

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités et Statistique Appliquées

Thème

**Modélisation des files d'Attente avec Application au Trafic
Routier (M/M/1)**

Présenté Par :

Mme. Abid Bakhta.

Devant le jury composé de :

Mr. Hariri Mohammed	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mme. Sakhi Hanane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Mme. Balaska Lamia	MAA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2023/2024

دعاء

إذا مررت من هنا رشوا رذاذًا باردًا من دعواتكم لحالي وعمي تسعدهما في القبر اللهم فردوسا
ونعيمًا غير مقطوع اللهم ارحمهما برحمتك التي وسعت كل شيء اللهم اجعل ثواب
كل من يقرأ هذه المذكرة في ميزان حسناتي وحسنات والديا امي انت من سهرتي
على تربيتي وراحتي في صغري وكم نلت من معاناة تجاهي ولولاك بعد الله ما
صرت وما تعلمت اللهم اغفر لي ولوالدي وجميع اموات المسلمين جميعا.

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord mon encadrante Mme Bendimered, qui a bien voulu accepter de suivre mon travail, de me guider afin que je puisse mener ce projet à terme.

Je réserve des remerciements particuliers à mon père qui a toujours été présent pour me soutenir dans l'avancement de ce projet.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude aux membres de jury qui ont bien voulu accepter d'examiner mon travail.

Mes souhaits les plus chers seront de remercier vivement la famille Abid , toutes les personnes de près et de loin qui ont participé à la réalisation de mon projet.

Dédicace

A mes très chers parents ma mère ma mère ma mère, mon père qui m'ont soutenue et encouragée durant toutes les années d'étude.

A Mme Bendimerad, de m'avoir fait confiance, de sa Patience.

A mes sœurs, mes frères Abdaldjebar et Miloud .

A mon mari Ahmed celui qui m'a aidé pendant la réalisation de ce travail.

A mes enseignants du département de mathématiques et informatique.

A toute ma famille et mes collègues que je ne peux tous citer et avec que je partage de nobles sentiments.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Processus Stochastiques	3
1.1.1 Processus stationnaires	4
1.1.2 Processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS)	4
1.2 Chaînes de Markov	5
1.2.1 Chaînes de Markov à temps discret	5
1.2.2 Classification des états	8
1.2.3 Chaînes de Markov à temps continu	9
1.3 Processus de Poisson	11
1.3.1 Définitions et description du processus	11
1.3.2 Processus de poisson et loi exponentielle	12
1.4 Processus de naissance et de mort	14
1.4.1 Généralités	14
1.4.2 Régime transitoire	14
1.4.3 Régime permanent	15
2 Systèmes de Files d'Attente	17
2.1 Position du problème	17
2.2 Le formalisme des files d'attente	18
2.3 Classification des systèmes d'attente	19
2.4 Système de files d'attente $M/M/1$	20
2.4.1 Description du modèle	20
2.4.2 Analyse mathématique du modèle	21

2.4.3	Régime transitoire	22
2.4.4	Régime stationnaire	25
2.5	Caractéristiques du système $M/M/1$ (Mesures de performance)	26
2.5.1	Définitions, formules de Little	26
2.5.2	Calcul des caractéristiques	27
2.6	Description d'autres systèmes de files d'attente	29
2.6.1	La file $M/M/C$	29
2.6.2	La file $M/M/\infty$	32
3	Application du modèle $M/M/1$ au flux de véhicules	34
3.1	Analyse du flux de véhicules à un péage selon le modèle $M/M/1$	34
3.1.1	Position du problème	34
3.1.2	Détermination des lois	35
3.1.3	Analyse du Modèle	36
3.1.4	Simulation	37
3.2	Étude de la situation routière de Daniel Flipo	42
3.2.1	Introduction et description du modèle	42
3.2.2	Cycle des feux, engorgement, contraintes	43
3.2.3	La question de l'estimation des paramètres	44
3.2.4	Simulation	46
3.2.5	Amélioration du système	49
3.3	Conclusion	51
	Conclusion	52
	Annexe	53
	Théorèmes et Définitions	53

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'expérience de l'attente imprègne notre vie quotidienne, que ce soit lorsqu'on attend en ligne à la caisse d'un supermarché, en patientant pour être servi dans une administration, ou en faisant face aux embouteillages. Bien que souvent perçue comme une contrainte, cette notion d'attente peut être explorée et examinée de façon mathématique grâce aux modèles de files d'attente.

La théorie des files d'attente, relevant du domaine des probabilités en mathématiques, offre un cadre analytique pour mener des études quantitatives à partir des caractéristiques des flux d'arrivées et des temps de service. Les files d'attente $M/M/1$ et $M/M/s$ peuvent être représentées comme des processus de sauts markoviens.

Au cours de ce mémoire, nous entreprendrons une étude théorique d'un type spécifique de file d'attente adapté à la situation qui nous intéresse : le modèle $M/M/1$. Ensuite, nous procéderons à son application en programmant des simulations à l'aide du langage R .

Le modèle $M/M/1$, un des modèles les plus utilisés dans le domaine de la théorie des files d'attente, fournit une approche analytique pour comprendre le flux des clients et la durée du service dans un système donné. En se focalisant sur une seule station de service, ce modèle permet d'évaluer les performances du système et d'identifier des pistes d'amélioration.

L'application du modèle $M/M/1$ à la circulation routière offre des perspectives prometteuses pour optimiser la gestion du trafic. En effet, en analysant la circulation des véhicules sur les routes, et en tenant en compte les feux de signalisation, la densité du trafic et d'autres paramètres, il devient possible de réduire les temps d'attente, d'atténuer les congestions et d'améliorer la fluidité du trafic.

TABLE DES MATIÈRES

Ce mémoire est structuré en trois chapitres. Le premier chapitre propose une révision des concepts fondamentaux sur les processus stochastiques et les chaînes de Markov.

Dans le deuxième chapitre, nous examinons en détail les systèmes de files d'attente, en présentant notamment le modèle M/M/1 et son analyse.

Le troisième chapitre se concentre spécifiquement sur la modélisation et l'application du modèle M/M/1 au trafic routier, avec une attention particulière portée à l'estimation paramétrique. Nous avons effectué des simulations en utilisant le langage de programmation R, afin d'illustrer l'aspect théorique de ce mémoire

Enfin, un annexe contenant quelques notions de base de la probabilité et une liste des principales notations sont inclus à la fin du mémoire. Nous espérons que ce travail sera bénéfique pour tous les étudiants intéressés par les domaines de la probabilité et de la statistique.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons la notion de processus stochastiques, en nous concentrant sur les processus de Markov en temps discret, définis dans un espace d'états fini ou dénombrable E . Ensuite, nous explorerons les processus de Markov en temps continu, en nous penchant notamment sur les processus de Poisson ainsi que les processus de naissance et de mort, que nous introduirons et étudierons.

Les notions présentées dans ce chapitre sont tirées des références [1] et [5].

1.1 Processus Stochastiques

Définition 1.1.1. Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $T \subset \mathbb{R}_+$ un espace de temps (ou de paramètres) et $E \subset \mathbb{R}$ un espace des états. Un processus stochastique est une application mesurable

$$\begin{aligned} X : \Omega \times T &\rightarrow \mathbb{E} \\ (\omega, t) &\rightarrow X(t, \omega) = X_t(\omega) \end{aligned}$$

où à t_0 fixé, $\omega \rightarrow X_{t_0}(\omega)$ est une variable aléatoire, et à ω_0 fixé, $t \rightarrow X(t, \omega_0)$ est une application mesurable (trajectoire).

1.1.1 Processus stationnaires

Définition 1.1.2. *Processus Stationnaire fort*

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit *fortement stationnaire* (stationnaire au sens strict), si les lois fini-dimensionnelles sont invariantes par translation c'est-à-dire

$$\forall h > 0, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}^*$$

le vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ a la même loi que le vecteur $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$. En particulier X_t et X_{t+h} , ont la même loi pour tout $t, h \in T$.

Définition 1.1.3. *Processus Stationnaire faible*

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit *faiblement stationnaire* (stationnaire au sens large) si pour tout $t, s \in T$

- i. $\mathbb{E}(X_t) := m_t = m < +\infty$,
- ii. $\mathbb{E}(X_t^2) := \delta_t^2 = \delta^2 < +\infty$,
- iii. $\text{Cov}(X_t, X_s) := \mathbb{E}((X_t - m)(X_s - m)) = \Gamma(t, s) = \Gamma(t - s)$.
avec, Γ : fonction de covariance d'un processus.

1.1.2 Processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS)

Définition 1.1.4. *Processus à accroissements indépendants (PAI)*

Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit (PAI) si $\forall t_0, t_1, \dots, t_n \in T, \forall n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_{t_0}$$

sont indépendantes.

Définition 1.1.5. *Processus à accroissements stationnaires (PAS)*

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit (PAS) si $\forall t, s \in T$, la loi de l'accroissement $X_t - X_s$ ne dépend que de $t - s$, c'est-à-dire $X_t - X_s$ est de même loi que X_{t-s} .

Définition 1.1.6. *Processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS)*

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$, est dit un (PAIS) s'il est un (PAI) et est un (PAS).

1.2 Chaînes de Markov

Le processus de Markov fournit un outil simple de modélisation d'une classe particulière de systèmes à espace d'états discret. L'analyse des processus de Markov est un préliminaire nécessaire à l'étude des systèmes de files d'attente.

1.2.1 Chaînes de Markov à temps discret

Soit E un ensemble dénombrable (l'espace des états)

Définition 1.2.1. *Le processus stochastique $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E est appelé chaîne de Markov si pour tout $j, i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ et pour tout entier positif n ,*

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j / X_n = i),$$

sous réserve que $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)$ est non nulle.

Cette propriété est connue sous le nom "Propriété de Markov" (propriété de sans mémoire).

Définition 1.2.2. *La probabilité $p_{ij} = P(X_{n+1} = j / X_n = i)$ pour tout $(i, j) \in E$ est appelée probabilité de transition de l'état i vers l'état j en une étape. La probabilité de transition en n étapes est définie par la probabilité de passage d'état à un autre en n étapes. Soit*

$$P_{ij}^n = P(X_{n+k} = j / X_k = i) = P(X_n = j / X_0 = i) \quad n \geq 1, k \geq 1.$$

On s'intéresse aux chaînes de Markov homogènes c'est-à-dire pour les quelles les probabilités P_{ij}^n sont indépendantes du temps n et seront notées P_{ij} .

Définition 1.2.3. Matrice de transition

La matrice de transition P de la chaîne discrète $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une matrice carrée, constituée par les probabilités de transition p_{ij} et vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall i, j \in E, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1.$$

Exemple 1.2.4. *Considérons une chaîne de Markov à deux états avec une matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.2.5. *On considère une chaîne de Markov sur l'espace des états E de matrice de transition P . On a :*

$$P_{ij}^n = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n-1)} p_{kj}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P_{ij}^n &= P(X_n = j / X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k / X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \frac{P(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_{k \in E} \frac{P(X_n = j / X_{n-1} = k, X_0 = i) P(X_{n-1} = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_{k \in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k / X_0 = i) P(X_{n-1} = k / X_0 = i), \end{aligned}$$

puisque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, on obtient :

$$P_{ij}^n = \sum_{k \in E} P_{ik}^{n-1} p_{kj}.$$

Sous forme matricielle, on écrit $P^n = P^{n-1}P$.

De manière générale on a,

$$\begin{aligned} P_{ij}^{m+n} &= \sum_{k \in E} P_{ik}^m P_{kj}^n \quad i, j \in E, m \geq 1, n \geq 1, \\ &\text{et} \\ P^{m+n} &= P^m P^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Le système d'équations (1.1) est connu sous le nom d'équation de "Chapman

Kolmogorov" □

Définition 1.2.6. : Loi de probabilité

Les probabilités d'état E d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E sont notées $\pi_k(n)$, tel que :

$$\forall k \in E \text{ et } n \in \mathbb{N} \quad , \pi_k(n) = P(X_n = k).$$

La distribution de (X_n) est un vecteur ligne $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots)$ dont la somme des termes est égale à 1.

