $\sigma_p(A) \cap \sigma_c(A) = \emptyset$ et domaine $\mathcal{D}(R(\lambda, A)) = Im(\lambda I - A)$ dense dans E. Mais, pour tout $z \in \mathcal{D}(A)$, il n'y a pas $c > 0$ tel que*

$$\|R(\lambda, A)z\| \leq c\|z\|.$$

Par conséquent, il existe une suite $(z_n)_n \in \mathcal{D}(R(\lambda, A))$ convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} \|R(\lambda, A)z_n\| = +\infty$.

3) *Soit $\lambda \in \sigma_r(A)$, c'est àdire $(\lambda I - A)$ injective, alors $\sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) = \emptyset$ et domaine $\mathcal{D}(R(\lambda, A)$ non dense dans E, donc $\sigma_r(A) \cap \sigma_c(A) = \emptyset$. On en déduit que $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$ sont disjoint.*

4) *Si $\lambda I - A$ non inversible, alors $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

5) *Si $\lambda I - A$ inversible mais $(\lambda I - A)^{-1}$ non borné et donc $\lambda \in \sigma_c(A)$ et domaine dense dans E.*

6) *Si $\lambda I - A$ inversible et $\mathcal{D}(R(\lambda, A)$ non dense dans E, alors $\lambda \in \sigma_r(A)$.*

3.5.2 Le spectre des opérateurs fermés

Proposition 3.5.1. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ non borné et fermé dans E, alors $\rho(A)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration.
On note $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ résolvante de A.
Soit $\lambda \in \rho(A)$, alors $R(\lambda, A) : \mathrm{Im}(\lambda I - A) \to \mathcal{D}(A)$ est continue avec $\mathcal{D}(R(\lambda, A)) = \mathrm{Im}(\lambda I - A)$, comme $\mathcal{D}(R(\lambda, A))$ est dense dans E, il suffit montrer que $\mathcal{D}(R(\lambda, A))$ est fermé pour que $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $(y_n)_n \in \mathcal{D}(R(\lambda, A))$, tel que $y_n \to y$ dans E, alors il existe $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ tel que $y_n = (\lambda I - A) x_n$.
Puisque $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné, il existe $c > 0$, tel que

$$\|R(\lambda, A) z\| \leq c \|z\|, \qquad \text{pour tout } z \in \mathcal{D}(R(\lambda, A)),$$

Si $z = (\lambda I - A) x$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\|x\| \leq c \|(\lambda I - A) x\|, \qquad \text{pour tout } z \in \mathcal{D}(A),$$

alors

$$\|x_n - x_m\| \leq c \|y_n - y_m\|, \qquad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N},$$

donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E, alors $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$, comme $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé, alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = (\lambda I - A) x$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{Im}(\lambda I - A)$, donc

$$\|R(\lambda, A) z\| \leq c \|z\|, \qquad \text{pour tout } z \in E,$$

d'où $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\varphi : \rho(A) \to \mathcal{L}_i(E)$, $\lambda \to \varphi(\lambda) = \lambda I - A$ est bien définie et contenu et bijective. L'enemble $\mathcal{L}_i(E)$ est un ouvert dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_i(E)) = \rho(A)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

□

Corollaire 3.5.1. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ non borné et fermé dans E, alors $\sigma(A)$ est fermé dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration.
Puisque $\rho(A)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$, alors $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ est fermé dans $\mathbb{C}$. □

Proposition 3.5.2. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ non borné et fermé dans E, alors Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors*

i) $(\lambda, \mu) \in \rho(A) \times \rho(A)$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) \\ &= (\mu - \lambda) R(\mu, A) R(\lambda, A) \end{aligned}$$

ii) La résolvante $\rho(A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(E)$ est dérivable et

$$R^{'}(\lambda, A) = -R^2(\lambda, A).$$

Démonstration.

Même démonstration pour l'opérateur borné (démonstration de la proposition 2.5.2). □

Théorème 3.5.1. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ non borné de domaine dense dans E et auto-adjoint, alors*

1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
2) *Pour tout $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, si $\lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda \perp E_\mu$ où $E_\lambda = \{x \in E : Ax = \lambda x\}$.*
3) *$\sigma_p(A)$ est au plus dénombrable, c'est-à-dire $\sigma_p(A)$ est fini.*
4) $\sigma_r(A) = \emptyset$,
5) *Pour tout $\lambda \in \rho(A) : \|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}$.*

Démonstration.

1) Soit $\lambda \in \sigma(A)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda||x^2||,$$

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}||x^2||,$$

comme $\lambda = \overline{\lambda}$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Soient $x \in E_\lambda, y \in E_\mu$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

en déduit que $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$, alors $\langle x, y\rangle = 0$, d'où $E_\lambda \perp E_\mu$.

