الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمـــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités et Statistique Appliquées

Thème

Estimation Paramétrique dans un Contexte de Petite Diffusion Linéaire

Présenté Par :
Melle. Mahdjoub Abir

Devant le jury composé de :

Mr. Hammoudi Ahmed	Prof	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mr. Mami Tawfik Fawzi	Prof	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Mme. Balaska Lamia	MAA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2023/2024

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier ***"Allah"*** le plus puissant, de m'avoir donnée la santé pour terminer ce travail, ainsi la volonté et la patience qui m'ont aidé à continuer mon chemin, et ne pas baisser les bras.

Je remercie ***Mme. Lamia Balaska*** d'être mon encadrante, pour son soutient morale et ses conseils inoubliables, aussi son guide durant la préparation de cet mémoire.

Mes remerciements vont également à ***Mr. Ahmed Hammoudi*** qui m'a fait l'honneur de vouloir accepté la présidence de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à ***Mr. Tawfik Fawzi Mami*** d'avoir accepté d'examiner mon modeste travail.

Je remercie du fond de mon coeur mes parents, qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

Enfin, je remercie mes enseignants de l'université ***Belhadj Bouchaib.***

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

• A mes très chers parents qui ont sacrifié leur vie pour le bon déroulement de mes études.

• A mon frère Khalil et mes soeurs Fatima et Nessrine.

• A ma tante faiza et à toutes la famille paternelle et maternelle.

• A mes amies : Mariem et Nour El houda.

• A tous mes enseignants.

"Le succès a une formule simple : fais de ton mieux !"

Table des matières

Introduction générale

La nature aléatoire de nombreux phénomènes évolutifs, dans des domaines très divers, conduit à l'utilisation d'équations différentielles stochastiques. Celles-ci s'avèrent être des outils de modélisation puissants dans divers domaines. Dans ce travail nous étudions le problème de la théorie de l'estimation paramétrique dans un processus de diffusion décrit par une équation différentielle stochastique de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = S_t(\theta, X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\{W_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien et $S_t(.)$ est une fonction régulière donnée qui dépend d'un paramètre $\theta \in \Theta$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Le coefficient de diffusion ε est supposé connu.
Si la fonction $S_t(.)$ ne dépend pas de temps, on dit que l'équation (2.1) est homogène.
Notre estimation est basée sur les observations trajectorielles complète
$\left\{X^T = X_t, \quad 0 \leq t \leq T\right\}$ dans l'asymptotique $\varepsilon \longrightarrow 0$.
La méthode d'estimation utilisée repose sur les techniques statistiques développées par Ibragimov & Has'minskii et Y.Kutoyants. Ce mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous citons des rappels et des notions de base concernant les processus stochastiques, ainsi que des résultats importants et des propriétés du mouvement brownien. Nous abordons également la notion d'intégrale stochastique nécessaire à la définition d'une équation différentielle stochastique.

Dans le deuxième chapitre, nous formulons l'hypothèse de régularité et présentons en détail la condition de normalité asymptotique locale (LAN). Nous étudions aussi la construction de l'estimateur de maximum de vraisemblance ainsi que son comportement asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$.

Dans le dernier chapitre nous traitons le processus de diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck, un exemple illustratif. Nous vérifions que ce processus satisfait à l'hypothèse de régularité. En utilisant le langage de programmation **R**, nous traçons quelques trajectoires de ce processus ainsi qu'un graphique illustrant la relation entre la consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance et la valeur de ε.

Chapitre 1

Introduction au calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base en probabilités et statistiques. Nous présentons notamment une définition probabiliste de l'intégrale stochastique, puis nous introduisons des équations différentielles ordinaires perturbées par ce type d'intégrales stochastiques.
Les notions préliminaires présentées dans ce chapitre sont issues des références suivantes : [3] et [5].
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

1.1 Quelques notions de probabilités

Définition 1.1.1. ***(Variable aléatoire)*** *: si* $E = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{E} = B(\mathbb{R})$*on appelle* ***variable aléatoire*** *(v.a.) toute application mesurable*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longmapsto (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})), \qquad B(\mathbb{R}) \text{ est la tribu borélienne.}$$

C'est à dire :

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \qquad \text{pour tout} \quad B \in B(\mathbb{R}).$$

Définition 1.1.2. *La densité de probabilité f d'une variable aléatoire continue X sur l'ensemble $\mathbb{R}$ est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Théorème 1.1.1. ***(Radon-Nikodym)*** *:Soit ν une mesure définie positive sur $B(\mathbb{R})$. Une mesure de probabilité (paramétrique) $\mathbb{P}_\theta$ est absolument continue par rapport à la mesure ν et on note $\mathbb{P}_\theta \ll \nu$ si et seulement si $\mathbb{P}_\theta$ admet une densité f par rapport à ν c'est à dire :*

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\nu} = f(x, \theta),$$

où $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{X}$ (l'espace des observations).

Nous rappelons la définition de l'information de Fisher, qui est d'un intérêt capital dans les problèmes d'estimation statistique de paramètres inconnus. Considérons une v.a. X dont la loi dépend d'un paramètre θ (réel ou vecteur à n composantes inconnues), soit ses probabilités $P(X = x, \theta)$ (cas discret), soit sa densité $f(x, \theta)$ (cas continu).

Définition 1.1.3. ***(Information de Fisher)*** *: Si x est une réalisation d'une v.a X, on note $f(x, \theta)$ la fonction de vraisemblance associée à la variable X (qui peut être multidimensionnelle). Si f est dérivable par rapport à θ, nous appelons quantité d'information de Fisher apportée par la v.a. X, ou par une observation x de X, sur le paramètre θ, la quantité :*

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] \\ &= \int_{\{\mathcal{X}: f(x,\theta) \neq 0\}} \frac{1}{f^2(x, \theta)} \left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 f(x, \theta) dx. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.2. ***(Inégalités classiques)*** *:*
Supposons que X et Y soient deux variables aléatoires ayant des espérances du premier et du deuxième ordre finies. Nous énonçons les inégalités suivantes :

1. ***Inégalité de Cauchy-Schwarz :*** $(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

2. ***Inégalité de Hölder :*** *Si p, q sont deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*
$$\mathbb{E}(XY) = [\mathbb{E}\,|X|^p]^{\frac{1}{p}}\,[\mathbb{E}\,|Y|^q]^{\frac{1}{q}}\,.$$

1.2 Généralités sur les processus stochastique

Définition 1.2.1. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexées par un ensemble T (en général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$) et définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, qu'on appelle espace d'états .*

Définition 1.2.2. *Une filtration $\{\mathcal{F}_t, \quad t \geq 0\}$ sur un espace probabilisé $(\mathit{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ $\forall s \leq t$.*

1. **Processus continu :** le processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est dit continu si pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e les trajectoires sont continues).
2. **Processus mesurable :**le processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est dit mesurable si l'application :
$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega),$$
définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ muni de $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, à valeur dans $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu $B(\mathbb{R}^d)$, est mesurable.
3. **Processus adapté :** On dit que $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est $\mathcal{F} - adapt$é si pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t - mesurable$.
4. **Processus progressif :** On dit que $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est $\mathcal{F}-$progressif si pour tout $t \geq 0$, la fonction $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ définie sur $([0, t] \times \Omega)$, $B\left([0, t] \otimes \mathcal{F}_t\right)$ à valeur dans $\left(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)\right)$ est mesurable.