Proposition 1.2.7. La loi de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est caractérisée par sa matrice de transition P , et de sa loi initiale (loi de X_0) : pour tout $n \geq 1$ la loi jointe de (X_0, X_1, \dots, X_n) est donnée par :

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Remarque 1.2.8. D'après le théorème des probabilités totales, (Voir Annexe, Théorème .1), on a :

$$\pi_k(n) = \sum_{i \in E} \pi_i(0) P_{ik}^n \quad \text{sous forme matricielle } \pi(n) = \pi(0) P^n,$$

avec $P^n = (P_{ik}^n)_{(i,k) \in E^2}$.

De façon analogue, on obtient

$$\pi(n+1) = \pi(n) P.$$

Définition 1.2.9. Distribution stationnaire

Une famille $\vec{\pi} = (\pi_i)_{i \in E}$ est dite distribution stationnaire d'une chaîne, de matrice de transition P , si c'est une probabilité qui vérifie :

$$\vec{\pi} = \vec{\pi} P.$$

Exemple 1.2.10. *Considérons une chaîne de Markov avec une matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Déterminons $\vec{\pi} = (\pi_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ sa distribution stationnaire.

On a

$$\begin{aligned} (\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot P) &\implies (\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} \pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 \\ \pi_2 = 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 \\ \text{avec } \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\left(\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.4(1 - \pi_1) \right) \implies \pi_1 = \frac{4}{7}$$

Conclusion

$$\vec{\pi} = \left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

1.2.2 Classification des états

Définition 1.2.11. *Soit i et j deux états. On dit que i mène à j s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_{ij}^n > 0$. On dit que i et j communiquent si i mène à j et j mène à i .*

Remarque 1.2.12. *Pour $n \geq 1$, $P_{ij}^n = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}$ donc, si $P_{ij}^n > 0$, il existe i_1, \dots, i_{n-1} tels que $p_{ii_1} > 0, p_{i_1 i_2} > 0, \dots, p_{i_{n-1} j} > 0$, c'est-à-dire que l'on peut trouver sur le graphe un "chemin" de i à j si $i \neq j$ (il peut même y en avoir plusieurs!). Attention toute fois, $P_{ii}^0 = 1$, donc i mène toujours à i même s'il n'y a pas de chemin de i vers lui-même.*

La relation de communication est une relation d'équivalence; une chaîne à une seule classe est dite irréductible.

$$\text{On pose } T_i = \begin{cases} \min \{n \geq 1; X_n = i\}, & \text{s'il existe } m \geq 1 \text{ tel que } X_m = i \\ +\infty, & \text{si } X_m \neq i \text{ pour tout } m \geq 1 \end{cases}.$$

Définition 1.2.13. Un état i est dit récurrent si $P[(T_i < +\infty) \setminus (X_0 = i)] = 1$, c'est-à-dire, si partant de i , on repasse presque sûrement en i . Dans le cas contraire, i est dit transitoire.

Théorème 1.2.14. (critère de récurrence)

1) Un état j est récurrent si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} P_{jj}^n = +\infty$.

On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} P_{ij}^n = +\infty$ pour tout i qui mène à j .

2) Un état j est transitoire si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} P_{jj}^n < +\infty$.

On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} P_{ij}^n < +\infty$ pour tout $i \in E$.

Propriété 1.2.15. Les états d'une même classe de communication sont, soit tous récurrents, soit tous transitoires.

1.2.3 Chaînes de Markov à temps continu

Définition 1.2.16. Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu si : pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$, et pour tout $j, i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$P(X_t = j / X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = P(X_t = j / X_{t_n} = i_n).$$

De plus une chaîne de Markov à temps continu est homogène si pour tout $t \in \mathbb{R}^+, i, j \in E$

$$P(X_{t+s} = j / X_s = i) = P(X_t = j / X_0 = i) = p_{ij}(t).$$

Définition 1.2.17. Matrice de transition

La matrice de transition $P(t)$ dont le terme générale $p_{ij}(t) = P(X_t = j / X_0 = i)$ est une matrice stochastique qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall i, j \in E \quad p_{ij}(t) &\geq 0, \\ \text{et } \forall i \in E \quad \sum_{j \in E} p_{ij}(t) &= 1. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.18. *Les probabilités de transition d'une chaîne de Markov à temps continu satisfont les équations suivantes dites de Chapman-Kolmogorov*

Pour tout i et j dans E et pour tout réels positifs s et t on a :

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$$

Proposition 1.2.19. *Nous associons à la chaîne de Markov à temps continue (CMTC) la matrice Q , dite générateur infinitésimal définie par*

$$\begin{aligned} \forall i \neq j, \quad q_{ij} &= \mu_{ij} = \mu_i P_{ij} \\ \forall i, \quad q_{ij} &= - \sum_{j \neq i} \mu_{ij} = - \sum_{j \neq i} \mu_i P_{ij} = -\mu_i. \end{aligned}$$

Ainsi

$$Q = \begin{pmatrix} - \sum_{j \neq 1} \mu_{1j} & \mu_{12} & \mu_{13} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{22} & - \sum_{j \neq 2} \mu_{2j} & \mu_{23} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \mu_{n3} & \cdots & - \sum_{j \neq n} \mu_{nj} \end{pmatrix}$$

avec $\sum_j q_{ij} = 0$.

Proposition 1.2.20. *Pour tout élément $i \in E$, le temps passé dans i avant de le quitter suit la loi exponentielle de paramètre μ_i .*

Corollaire 1.2.21. *La matrice de transition $P(t)$ d'une CMTC admet la représentation suivante*

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n.$$

Q Générateur infinitésimal associé à CMTC.

1.3 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est significatif parmi les processus stochastiques à temps continu, étant souvent employé pour décrire la survenance temporelle d'événements aléatoires d'un même type.

1.3.1 Définitions et description du processus

La description mathématique d'un flux d'événements aléatoires peut être réalisée de différentes manières.

Définition 1.3.1. (Processus de Comptage)

Un processus stochastique $(N_t)_{t \in T}$ est dit processus de comptage ou processus de dénombrement si $(N_t)_{t \in T}$ représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[0, t]$ vérifiant :

- i) $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, (T = \mathbb{R}^+)$,
- ii) $\forall t > s \in T, N(t) \geq N(s)$,
- iii) $N(t) - N(s)$, représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[s, t], \forall s < t \in T$

Définition 1.3.2. (Processus de Poisson)

On dit qu'un processus de Comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson s'il satisfait aux trois conditions suivantes :

- c_1 ► *Le processus est homogène dans le temps : La probabilité d'avoir k événements dans un intervalle de longueur donné ne dépend que de t et non pas de la position de l'intervalle par rapport à l'axe temporel,*

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = P(N(s+t) - N(s) = k) \quad \text{pour tout } s > 0, t > 0.$$

- c_2 ► *Le processus $N(t)$ est à accroissements indépendants :*

$$\begin{aligned} P(N(s+t) - N(s) = k, N(s) = j) &= P(N(s+t) - N(s) = k)P(N(s) = j) \\ &= p_k(t)p_j(s) \end{aligned}$$

pour tout $s > 0, t > 0$.

c_3 ► La probabilité $p_k(\Delta t)$ est définie comme suit :

$$p_k(\Delta t) = \begin{cases} 1 - (\lambda(\Delta t) + o(\Delta t)) & \text{si } k = 0 \\ \lambda(\Delta t) + o(\Delta t) & \text{si } k = 1, \\ o(\Delta t) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Avec $\lambda = \mathbb{E} [N_{t+1} - N_t]$ et Δt un petit intervalle.

Remarque 1.3.3. Le paramètre λ est appelé l'intensité du processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$, il est égal au nombre moyen d'événements qui se produisent pendant un intervalle de temps de longueur unité.

Proposition 1.3.4. Soit $N(t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tous $0 \leq s < t$, la loi de $N_t - N_s$ est de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$, i.e.

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1.3.2 Processus de poisson et loi exponentielle

Nous allons caractériser un processus de Poisson par ses temps d'arrivée. Soit A_n l'instant de la $n^{\text{ième}}$ arrivée : $A_n = \inf \{t \geq 0; N_t = n\}$ et T_n le $n^{\text{ième}}$ temps d'attente pour $n \in \mathbb{N}^*$: $T_n = A_n - A_{n-1}$ (en convenant $A_0 = 0$). On a $A_n = \sum_{i=1}^n T_i$ et $N_t = \max \{n \geq 0; A_n \leq t\}$.

Théorème 1.3.5. $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson de paramètre λ si et seulement si les variables aléatoires T_n sont indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de densité

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{]0, +\infty[}(t)$$

Preuve.

$$P([T_1 > t]) = P([N_t = 0]) = e^{-\lambda t} = 1 - F_1(t)$$

où F_1 est la fonction de répartition de T_1 . On a donc bien T_1 qui suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P([T_2 > t] \setminus [T_1 = t_1]) &= P([N_{t_1+t} = 1] / [N_{t_1} = 1] \cap [N_s = 0 \text{ pour tout } s < t_1]) \\ &= P([N_{t_1+t} - N_{t_1} = 0] / [N_{t_1} = 1] \cap [N_s = 0 \text{ pour tout } s < t_1]) \\ &= P([N_{t_1+t} - N_{t_1} = 0]) \end{aligned}$$

car les accroissements sont indépendants.

Or $P([N_{t_1+t} - N_{t_1} = 0]) = P([N_{t_1+t-t_1} = 0]) = P([N_t = 0])$ d'après la stationnarité, avec N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Donc $P([N_{t_1+t} - N_{t_1} = 0]) = e^{-\lambda t}$

Et par suite T_2 est bien indépendante de T_1 et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

De façon plus générale,

$$\begin{aligned} P([T_k > t] / [T_1 = t_1] \cap \dots \cap [T_{k-1} = t_{k-1}]) &= P([N_{t_{k-1}+t} - N_{t_{k-1}} = 0]) \\ &= P([N_t = 0]) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Donc T_k est indépendante de T_1, \dots, T_{k-1} et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

La réciproque sera admise. □

Graphe des transitions

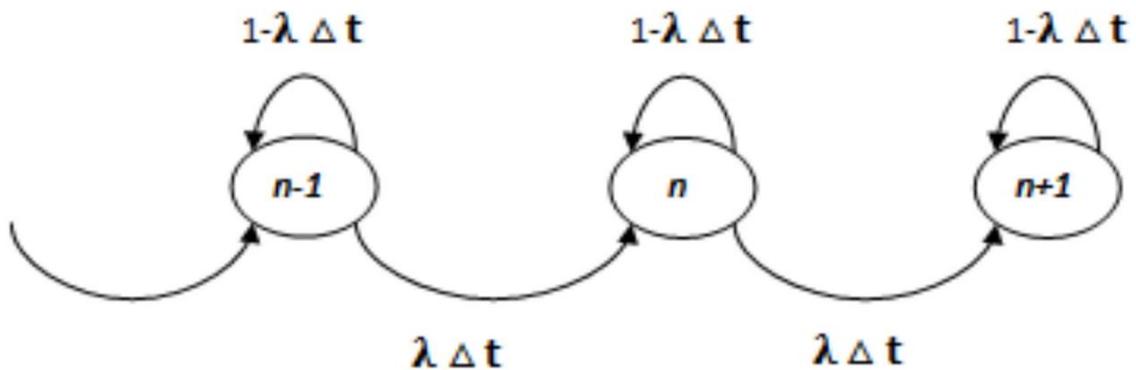


FIGURE 1.1 – Graphe des transitions du processus de Poisson

Dans le cas des processus à temps continu, en particulier le processus de Poisson. On remplace l'unité temporelle par un petit intervalle Δt et l'on indique sur chaque arc la probabilité de transition correspondante (Figure 1.1) pour ne pas la surcharger, on supprime le terme $+o(\Delta t)$ qui figure dans toute probabilité de transition.

1.4 Processus de naissance et de mort

1.4.1 Généralités

Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discrets $n = 0, 1, 2, \dots$. Ils sont sans mémoire, et à partir d'un état donné n , seules les transitions vers l'un des états voisins $(n + 1)$ et $(n - 1)$ avec $n \geq 1$ sont possibles. On parle alors de «naissances» et de «morts». Ces processus sont utilisés pour modéliser les systèmes d'attente et l'évolution de populations.