3) Peut écrire $\sigma_p(A) = \{\lambda : i \in I\}$, montrer que I dénombrable. En effet
Soit $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma_p(A)$ tel que $\lambda_i \neq 0$ et $\lambda_j \neq 0$, alors

$$E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}, \qquad \text{pour } i \neq j.$$

Comme $(E_i)_{i\in I}$ sont des espace vectoriels, alors $\oplus_{i\in I} E_{\lambda_i} \subseteq H$.
Soit $x \in \oplus_{i\in I} E_{\lambda_i}$, alors

$$x = \sum\nolimits_{i\in I} x_i \qquad \text{avec} \qquad x_i \in E_{\lambda_i}, \text{ pour } i \in I$$

Puisque $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$, pour $i \neq j$, alors

$$\|x\|^2 = \sum\nolimits_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty,$$

donc $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2$ est sommable dans E, d'où I dénombrable.

4) Soit $\lambda \in \sigma_r(A)$, alors $\lambda \notin \sigma_p(A)$ et $\overline{\text{Im}(\lambda I - A)} \neq E$, donc $(\lambda \mathcal{I} - A)^{-1}$ existe. Sa signification $(\lambda \mathcal{I} - A)^{-1}$ injective, alors

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_p(A) \quad \text{et} \quad \text{Im}\overline{(\lambda I - A)} \neq E\}.$$

donc $\sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) = \emptyset$ et $\mathcal{D}(R(\lambda, A))$ non dense dans E.on considère deux cas On a $\mathcal{D}(R(\lambda, A))$ =Im$(\lambda I - A)$, on considère deux cas

1^{er}cas : Si $\lambda \in \mathbb{C}$ avec Im$\lambda \neq 0$, alors

$$\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow \lambda \notin \sigma_r(A) \Rightarrow \sigma_r(A) = \emptyset$$

2^{eme}cas : Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

Si Im$(\lambda I - A)$ est dense dans E, alors $\lambda \notin \sigma_r(A)$, on obtient $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Si Im$(\lambda I - A)$ est non dense dans E, on a Im$(\lambda I - A)^{\perp} \neq \{0\}$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle x_0, \lambda x\rangle = \langle x_0, Ax\rangle \Leftrightarrow \langle \overline{\lambda} x_0, x\rangle = \langle A^* x_0, x\rangle \Leftrightarrow \langle \lambda x_0, x\rangle = \langle Ax_0, x\rangle$$

ce qu'implique que,

$$\lambda x_0 = Ax_0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A)$$

Par densité de $\mathcal{D}(A)$ dans E, on obtient que $\lambda \in \sigma_p(A)$, puique $\sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset$,ça signifie $\lambda \notin \sigma_r(A)$, d'où, $\sigma_r(A) = \emptyset$.

5) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, on a

$$\langle (\lambda I - A)x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 - \langle\langle Ax, x\rangle\rangle, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A),$$

alors

$$\text{Im}\,\langle (\lambda I - A)x, x\rangle = \text{Im}\left(\lambda \|x\|^2 - \langle\langle Ax, x\rangle\rangle\right) \geq \text{Im}\lambda \|x\|^2$$

De même, on trouver

$$\|(\lambda I - A)^* x\| \geq |\text{Im}\lambda| \, \|x\|$$

donc

$$\left\|(\overline{\lambda} I - A)x\right\| \geq |\text{Im}\lambda| \, \|x\|,$$

ce qui donne

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} x\right\| \leq \frac{\|x\|}{|\text{Im}\lambda|},$$

ou encore

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\text{Im}\lambda|}.$$

□

Corollaire 3.5.2. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné.Si A n'est pas fermé, alors $\sigma(A) = \mathbb{C}$. C'est-à-dire $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé.*

Démonstration.
Supposons que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$, c'est-à-dire l'opérateur $(A - \lambda_0 I)^{-1}$: $\mathrm{Im}\,(A - \lambda_0 I) \to \mathcal{D}(A)$ est borné, alors $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ est fermé, ça signifie que l'opérateur $A - \lambda_0 I$: $\mathcal{D}(A) \to \mathrm{Im}\,(A - \lambda_0 I) \subset E$ est fermé, comme $\lambda_0 I \in \mathcal{L}(E)$, puisque A est la somme deux opérateurs $A - \lambda_0 I$ est $\lambda_0 I$ sons fermés, alors $A : \mathcal{D}(A) \to E$ est fermé. □

Définition 3.5.7. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ non borné, alors*

1) *A est dite **accrétif** si $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$,*

2) *A est dite **dissipatif** si $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$,*

3) *A est dite **conservatif** si $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle = 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Remarque. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné, alors*

1) *A positive si et seulement si A symétrique et accrétif.*

2) *A négative si et seulement si A symétrique et dissipatif.*

Exemple 3.5.2. *Soit E un espace de Hilbert admet une base orthonormée $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, Soit A un opérateur donné par*

$$Ax = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n\rangle\, e_n,$$

avec $(\lambda_n)_n$ une suite non borné dans $\mathbb{K}$, on a

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in E : \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2 < \infty\right\}.$$

Alors

1) *A est positive si et seulement si $\lambda_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

2) *A est accrétif si et seulement si $\mathrm{Re}\lambda_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

3) *A est dissipatif si et seulement si $\mathrm{Re}\lambda_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

4) *A est conservatif si et seulement si $\mathrm{Re}\lambda_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 3.5.3. *Soit $E = L^2(\mathbb{R})$. On considère l'opérateur A défini par $Af = f'$, avec $\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R})$.*
Pour tout $f \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned}\langle Af, f\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)\,\overline{f(t)}dt = f(t)\,\overline{f(t)}\Big|_{\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{f'(t)}dt \\ &= -\overline{\int_{\mathbb{R}} f'(t)\,\overline{f(t)}dt} = -\overline{\langle Af, f\rangle},\end{aligned}$$

alors

$$0 = \langle Af, f\rangle + \overline{\langle Af, f\rangle} = 2\text{Re}\,\langle Af, f\rangle\,,$$

donc A est conservatif.