Définition 1.2.3. *Un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit **gaussien** si pour tout entier n strictement positif et pour tous $t_1, ..., t_n$ dans T, $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur gaussien (ses lois de dimensions finies sont gaussiennes).*

Nous rappelons aussi la propriété de Markov pour un processus. Un processus est de Markov si son comportement dans le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent.

Définition 1.2.4. ***(Processus de Markov)*** *:*
Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une chaîne de Markov si :*
pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ *et pour tout* $j, i_0, ..., i_n \in E$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

$$P(X_t = j/X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_n} = i_n) = P(X_t = j/X_{t_n} = i_n).$$

Définition 1.2.5. ***(Temps d'arrêt)*** *:*
Une variable aléatoire $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *est un temps d'arrêt de la chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

ou bien, ce qui est équivalent, si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Proposition 1.2.1. *Un processus* $(X_n)_{n\geq 0}$ *possède la propriété forte de Markov, si pour un temps d'arrêt* T *de* X*, et un élément* A *de* $\mathcal{F}_t$*, ona*

$$P\left((X_{T+n})_{n\geq 0} \in B \text{ et } A \ / \ T < +\infty \text{ et } X_T = i\right)$$
$$= P\left((X_n)_{n\geq 0} \in B\right) P\left(A \ / \ T < +\infty \text{ et } X_T = i\right)$$

Dans la section qui suit nous rappelons quelques définitions et propositions relatives au mouvement brownien.

1.3 Mouvement Brownien

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.3.1. *Le processus* $(B_t, t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien (standard), également appelé processus de Wiener, si*

1. $P(B_0 = 0) = 1$ *(le mouvement Brownien est issu de l'origine).*
2. $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t - s)$.

3. *$\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n$ les accroissements $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendants.*

Dans tout ce qui suit, nous notons un M.B standard par $(W_t)_{t \geq 0}$.

Proposition 1.3.1. ***(Régularité trajectorielle Brownienne)***

Soit (W_t) un M.B, on a :

1. $\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \longrightarrow 0} \sup \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty$.
2. $\lim_{t \longrightarrow \infty} \inf \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \longrightarrow 0} \inf \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty$.
3. *La trajectoire d'un M.B (W_t) passe une infinité de fois par tout point et (W_t) n'est pas dérivable ni à gauche ni à droite.*
4. *Les trajectoire du M.B sont localement holdériennes-continues d'ordre α, avec $\alpha < 1/2$.*

Lemme 1.3.1. *Soit (W_t) un mouvement Brownien, ona :*
pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \right\} \leq 1 + \lambda \sqrt{8\pi} e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}.$$

Pour la démonstration de ce lemme, nous avons besoin de la propriété suivante (voir [2], page 28)

propriétés 1.3.1. *Soit (W_t) un mouvement Brownien, ona :*

$$(P_1) : P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} W_t > N \right\} = 2P\left\{ W_T > N \right\}, \quad N > 0.$$
$$(P_2) : P\left\{ W_T > N \right\} \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{N}\sqrt{\frac{T}{2\pi}} \right) e^{-\frac{N^2}{2T}}.$$

Démonstration. Notons par $F(x)$ la fonction de répartition de la v.a. $\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|$ et soit $\lambda > 0$, alors par intégration par parties on obtient,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\le t\le T}|W_t|\right\} &= \int_0^\infty e^{\lambda x}dF(x)\\ &= -\int_0^\infty e^{\lambda x}d[1-F(x)]\\ &= 1+\lambda\int_0^\infty e^{\lambda x}[1-F(x)]dx.\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (P_1) on a :

$$\begin{aligned}&P\left\{\sup_{0\le t\le T}|W_t|>N\right\} < P\left\{\sup_{0\le t\le T}W_t>N\right\}+P\left\{\sup_{0\le t\le T}W_t<-N\right\}\\ &= P\left\{\sup_{0\le t\le T}W_t>N\right\}+P\left\{\sup_{0\le t\le T}(-W_t)>N\right\}\\ &= 4P\left\{W_T>N\right\}.\end{aligned}$$

Et par (P_2) on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\exp\left\{\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right\} \le 1+4\lambda\int_0^\infty e^{\lambda x}P\left\{W_T>x\right\}dx\\ &\le 1+2\lambda\int_0^\infty \exp\left\{\lambda x-\frac{x^2}{2T}\right\}dx\\ &< 1+2\lambda e^{\frac{T\lambda^2}{2}}\int_\infty^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2T}(x-T\lambda)^2\right\}\\ &= 1+\sqrt{8\pi T}e^{\frac{T\lambda^2}{2}}.\end{aligned}$$

□

1.4 Intégrale stochastique

On considère un espace de probabilité complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$.

On appelle tribu des prévisibles sur $\Omega\times[0,\infty[$ la plus petite tribu rendant mesurable tous les processus continus adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$. Un processus ou un ensemble est prévisible s'il est mesurable par rapport à cette tribu.

Supposons donné un processus de Wiener standard $\{W_t, t\ge0\}$, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$.

On note Λ^2 l'ensemble des processus φ tel que $\varphi_t(\omega)$ définis pour $t \in [0,T]$, $\mathcal{F}_t$-mesurables et de carré intégrable presque sûrement. Dans ces conditions si φ est dans Λ^2 et si $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ est une subdivision de l'intervalle $[0,t]$, alors φ est indépendant des incréments $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$, en d'autres termes φ est prévisible.

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations différentielles de la forme

$$dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dW_t. \tag{1.1}$$

Le problème est que les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées. Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprête une solution de l'équation différentielle (1.1) comme une solution de l'équation intégrable

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(X_s)ds + \int_0^t \sigma_s(X_s)dW_s.$$

Pour tout processus φ de Λ^2, on définit l'intégrale stochastique d'Itô comme la limite dans L^2 des accroissements ci-dessous. On définit ainsi l'intégrale stochastique comme la limite des sommes de Riemann.

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s(\omega)dW_s := \lim_{n \longrightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{t_i}(\omega) \left(W_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - W_{t_i \wedge t}(\omega)\right).$$

On a de plus quelques propriétés complémentaires liées à la dépendance aléatoire de φ :

propriétés 1.4.1. *Pour tout $\psi, \varphi \in \Lambda^2$ et tout s, t tels que $0 < s < t$, on a :*

1. *$t \mapsto I_t(\varphi)$ est à trajectoire continue P-p.s.*
2. *$I(\varphi) = (I_t(\varphi))_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.*
3. *$\mathbb{E}(I_t(\varphi)) = 0$, et $Var(I_t(\varphi)) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \varphi_s^2 ds\right)$.*
4. *$\mathbb{E}\left(I_t(\varphi) - I_s(\varphi)/\mathcal{F}_s\right) = 0$.*
5. *$\mathbb{E}\left(\left(I_t(\varphi) - I_s(\varphi)\right)^2/\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t \varphi_u^2 du/\mathcal{F}_s\right)$.*
6. *$\mathbb{E}\left[I_t(\varphi)I_s(\psi)\right] = \mathbb{E}\int_0^{t\wedge s} \varphi_u \psi_u du$.*
7. *$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(I_{t-s}(\varphi) - I_s(\varphi)\right)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left(\int_s^{s+T} \varphi_u^2 du\right)$.*

Corollaire 1.4.1.