Définition 1.4.1. Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus stochastique à états discrets $n \in \mathbb{N}$, et homogène dans le temps, c'est à dire :

$$P(X(t + s) = j / X(s) = i) = p_{ij}(t), \quad (\text{ne dépend pas de } s).$$

Le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort s'il satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(\Delta t) = & \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 0) \\ p_{i,i-1}(\Delta t) = & \mu_i \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 1) \\ p_{i,i}(\Delta t) = & 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t) & (i \geq 0) \\ p_{i,j}(\Delta t) = & o(\Delta t) & |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Les coefficients positifs λ_i et μ_i sont appelés taux de transition, plus particulièrement taux de naissance (ou de croissance) pour λ_i et taux de mort (ou de décroissance) pour μ_i .

1.4.2 Régime transitoire

Le régime transitoire d'une chaîne de Markov est la période pendant laquelle les probabilités de se trouver dans différents états évoluent encore avec le temps et n'ont pas encore atteint les valeurs stables du régime permanent. Plus précisément, il s'agit de l'intervalle de temps t pendant lequel les probabilités $p_j(t)$ de se trouver dans l'état j au temps t dépendent encore de la distribution initiale et varient avec t .

Proposition 1.4.2. Les équations régissant le système dites de Chapman-

kolmogorov associées au processus $(X_t)_{t \geq 0}$ sont définies par le système suivant :

$$(S) \begin{cases} p'_0(t) = \mu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_0(t), & n = 0, \\ p'_n(t) = \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), & n \geq 1, \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1; p_n(0) = P[X_0 = n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 1.4.3. Pour trouver le système (S), on utilise le théorème des probabilités totales énoncé en Annexe.

Comme il s'agit d'un système d'équations différentielles et de récurrence, sa résolution analytique se fait avec les fonctions orthogonales de Bassel (c'est le cas transitoire ou non stationnaire).

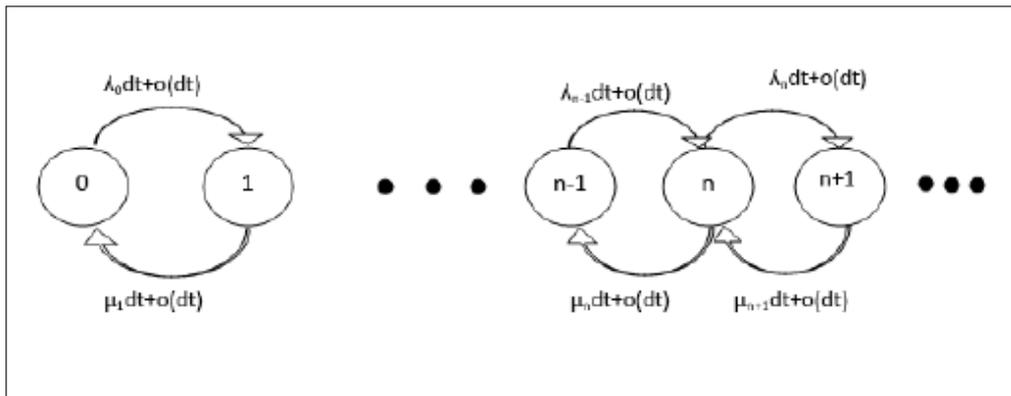


FIGURE 1.2 – Graphe de transition associé au PNM

1.4.3 Régime permanent

Le régime permanent d'une chaîne de Markov est atteint lorsque les probabilités de transition entre les états stabilisent à des valeurs fixes, indépendamment de la distribution initiale des états, c'est à dire, lorsque $t \rightarrow +\infty$ les limites $p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$ existent et sont indépendantes de l'état initial du processus, on a alors $\lim_{t \rightarrow \infty} p'_n(t) = 0$, (p_n est une distribution stationnaire du processus si le régime permanent existe). Ceci se traduit par les équations dites de balances.

Le système d'équations précédent (S) devient :

$$(S') \begin{cases} \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = 0, & n = 0, \\ \mu_{n+1} p_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1} = 0, & n \geq 0, \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1. \end{cases}$$

Résolution de (S') :

$$n = 0, \quad p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0,$$

$$n = 1, \quad (\mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1 = \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0), \quad \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

$$n = 2, \quad (\mu_3 p_3 - \lambda_2 p_2 = \mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1), \quad \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \right).$$

$$\text{Par récurrence} \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_2 \mu_1} p_0.$$

Et par suite, on peut écrire :

$$p_n = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0 = a_n p_0, \quad \forall n \geq 1, \quad \text{avec} \quad a_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}.$$

La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est une loi de probabilité, donc

$$\sum_{n \geq 0} p_n = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n}.$$

Conclusion : Si $\sum_{n \geq 1} a_n < +\infty$, alors $p_n = \frac{a_n}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n}, n \geq 1$ et $p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n}$,

avec

$$a_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_2 \mu_1}.$$

Chapitre 2

Systemes de Files d'Attente

2.1 Position du problème

Les files d'attente sont aujourd'hui des phénomènes que l'on rencontre quotidiennement dans de très nombreux domaines et sous diverses formes. Citons quelques exemples parmi tant d'autres : queue à un guichet, saturation d'un trafic routier, d'un réseau de télécommunications, gestion d'un stock de production, maintenance d'un équipement informatique, mouvements de populations, prévisions météorologiques, etc. De nombreux modèles stochastiques existent, reposant sur certaines hypothèses adaptées au contexte en question. Le modèle le plus célèbre que nous allons étudier ci-après, le plus simple et le plus utilisé de manière générale est un modèle markovien (file $M/M/1$) qui repose sur l'absence de mémoire de certaines occurrences.

De nombreuses questions se posent pour optimiser la rentabilité des services, réduire les temps d'attente et les coûts. Par exemple, on cherche à savoir combien de temps un client passe dans une file d'attente, la longueur de la queue à un moment donné, la durée de repos d'un serveur, la vitesse minimale de service pour éviter la surcharge, et le nombre de serveurs nécessaires pour éviter la saturation. La théorie des chaînes de Markov et des processus stochastiques fournit des réponses à ces questions, avec des degrés de précision variables selon le modèle utilisé.

2.2 Le formalisme des files d'attente

La théorie des files d'attente s'attache à modéliser et à analyser de nombreuses situations différentes en apparences. Des clients arrivent à intervalles aléatoires dans un système comportant plusieurs serveurs auxquels ils vont adresser une requête. La durée du service auprès de chaque serveur est elle-même aléatoire. Après avoir été servis, les clients quittent le système.

Définition 2.2.1. *On appelle système de files d'attente l'abstraction mathématique d'un sujet qu'on peut décrire par les éléments suivants :*

- 1) *Le flot des arrivées des clients ;*
- 2) *La source des clients ;*
- 3) *Le comportement du client ;*
- 4) *La loi de la durée de service de chaque client ;*
- 5) *La discipline de service ;*
- 6) *Le nombre de serveurs ;*
- 7) *La capacité de la file.*

- **Le flot des arrivées des clients**

Souvent, on suppose que les temps des inter-arrivées sont indépendants et identiquement distribués, de même le flot des arrivées des clients est souvent supposé Poissonnien, ce qui revient à dire que la distribution du temps des inter-arrivées est exponentiel, ce qui n'est pas toujours vrai bien sûr. Les clients peuvent arriver individuellement ou par groupes.

- **La source des clients** *Dans la plupart des cas, cette source est supposée infinie. Cependant, pour les modèles de fiabilité, la source des clients est limitée (par exemple le cas d'un réparateur au sein d'une usine).*

- **Le comportement du client**

Certains clients peuvent être patients et vouloir attendre pendant longtemps. Par contre d'autres s'impatientent et quittent après un bout de temps. C'est le cas par exemple d'une centrale téléphonique où les clients raccrochent quand ils ont à attendre longtemps avant qu'une ligne ne soit disponible pour rappeler ultérieurement.

- **La durée de service**

En général, on suppose que les durées de service sont indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes des temps des inter-arrivées. Ce qui n'est toujours pas le cas. Par exemple, le temps de traitement des

machines au niveau d'un système de production peut s'élever une fois le nombre de tâches à exécuter devient trop grand.

- **La discipline de service**

Les clients peuvent être servis individuellement ou par groupe. Cependant, plusieurs possibilités existent quant à l'ordre selon lequel ils seront servis. Les principales disciplines de service sont :

- * *FIFO (First In First Out) : les entités sortent dans l'ordre suivant lequel elles sont entrées. Cette discipline est la plus utilisée.*
- * *LIFO (Last In First Out) : la dernière entité dans la file est la première à être servie. C'est le cas de la pile au niveau des ordinateurs.*
- * *Random : toutes les entités ont la même probabilité d'être servies en premier.*

- **Le nombre de serveurs**

Il peut être égale à l'unité ou plus selon la nature du service à fournir.

- **La capacité de la file**

Dans pas mal de cas, la file est supposée infinie. Cependant, il n'est pas rare de rencontrer des situations dans lesquelles elle est finie.

2.3 Classification des systèmes d'attente

Pour la classification des systèmes d'attente, on a recours à la notation symbolique introduite par Kendall au début des années cinquante. Cette notation comprend quatre symboles rangés dans l'ordre $A/B/s/N$ où :

- **A** : la distribution des intervalles de temps séparant deux arrivées consécutives de clients dans le système,
- **B** : la distribution du temps aléatoire que met le client à recevoir le service (temps de service),
- **s** : le nombre de stations de service disponibles en même temps,
- **N** : la capacité totale du système (nombre maximum de clients pouvant être présents dans le système en même temps).

Le dernier symbole est supprimé si le système à une capacité infinie (aucun client ne sera jamais refusé).

Pour spécifier les distributions A et B , les symboles suivants sont utilisés :

M = processus Markovien,

E_k = distribution d'Erlang d'ordre k ,

H_k = distribution hyperexponentielle,

G = distribution générale,

D = cas déterministe.

On introduit également :

- λ le taux des arrivées (nombre moyen d'arrivées par unité de temps) ;
- $\frac{1}{\lambda}$ l'intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives ;
- μ le taux de service (nombre moyen de clients servis par unité de temps) ;
- $\frac{1}{\mu}$ durée moyenne du temps de service.

Dans la suite on s'intéresse aux systèmes $\mathbf{M}/\mathbf{M}/\mathbf{1}(/ \infty)$, où :

- $\mathbf{A} = \mathbf{M}$ signifie que la distribution des intervalles entre deux arrivées est exponentielle ;
- $\mathbf{B} = \mathbf{M}$ signifie que la distribution des temps de service est exponentielle ;
- $\mathbf{s} = \mathbf{1}$ signifie qu'un unique poste de service est disponible à la fois ;
- $\mathbf{N} = \infty$ signifie que la capacité du système est infinie (la file d'attente peut s'allonger autant qu'on veut).

2.4 Système de files d'attente $M/M/1$

2.4.1 Description du modèle

Les clients arrivent vers le système selon un processus de Poisson de taux λ (nombre moyen de clients arrivant pendant une unité de temps) ; c'est-à-dire l'intervalle de temps entre deux arrivées successives suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Le service est assuré par un seul serveur. A l'arrivée d'un client, si le serveur est libre, il est immédiatement pris en charge. Dans le cas contraire, le client en question est placé en attente. La capacité d'attente est illimitée (le nombre de positions est infini et aucune autre restriction n'est imposée). La discipline d'attente est FIFO (premier arrivé, premier servi). Les durées de service suivent une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Par conséquent, le taux de service est μ (nombre moyen de clients servis pendant une unité de temps), et le temps moyen de service d'un client est $\frac{1}{\mu}$. Les variables aléatoires représentant les durées entre deux arrivées consécutives et les durées de service sont mutuellement indépendantes.

On s'intéresse à l'évolution du nombre de clients $N(t)$ présents dans le système

à l'instant $t (t > 0)$. $N(t)$ est un processus stochastique, et en fonction des paramètres du système.