Définition 3.5.8. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ non borné symétrique de domaine dense dans E. On dit que A est semi-contenue inférieurement, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que*

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, soit $\alpha \leq \alpha_0$, alors $A - \alpha I$ est positive. En effet, soit $x \in \mathcal{D}(A)$*

$$\begin{aligned}\langle (A - \alpha I)x, x\rangle &\geq \alpha_0\|x\|^2 - \alpha\|x\|^2\\ &= (\alpha_0 - \alpha)\|x\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Théorème 3.5.2. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur semi-continue inférieurement pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha < \alpha_0$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) A est auto-adjoint.

ii) A est fermé et ker$(A^* - \alpha I) = \{0\}$

iii) Im$(A - \alpha I) = E$.

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$ Soit A est auto-adjoint, par le théorème 3.3.1, A est fermé et $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$, soit $x \in$ker$(A^* - \alpha I)$, c'est-à-dire $(A^* - \alpha I)x = 0$, donc

$$0 = \langle (A^* - \alpha I)\,x, x\rangle = \langle (A - \alpha I)x, x\rangle \geq (\alpha_0 - \alpha)\|x\|^2.$$

donc, $x = 0$, ça signifie $\ker(A^* - \alpha I) = \{0\}$.

$ii) \Rightarrow iii)$ On a $\ker(A^* - \alpha I) = \{0\}$, alors $\{\ker(A^* - \alpha I)\}^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$, par la proposition 3.3.10, on obtient $\overline{\text{Im}(A - \alpha I)} = E$. Il reste à montrer que $\text{Im}(A - \alpha I)$ est fermé.

Comme A est semi-continue inférieurement pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\langle (A - \alpha I)x, x\rangle \geq (\alpha_0 - \alpha)\|x\|^2 \geq 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A)$$

Alors

$$(\alpha_0 - \alpha)\|x\| \leq \|(A - \alpha I)x\| \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A)$$

Donc, si $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ telle que $z_n = (A - \alpha I)x_n \to z$ dans E, alors $(z_n)_n$ suite de Cauchy, nous avons

$$\begin{aligned}(\alpha_0 - \alpha)\|x_n - x_m\| &\leq \|(A - \alpha I)\,(x_n - x_m)\|\\ &= \|(A - \alpha I)x_n - (A - \alpha I)x_m\|\\ &= \|z_n - z_m\|,\end{aligned}$$

ce qu'implique que $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont suite de Cauchy, alors $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$ dans E. Comme A est fermé, on en déduit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$, d'où $z = (A - \alpha I)x \in$Im$(A - \alpha I)$. Finalement on obtient que $\mathrm{Im}(A - \alpha I) = E$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Comme A est semi-continue inférieurement pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\langle (A - \alpha I)x, x\rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A)$$

Par la proposition 3.3.2, on obtient que $A - \alpha I$ est symétrique, ça signifie A est symétrique, alors $A \subset A^*$. Inversement, montrons que $A^* \subset A$.

Soit $x \in \mathcal{D}(A^*)$, puisque $\mathrm{Im}(A - \alpha I) = E$, alors il existe $y \in \mathcal{D}(A)$ tel que

$$(A - \alpha I)y = (A^* - \alpha I)x.$$

Comme $A \subset A^*$, alors

$$x - y \in \mathcal{D}(A^*) \quad \text{et} \quad (A^* - \alpha I)(x - y) = 0.$$

Donc

$$x - y \in \ker(A^* - \alpha I) = \{\mathrm{Im}(A - \alpha I)\}^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}.$$

D'où $x = y \in \mathcal{D}(A)$, ça signifie $A = A^*$. □

Proposition 3.5.3. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur auto-adjoint et semi-continue inférieurement pour α_0, alors*

i) Si $\alpha < \alpha_0$, alors

$$\alpha \in \rho(A) \quad \textit{et} \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\alpha_0 - \alpha}.$$

ii) $\sigma(A) \subset [\alpha_0, +\infty[$.