- *Si pour tout* $t \in [0,T]$*, la somme* $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2)ds < \infty$*, alors :*

$$\mathbb{E}\left(I_t(\varphi)/\mathcal{F}_s\right) = I_s(\varphi), \quad \textit{pour tout } s \leq t.$$

- ***Isométrie d'Itô :*** *si* $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_u^2)du < \infty$*, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \varphi_s dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2)ds.$$

- *D'aprés la définition, le processus* $I(\varphi)$ *est gaussien centré de covariance,*

$$cov\left(I_t(\varphi), I_s(\varphi)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge s} \varphi_u^2 du\right).$$

Lemme 1.4.1. *Soit* $f \in \Lambda^2$*, si pour tout* $n \geq 1$*,* $\int_0^T \mathbb{E}\left|f_t(w)\right|^{2n} dt < \infty$ *, alors nous avons l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)^{2n} \leq \left(n(2n-1)\right)^n T^{n-1} \int_0^T \mathbb{E}_\theta(f^{2n}(t))dt. \tag{1.2}$$

Ainsi, pour tout processus f *nous avons :*

$$\mathbb{E}\exp\left\{\int_0^T f_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T f_t^2 dt\right\} \leq 1. \tag{1.3}$$

Lemme 1.4.2. *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un MB et* $f \in \Lambda^2$*, pour tout* $t \in [0,T]$ *et pour tout* $\delta > 0$*,* $\lambda > 0$*, nous avons :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t f_s(w)dW_s\right| > \delta\right) \leq \frac{\lambda}{\delta^2} + \mathbb{P}\left(\|f\|^2 > \lambda\right).$$

1.4.1 Processus d'Itô

Définition 1.4.1. *On appelle processus d'Itô, un processus* $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \qquad P\text{-}p.s,$$

avec :

1. X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*
2. $(b_t)_{0 \leq t \leq T}$ *et* $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$ *sont des processus adaptés à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
3. $\int_0^t |b_s|\, ds \leq \infty$ *P-p.s* *et* $\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds \leq \infty$ *P-p.s* *pour tout* $t \in [0, T]$.

Écrit sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ X_0. \end{cases}$$

1.4.2 Formule d'Itô

Première Formule d'Itô : Soit X un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornées, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f^{''}(X_s) \sigma_s^2 ds. \tag{1.4}$$

Deuxième Formule d'Itô : Soit $(t, x) \longrightarrow f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'Itô, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s) dX_s + \int_0^t f_s^{'}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}^{''}(s, X_s) \sigma_s^2 ds. \tag{1.5}$$

Formule d'intégration par parties : Soit X et Y deux processus d'Itô.

$$\begin{cases} dX = F dt + G dW_t \\ dY = \tilde{F} dt + \tilde{G} dW_t \end{cases}$$

Alors le produit X,Y est un processus d'Itô, et

$$d(XY) = YdX + XdY + dXdY.$$

L'expression $dXdY$ est le terme correctif d'Itô. L'intégration de la règle du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties.

1.5 Equations différentielles stochastiques (EDS)

De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation de la forme :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.6}$$

où dW_t est la différentielle d'un mouvement brownien standard (W_t), b, σ deux fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X_0 est une valeur initiale.
Le coefficient b est appelé ***dérive***, tandis que σ est ***le coefficient de diffusion***.
Le processus solution de l'équation (1.6) est appelé **processus de diffusion**.

Définition 1.5.1. *Un processus stochastique à temps continu $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit de diffusion s'il est markovien c'est-à-dire s'il possède la propriété de Markov forte et à trajectoire presque sûrement continue.*

Définition 1.5.2. *Un processus X est solution forte de l'EDS (1.6). Si c'est un processus $\mathcal{F}$-adapté et satisfaisant :*

$$\int_0^t |b(s, X_s)|\, ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_s)ds < \infty, \qquad x \in \mathbb{R} \textit{ et pour tout } \ t \in \mathbb{R}^+,$$

et qui vérifier l'équation

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

1.5.1 Existence et unicité des solutions d'EDS

Théorème 1.5.1. *Soit* $T > 0$*,* $b(t, x)$ *et* $\sigma(t, x)$ *deux fonctions mesurables de* $[0, T] \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions* $\mathcal{L}$ *suivantes :*

1. *Condition de Lipschitz : il existe une constante* $K > 0$ *telle que pour tout* $t \in [0, T]$ *et pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K\,|x - y|\,.$$

2. *Condition de croissance : il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $(t, x) \in [0, T]$

$$|b(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq C\,(1 + |x|)\,.$$

3. *La condition initial* X_0 *est indépendante de* $(W_t)_{t \geq 0}$ *et* $\mathbb{E}\,|X_0|^2 < \infty$*.*

Alors l'EDS (1.6) *admet une solution unique à trajectoire presque sûrement continue.*

Chapitre 2

Estimation paramétrique dans une petite diffusion

Nous considérons le problème de l'estimation d'un paramètre à partir de l'observation d'un processus réel de diffusion non linéaire à temps continu, avec un petit coefficient de diffusion. si le problème est régulier nous montrons que l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) est consistent, asymptotiquement normale et asymptotiquement efficace lorsque le coefficient de diffusion tends vers zéro.

Dans ce qui suit nous adaptons quelques notations.

Notation

• $\dot{S}_t$ est la dérivée par rapport à θ de la fonction S_t.

• $S_t^{'}$ est la dérivée par rapport à x de la fonction S_t.

Introduction

Nous considérons l'équation différentielle stochastique (EDS) non linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = S_t(\theta, X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

où $S_t(.)$ est une fonction régulière donnée, le paramètre à estimer $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, x_0 est fixée et $(W_t, \mathcal{F}_t)$ un mouvement Brownien défini sur un espace probabilisé

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de $\mathcal{F}$. Nous nous proposons d'estimer le paramètre θ par l'observation trajectorielle $X^T = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ solution de l'EDS (2.1).

Nous associons à (2.1) l'équation déterministe correspondante à $\varepsilon = 0$ de solution $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_t}{dt} = S_t(\theta, x_t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

où θ est un paramètre inconnu appartenant à un intervalle $\Theta \subset \mathbb{R}$ et $S_t : \Theta \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et une fonction telle que, pour tout $\theta, S_t(.)$ est régulière.

2.1 Définitions et hypothèses

Notons par $(C_T, \mathcal{B}_T)$ l'espace mesurable des fonction continue sur $[0, T]$ où $\mathcal{B}_T = \sigma \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$.