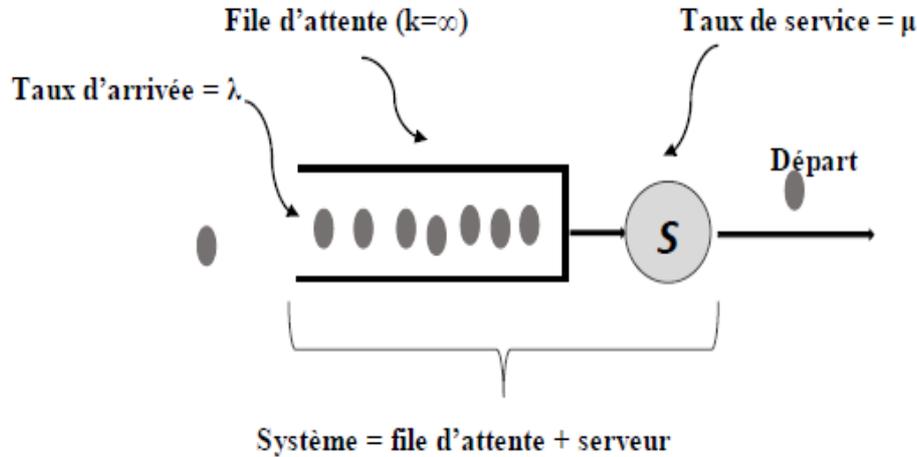


FIGURE 2.1 – Système d'attente $M/M/1$

2.4.2 Analyse mathématique du modèle

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait le plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. En général, on s'intéresse au nombre $N(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant $t (t \geq 0)$. En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on cherche à calculer :

- les probabilités d'état $p_n(t) = P(N(t) = n)$ qui définissent le régime transitoire du processus, les probabilités $p_n(t)$ doivent évidemment dépendre de l'état initial ou de la distribution initiale du processus. Dans le cas des systèmes $M/M/1$ les calculs font intervenir les fonctions de Bessel que nous ne connaissons pas. On ne calculera pas le régime transitoire
- le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$p_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = P(N(+\infty) = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A partir de la distribution stationnaire du processus $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, il est possible d'obtenir d'autres caractéristiques d'exploitation du système telles que :

- le nombre moyen L de clients dans le système,
- le nombre moyen L_q de clients dans la file d'attente,

- la durée d'attente moyenne W_q d'un client,
- la durée de séjour moyenne W dans le système (attente + service),
- le taux d'occupation des postes de service,
- le pourcentage de clients n'ayant pu être servis,
- la durée d'une période d'activité, c'est-à-dire de l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système.

2.4.3 Régime transitoire

Bien que le régime transitoire soit difficile à calculer, grâce aux propriétés du processus de Poisson et de la loi exponentielle on obtient des résultats nécessaires au calcul du régime stationnaire.

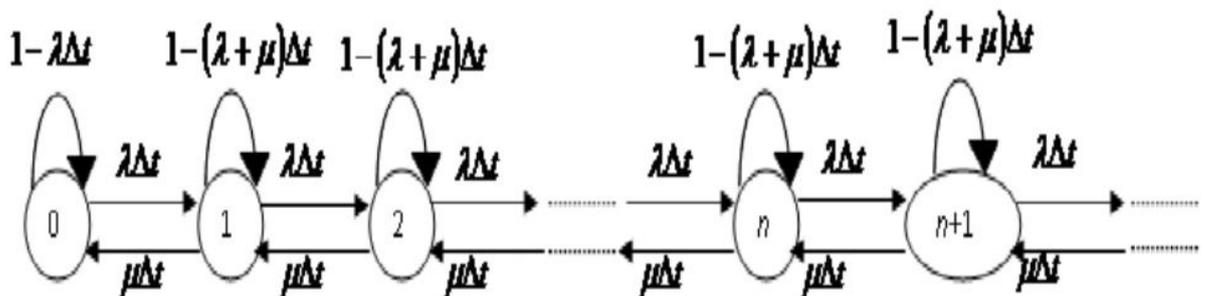


FIGURE 2.2 – Graphe de Transitions de la file $M/M/1$

On a pour un petit intervalle du temps Δt les probabilités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pr(\text{exactement une arrivée pendant } \Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ \Pr(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ \Pr(\text{deux arrivées ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t) \\ \Pr(\text{exactement un départ pendant } \Delta t / N(t) > 0) = \mu\Delta t + o(\Delta t) \\ \Pr(\text{aucun départ pendant } \Delta t / N(t) > 0) = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t) \\ \Pr(\text{deux départs ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t) \end{array} \right.$$

Soient $p_{ij}(\Delta t) = \Pr(N(t + \Delta t) = j / N(t) = i), i = 0, 1, 2, \dots$ Ces probabilités de transition ne dépendent pas de l'instant t , uniquement de Δt . On

suppose que les arrivées et les départs sont mutuellement indépendants. L'indépendance des arrivées implique que $N(t)$ est une chaîne de Markov homogène.

On exprime ces probabilités :

- $p_{n,n+1}(\Delta t) = Pr(\text{exactement une arrivée pendant } \Delta t) \times Pr(\text{aucun départ pendant } \Delta t \mid N(t) \geq 1)$

$$\begin{aligned} p_{n,n+1}(\Delta t) &= (\lambda\Delta t + o(\Delta t)) \times (1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) \\ &= (\lambda\Delta t) \times (1 - \mu\Delta t) + o(\Delta t) \\ &= \lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

- $p_{n,n}(\Delta t) = Pr(\text{exactement une arrivée pendant } \Delta t) \times Pr(\text{exactement un départ pendant } \Delta t \mid N(t) \geq 1) + Pr(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t) \times Pr(\text{aucun départ pendant } \Delta t \mid N(t) \geq 1)$

$$\begin{aligned} p_{n,n}(\Delta t) &= \lambda\Delta t \cdot \mu\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t) + o(\Delta t) \\ &= 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

- $p_{0,0}(\Delta t) = Pr(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t)$

$$p_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

- $p_{n+1,n}(\Delta t) = Pr(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t) \times Pr(\text{un départ pendant } \Delta t \mid N(t) \geq 1)$

$$\begin{aligned} p_{n+1,n}(\Delta t) &= (1 - \lambda\Delta t) \cdot \mu\Delta t + o(\Delta t) \\ &= \mu\Delta t + o(\Delta t) \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

- $p_{n,m}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad |m - n| \geq 2$

La dernière ligne signifie qu'à partir d'un état donné n , le processus ne peut donc que passer à l'un des états voisins $n + 1$ et $n - 1$ ou rester sur place.

Pour exprimer les probabilités d'état $p_n(t)$ on utilise la formule des proba-

bilités totales (voir Annexe théorème .1). On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 p_n(t + \Delta t) &= P[N_{t+\Delta t} = n/N_t = n] \times P[N_t = n] + P[N_{t+\Delta t} = n - 1/N_t = n] \times P[N_t = n - 1] \\
 &\quad + P[N_{t+\Delta t} = n + 1/N_t = n] \times P[N_t = n + 1] \\
 &= (1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t)) p_n(t) + (\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)) p_{n-1}(t) \\
 &\quad + (\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)) p_{n+1}(t) \\
 &= p_n(t) - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \Delta t + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) \Delta t + o(t)
 \end{aligned}$$

Et par suite :

$$\begin{cases} p_0(t + \Delta t) = \mu \Delta t p_1(t) + [1 - \lambda \Delta t] p_0(t) + o(\Delta t), \\ p_n(t + \Delta t) = \mu \Delta t p_{n+1}(t) + \lambda \Delta t p_{n-1}(t) + [1 - (\lambda + \mu) \Delta t] p_n(t) + o(\Delta t), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 p'_n(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{t+\Delta t} - p_n(t)}{\Delta t} \\
 &= -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad n \geq 1
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, on obtient donc :

$$p'_n(t) = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (2.1)$$

De même :

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \quad (2.2)$$

La résolution de ce système des équations différentielles fait intervenir les fonctions de Bessel qui dépassent notre travail.

2.4.4 Régime stationnaire

Lorsqu'on fait tendre t vers l'infini, on a les résultats (admis) suivants :

$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n, n \geq 0$, existent et sont indépendantes de l'état initial du processus, et $\lim_{t \rightarrow \infty} p'_n(t) = 0, n \geq 0$.

Et par suite, les équations (2.1) et (2.2) permettent d'obtenir le système d'équations de balance :

$$\begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = (\lambda + \mu) p_n, n \geq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

La résolution du système (2.3) s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \\ \text{pour } n = 1, \lambda p_0 + \mu p_2 = (\lambda + \mu) p_1, p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ \text{pour } n > 1, p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \end{cases}$$

Pour trouver la probabilité p_0 , on utilise l'équation de normalisation. En effet,

$$p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \dots = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots}$$

où $1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots$ est une progression géométrique de raison $\frac{\lambda}{\mu}$. Elle converge si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, et est égale à $\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$.

Alors, $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

D'où La distribution d'équilibre dans ce cas est alors donnée par :

$$p_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

On constate que le régime stationnaire du système d'attente M/M/1 est gouverné par la variante de la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Remarque 2.4.1. Une file d'attente $M/M/1$ est dite stable si le taux moyen d'arrivée des clients (λ) est inférieur au taux moyen de service (μ).

Remarque 2.4.2.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - p_0$, est appelé coefficient d'utilisation du système, ou intensité du trafic.

ρ exprime le nombre moyen d'arrivées par durée moyenne de service, c'est aussi la probabilité d'occupation de la station de service.

Si $\rho > 1$, cela signifie qu'il y a en moyenne plus d'arrivées que de clients servis, et le système s'engorge (la longueur de la file d'attente dépasse toute limite en stationnaire). $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ est donc la condition d'existence du régime stationnaire. Autrement dit : la stabilité est une condition nécessaire pour que le régime stationnaire existe.

Encore, $p_n = (1 - \rho)\rho^n, n \geq 0$, est la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$.

Remarque 2.4.3.

La file $M/M/1$ peut être considérée comme un processus de naissance et de mort,

$$\text{pour lequel : } \lambda_n = \lambda \text{ et } \mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \mu & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

2.5 Caractéristiques du système $M/M/1$ (Mesures de performance)

2.5.1 Définitions, formules de Little

Une fois qu'on a le régime stationnaire, on s'intéresse à différentes quantités qui permettent de juger le comportement du système :

- $L = E[N]$ le nombre moyen de clients dans le système ;
- L_q le nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- W temps de séjour moyen d'un client dans le système ;
- W_q temps d'attente moyen d'un client ;
- W_{q^*} temps d'attente moyen d'un client obligé d'attendre. Ces grandeurs

sont liées entre elles par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}L &= \lambda_e \cdot W \\L_q &= \lambda_e \cdot W_q \\W &= W_q + \frac{1}{\mu} \\L &= L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}\end{aligned}$$

Où λ_e est le taux d'entrée des clients dans le système. Dans le cas du système $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1$, $\lambda_e = \lambda$ car la capacité d'accueil est infinie. Les deux premières relations sont appelées formules de Little.

2.5.2 Calcul des caractéristiques

Soit $N = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$

Le nombre moyen de clients dans le système

$$\begin{aligned}L = E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \\&= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n \\&= (1 - \rho) \rho [1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots] \\&= \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad (\text{car } \rho < 1).\end{aligned}$$

Remarque 2.5.1.

- 1) Plus que l'intensité du système se rapproche de un , plus que la longueur moyenne de la file d'attente L tend vers l'infinie.
- 2) La probabilité d'être servi immédiatement à l'arrivée est p_0 .

Le nombre moyen de clients dans la file d'attente

Soit $N_f = \lim_{t \rightarrow \infty} N_f(t)$, où $N_f(t)$ est le nombre de clients dans la file d'attente

à la date t . La variable N_f est définie de la manière suivante :

$$N_f = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ N - 1 & \text{si } N \geq 1 \end{cases}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \text{ ou bien } L_q = L - \rho$$

Le temps moyen d'attente d'un client, Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

Le temps moyen d'attente W_q et le temps moyen de séjour W peuvent être calculés à l'aide de formule de Little, en effet,

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Montrons que la formule de Little est vérifiée pour ce système :

La distribution du temps d'attente Nous pouvons toujours calculer la distribution du temps d'attente dans le cas où $\lambda < \mu$.

Quand un client vient et trouve n clients devant lui alors le temps d'attente total de ce client est la somme des temps de services des n clients plus son temps de service. Comme chaque temps de service suit une exponentielle de paramètre μ et les temps de services sont indépendants, par conséquent la somme possède une distribution gamma : $\Gamma(\mu, n+1)$

$$P(T \leq t/n \text{ clients devant}) = \int_0^t \frac{\mu^{n+1} \tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} d\tau$$

où, $\Gamma(n+1) = n!$ (la fonction gamma).