Démonstration.

i) Comme A est auto-adjoint, alors A est fermé, $\ker(A - \alpha I) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(A - \alpha I) = E$, donc $A - \alpha I$ est inversible. Puisque A est semi-continue inférieurement pour α_0, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$0 \leq (\alpha_0 - \alpha)\|x\|^2 \leq \langle (A - \alpha I)x, x\rangle \leq \|(A - \alpha I)x\| \, \|x\|,$$

ou encore

$$\|(A - \alpha I)x\| \geq (\alpha_0 - \alpha)\,\|x\| \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A)$$

donc $(A - \alpha I)^{-1}$ est continue, ça signifie $\alpha \in \rho(A)$ et

$$\left\|(A - \alpha I)^{-1}x\right\| \leq \frac{1}{\alpha_0 - \alpha}\,\|x\|, \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{Im}(A - \alpha I)$$

ou encore

$$\left\|(A-\alpha I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha_0-\alpha}.$$

ii) Par (i), on a $]-\infty,\alpha_0[\subset \rho(A)$, alors $\sigma(A)=\mathbb{C}\backslash\rho(A)\subset \mathbb{C}\backslash\,]-\infty,\alpha_0[$, puisque A est auto-adjoint, on a $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$, donc

$$\sigma(A)\subset(\mathbb{C}\backslash\,]-\infty,\alpha_0[)\cap\mathbb{R}=[\alpha_0,+\infty[.$$

□

3.6 Exercices

3.6.1 Énoncés

Exercice 13. *Montrer que les opèrateurs suivants sont non bornés mais fermés*

1) $A_1:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1]),\ A_1(f)=f',\ \mathcal{D}(A_1)=\{f\in\mathcal{C}^1([0,1]):f(0)=0\}.$

2) $A_2:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1]),\ A_2(f)=f',\ \mathcal{D}(A_2)=\left\{f\in\mathcal{C}^1([0,1]):f(0)=f'(1)=0\right\}.$

3) $A_1:L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R}),\ A_3(f)=\varphi f,\ \mathcal{D}(A_3)=\{f\in L^p(\mathbb{R}):\varphi f\in\varphi f\}.$

Exercice 14. *En utilisant la suite de fonctions :*

$$f_n(x)=\begin{cases}1-nx, & si\ 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0, & si\ \frac{1}{n}<x\leq 1\end{cases}$$

montrer que l'opèrateur

$$A:L^1([0,1])\to\mathbb{R},\quad A(f)=f(0),$$

n'est pas fermé.

Exercice 15. *On désigne par E l'espace de Banach $\mathcal{C}_b([0,\infty),\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornés sur $[0,\infty)$ muni de la norme de la converge uniforme*

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x(t)|:t\in[0,\infty)\},$$

On définit l'opérateur A sur

$$\mathcal{D}(A)=\{x\in E:|x(t)|\leq\frac{c}{1+t},\ ou\ x\ dépend\ de\ x\}$$

par

$$Ax(t)=tx(t).$$

1) *Montre que A est linéaire non borné*

2) *Montre que A est un opérateur fermé sur $\mathcal{D}(A)$.*

Exercice 16. *Considérons les opérateurs*

$$A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]), \quad A(f) = f', \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{C}^1([0,1])$$

et

$$B : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]), \quad B(f) = \varphi.f$$

avec

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

1) *Montrer que A est fermé et B borné.*

2) *Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions dans $\mathcal{D}(A)$, vérifiant les deux conditions :*

$$f_n \equiv 1 \quad sur\ [\frac{1}{2}, 1] \quad et \quad f = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Montrer en utilisant cette suite de fonctions que l'opérateur $B \circ A$ n'est pas fermé.

Exercice 17. *On désigne par $E = \ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert, on suppose $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres réeles et on définit l'opérateur $A : E \to E$ par*

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \qquad Ax = \sum\nolimits_{n\geq 1} \lambda_n x_n e_n$$

1) *Montrer que $A \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Dans ce cas exprimer la norme de A*

2) *Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas borné avec $\inf\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$, est-ce-que A est fermé ?*

Exercice 18. *Soit $E = \ell^2(\mathbb{N})$. On considère l'opérateur A défini par*

$$Ax = (Ax_n) = \begin{cases} 0, & si\ n = 0 \\ nx_{n-1} & si\ n \geq 1 \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : (nx_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})\right\}.$$

Montrer que $0 \in \sigma_r(A)$ et $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Exercice 19. *Soit $E = L^2([0,1])$. On considère l'opérateur A défini par $Af = f'$ avec*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in H^1([0,1]) : f(0) = 0\right\}.$$

1) *Montrer que* $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* $L^2([0,1])$.

2) *Monrer que* A *n'est pas symétrique.*

3) *Montrer que* $\rho(A) = \mathbb{C}$.

4) *Trouver l'opérateur* $(A^*, \mathcal{D}(A^*))$.

Exercice 20. *Soit* $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$ *l'espace des fonctions continues et bornées sur* $\mathbb{R}^2$. *La norme sur cet espace est donnée par :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y)|$$

On définit dans cet espace les opérateurs A_1 *et* A_2 *comme suit :*

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \textit{avec} \quad \mathcal{D}(A_1) = \left\{ f \in E : \frac{\partial f}{\partial x} \in E \right\}$$

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \textit{avec} \quad \mathcal{D}(A_2) = \left\{ f \in E : \frac{\partial f}{\partial y} \in E \right\}$$

1) *Montrer que chacun de ces opérateurs est fermé mais non borné.*

2) *Montrer que*

$$\mathcal{D}(A_1 + A_2) = \mathcal{C}_b^1\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{ \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right) : f \in E, \frac{\partial f}{\partial x} \in E \textit{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \in E \right\}$$

3) *Soit* $(\varphi_n)_n$ *une suit de fonction dans* $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ *qui converge uniformément vers une fonction* $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \diagdown \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. *Montrer que, les fonctions*

$$f_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x,y) = \varphi_n(x-y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

sont toutes dans $\mathcal{D}(A_1 + A_2)$ *et que,* $(A_1 + A_2) f_n = 0$, *pour tout* n.