Dans tout ce qui suit les fonctions $S_t(\theta, .)$, $\theta \in \Theta$ satisfont les conditions $\mathcal{L}$ ainsi l'équation (2.1) à une solution forte unique et tout les mesures $P_\theta^{(\varepsilon)}$ induit par le processus (2.1) dans l'espace mesurable $(C_T, \mathcal{B}_T)$ sont équivalentes où $\varepsilon \in (0, 1)$, (pour plus de détails voir [3] théorème de Girsanov).

Un estimateur θ_ε du paramètre θ est défini comme une application mesurable

$$\theta_\varepsilon : C_T \longrightarrow \bar{\Theta},$$

où $\bar{\Theta}$ est la fermeture de Θ.

2.1.1 Hypothèses de régularité

Nous étudions le comportement asymptotique de l'estimateur sous les conditions de régularité suivantes :

(H_1) Les coefficients $\{S_t(\theta, X_t), 0 \leq t \leq T, \theta \in \Theta\}$ satisfont les conditions $\mathcal{L}$ avec la constante de ces conditions est indépendante de θ.

(H_2) La fonction $S(\theta, x)$ a deux dérivées bornées continues par rapport à θ et x $(\dot{S}_t(\theta, x), S_t^{'}(\theta, x), \ddot{S}_t(\theta, x), \dot{S}_t^{'}(\theta, x)$ *existent, continues et bornées*$)$.

(H_3) L'information du fisher $I(\theta) = \int_0^T \dot{S}_t^2(\theta, x_t)dt$ est strictement positive.

(H_4) Pour tout $\nu > 0$ et tout compact $\Bbbk \subset \Theta$

$$\inf_{\theta \in \Bbbk} \inf_{|u| > \nu, \theta + u \in \Theta} \|S(\theta + u, x) - S(\theta, x)\| > 0.$$

$\|.\|$ est la norme de $L^2[0, T]$.

2.1.2 Le processus de rapport de vraisemblance

Notons par $Z_\varepsilon(.)$ le processus de rapport de vraisemblance calculé pour l'observation (2.1)

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(u) :&= \frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta}(X^T), \quad u \in \mathbb{R} \\ &= L(\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u, \theta, X^T), \end{aligned}$$

où $\theta \in \Theta$ et les valeurs $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u$ correspondent aux autres valeurs possibles du paramètre pour une normalisation adéquate φ_ε qui est une constante telle que $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u \in \Theta$.

Nous prendrons les formules de rapport de vraisemblance du théorème (2.1.1), soit $P^{(\varepsilon)}$ et $P_0^{(\varepsilon)}$ les mesures induites dans $(C_T, \mathcal{B}_T)$ par le processus de type diffusion $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ qui satisfait

$$dX_t = S_t(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0,\ 0 \leq t \leq T,$$

et le processus $\{Y_t = x_0 + \varepsilon W_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ respectivement.

Théorème 2.1.1. *[2] Les conditions*

$$P\left\{\int_0^T S_t(X_t)^2 dt < \infty\right\} = P\left\{\int_0^T S_t(Y_t)^2 dt < \infty\right\} = 1, \tag{2.3}$$

sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des mesures $P^{(\varepsilon)}$ et $P_0^{(\varepsilon)}$, et si elles sont vérifiées alors la dérivée de Radon-Nikodym est donnée par :

$$\frac{dP^{(\varepsilon)}}{dP_0^{(\varepsilon)}}(Y) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S_t(Y_t)dY_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S_t(Y_t)^2 dt\right]. \tag{2.4}$$

De plus pour tout mesures $P_{\theta_1}^{(\varepsilon)}$, $P_{\theta_2}^{(\varepsilon)}$ correspondant aux solutions de (2.1) on a par la formule (2.4)

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X^T) &= \frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_0^{(\varepsilon)}}\frac{dP_0^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X^T) \\
&= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S_t(\theta_1, X_t)dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S_t^2(\theta_1, X_t)dt\right\} \times \\
&\times \exp\left\{-\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S_t(\theta_2, X_t)dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S_t^2(\theta_2, X_t)dt\right)\right\} \\
&= \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \left[S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)\right]dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left[S_t^2(\theta_1, X_t) - S_t^2(\theta_2, X_t)\right]dt\right].
\end{aligned}$$

Or $dX_t = S_t(\theta, X_t)dt + \varepsilon dW_t$ alors $P_{\theta_2}^{(\varepsilon)} p.s.$

$$\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X^T) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left[S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)\right]dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left[S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)\right]^2 dt\right]. \tag{2.5}$$

Cette formule sera utilisée dans notre travail en tant que rapport de vraisemblance.

2.1.3 Condition LAN

La condition de normalité asymptotique locale de LeCam est une notion de base qui joue un rôle important dans l'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs de paramètre θ.

Définition 2.1.1. *Une famille* $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ *est dite* ***localement asymptotiquement normale*** *(LAN) au point* $\theta_0 \in \Theta$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$*, si le rapport de vraisemblance admet, sous une normalisation adéquate* $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\theta_0)$ *et tout* $u \in \mathbb{R}$*, la représentation*

$$Z_\varepsilon(u) := L(\theta_0 + \varphi_\varepsilon(\theta_0)u, \theta_0, X^T) = \exp\left\{u\Delta_\varepsilon - \frac{1}{2}u^2 + \psi_\varepsilon(u, \theta_0)\right\},$$

où Δ_ε *et* $\psi_\varepsilon(u, \theta_0)$ *sont des variables aléatoires telles que*

$$\Delta_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1), \quad \textit{quand } \varepsilon \to 0 \quad \textit{(converge en loi).}$$

et pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(u, \theta_0) = 0, \quad \textit{en probabilité.}$$

Si la famille $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ *est (LAN) en tout point* $\theta_0 \in \Theta$*, alors on dit qu'elle est (LAN) sur* Θ*.*

Elle est dite uniformément asymptotiquement normale si nous avons les relations précédentes pour tout compact $\mathbb{k}$*, et pour tout les suites* $\theta_n \subset \mathbb{k}$*,* $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$ *tq* $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ *et* $(u_n) \subset \mathbb{R}$ *tq* $u_n \longrightarrow u$ *vérifiant* $(\theta_n + \varphi_\varepsilon(\theta_n)u_n) \in \Theta$*.*

2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$, pour une observation $X^T = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, vérifiant (2.1), est défini comme la solution de l'équation

$$L(\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_1, X^T) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} L(\theta, \theta_1, X^T), \tag{2.6}$$

où le rapport de vraisemblance est

$$L(\theta, \theta_1, X^T) = \frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}(X^T),$$

où θ_1 est une valeur fixée du paramètre θ.

Si l'équation (2.6) a plusieurs solutions, alors on prend une d'entre elles comme $\hat{\theta}_\varepsilon$. Le rapport de vraisemblance $L(\theta, \theta_1, X^T)$, $\theta \in \Theta$ dans notre problème est continu en θ, donc la solution de (2.6) va toujours exister. En général, la solution ne peut pas être trouvée directement, il est souvent nécessaire d'utiliser des méthodes numériques d'optimisation. De nombreuses techniques sont disponibles pour ce type d'optimisation.