Ainsi en régime stationnaire et pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
P(T \leq t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T \leq t/n \text{ clients devant })P(X(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(T \leq t/n \text{ clients devant })P(X(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^{n+1} \tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\tau \\
&= \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \tau^n}{\Gamma(n+1)} d\tau \\
&= \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} e^{\lambda\tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\tau \\
&= \int_0^t \mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{-\tau\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} d\tau \\
&= 1 - e^{-t(\mu-\lambda)}
\end{aligned}$$

On remarque bien que c'est la fonction de répartition d'une exponentielle de paramètre $(\mu - \lambda)$ de moyenne

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Alors L vérifie bien la relation :

$$L = \lambda W$$

2.6 Description d'autres systèmes de files d'attente

2.6.1 La file $M/M/C$

On considère un système identique à la file $M/M/1$ excepté qu'il comporte C serveurs identiques et indépendants les uns des autres. On conserve les hypothèses : processus d'arrivée des clients poissonien de taux λ et temps de service exponentiel de taux μ (pour chacun des serveurs). Ce système est connu sous le nom de file $M/M/C$. L'espace d'états E est, comme pour la

$M/M/1$ infini : $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. On a un processus de naissance et de mort de taux :

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n\mu & \text{si } 0 < n < C \\ C\mu & \text{si } n \geq C \end{cases}$$

En effet, lorsque le processus est dans un état $n < C$, tous les clients sont en service et sont donc susceptibles de quitter la file. Pour passer de n clients à $n - 1$ clients en un temps Δt , il faut qu'un des n clients termine son service et que les autres ne terminent pas le leur, ceci pouvant se produire pour le premier, le deuxième, \dots , ou le n -ième client. Pour être précis, il faut également rajouter qu'aucun client n'arrive pendant ce temps dt . La propriété caractéristique de la loi exponentielle nous dit que la probabilité pour qu'un client termine son service en un temps Δt est $\mu\Delta t + o(\Delta t)$, la probabilité pour qu'un client ne termine pas son service est donc $1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)$ et la probabilité pour qu'aucun client n'arrive est $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$. La probabilité recherchée se calcule donc de la façon suivante :

$$p_{n,n-1}(\Delta t) = \left(\sum_{j=1}^n (\mu\Delta t + o(\Delta t)) (1 - \mu\Delta t + o(\Delta t))^{n-1} \right) (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))$$

Un développement limité au premier ordre nous donne immédiatement que

$$p_{n,n-1}(\Delta t) = n\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

Le taux de transition de l'état n vers l'état $n - 1$ est donc égal à $n\mu$. De la même façon, lorsque $n \geq C$, seuls C clients sont en service et sont donc susceptibles de quitter la file, donc de faire passer le processus de l'état n à l'état $n - 1$. Le taux de transition correspondant est donc égal à $C\mu$. Dans tous les cas, une transition d'un état n vers un état $n + 1$ correspond à une arrivée de client, soit en un temps Δt , à une probabilité $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Le taux de transition est donc égal à λ . La condition de stabilité est ici $\lambda < C\mu$ et exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent à la file par unité de temps doit être inférieur au nombre moyen de clients que les serveurs de la file sont capables

de traiter par unité de temps.

On peut calculer P_n comme suit :

$$\begin{cases} P_{n-1}\lambda = P_n n \mu & \text{pour } n = 1, \dots, C-1 \\ P_{n-1}\lambda = P_n C \mu & \text{pour } n = C, C+1, \dots \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} P_n = \frac{\rho}{n} P_{n-1} & \text{pour } n = 1, \dots, C-1 \text{ où } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \\ P_n = \frac{\rho}{C} P_{n-1} & \text{pour } n = C, C+1, \dots \end{cases}$$

Les mesures de performance :

Tous les paramètres de performances peuvent se calculer dans le cas où la file est stable ($\lambda < C \mu$ donc $\rho < C$).

Pour la file $M/M/C$, il est plus simple (au niveau des calculs mis en jeu) de calculer d'abord le temps moyen de séjour et d'en déduire le nombre moyen de clients.

Le temps moyen de séjour d'un client se décompose en un temps moyen dans la file d'attente, plus un temps moyen de service. Il suffit alors d'appliquer la loi de Little à la seule file :

$$W = W_q + S = \frac{L_q}{d} + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

Il reste alors à calculer le nombre moyen de clients en attente dans la file, L_q :

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=C}^{+\infty} (n-C) P_n = \sum_{n=C}^{+\infty} (n-C) \frac{\rho^n}{C! C^{n-C}} P_0 = \frac{\rho^{C+1}}{C! C} \sum_{n=C}^{+\infty} (n-C) \left(\frac{\rho}{C}\right)^{n-C-1} P_0 \\ &= \frac{\rho^{C+1}}{C! C} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{C}\right)^2} P_0 = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!(C-\rho)^2} P_0 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du temps moyen de séjour

$$W = \frac{\rho^C}{\mu(C-1)!(C-\rho)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}$$

Nombre moyen de clients L Le nombre moyen de clients s'obtient alors par application de la loi de Little à l'ensemble de la file :

$$L = W \times d = W \times \lambda = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!(C-\rho)^2} P_0 + \rho$$

2.6.2 La file M/M/ ∞

On considère un système composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il rentre donc instantanément en service. Donc cette file particulière, il n'y a donc pas d'attente. On suppose toujours que le processus d'arrivée des clients est poissonien de taux λ et que les temps de service sont exponentiels de taux μ (pour tous les serveurs). Ce système est connu sous le nom de file M/M/ ∞ . Comme cela a été fait pour la file M/M/C, on peut facilement démontrer que le taux de transition d'un état n quelconque vers l'état $n-1$ est égal à $n\mu$ et correspond au taux de sortie d'un des n clients en service. De même, le taux de transition d'un état n vers l'état $n+1$ est égal à λ et correspond au taux d'arrivée d'un client. De façon intuitive, la capacité de traitement de la file est infinie puisque tout nouveau client se présentant à l'entrée de la file est instantanément traité. La condition de stabilité exprimant que "le nombre moyen de client arrivant à la file par unité de temps doit être inférieure à la capacité de traitement de la file" est donc toujours satisfaite. Soit P_n la probabilité stationnaire d'être dans l'état n . Les équations d'équilibre nous donnent :

$$P_{n-1}\lambda = P_n n\mu; \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Soit } P_n = \frac{\rho}{n} P_{n-1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, \text{ où } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

On peut alors exprimer toutes les probabilités en fonction de P_0 :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}} = e^{-\rho}$$

Notons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}$ converge pour toutes valeurs de ρ (donc de λ et de μ), ce qui est cohérent avec la stabilité inconditionnelle de la file. On obtient

finalement :

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

Débit d .

Le service s'effectue avec un taux $n\mu$ dans chaque état où le système contient n clients :

$$d = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n n \mu = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} \mu = e^{-\rho} \rho e^{\rho} \mu = \rho \mu = \lambda$$

On retrouve la stabilité inconditionnelle de la file.

Nombre moyen de clients L

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} n P_n = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} = e^{-\rho} \rho e^{\rho} = \rho$$

Temps moyen de séjour W

Intuitivement, le temps moyen passé dans le système est réduit au temps moyen de service, soit $\frac{1}{\mu}$. On peut redémontrer ce résultat en utilisant la loi de Little :

$$W = \frac{L}{d} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Chapitre 3

Application du modèle M/M/1 au flux de véhicules

Introduction

L'application du modèle M/M/1 au trafic routier consiste à utiliser des outils mathématiques pour estimer et simuler le temps d'attente des véhicules à des points critiques tels que les carrefours ou les péages. En analysant des paramètres clés tels que le taux moyen d'arrivée des véhicules ; le temps moyen de service et le nombre moyen de véhicules en attente, ce modèle permet d'améliorer la gestion du trafic routier, d'identifier les zones de congestion et de proposer des solutions pour optimiser le flux de circulation.

3.1 Analyse du flux de véhicules à un péage selon le modèle M/M/1

3.1.1 Position du problème

Il s'agit d'un problème de modélisation du flux de véhicules dans une file d'attente à un péage autoroutier, nous nous sommes inspirées de l'étude proposée dans [1]. Ce processus peut être modélisé par un système de file d'attente M/M/1, caractérisé par deux paramètres, notés A et B .

A : représente le flux d'arrivée des véhicules à la barrière de péage, et sera modélisé à l'aide d'une suite de variables aléatoires $(\tau_n)_{n \geq 0}$ vérifiant :

- 1) $\tau_0 = 0$ (moment initial d'ouverture du péage).
- 2) Pour tout $n \geq 1$, $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ (les instants d'arrivée des véhicules sont ordonnés chronologiquement).

B : représente le temps nécessaire pour qu'un véhicule passe le péage et quitte la file d'attente. Ce temps est modélisé par une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ représentant les durées de service de chaque véhicule dans la file.

L'objectif de cette étude est de comprendre et de modéliser le flux de véhicules arrivant au péage ainsi que les temps d'attente et de service, afin de proposer des solutions visant à minimiser le temps d'attente moyen des véhicules dans la file et à optimiser l'efficacité du péage autoroutier.

3.1.2 Détermination des lois

Lois d'arrivées (A) :

Les lois d'arrivées représentent le modèle mathématique des intervalles de temps entre l'arrivée successive des véhicules à la barrière de péage.

Au premier abord, nous intéressons aux arrivées des voitures. Dans ce contexte nous supposons que les voitures se présentent à la barrière de péage aléatoirement et indépendamment les unes des autres selon un processus de poisson du taux λ . En effet, en raison d'absence de mémoires des lois exponentielles, nous fixons un réel $\lambda \geq 0$, et supposons de modéliser la loi commune des temps d'inter-arrivées $(T_n)_{n \geq 1}$ par une loi exponentielle de paramètre $\lambda \geq 0$.

Dans ce contexte, le paramètre λ représente l'inverse du temps moyen séparant deux arrivées consécutives des voitures. Supposant que la taille de la file d'attente n'est pas limitée, le nombre des voitures entrés (sans prendre en compte les sorties) à un instant $t \geq 0$ est donné par la relation :

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{[0,t]}(T_n), \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

On rappelle que le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson du taux λ . En particulier, il s'agit d'un processus continu dont les accroissements $(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$, $0 \leq i \leq n - 1$, pour une suite $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ donnée, sont indépendants et suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda t_1, \lambda(t_2 - t_1), \dots, \lambda(t_n - t_{n-1})$.

Remarque 3.1.1. *Les temps d'arrivée τ_n peuvent être exprimés comme la*

somme des temps d'inter-arrivée T_n , τ_n est la somme des n premiers T_k .

Lois de services (B) :

Les lois de services décrivent le temps nécessaire pour qu'un véhicule passe le péage et quitte la file d'attente. Si on considère les intervalles de temps qui s'écoulent entre les événements successifs d'une loi de Poisson du taux $\lambda > 0$, on s'aperçoit qu'ils suivent une loi exponentielle du taux λ , où λ est le nombre de voitures (clients) arrivant par unité de temps.

Pour la modélisation des services, on utilise également une loi exponentielle, mais avec un taux différent μ .

La densité des inter-sorties est donnée par $f_B(x) = \mu e^{-\mu x}$.

μ : désigne le nombre des voitures servis par unité de temps.

Remarque 3.1.2. Les S_n suivent la loi de B qui est une loi exponentielle de paramètre μ .

3.1.3 Analyse du Modèle

Pour analyser ce système, nous pouvons utiliser les résultats théoriques des files d'attente M/M/1. Quelques indicateurs clés sont :

- Taux d'occupation : (ρ) : $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Il s'agit de la proportion du temps durant lequel le serveur (le péage) est occupé.
- Temps d'attente moyen dans la file (W_q) : $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.
- Nombre moyen de véhicules dans la file (L_q) : $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$.