4) *Montrer que la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *tel que* $f(x,y) = \varphi(x-y)$ *est dans* E *et que,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \textit{mais} \quad f \in \mathcal{D}(A_1 + A_2).$$

3.6.2 Correction des exercices

Solution 13.

1) *On considére la suite* $(f_n)_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *tel que* $f_n(x) = x^n$, *alors*

$$(f_n)_n \in \mathcal{D}(A_1) \quad \textit{et} \quad A_1 f_n(x) = n x^{n-1}, \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\|f_n\| = 1 \quad \textit{et} \quad \|A_1 f_n\| = n, \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

comme $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_1 f_n\| = +\infty$, *alors l'opérateur* A_1 *n'est pas borné.*

Soit $(f_n)_n$ *une suite dans* $\mathcal{D}(A_1)$, *vérifiant :*

$$f_n \to f \quad et \quad A_1 f_n \to g \quad dans\ \mathcal{C}([0,1]),$$

c'est-àdire

$$f_n \to f \quad et \quad f_n^{'} \to g \quad converge\ uniformément,$$

d'autre part

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

On a immédiatement $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *et* $g = f^{'}$, *par ailleurs* $f \in \mathcal{D}(A_1)$ *et*

$$A_1 f_n \to g = A_1 f \quad dans\ \mathcal{C}([0,1]),$$

d'où l'opérateur A_1 *est fermé.*

2) *Considérons la suite* $(f_n)_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *tel que* $f_n(x) = x(x-1)^n$, *alors*

$$(f_n)_n \in \mathcal{D}(A_2) \quad et \quad A_2 f_n(x) = (x-1)^{n-1}((n+1)x-1),\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N},$$

donc $\|f_n\| = 1$ *et*

$$\|A_2 f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} \left|(x-1)^{n-1}((n+1)x-1)\right| = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|A_2 f_n\| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = e^{-2} \neq 0,$$

d'où l'opérateur A_2 *n'est pas borné.*

Soit $(f_n)_n$ *une suite dans* $\mathcal{D}(A_2)$, *vérifiant :*

$$f_n \to f \quad et \quad A_2 f_n \to g \quad dans\ \mathcal{C}([0,1]),$$

c'est-àdire

$$f_n \to f \quad et \quad f_n^{'} \to g \quad converge\ uniformément,$$

d'autre part

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 \qquad et \quad g(1) = \lim_{n\to\infty} f_n^{'}(1) = 0$$

On a immédiatement $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *et* $g = f^{'}$, *alors* $f^{'}(1) = f(0) = 0$, *ça signifie* $f \in \mathcal{D}(A_2)$ *et*

$$A_2 f_n \to g = A_2 f \quad dans\ \mathcal{C}([0,1]),$$

d'où l'opérateur A_2 est fermé.

3) *Considérons la suite* $(f_n)_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tel que* $f_n(x) = n^{-\frac{1}{p}} \chi_{[0,n]}(x)$, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^p \, dx = \frac{1}{n} \int_0^n dx = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) f_n(x)|^p \, dx = \frac{1}{n} \int_0^n x^{\frac{k}{p}} dx = \frac{p}{k+1} n^{\frac{k}{p}},$$

alors

$$(f_n)_n \in \mathcal{D}(A_3) \quad et \quad A_3 f_n(x) = n^{-\frac{1}{p}} x^k \chi_{[0,n]}(x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc $\|f_n\| = 1$ *et*

$$\|A_3 f_n\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) f_n(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{p}{k+1} \right)^{\frac{1}{p}} n^k,$$

donc

$$\lim_{n \to \infty} \|A_3 f_n\| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{p}{k+1} \right)^{\frac{1}{p}} n^k = \infty,$$

d'où l'opérateur A_3 n'est pas borné.

Soit $(f_n)_n$ *une suite dans* $\mathcal{D}(A_3)$, *vérifiant :*

$$f_n \to f \quad et \quad A_3 f_n \to g \quad dans\ L^p(\mathbb{R}),$$

c'est-àdire

$$f_n \to f \quad et \quad \varphi f_n \to g \quad dans\ L^p(\mathbb{R}).$$

Alors

$$f_n \to f \quad et \quad \varphi f_n \to g \quad presque\ partout\ sur\ \mathbb{R},$$

donc

$$\varphi f_n \to \varphi f \quad et \quad \varphi f_n \to g \quad presque\ partout\ sur\ \mathbb{R},$$

ça signifie que $g = \varphi f$ *presque partout sur* $\mathbb{R}$, *on a immédiatement* $\varphi f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $g = A_3 f$, *alors* $f \in \mathcal{D}(A_3)$ *etg* $= A_3 f$, *d'où l'opérateur A_3 est fermé.*

Solution 14.