2.2.1 Normalité asymptotique locale

Le théorème suivant donne la condition LAN uniforme de la famille de lois $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ ainsi la convergence des lois de dimensions finies.

Théorème 2.2.1. *[2] Sous les conditions de régularité la famille $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ est uniformément (LAN) de constante de normalisation $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-1/2}(\theta)$ et sous $P_\theta^{(\varepsilon)}$ la variable aléatoire*

$$\Delta(\theta, X^T) = \varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(\theta) \int_0^T \dot{S}_t(\theta, x_t) dW_t,$$

suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour démontrer ce théorème on a besoin des deux lemmes suivants

Lemme 2.2.1. *(Lemme de Grönwell)*
Soient u, v deux fonctions continues positives telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq K + \int_0^T v(s)u(s)ds, \qquad \text{où } K \text{ est une constante,}$$

alors

$$u(t) \leq K \exp \int_0^t v(s)ds.$$

Lemme 2.2.2. *Sous l'hypothèse de régularité, nous avons $P_\theta^{(\varepsilon)}$ p.s les majorations suivantes :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s|, \quad K > 0. \tag{2.7}$$

$$\mathbb{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.8}$$

Démonstration. (Théorème (2.2.1))
Supposons, pour tout $\theta_\varepsilon \in \Bbbk \subset \Theta$, $u_\varepsilon \to u\,(\in \mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$,

notons $\theta_{\varepsilon,u} = \theta_\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon$.

Le rapport de vraisemblance normalisé :

$$Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = L(\theta_{\varepsilon,u}, \theta_\varepsilon, X^T),$$

peut s'écrire sous la forme

$$\ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\int_0^T [S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t)]dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T [S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t)]^2 dt.$$

Ona

$$\begin{aligned}\ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\int_0^T &\left[S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t)\right] dW_t - I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t + \\ &+ I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\|S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t)\|^2.\end{aligned}$$

Pour $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-1/2}(\theta)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \varepsilon^{-1}\int_0^T \left[S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t) - \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)\right] dW_t \\ &+ I(\theta_\varepsilon)^{-1/2}u_\varepsilon \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\|S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t)\|^2 \\ &= u_\varepsilon I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t - \frac{1}{2}(u_\varepsilon)^2 + \\ &+ \underbrace{\int_0^T \varepsilon^{-1}\left[S_t(\theta_\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t) - \left(u_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)\dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)\right)\right] dW_t}_{r_1(u_\varepsilon)} - \\ &- \underbrace{\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\|S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t)\|^2 - \frac{1}{2}u_\varepsilon^2\right]}_{r_2(u_\varepsilon)},\end{aligned}$$

car :

$$\int_0^T \left(I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon, x_t)\right)^2 dt = I^{-1}(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon^2 \int_0^T \dot{S}_t^2(\theta_\varepsilon, x_t)dt = u_\varepsilon^2.$$

On obtient donc :

$\forall\theta_\varepsilon \in \mathbb{k}, \quad \ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = \left(u_\varepsilon I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t\right) - \dfrac{1}{2}u_\varepsilon^2 + \mathbf{r}_1(u_\varepsilon) - \mathbf{r}_2(u_\varepsilon).$

i/ Montrons que $P_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathbf{r}_1(u_\varepsilon) = 0$ (en probabilité) :

Posons :

$$\Delta S_t(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(S_t(\theta_\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon, X_t) - S_t(\theta_\varepsilon, X_t)),$$

d'après le lemme (1.4.2), pour tout γ, δ_1 on obtient

$$\begin{aligned}P_\theta^{(\varepsilon)}\{|\,\mathbf{r}_1(u_\varepsilon)\,|>\delta_1\} &= P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^T\left[\Delta S_t(u_\varepsilon)-\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right]dW_t\right|>\delta_1\right\}\\ &\le \frac{\gamma}{\delta_1^2}+P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left\|\Delta S_t(u_\varepsilon)-\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right\|^2>\gamma\right\}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que :

$$P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left\|\Delta S_t(u_\varepsilon)-\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right\|^2>\gamma\right\}\longrightarrow 0,$$

sous la condition (H_2), pour k une constante générale et en utilisant deux fois le théorème des accroissement finis ; pour θ_1 entre $\theta_{\varepsilon,u}$ et θ_ε, $\tilde{\theta}$ entre θ_ε et θ_1, on obtient que :

$$\begin{aligned}&\left\|\Delta S_t(u_\varepsilon)-\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right\|^2=\varepsilon^{-2}\left\|S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)-\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right\|^2\\ &=\varepsilon^{-2}\left\|\dot{S}_t(\theta_1,X_t)(\theta_{\varepsilon,u}-\theta_\varepsilon)-\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right\|^2\\ &=\varepsilon^{-2}\left\|\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\left[\dot{S}_t(\theta_1,X_t)-\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right]\right\|^2\\ &=\varepsilon^{-2}\left\|\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\ddot{S}_t(\tilde{\theta},X_t)(\theta_1-\theta_\varepsilon)\right\|^2\\ &<\varepsilon^{-2}\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2k^2T\\ &<\left(I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)\right)^2u_\varepsilon^2\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2k^2T\longrightarrow 0,\quad \text{quand } \varepsilon\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

D'où, en choisissant δ_1 et γ petits tels que $\gamma\delta_1^{-2}$ reste aussi petit,

$$P_\theta^{(\varepsilon)}-\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathbf{r}_1(u_\varepsilon)=0.$$

ii/ Pour le deuxième terme $r_2(u_\varepsilon)$ on a

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_2(u_\varepsilon)|^2&=\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right\|-\frac{1}{2}u_\varepsilon^2\right]^2\\ &=\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right)^2dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right]^2dt\right]^2\\ &=\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left[\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right)^2-\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right)^2\right]dt\right]^2\\ &=\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left[S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)-\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right]\times\right.\\ &\left.\times\left[S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)+\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_{t(\theta_\varepsilon}, x_t)\right]dt\right]^2.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_2(u_\varepsilon)|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)-\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right\|^2 \times \\ \frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)+\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right\|^2.\end{aligned} \tag{2.9}$$

• Pour le premier terme de l'inégalité (2.9), on utilise deux fois le théorème des accroissement finis pour θ_1 entre $\theta_{\varepsilon,u}$ et θ_ε, $\tilde{\theta}$ entre θ_ε et θ_1 et une fois pour $\tilde{X}_t$ entre X_t et x_t ainsi que la condition (H_2) pour k et k' deux constantes fixes.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)-\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right\|^2\\
&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|\dot{S}_t(\theta_1,X_t)(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon)-\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right\|^2\\
&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\left[\dot{S}_t(\theta_1,X_t)-\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right]\right\|^2\\
&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2\left\|\left(\dot{S}_t(\theta_1,X_t)-\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)\right)+\left(\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,X_t)-\dot{S}_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right)\right\|^2\\
&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2\left\|\ddot{S}_t(\tilde{\theta},X_t)(\theta_1-\theta_\varepsilon)+\dot{S}'_t(\theta_\varepsilon,\tilde{X})(X_t-x_t)\right\|^2\\
&\leq 2^{-1}\varepsilon^{-2}\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2\left[2\int_0^T\left(\ddot{S}_t(\tilde{\theta},X_t)\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2dt+2\int_0^T\left(\dot{S}'_t(\theta_\varepsilon,\tilde{X}_t)(X_t-x_t)\right)^2dt\right]\\
&\leq 2^{-1}\varepsilon^{-2}\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2\left[2\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2k^2T+2k'^2\int_0^T(X_t-x_t)^2dt\right]\\
&\leq 2^{-1}\varepsilon^{-2}\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2\left[2\varepsilon^2\left(I^{-1/2}(\theta)u_\varepsilon\right)^2k^2T+2k'^2K_1^2\varepsilon^2\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|^2T\right]\\
&\leq\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2T\left[(I^{-1/2}(\theta)u_\varepsilon)^2k^2+k'^2K_1^2\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|^2\right]\longrightarrow 0,\quad \text{lorsque } \varepsilon\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi utilisé l'inégalité (2.7) dans les dernières estimations.