Interprétation des Indicateurs :

- Taux d'occupation (ρ) : Si ρ est proche de 1, le péage est presque toujours occupé, ce qui indique une saturation du système. Pour un fonctionnement optimal, il est préférable que ρ soit bien inférieur à 1.
- Temps d'attente moyen dans la file (W_q) : Indique le temps moyen qu'un véhicule passe à attendre dans la file avant de passer au péage. Un W_q élevé indique des temps d'attente longs, ce qui peut entraîner des retards et de l'insatisfaction chez les usagers.
- Nombre moyen de véhicules dans la file (L_q) : Indique le nombre moyen de véhicules qui attendent dans la file. Un L_q élevé indique une longue file d'attente, ce qui peut causer des encombrements et des difficultés de gestion du trafic

Conclusion

En utilisant le modèle $M/M/1$, nous pouvons obtenir des informations précieuses sur le comportement du système de péage, telles que le temps d'attente moyen des véhicules et le taux d'occupation du péage. Ces informations permettent d'identifier des mesures pour améliorer l'efficacité du péage et réduire les temps d'attente des véhicules. Des stratégies telles que l'ajout de postes de péage supplémentaires, l'optimisation des procédures de paiement ou l'utilisation de systèmes de péage automatisés peuvent être envisagées pour améliorer la performance du système.

3.1.4 Simulation

On va tracer de différentes allures de trajectoires pour le nombre de voitures dans la file d'attente au péage autoroutier en fonction de la valeur du coefficient d'utilisation.

On se base du programme suivant en langage R qui utilise les package "queueing" et "ggplot".

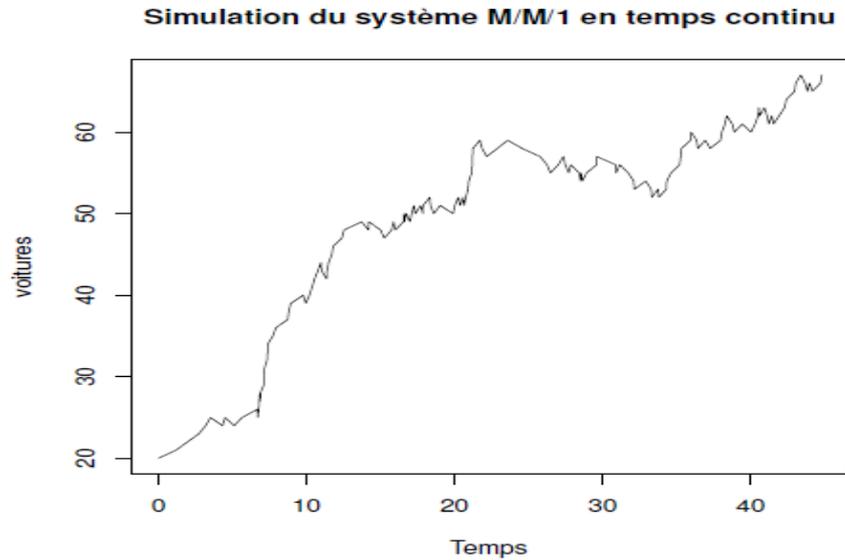
```
# Simulation système M/M/1 en temps continu avec titre
MM1 <- function(lambda, mu, a, n) {
  # lambda: nombre moyen de voitures/unité de temps
  # mu: temps moyen de service
  # a: nombre de voitures dans le système à l'instant 0
  # n: nombre d'itérations
  # Construction du vecteur des arrivées y
  y <- cumsum(rexp(n * 10, rate = lambda))
  # Construction du vecteur des temps de service z
  z <- rexp(n * 10, rate = mu)
  X <- c(a) # Initialisation de X, le nombre de voitures
  (CI)
  tps <- c(0) # Initialisation du vecteur temps
  p <- 1 # Compteur
  k <- p
  for (i in 1:n) {
    # On regarde combien de voitures arrivent pendant qu'une
```

```
# voiture se fait servir
while (y[p] < (y[k] + z[k]) & p < n) {
X <- c(X, X[length(X)] + 1)
tps <- c(tps, y[p])
p <- p + 1
}
d <- k
l <- X[length(X) - 1]
# On regarde combien de voitures sont dans le système,
# donc il ne pourra pas avoir
# plus de l départs
# On regarde combien de voitures partent alors qu'il
# n'y a pas d'arrivées
while (sum(z[k:d]) < y[p] - y[k] & d < n & l >= 0) {
X <- c(X, X[length(X)] - 1)
tps <- c(tps, y[k] + sum(z[k:d]))
d <- d + 1
l <- l - 1
}
k <- p
}

#Traçage de la trajectoire avec un titre
plot(tps, X, type = "l", xlab = "Temps", ylab =
#"voitures",
main = "Simulation du système M/M/1 en temps continu")
}

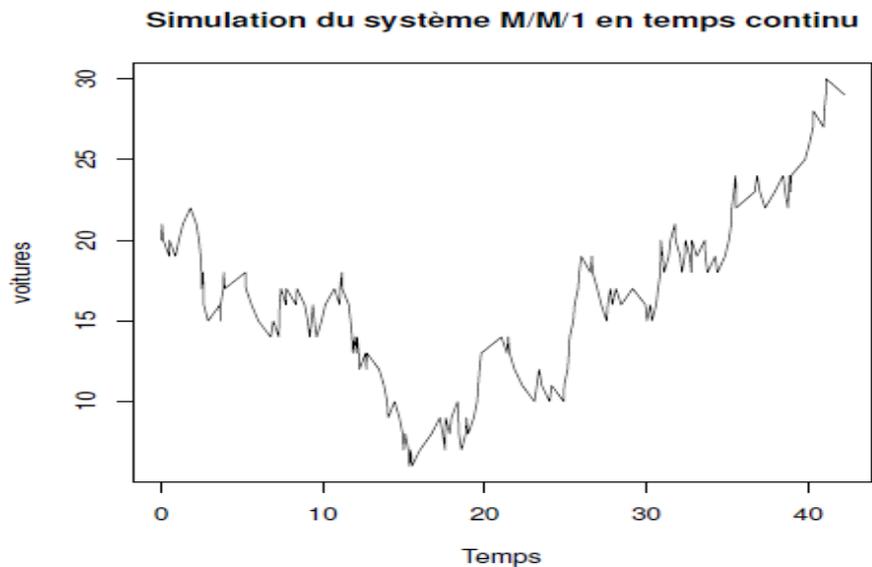
# Exemple d'utilisation de la fonction
MM1(lambda = 2, mu = 5, a = 20, n = 100)
```

1) 1^{er} cas $\rho > 1$:



Si le coefficient d'utilisation est strictement supérieur à 1 (ici $\lambda = 2$, $\mu = 1$), il n'y a pas de régime stationnaire, le système s'engorge et le nombre de voitures présentes dans le système augmente sans arrêt.

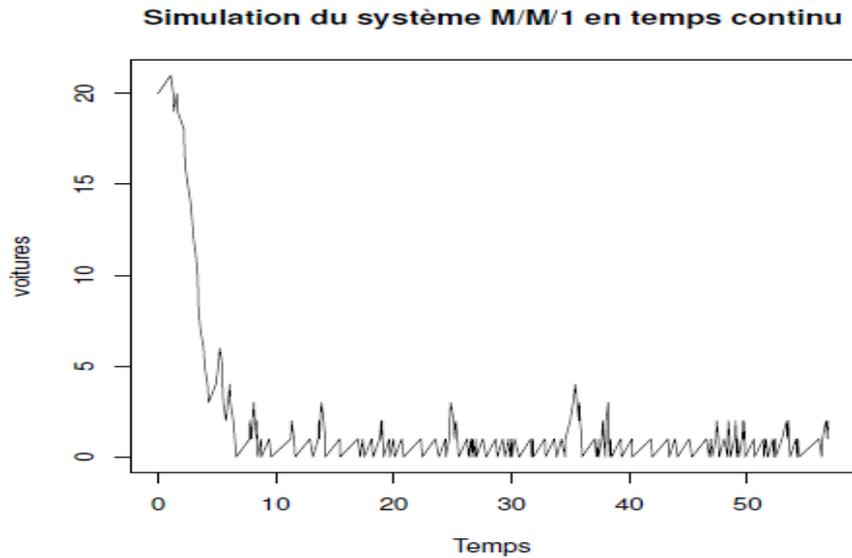
2) 2^{ème} cas $\rho = 1$:



Si $\rho = 1$ (ici $\lambda = 2$, $\mu = 2$). Le système commence à se stabiliser :

il n'y a plus d'engorgement, la file d'attente ne fait pas que augmenter. Néanmoins il est difficile de parler de régime. stationnaire, le système est en régime critique.

3) 3^{ème} cas $\rho < 1$:



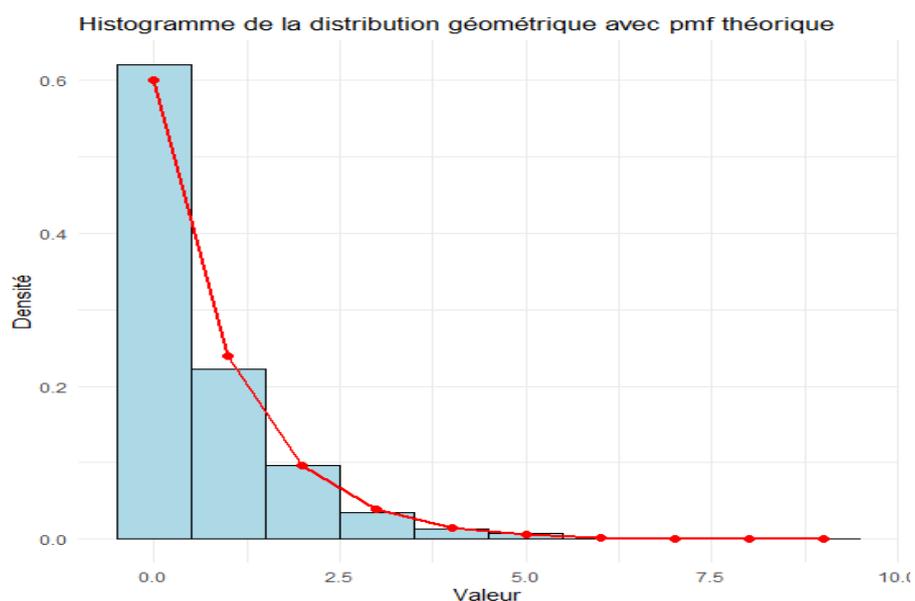
Si $\rho < 1$ (ici $\lambda = 2$, $\mu = 5$). Le système admet un régime stationnaire. le système n'est plus saturé, car $\lambda < \mu$. cela signifie que les véhicules arrivent moins vite qu'ils ne peut être servis.

Dans ce cas, nous allons tracer l'hystogramme de la distribution d'une loi géométrique de paramètre $1 - \rho$ en se basant du programme en R suivant :

```
# Définir les paramètres
lambda <- 2 # Exemple de valeur pour lambda
mu <- 5     # Exemple de valeur pour mu
p <- 1 - lambda / mu
#Générer des données suivant une distribution
géométrique
set.seed(123) #Pour rendre les résultats reproductibles
n <- 1000 # Taille de l'échantillon
data <- rgeom(n, prob = p)
# Convertir les données en data frame pour ggplot2
df <- data.frame(data)
```

```
# Calculer les valeurs théoriques de la pmf
k <- 0:max(data) # Les valeurs possibles de la variable
#aléatoire
theoretical_pmf <- data.frame(k = k, pmf = dgeom(k,
prob = p))
# Créer l'histogramme
ggplot(df, aes(x = data)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = max(data)
+ 1, color = "black",
fill = "lightblue") +
  geom_point(data = theoretical_pmf, aes(x = k, y = pmf),
color = "red", size = 2) +
  geom_line(data = theoretical_pmf, aes(x = k, y = pmf),
color = "red", size = 1) +
  labs(title = "Histogramme de la distribution géométrique
avec pmf théorique",
x = "Valeur",
y = "Densité") +
  theme_minimal()
```

Histogramme de la loi géométrique de paramètre $\rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ avec $\lambda = 2$ et $\mu = 5$



3.2 Étude de la situation routière de Daniel Flipo

3.2.1 Introduction et description du modèle

Nous avons travaillé sur un document réalisé par Daniel Flipo de l'UFR mathématiques pures et appliquées de Lille, qui traite d'une situation routière basique se rapprochant des systèmes $M/M/1$ (voir [4] et [6]). Le modèle est le suivant :

- La route est représentée par une voie à deux directions en ligne droite.
- Un entrepreneur prévoit des travaux de réparation sur l'une des voies, nécessitant la mise en place d'un chantier qui bloquera une partie de la voie concernée.
- Des feux tricolores sont installés de chaque côté du chantier pour permettre aux files de véhicules de passer alternativement le chantier sur la voie restante.
- Longueur du chantier (L) : Détermine la distance sur la route qui est bloquée en raison des travaux de construction. Une longueur plus longue du chantier peut entraîner des files d'attente plus importantes et des temps d'attente plus longs pour les véhicules.
- Paramètres des processus de Poisson (λ_1, λ_2) : Représentent les taux d'arrivée des véhicules dans chaque direction. Des valeurs plus élevées de λ_1 et λ_2 signifient un flux de trafic plus important, ce qui peut entraîner des congestions plus fréquentes.
- Vitesse des véhicules (v) : Indique la vitesse à laquelle les véhicules se déplacent sur la route. Une vitesse plus élevée peut réduire les temps d'attente des véhicules dans la file.
- Durée des feux tricolores (d_1, d_2) : Détermine la période pendant laquelle chaque feu reste vert ou rouge. Des durées plus longues peuvent entraîner des temps d'attente plus importants pour les véhicules à l'arrêt.
- Nombre de voitures à laisser passer (K_1, K_2) : Représente le nombre de véhicules autorisés à passer à chaque cycle de feu. Un nombre plus élevé peut réduire les files d'attente en permettant à plus de véhicules de traverser.
- Temps de démarrage des automobilistes (a) : Indique le temps nécessaire pour qu'une voiture démarre après l'arrêt. Un temps de démarrage plus

court peut réduire les temps d'attente dans la file.