Premièrement, nous définirons le domaine de définition

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in L^1([0,1]) : f(0) \ \ existe\ et\ fini \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, *on a*

$$\int_0^1 |f_n(x)| \, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx) \, dx = x - \frac{n}{2} x^2 \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n},$$

alors la suite $(f_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ *est converge vers la fonction nulle* $f = 0$ *de* $L^1([0,1])$.

D'autre part,

$$Af_n = f_n(0) = 1 \quad et \quad Af = f(0) = 0.$$

donc la suite $(Af_n)_n$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *vers la constante* $1 \neq Af$.

L'opérateur A *n'est pas fermé.*

Solution 15.

1) *Soit* $x_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *définit par*

$$x_n(t) = \frac{n}{n+t}, \qquad pour\ n \in \mathbb{N}^*,$$

Alors $\|x_n\| = 1$ *et* $\|Ax_n\| = n \to \infty$ *, lorsque* $n \to \infty$*, donc* A *non borné.*

2) *Soit* $x \in \mathcal{D}(A)$*, alors il existe* $c_x > 0$ *tel que*

$$|tx(t)| \leq \frac{c_x t}{1+t} \leq c_x < \infty,$$

alors l'opérateur A *est bien définit sur* $\mathcal{D}(A)$.

Soit $(x_n)_n \in \mathcal{D}(A)$ *tel qure* $x_n \to x$ *et* $Ax_n = tx_n \to y$ *dans* E*. Comme* $t \to \frac{1}{t+1}$ *et* $t \to \frac{t}{t+1}$ *sont des fonctions borné, alors*

$$\frac{t}{t+1}x_n \to \frac{y}{t+1} \quad et \quad \frac{t}{t+1}x_n \to \frac{t}{t+1}x.$$

donc $y = tx = Ax$*. D'autre part,*

$$\|y\| = \sup_{t \geq 0} |tx(t)| \geq \frac{1}{2} \sup_{t \geq 0} |2tx(t)| \geq \frac{1}{2} \sup_{t \geq 0} (t+1)|x(t)|$$

donc

$$|x(t)| \leq \frac{2\|y\|}{t+1}, \quad pour\ tout\ t \geq 0,$$

d'où $x \in \mathcal{D}(A)$.

Solution 16.

1) *On a la fonction* $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$*, soit* $f \in \mathcal{C}([0,1])$*, on a*

$$\|B(f)\| = \|\varphi.f\| \leq \|\varphi\| \|f\| = \|f\|,$$

donc l'opérateur B *est bornée.*

On considére la suite $(f_n)_n : [0,1] \to \mathbb{R}$*, tel que* $f_n(x) = x^n$*, alors*

$$(f_n)_n \in \mathcal{D}(A) \quad et \quad Af_n(x) = nx^{n-1}, \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\|f_n\| = 1 \quad et \quad \|Af_n\| = n, \; pour \; tout \; n \in \mathbb{N},$$

comme $\lim\limits_{n\to\infty} \|Af_n\| = +\infty$, *alors l'opérateur* A *n'est pas borné.*
Soit $(f_n)_n$ *une suite dans* $\mathcal{D}(A)$, *vérifiant :*

$$f_n \to f \quad et \quad A_1 f_n \to g \quad dans \; \mathcal{C}([0,1]),$$

c'est-àdire

$$f_n \to f \quad et \quad f_n^{'} \to g \quad converge \; uniformément,$$

On a immédiatement $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *et* $g = f^{'}$, *par ailleurs* $f \in \mathcal{D}(A)$ *et*

$$A_1 f_n \to g = A_1 f \quad dans \; \mathcal{C}([0,1]),$$

d'où l'opérateur A *est fermé.*

2) *Remarquons tout d'abord que :*

$$\mathcal{D}(B \circ A) = \mathcal{D}(A) = \mathcal{C}^1([0,1]).$$

On a $(f_n)_n \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *et*

$$(B \circ A) f_n(x) = 0, \quad pour \; tout \; x \in [0,1],$$

donc,

$$\begin{cases} f_n \to f \in \mathcal{C}^1([0,1]) \\ (B \circ A)\, f_n \to 0 \in \mathcal{C}^1([0,1]) = \mathcal{D}(B \circ A) \end{cases}$$

On ne peut donc pas écrire : $(B \circ A)(f) = 0$ *et l'opérateur* $B \circ A$ *n'est pas fermé.*

Solution 17.