• D'autre part, on remarque que le dernier terme de(2.9) est borné car :

Par le théorème des accroissements finis par rapport à θ , nous avons :

$$S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)=\dot{S}_t(\bar{\theta},X_t)(\theta_{\varepsilon,u}-\theta_\varepsilon),\quad \textit{telle que}\quad \bar{\theta}\in]\theta_\varepsilon,\theta_{\varepsilon,u}[. \tag{2.10}$$

Et par les conditions de régularité, pour k une constante fixée,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|S_t(\theta_{\varepsilon,u},X_t)-S_t(\theta_\varepsilon,X_t)+\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot S_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right\|^2\\
&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|\dot S_t(\bar\theta,X_t)(\theta_{\varepsilon,u}-\theta_\varepsilon)+\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\dot S_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right\|^2\\
&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\left[\dot S_t(\bar\theta,X_t)+\dot S_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right]\right\|^2\\
&=\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\right)^2\int_0^T\left[\dot S_t(\bar\theta,X_t)+\dot S_t(\theta_\varepsilon,x_t)\right]^2dt\\
&\leq 2^{-1}(I^{-1/2}(\theta)u_\varepsilon)^2\left[2\int_0^T\dot S_t^2(\bar\theta,X_t)dt+2\int_0^T\dot S_t^2(\theta_\varepsilon,x_t)dt\right]\\
&\leq 2^{-1}(I^{-1/2}(\theta)u_\varepsilon)^2\left[2k^2T+2k^2T\right].
\end{aligned}$$

Et par suite :

$$P_\theta^{(\varepsilon)}-\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}\mathbf{r}_2(u_\varepsilon)=0.$$

Maintenant, montrons la normalité asymptotique de $\Delta(\theta,X^T)$:

On a, du lemme (1.4.2), pour tout $\gamma,\delta>0$:

$$\begin{aligned}
P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^T\dot S_t(\theta,X_t)dW_t-\int_0^T\dot S_t(\theta,x_t)dW_t\right|>\delta\right\}&=P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^T\left[\dot S_t(\theta,X_t)-\dot S_t(\theta,x_t)\right]dW_t\right|>\delta\right\}\\
&\leq\frac{\gamma}{\delta^2}+P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left\|\dot S_t(\theta,X_t)-\dot S_t(\theta,x_t)\right\|^2>\gamma\right\},
\end{aligned}$$

de l'inégalité (2.7) on obtient la convergence

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}\left\|\dot S_t(\theta,X_t)-\dot S_t(\theta,x_t)\right\|=0,\quad\text{en probabilité.}$$

Alors la v.a $\int_0^T\dot S_t(\theta,X_t)dW_t$ converge vers la v.a $\int_0^T\dot S_t(\theta,x_t)dW_t$ en probabilité quand $\varepsilon\longrightarrow0$, et donc elle converge en loi. Et d'après le corollaire (1.4.1)

$$\mathcal{L}\left(\int_0^T\dot S_t(\theta_\varepsilon,x_t)dW_t\right)=\mathcal{N}(0,I(\theta_\varepsilon)),$$

avec $I(\theta_\varepsilon)=\mathbb{E}\left(\int_0^T\dot S_t^2(\theta_\varepsilon,x_t)dt\right)=Var\left(\int_0^T\dot S_t(\theta_\varepsilon,x_t)dW_t\right)$.
En normalisant, on obtient

$$\mathcal{L}\left(I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)\int_0^T\dot S_t(\theta_\varepsilon,x_t)dW_t\right)=\mathcal{N}(0,1),$$

alors $I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t$ est uniformément asymptotiquement normale centrée réduite.

On conclut que

$$Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = \exp\left\{\left(I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)u_\varepsilon\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t\right) - \frac{1}{2}u_\varepsilon^2 + \mathbf{r}_1(u_\varepsilon) - \mathbf{r}_2(u_\varepsilon)\right\}, \forall\theta_\varepsilon \in \mathbb{k},$$

avec

$$\mathcal{L}\left(I^{-1/2}(\theta_\varepsilon)\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)dW_t\right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathbf{r}_1(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathbf{r}_2(u_\varepsilon) = 0, \quad \text{en probabilité.}$$

Et par suite la famille $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ est uniformément LAN avec la constante de normalisation $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-1/2}(\theta)$.

□

2.2.2 Comportement asymptotique de l'EMV

Dans le cas régulier quand la famille $\left\{P_\theta^{(\epsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ est LAN on a le résultat suivants, (voir [1] théorème 10.1) :

Théorème 2.2.2. *Soit $\Theta \subset \mathbb{R}$, et soient les fonctions $Z_\varepsilon(u)$ continues et possédant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout compact $\mathbb{k} \subset \Theta$*
   - *il existe $\alpha > 1$ et $m \geq \alpha$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{k}$*

   $$\sup_{\Theta\in\mathbb{k}}\sup_{|u_1|<R,|u_2|<R}|u_2 - u_1|^{-\alpha}\,\mathbb{E}_\theta\left|Z_\varepsilon^{1/m}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/m}(u_1)\right|^m \leq C(1 + R^a),$$

   où C et a deux constantes qui dépendent de $\mathbb{k}$.
   - *Pour tout $u \in U_\varepsilon$ et $\theta \in \mathbb{k}$,*

   $$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^{1/2}(u) \leq \exp\{-g(u)\},$$

   où $g(.)$ est une fonction positive.

2. *Uniformément en* $\theta \in \Bbbk$*, pour* $\varepsilon \longrightarrow 0$*, les distributions à dimension finie des fonctions aléatoires* $Z_\varepsilon(u)$ *convergent vers les distributions des fonctions aléatoires* $Z(u)$*.*

3. *Les fonctions limites* $Z(u)$ *atteignent la maximum en un point unique* $\hat{u}(\theta)$*.*

Alors uniformément en $\theta \in \Bbbk$*, la distribution de la v.a* $\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)$ *converge vers la distribution de* $\hat{u}(\theta)$*.*

Nous allons maintenant énoncer le théorème qui établit le comportement asymptotique de l'EMV.