- Chacun de ces paramètres joue un rôle crucial dans la modélisation du trafic routier et peut être ajusté pour étudier l'impact sur la fluidité de la circulation et les temps d'attente des véhicules. [6]

3.2.2 Cycle des feux, engorgement, contraintes

- Le cycle des feux de signalisation est crucial pour réguler le passage des véhicules à travers le chantier et éviter les conflits de circulation.
- L'engorgement peut survenir lorsque le flux de véhicules dépasse la capacité de la voie disponible, entraînant des ralentissements et des temps d'attente accrus.
- Les Contraintes liées à la gestion du trafic, telles que la durée des feux de signalisation, le nombre de véhicules autorisés à passer dans chaque sens, et le temps nécessaire pour réguler le passage des véhicules à travers le chantier et éviter les conflits de circulation.

Cycle des feux :

Un cycle des feux se déroule de la façon suivante :

- à l'instant 0 le feu 1 passe au vert.
- à l'instant d_1 il passe au rouge.
- à l'instant $d_1 + \frac{L}{v}$ (le temps qu'il faut pour évacuer la dernière voiture passée au feu vert de la zone du chantier) le feu 2 passe au vert.
- à l'instant $d_1 + \frac{L}{v} + d_2$ le feu 2 passe au rouge.
- à l'instant $d_1 + \frac{L}{v} + d_2 + \frac{L}{v}$ le cycle est fini, on revient à l'instant zéro.

Engorgement, contraintes :

Si on veut faire passer K véhicules dans un sens, on doit laisser le feu au vert pendant un laps de temps au moins égal à $a \cdot K$, ce qui donne ici

$$\begin{cases} d_1 \geq a \cdot K_1 \\ d_2 \geq a \cdot K_2 \end{cases}$$

Le risque majeur d'un ajustement inadéquat des paramètres des feux de signalisation est que la file d'attente à l'un des feux pourrait augmenter indéfiniment, conduisant à un engorgement du système. Daniel Flipo propose dans son modèle que cet engorgement peut être évité en respectant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} d_1 \geq a \cdot \lambda_1 \cdot \left(d_1 + d_2 + 2 * \frac{L}{v} \right) \\ d_2 \geq a \cdot \lambda_2 \cdot \left(d_1 + d_2 + 2 * \frac{L}{v} \right) \end{cases}$$

Il considère ici que la durée pendant laquelle un feu est au vert doit être au moins égale à la durée laissant passer le nombre moyen de véhicules arrivés pendant un cycle. Il n'y a donc théoriquement que très peu de chance que le système s'engorge, il faudrait que le flux d'arrivée se comporte pendant longtemps largement au dessus sa moyenne.

On peut discuter le fait que ces différentes minoration de d_1 et d_2 ne prennent pas en compte la distance entre le feu et le véhicule qui démarre, l'auteur considérant que chaque voiture démarre directement du feu. Cela est compensé par le coefficient appliqué à "a", qui représente la durée totale d'un cycle. Cela signifie que le feu reste vert suffisamment longtemps pour permettre le passage du nombre moyen théorique d'arrivées à la fois pendant qu'il est rouge et qu'il est vert. Cependant, dans certaines simulations, on a observé quelques cas rares où ces inégalités ne sont pas suffisantes.

3.2.3 La question de l'estimation des paramètres

On se pose la question de l'estimation des paramètres du trafic à partir de données réelles. Dans le premier cas on sait que les instants d'arrivée suivent une loi exponentielle de paramètre λ , il s'agit donc d'estimer ce paramètre.

Pour cela on utilise la méthode du maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned}
 L(x_1, \dots, x_i; \dots x_n; \lambda) &= \prod_{i=1}^n \lambda^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \\
 L(x_1, \dots, x_i, \dots; \lambda) &= \ln \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \\
 L(x_1, \dots, x_i, \dots; \lambda) &= n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \\
 \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\
 \text{D' où finalement, } \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} &= \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{X}_n}
 \end{aligned}$$

$$\left(\text{On a bien } \frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda)}{\partial^2 \lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} \leq 0 \right)$$

Cet estimateur est problématique car il est biaisé.

Dans le second cas, le nombre de voitures passées à intervalles réguliers suit une loi de Poisson, dont l'estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance est sans biais. On le calcule :

$$\begin{aligned}
 L(x_1, \dots, x_i; \dots x_n; \lambda) &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
 L(x_1, \dots, x_i; \dots x_n; \lambda) &= e^{-\lambda n} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
 \ln L(x_1, \dots, x_i; \dots x_n; \lambda) &= \ln e^{-\lambda n} + \ln \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
 \ln L(x_1, \dots, x_i; \dots x_n; \lambda) &= -\lambda n + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
 \ln L(x_1, \dots, x_i; \dots x_n; \lambda) &= -\lambda n + \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_i; \dots x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0$$

$$\text{On a donc } \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{X}_n$$

On a bien :
$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_i; \dots, x_n; \lambda)}{\partial^2 \lambda} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2} \leq 0$$

Cet estimateur n'est pas biaisé ce qui est un avantage par rapport à la première méthode de mesure. Néanmoins on fait essentiellement la même chose, ces méthodes se valent.

3.2.4 Simulation

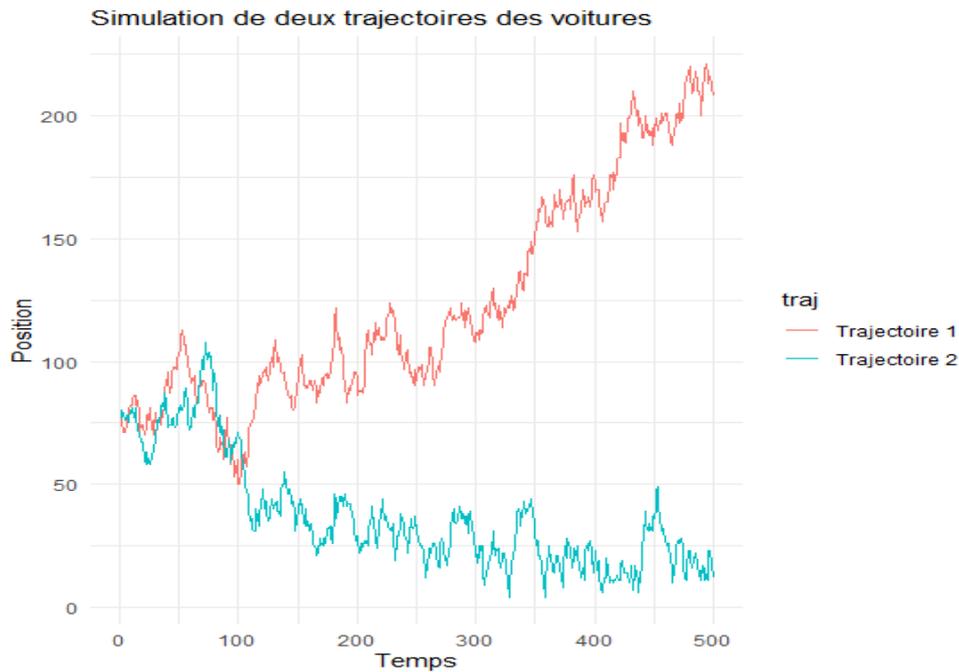
La fonction traj suivante permet de tracer la trajectoire du nombre de voitures présents au feu 1 à chaque début de cycle (au moment où le feu passe au vert pour eux). Le modèle est symétrique pour le feu 2.

```
traj <- function(l, lambda, d1, d2, vit, a, n, ci) {
  # n nombre de pas
  # ci condition initiale
  # l longueur du chantier en km
  # lambda nb voitures/min moyen
  # d1 durée du feu vert 1 en min
  # d2 durée du feu vert 2 en min
  # vit vitesse des véhicules en km/min
  # a temps moyen de démarrage d'une voiture en min
  k <- floor(d1/a) #le nombre de voitures qui passe le
  # feu pendant un cycle
  T <- numeric(n) #contient la trajectoire
  T[1] <- ci #valeur de départ
  for (i in 2:n) {
    P <- rpois(1, lambda*d1) + T[i-1] - k
    if (P < 0) P <- 0
    T[i] <- P + rpois(1, lambda*(d2+(2*l/vit)))
  }
  return(T)
}

library(ggplot2)

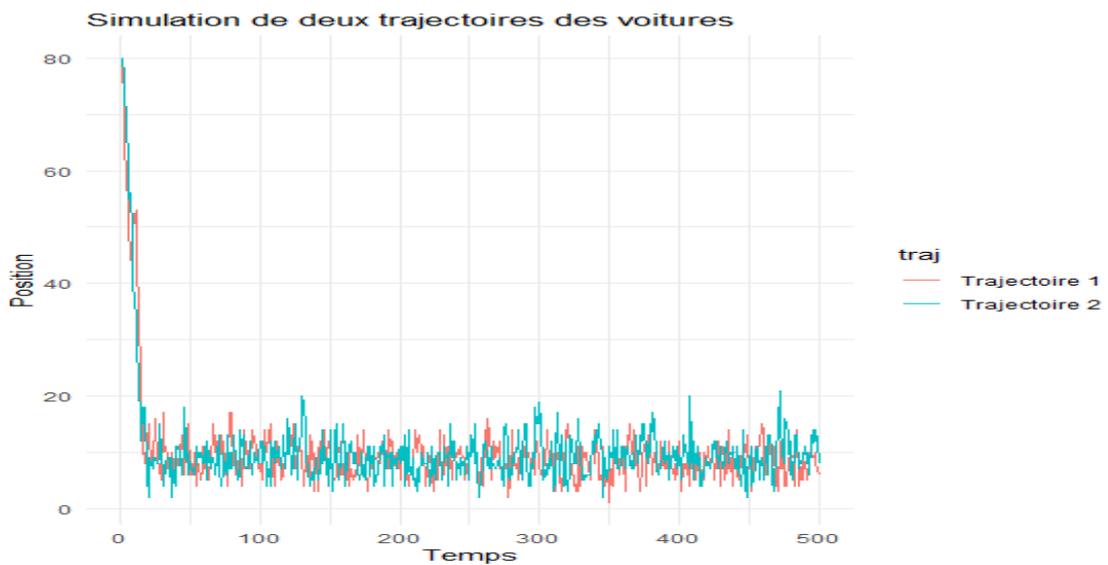
# Définir les paramètres de simulation
l <- 3/5 # longueur du chantier en km
lambda <- 4 # nb voitures/min moyen
```

```
d1 <- 6/5 # durée du feu vert 1 en min
d2 <- 9/10 # durée du feu vert 2 en min
vit <- 1 # vitesse des véhicules en km/min
a <- 1/15 # temps moyen de démarrage d'une voiture en
min
n <- 500 # nombre de pas
ci <- 80 # condition initiale
# Appeler la fonction traj pour simuler les données deux
fois avec des couleurs
# différentes
trajectoire1 <- traj(1, lambda, d1, d2, vit, a, n, ci)
trajectoire2 <- traj(1, lambda, d1, d2, vit, a, n, ci)
# Créer des data frames pour les données simulées
data1 <- data.frame(temps = 1:n, position = trajectoire1
, traj = "Trajectoire 1")
data2 <- data.frame(temps = 1:n, position = trajectoire2
, traj = "Trajectoire 2")
all_data <- rbind(data1, data2)
# Tracer les trajectoires avec différentes couleurs
ggplot(all_data, aes(x = temps, y = position, color =
traj)) +
geom_line() +
labs(x = "Temps", y = "Position") +
ggtitle("Simulation de deux trajectoires des voitures")
+
theme_minimal()
```



($l = 3/5$; $\lambda = 4$; $d1 = 6/5$; $d2 = 9/10$; $vit = 1/2$, $a = 1/15$; $n = 500$;
 $ci = 80$;))

Il est sensé de se poser la question de l'influence des différents paramètres sur ce modèle : que se passe-t-il si on modifie la vitesse des voitures ? La durée d'un des feux ? Le temps de réaction des automobilistes ? La longueur du chantier ? On va changer un paramètre à la fois à partir de la paramétrisation donnée ci-dessus.