1) *Si* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, *on a*

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \sqrt{\sum\nolimits_{n\geq 1} |\lambda_n x_n|^2} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \sqrt{\sum\nolimits_{n\geq 1} |x_n|^2} \\ &\leq \|\lambda\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \|x\|, \end{aligned}$$

alors $A \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\|A\| \leq \|\lambda\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$.
Inversement : Si $A \in \mathcal{L}(E)$, *il existe* $M > 0$ *tel que* $\|Ax\| \leq M\|x\|$, *pour tout* $x \in E$.
Soit $x_k = e_k$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *alors*

$$\|Ax_k\| = |\lambda_k| \leq M\|x_k\| = M\|e_k\| = M,$$

ou $|\lambda_k| \leq M$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *ça signifie* $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

2) *Comme* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell^\infty(\mathbb{N})$, *alors l'opérateur* A *non borné, soit* $\mathcal{D}(A)$ *le domaine de définition*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A) &= \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum\nolimits_{n\geq 1} |\lambda_n x_n|^2 < \infty\right\}\\ &= \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : (\lambda_n x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})\right\}.\end{aligned}$$

Montrons que A *est inversible, soit* $y \in \ell^2(\mathbb{N})$, *tel que* $Ax = y$, *ça signifie* $(\lambda_n x_n)_n = (y_n)_n$ *ou*

$$(x_n)_n = \left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)_n,$$

alors x *unique, donc* $A^- : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}(A)$, $x \to A^- x = \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)_n$.
Comme $\inf\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\} = C > 0$, *alors* $\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)_n$ *est borné, donc* A^{-1} *est opérateur borné, donne nous* A^{-1} *fermé, d'où* A *est fermé.*

Solution 18.

$-$*Montrons que ImA n'est pas dense dans* $\ell^2(\mathbb{N})$.

Soit $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, *on a* $\langle e_1, Ax\rangle = 0$, *c'est-à-dire* $e_1 \in \{\mathrm{Im}A\}^\perp$, *alors*

$$[e_1] = \{\lambda e_1 : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \{\mathrm{Im}A\}^\perp,$$

donc $\{\mathrm{Im}A\}^\perp \neq \{0\}$, *ça signifie*

$$\{\mathrm{Im}A\}^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}A} \neq \{0\}^\perp = E = \ell^2(\mathbb{N}).$$

$-$*Montrons que* A *est injective,*

$$\begin{aligned}kerA &= \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : Ax = 0\right\}\\ &= \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : nx_{n-1} = 0,\ pour\ n \geq 1\right\}\\ &= \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : x_{n-1} = 0,\ pour\ n \geq 1\right\}\\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

Comme A *est injective, alors* A^{-1} *:ImA* $\to \mathcal{D}(A)$ *existe et puisque ImA n'est pas dense dans* $\ell^2(\mathbb{N})$, *ça signifie que* $0 \in \sigma_r(A)$.

Monrons que $\sigma_p(A) = \emptyset$, *nous supposons le contraire, il existe* $\lambda \in \sigma_p(A)$, *tel que* $\lambda \neq 0$, *alors il existe* $x \in \ell^2(\mathbb{N}) - \{0\}$, *tel que* $Ax = \lambda x$ *ou*

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_n = \frac{n}{\lambda} x_{n-1},\ pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

alors

$$x_n = \frac{n!}{\lambda^n} x_0 = 0,\ pour\ n \in \mathbb{N},$$

donc $x = 0$ *absurde.*

Solution 19.

1) *On a* $\mathcal{D}((0,1)) \subset \mathcal{D}(A) \subset L^2([0,1])$, *avec*

$$\mathcal{D}((0,1)) = \{f \in \mathcal{C}^\infty((0,1)) : supp(f) \subset\subset (0,1)\},$$

comme $\mathcal{D}((0,1))$ *est dense dans* $L^2([0,1])$, *alors* $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* $\mathcal{D}(A)$.

2) *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, $f(x) = x + i$, *on a*

$$\begin{aligned} \langle Af, f\rangle &= \int_0^1 Af(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 \overline{x+i}dx \\ &= \int_0^1 (x-i)\,dx = \frac{1}{2} - i, \end{aligned}$$

alors $\langle Af, f\rangle \notin \mathbb{R}$, *donc* A *n'est pas symétrique.*

3) *Soient* $f \in L^2([0,1])$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *si* $(\lambda I - A)\varphi = f$, *sa signification*

$$(E) : \begin{cases} \varphi' - \lambda\varphi = f \\ \varphi'(0) = \lambda\varphi(0) \end{cases}$$

L'équation (E) *admet solution*

$$\varphi(t) = -\int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt,$$

donc $\lambda I - A$ *est surjective.*

D'autre part, soit $\varphi \in ker(\lambda I - A)$, *alors*

$$\varphi' = \lambda\varphi \quad et \quad \varphi(0),$$

la solution $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t} = 0$, *donc* $ker(\lambda I - A) = \{0\}$, *ça signifie que* $\lambda I - A$ *est injective, donc* $\lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to L^2([0,1])$ *est inversible, avec*

$$R(\lambda, A) : L^2([0,1]) \to \mathcal{D}(A),\ R(\lambda, A)f = -\int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt,$$

On a

$$\begin{aligned} |R(\lambda, A)f| &\leq \int_0^x \left|e^{\lambda(x-t)}\right| |f(t)|\,dt \leq \sqrt{\int_0^x \left|e^{\lambda(x-t)}\right|^2 dt}\sqrt{\int_0^x |f(t)|^2\,dt} \\ &\leq \sqrt{\int_0^x e^{2Re\lambda(x-t)}dt}\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt} \\ &= e^{2Re\lambda(x)}\sqrt{\int_0^x e^{-2Re\lambda t}dt}\,\|f\| \leq c\,\|f\|, \end{aligned}$$

donc $R(\lambda, A)$ *est borné pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *d'où* $\rho(A) = \mathbb{C}$.