Théorème 2.2.3. *[2] Si les conditions de régularité* (H_1)*-*(H_4) *sont satisfaites, alors uniformément sur tout compact* $\Bbbk = [a, b]$ *de* Θ*, l'estimateur* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *vérifie :*

1. $P_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \to 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta$.
2. $\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
3. $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}_\theta \left|\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)\right|^p = \mathbb{E}_\theta |\Delta|^p$ *pour tout* $p > 0$*, où* $\Delta \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque 2.2.1. *Ce théorème a été démontré par Kutoyants [2] pour le cas* Θ *un sous ensemble convexe de* $\mathbb{R}^d$*.*

Pour démontrer le théorème (2.2.3), nous vérifions les hypothèses du théorème (2.2.2) en nous basant sur les deux lemmes suivants.

Lemme 2.2.3. *Sous les conditions **(H)**, pour tout compact* $\Bbbk \subset \Theta$ *et pour tout* $R, C > 0$ *nous avons la majoration suivante :*

$$\sup_{\theta \in \Bbbk} \sup_{|u_i| < R, i=1,2} |\, u_2 - u_1 \,|^{-2m} \, \mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1) \right|^{2m} \leq C(1 + R^a),$$

avec a une constante.

Démonstration.

Posons : $\theta_i = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta) u_i, i = 1, 2$ et $\Delta S_t = \varepsilon^{-1} \left[S_t(\theta_2, X_t) - S_t(\theta_1, X_t) \right]$.

On considère le processus :

$$Y_t = \exp\left\{ \frac{1}{2m} \int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{4m} \int_0^t (\Delta S_s)^2 ds \right\},$$

et :

$$V_t = \ln Y_t = \frac{1}{2m}\int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{4m}\int_0^t (\Delta S_s)^2 ds.$$

En appliquant la formule d'Itô à $f(V_t) = \exp V_t$, on obtient

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{2m} Y_t \Delta S_t dW_t - \frac{1}{4m} Y_t \left(\Delta S_t\right)^2 dt + \frac{1}{8m^2}\left(\Delta S_t\right)^2 Y_t dt \\ &= -\frac{(2m-1)}{8m^2} Y_t \left(\Delta S_t\right)^2 dt + \frac{1}{2m} Y_t (\Delta S_t) dW_t,\ Y_0 = 1. \end{aligned}$$

Sous forme intégrale :

$$Y_T = 1 - \frac{(2m-1)}{8m^2}\int_0^T Y_t \left(\Delta S_t\right)^2 dt + \frac{1}{2m}\int_0^T Y_t (\Delta S_t) dW_t.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1) \right|^{2m} &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u_2}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u_1}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} \right|^{2m} dP^{(\varepsilon)}_\theta \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_2}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} \right|^{2m} dP^{(\varepsilon)}_\theta \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_2}}{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1}} \right)^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} \right|^{2m} dP^{(\varepsilon)}_\theta \\ &= \int_\Omega \frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} \left| \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_2}}{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1}} \right)^{\frac{1}{2m}} - 1 \right|^{2m} dP^{(\varepsilon)}_\theta \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_2}}{dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1}} \right)^{\frac{1}{2m}} - 1 \right|^{2m} dP^{(\varepsilon)}_{\theta_1} \\ &= \mathbb{E}_{\theta_1} \left| L^{\frac{1}{2m}}(\theta_2, \theta_1, X^T) - 1 \right|^{2m} \\ &= \mathbb{E}_{\theta_1} |1 - Y_T|^{2m}. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de Y_T et l'inégalité

$$(a+b)^{2m} \leq 2^{2m-1}(a^{2m} + b^{2m}),\ \textit{avec}\ m \in \mathbb{N}^*, \tag{2.11}$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\theta_1}\left|1-Y_T\right|^{2m}\\
&=\mathbb{E}_{\theta_1}\left|\frac{(2m-1)}{8m^2}\int_0^T Y_t\left(\Delta S_t\right)^2 dt-\frac{1}{2m}\int_0^T Y_t(\Delta S_t)dW_t\right|^{2m}\\
&\leq 2^{2m-1}\left[\mathbb{E}_{\theta_1}\left|\frac{(2m-1)}{8m^2}\int_0^T Y_t\left(\Delta S_t\right)^2 dt\right|^{2m}+\mathbb{E}_{\theta_1}\left|\frac{1}{2m}\int_0^T Y_t(\Delta S_t)dW_t\right|^{2m}\right]\\
&=2^{2m-1}\left[\left(\frac{(2m-1)}{8m^2}\right)^{2m}\mathbb{E}_{\theta_1}\left|\int_0^T Y_t\left(\Delta S_t\right)^2 dt\right|^{2m}+\left(\frac{1}{2m}\right)^{2m}\mathbb{E}_{\theta_1}\left|\int_0^T Y_t(\Delta S_t)dW_t\right|^{2m}\right].
\end{aligned}
$$

Pour la première intégrale, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left|\int_0^T Y_t\left(\Delta S_t\right)^2 dt\right|^{2m} &\leq \mathbb{E}_{\theta_1}\left|\left[\int_0^T\left(Y_t\left(\Delta S_t\right)^2\right)^{2m}dt\right]^{\frac{1}{2m}}\left[\int_0^T dt\right]^{\frac{2m-1}{2m}}\right|^{2m}\\
&=T^{2m-1}\;\mathbb{E}_{\theta_1}\int_0^T\left(\Delta S_t\right)^{4m}Y_t^{2m}dt\\
&=T^{2m-1}\;\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\Delta S_t\right)^{4m}Y_t^{2m}dt,
\end{aligned}
$$

et pour la deuxième intégrale, par l'inégalité (1.2) du lemme (1.4.1) nous avons :

$$
\mathbb{E}_{\theta_1}\left|\int_0^T Y_t(\Delta S_t)dW_t\right|^{2m}\leq\left(m(2m-1)\right)^m T^{m-1}\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\Delta S_t\right)^{2m}Y_t^{2m}dt.
$$

Et par suite :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\theta}\left|Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2)-Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1)\right|^{2m}\\
&\leq C_1(m,T)\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\Delta S_t\right)^{4m}Y_t^{2m}dt+C_2(m,T)\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\Delta S_t\right)^{2m}Y_t^{2m}dt.
\end{aligned}
$$

Puis par un changement de mesure

$$
\mathbb{E}_{\theta}\left|Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2)-Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1)\right|^{2m}\leq C_1\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_2}\left(\Delta S_t\right)^{4m}dt+C_2\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_2}\left(\Delta S_t\right)^{2m}dt.
$$