($l = 3/5$; $\lambda = 4$; $d1 = 6/5$; $d2 = 9/10$; $vit = 1$; $a = 1/15$; $n = 500$; $ci = 80$;))

Remarque 3.2.1. *La vitesse des voitures a une grande influence sur la stabilité du système : si elles roulent suffisamment vite la file d'attente n'a pas le temps de s'allonger. Contrairement à la paramétrisation précédente où l'on voit que deux trajectoires peuvent avoir des allures tout à fait différentes, ici elles ont toutes la forme de celle représentée ci-dessus.*

Pour faire l'analogie avec les systèmes M/M/1, on peut dire que la 2ème figure représente le régime critique du système : il n'y a pas d'engorgement systématique, mais les trajectoires sont très différentes entre elles. La 1ère figure représente le régime stationnaire : le système revient vite depuis ses conditions initiales à un état où le nombre de voitures à la file est stable et suffisamment proche de zéro.

3.2.5 Amélioration du système

Dans les simulations précédentes, le nombre moyen d'arrivées par minute reste fixe (c'est le paramètre λ). Évidemment, ce modèle n'est pas réaliste ! C'est pourquoi on a décidé de faire des simulations en utilisant le même modèle que précédemment sauf que l'on fait varier le paramètre lambda au cours du temps.

Voici un exemple de fonction qui représente le nombre d'arrivées par minute en fonction du temps en heure améliorer par la construction d'une spline qui passe par les points où la fonction en escalier change de valeur. La spline (courbe) nous permet de simuler le nombre de véhicules présents au début de chaque cycle durant toute une journée. Nous observons maintenant des courbes du type :

```
# Définir la fonction lambda qui varie en escalier sur
30 minutes (lambda(t) en
fonction du temps en minutes)
lambda_func <- function(t) {
# Nombre de paliers en 30 minutes
num_steps <- 30
# Calculer le palier en fonction du temps
step <- ceiling(t / (30 / num_steps))

# Définir les valeurs de lambda pour chaque palier
```

```
values <- c(0.2, 0.5, 1, 1.5, 4, 6, 5, 4, 3.5, 2, 1.5,
3, 4, 5, 4, 3,
4, 5, 6, 7, 6, 4.5, 4, 3, 1.5, 3, 2, 5, 4, 3, 4)
# Exemple de valeurs en escalier

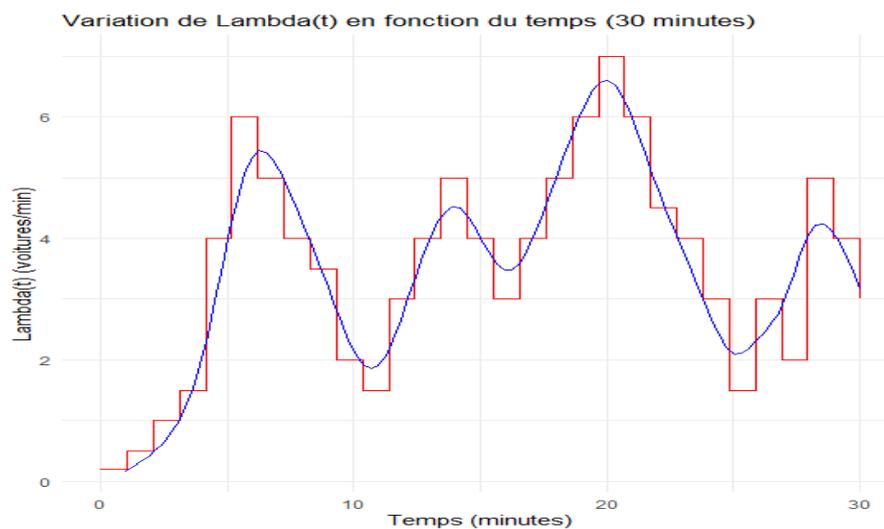
# Créer une spline cubique à partir des valeurs
spline <- smooth.spline(1:num_steps, values)

# Évaluer la spline à un point spécifique
lambda <- predict(spline, t)$y

return(lambda)
}

# Générer les valeurs de lambda pour chaque instant t
(t en minutes)
n <- 30 # nombre de pas (30 minutes)
temps <- seq(0, 30, length.out = n)
lambda_values <- sapply(temps, lambda_func)

# Créer un data frame pour les données de la fonction
lambda en escalier
lambda_data <- data.frame(temps = temps, lambda =
lambda_values)
```



3.3 Conclusion

Les conclusions indiquent que des mesures doivent être prises pour éviter la congestion du trafic, notamment en prenant les actions suivantes :

- a) Augmenter la capacité de la route en élargissant la largeur de la route.
- b) Fournir des voies séparées pour des groupes d'utilisateurs spécifiques.
- c) Installer des panneaux à messages variables le long de la route pour conseiller les usagers de la route.
- d) Créer des sens uniques près des principaux feux de signalisation.
- e) Réduire le temps du feu rouge et augmenter la fréquence des feux verts.

CONCLUSION GÉNÉRALE

En conclusion, la modélisation des files d'attente, notamment dans le cadre du trafic routier avec le modèle $M/M/1$, offre une approche analytique précieuse pour étudier et optimiser les systèmes d'attente. En exploitant des concepts avancés tels que les processus de Poisson et les chaînes de Markov, nous sommes en mesure de mieux appréhender le comportement des véhicules sur les routes, de prédire les temps d'attente et de proposer des stratégies d'amélioration pour accroître l'efficacité des infrastructures routières.

Cette modélisation permet une analyse approfondie du trafic, facilitant ainsi la prise de décisions éclairées en matière de gestion du trafic, de planification urbaine et de conception de réseaux de transport. En intégrant des données réelles et des simulations, il devient possible d'optimiser les flux de circulation, de réduire les congestions et d'améliorer la fluidité du trafic, contribuant ainsi à une meilleure qualité de vie pour les usagers de la route.

Annexe

Théorèmes et Définitions

Définition .1. Soit A et B deux évènements tels que $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $P(A|B)$ est définie par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition .2. Soit A et B deux évènement tels que $P(B) > 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Si de plus $P(B^c) > 0$ (et donc $P(B) < 1$), on a la formule de décomposition suivante :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

et la formule de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

Les deux dernière formules ci-dessus se généralisent de la manière suivante.

Théorème .1. Soit $(B_i, i \in I)$ une collection finie ou dénombrable d'évènement disjoints deux à deux tels que $\sum_{i \in I} P(B_i) = 1$ et $P(B_i) > 0$ pour tout $i \in I$.

Alors pour tout évènement A , on a :

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \setminus B_i) P(B_i), \quad (2)$$

et pour tout $i_0 \in I$,

$$P(B_{i_0} \setminus A) = \frac{P(A \setminus B_{i_0}) P(B_{i_0})}{\sum_{i \in I} P(A \setminus B_i) P(B_i)}$$

Sachant que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ssi quelque soit l'évènement dépendant de X est indépendant de l'évènement dépendant de Y . A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Définition .3. Espérance : l'espérance mathématique d'une v.a. discrète à valeurs dans \mathbb{N} est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n)$$

et celle d'une v.a. continue à valeurs dans \mathbb{R}^+ de densité f_X par

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt$$

Définition .4. Variance : la variance d'une v.a. est donnée par

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Somme de deux v.a. : la loi de la somme de deux v.a. indépendantes discrètes à valeurs dans \mathbb{N} et donnée par

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)$$

et la somme de deux v.a. indépendantes continues à valeurs dans \mathbb{R}^+ de densités f_X et f_Y a pour densité

$$f_{X+Y}(t) = (f_X \star f_Y)(t) = \int_0^t f_X(s) f_Y(t-s) ds$$

Quelques lois de probabilité

Définition .5. *Loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ pour } n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}(X) = \lambda, \text{ var}(X) = \lambda.$$

Définition .6. *Loi exponentielle* $\mathcal{E}(\mu)$: densité : f_X , fonction de répartition : F_X :

$$f_X(t) = \mu e^{-\mu t} \text{ et } F_X(t) = 1 - e^{-\mu t} \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+; \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\mu}, \text{ var}(X) = \frac{1}{\mu^2}.$$

Définition .7. *Loi géométrique* $\mathcal{G}(\rho)$: $\rho \in]0, 1[$

$$\mathbb{P}(X = n) = \rho(1 - \rho)^{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\rho}, \text{ var}(X) = \frac{1 - \rho}{\rho^2}.$$

Définition .0.1. *Loi Gamma* :

On dit que X suit la loi gamma de paramètres $p > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\Gamma(p, \lambda)$, si elle admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une telle variable aléatoire X admet alors une espérance et une variance données par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\lambda} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$$

Table de Notations

P :	Probabilité.
(Ω, F, P) :	Espace de probabilité
T :	Espace de temps.
E :	Espace des états.
t :	Temps.
(X_t) :	Processus stochastique
\mathbb{E} :	Espérance
cov :	Covariance.
P_{ij}	probabilité de transition de l'état i vers l'état j .
P :	Matrice de transition.
λ :	Taux d'arrivées des clients.
μ :	Taux de service des clients.
W_q :	Temps moyen d'attente.
W :	Temps moyen de séjours (attente + service).
lim :	Limite.
\sum	Somme.
$P_n(t)$	Probabilité que le système soit dans l'état n à l'instant t .

Bibliographie

- [1] Ahmed Baahmed and Karim Bechar. Optimisation dans les systèmes de files d'attente : cas de gestion des arrivées des avions dans un aéroport. PhD thesis, UMMTO, (2017).
- [2] Benamrouche Asma et Lif Lamia. Etude théorique des files d'attente classiques et files d'attente avec rappels. Université de Boumerdes, Soutenu en (2022).
- [3] Roussignol, Michel. "Processus stochastiques." Master de mathématiques, Université Paris-Est (2008).
- [4] CHABANE, Meriem, Rabab HADJ HACENE, and Mounir BOUHEDDA. "Contrôle Intelligent des Feux de Circulation d'une Intersection en Utilisant L'algorithme de Colonie de." (2015).
- [5] Lagnoux, Agnès, and Claudie CHABRIAC. "Processus stochastiques et modélisation." ISMAG, Master2-MI00451X, Université de Toulouse Le Mirail, 53p (1996).
- [6] Moulay Hachemi Rahma Yasmina. FILES D'ATTENTE ET APPLICATIONS. Université de Tlemcen, Soutenu en 2015.

ملخص

المذكرة تستكشف كيف يمكن تطبيق نموذج الانتظار $M/M/1$ على إدارة حركة المرور لتحسين أوقات الانتظار، وتحسين سلاسة الحركة، وتجنب الازدحامات.

Résumé

Ce mémoire explore comment la modélisation de file d'attente, en particulier avec le modèle $M/M/1$, peut être appliquée à la gestion du trafic routier pour optimiser les temps d'attente, améliorer la fluidité de la circulation, et éviter les engorgements.

Abstract

The memory explores how queueing theory, particularly using the $M/M/1$ model, can be applied to traffic management to optimize waiting times, improve traffic flow, and prevent congestion.