4) *Soit* $g \in \mathcal{D}(A^*)$, *alors l'application* $L : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}$, $Lf = \langle Af, g\rangle$ *admet un prolongement continue,*

$$Lf = \langle Af, g\rangle = \langle Af, g\rangle = \int_0^1 Af(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx,$$

La première condition, $g \in H^1([0,1])$, on a

$$\begin{aligned} Lf &= \int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx = f(x)g(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx \\ &= f(1)g(1) - \int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx, \end{aligned}$$

La deuxième condition $g(1) = 0$, donc

$$Lf = -\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx = \left\langle f, -g' \right\rangle,$$

d'aprés le théorème de Riez, L admet un prolongement continue, donc

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ f \in H^1([0,1]) : f(1) = 0 \right\} \quad et \quad A^* f = -f'.$$

Solution 20.

1) *Posons la suite de fonctions $(f_n)_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tel que $f_n(x,y) = \sin(nx + ny)$.*
Il est clair que,

$$f_n \in \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2) \quad et \quad \|f_n\|_\infty = 1, \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

Cependant,

$$A_1 f_n(x,y) = n\cos(nx + ny) = A_2 f_n(x,y),$$

alors

$$\|A_1 f_n\|_\infty = \|A_2 f_n\|_\infty = n \to \infty,\ lorsque\ n \to \infty$$

donc, les opérateurs A_1 et A_2 ne sont pas bornés.

Montrons que A_1 et A_2 sont fermés. En effet, soit$(f_n)_n$ une suite d'éléments de $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$, vérifiant :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x} - g \right\|_\infty = 0$$

Comme dans le cas d'une seule variable, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et $g = \frac{\partial f}{\partial x}$, donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty = 0$$

Par ailleurs, $(f_n)_n$ et $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)_n$ bornées et continues sur $\mathbb{R}^2$ implique que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont aussi bornées et continues sur $\mathbb{R}^2$. Cela signifie que $f \in \mathcal{D}(A_1)$ et de plus,

$$g = \frac{\partial f}{\partial x} = A_1(f).$$

L'opérateur A_1 est donc fermé. De la même manière, on montre que l'opérateur A_2 est aussi fermé.

2) *Si* $f \in \mathcal{D}(A_1 + A_2)$, *ça signifie* $f \in \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$, *donc* $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *sont existe, avec* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$.
Puisque les dérivées partielles et sont continues, la fonction f *est de classe* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
D'autre part, les trois fonctions f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont bornées, alors*

$$\mathcal{D}(A_1 + A_2) = \mathcal{C}_b^1\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right) : \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \in E^3 \right\}.$$

3) *Les fonctions* $(\varphi_n)_n$ *sont dans* $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ *par hypothèse, la fonction :* $(x, y) \longmapsto x - y$ *est de classe* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
Par conséquent, toutes les fonctions $(f_n)_n$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
Comme la fonction $(\varphi_n)_n$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^2$, *les fonctions* $(f_n)_n$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^2$.
D'autre part,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, y) = \varphi_n'(x - y) \quad et \quad \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, y) = -\varphi_n'(x - y)$$

Commme les dérivées ordinaires $(\varphi_n')_n$ *sont bornées sur* $\mathbb{R}$, *alors les dérivées partielles* $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ *sont bornées sur* $\mathbb{R}^2$, *donc la suite* $(f_n)_n \in \mathcal{D}(A_1 + A_2) = \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^2)$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et tou*$(x, y) \in \mathbb{R}$, *pna*

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2) f_n(x, y) &= \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, y) \\ &= \varphi_n'(x - y) - \varphi_n'(x - y) = 0.\end{aligned}$$

4) *Comme dans la question précédente, la fonction :* $(x, y) \longmapsto x - y$ *est de classe* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ *et la fonction* φ *est continue, bornée sur* $\mathbb{R}$. *Donc, la fonction* f *est continue et bornée sur* $\mathbb{R}^2$ *c'est à dire,* $f \in E = \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^2)$. *Par ailleurs,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathbb{R}} |f_n(x, y) - f(x, y)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x, y) - \varphi(x, y)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| = 0.\end{aligned}$$

Comme $\varphi \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, *alors* $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, *donx* $f \notin \mathcal{D}(A_1 + A_2)$.

Bibliographie

[1] R. Godement, Analyse mathématique IV. Intégration et théorie spectrale, Analyse harmonique. Springer, 2008.

[2] H. Quéffélec, J. Charles, M.Mbekhta, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Dunod. 2010.

[3] N. Bourbaki, Théorie spectrale, Hermann, 1967.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1983.

[5] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1995.

[6] J. Dixmier, Topologie générale, PUF, 1981.

[7] J. Dugundji, Topology, Wm. C. Brown, 1989.

[8] D. Li, Cours analyse fonctionnelle, Ellipses, 2013.

[9] G. Lacombe, Pascal Massat, Analyse fonctionnelle, Dunod, 1999.

[10] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateur, Dunod, 2010.

[11] S. Gonnord, N. Tosel, Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, 1996.

Index