D'autre part, sous la condition de régularité (H_1) : selon le théorème des accroissements finis pour $\tilde{\theta} \in]\theta_1, \theta_2[$ nous avons,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_2} (\Delta S_t)^{4m} &= \mathbb{E}_{\theta_2} \frac{1}{\varepsilon^{4m}} \left(S_t(\theta_2, X_t) - S_t(\theta_1, X_t)\right)^{4m} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^{4m}} \left|\theta_2 - \theta_1\right|^{4m} \mathbb{E}_{\theta_2} \left|\dot{S}_t(\tilde{\theta}, X_t)\right|^{4m},
\end{aligned}$$

et par les inégalités (2.11) et (2.8) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_2} \left|\dot{S}_t(\tilde{\theta}, X_t)\right|^{4m} &= \mathbb{E}_{\theta_2} \left|\dot{S}_t(\tilde{\theta}, X_t) - \dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t) + \dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right|^{4m} \\
&\leq C\ \mathbb{E}_{\theta_2} \left|\dot{S}_t(\tilde{\theta}, X_t) - \dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right|^{4m} + \left(\dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right)^{4m} \\
&\leq C\ \mathbb{E}_{\theta_2} \left(K \left|X_t - x_t\right|\right)^{4m} + \left(\dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right)^{4m} \\
&= K_1 \mathbb{E}_{\theta_2} \left|X_t - x_t\right|^{4m} + \left(\dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right)^{4m} \\
&\leq K_2 \varepsilon^{4m} + \left(\dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right)^{4m},
\end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{E}_{\theta_2} (\Delta S_t)^{4m} \leq \frac{1}{\varepsilon^{4m}} \left|\theta_2 - \theta_1\right|^{4m} \left[K_2 \varepsilon^{4m} + \left(\dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right)^{4m}\right].$$

De même :

$$\mathbb{E}_{\theta_2} (\Delta S_t)^{2m} \leq \frac{1}{\varepsilon^{2m}} \left|\theta_2 - \theta_1\right|^{2m} \left[K_2 \varepsilon^{2m} + \left(\dot{S}_t(\tilde{\theta}, x_t)\right)^{2m}\right].$$

Or $|\theta_2 - \theta_1| = \varphi_\varepsilon(\theta)|u_2 - u_1|$ donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \left|Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1)\right|^{2m} \\
&\leq C_1 \frac{1}{\varepsilon^{4m}} \varphi_\varepsilon^{4m}(\theta) \left|u_2 - u_1\right|^{4m} \left[K_2 \varepsilon^{4m} + K_2'^{4m}\right] + C_2 \frac{1}{\varepsilon^{2m}} \varphi_\varepsilon^{2m}(\theta) \left|u_2 - u_1\right|^{2m} \left[K_2 \varepsilon^{2m} + K_2'^{2m}\right] \\
&\leq C_3 \left|u_2 - u_1\right|^{4m} + C_4 \left|u_2 - u_1\right|^{2m}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in \Bbbk} \sup_{|u_i| < R, i=1,2} &\mid u_2 - u_1 \mid^{-2m} \mathbb{E}_\theta \left|Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1)\right|^{2m} \\
&\leq C_3 \left|u_2 - u_1\right|^{2m} + C_4 \\
&\leq C_3 (2R)^{2m} + C_4 \\
&\leq C(R^{2m} + 1).
\end{aligned}$$

□

Notons par **G** l'espace des fonctions $\{g(y), y \geq 0\}$ telles que

$$\lim_{y \longrightarrow \infty} y^N e^{-g(y)} = 0.$$

Lemme 2.2.4. *Sous les conditions (**H**), pour tout $p \in (0,1)$ et pour tout compact $\Bbbk \subset \Theta$ il existe une fonction $g(\Bbbk, p, u) = g(|u|) \in G$ telle que*

$$\sup_{\theta \in \Bbbk} \mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq e^{-g(|u|)}.$$

Démonstration.

On note $\Delta S_t = \varepsilon^{-1}\left[S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right]$ et par l'inégalité de Hölder

On a

$$\mathbb{E}_\theta(Z_\varepsilon^p(u)) = \mathbb{E}_\theta \exp\left[p\Big\{\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{1}{2}\left\|\Delta S_t\right\|^2\Big\}\right]$$
$$= \mathbb{E}_\theta\Big[\exp\Big\{-\frac{(p-q)}{2}\left\|\Delta S_t\right\|^2\Big\} \times \exp\Big\{-\frac{q}{2}\left\|\Delta S\right\|^2 + p\int_0^T \Delta S_t dW_t\Big\}\Big]$$
$$= \mathbb{E}_\theta\Big[\exp\Big\{-\frac{(p-q)}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right)^2 dt\Big\} \exp\Big\{p$$
$$\int_0^T \varepsilon^{-1}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right) dW_t - \frac{q}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right)^2 dt\Big\}\Big]$$
$$\leq \Big[\mathbb{E}_\theta \exp\Big\{-\frac{(p-q)}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right)^2 dt\Big\}^{p_1}\Big]^{\frac{1}{p_1}}\Big[\mathbb{E}\exp\Big\{p$$
$$\int_0^T \varepsilon^{-1}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right) dW_t - \frac{q}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right)^2 dt\Big\}^{p_2}\Big]^{\frac{1}{p_2}}$$
$$\leq \Big[\mathbb{E}_\theta \exp\Big\{-\frac{(p-q)}{2}p_1\int_0^T \varepsilon^{-2}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right)^2 dt\Big\}\Big]^{\frac{1}{p_1}}\Big[\mathbb{E}\exp\Big\{pp_2$$
$$\int_0^T \varepsilon^{-1}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right) dW_t - \frac{qp_2}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right)^2 dt\Big\}\Big]^{\frac{1}{p_2}}.$$

Si l'on choisit q et p_2 tels que :

$$p_2 = \frac{q}{p^2} \quad \text{et donc } \frac{1}{p_1} = \frac{q-p^2}{q},$$

par l'inégalité (1.3) du Lemme (1.4.1), nous avons

$$\mathbb{E}_\theta(Z_\varepsilon^p(u)) \leq \left[\mathbb{E}_\theta \exp\left\{-\frac{(p-q)}{2}\frac{q}{q-p^2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\left(S_t(\theta_{\varepsilon,u}, X_t) - S_t(\theta, X_t)\right)^2 dt\right\}\right]^{\dfrac{q-p^2}{2}},$$

posons
$$\gamma = \frac{q(p-q)}{2(q-p^2)},$$
d'après l'inégalité élémentaire suivante : $a^2 \geq b^2 - 2\left|b(a-b)\right|$, pour $a = S_t(\theta+u, X_t) - S_t(\theta, X_t)$, $b = S_t(\theta+u, x_t) - S_t(\theta, x_t)$, nous pouvons écrire l'inégalité

$$\begin{aligned}
\left[S_t(\theta+u,X_t) - S_t(\theta,X_t)\right]^2 &\geq \left[S_t(\theta+u,x_t) - S_t(\theta,x_t)\right]^2 - 2\left|S_t(\theta+u,x_t) - S_t(\theta,x_t)\right| \times \\
&\times \left|S_t(\theta+u,X_t) - S_t(\theta,X_t) - S_t(\theta+u,x_t) + S_t(\theta,x_t)\right| \\
&\geq \left[S_t(\theta+u,x_t) - S_t(\theta,x_t)\right]^2 - 2\left|S_t(\theta+u,x_t) - S_t(\theta,x_t)\right| \times \\
&\times \Big(\left|S_t(\theta+u,X_t) - S_t(\theta+u,x_t)\right| + \left|S_t(\theta,X_t) - S_t(\theta,x_t)\right| \Big).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Par un développement de Taylor d'ordre 1 de $S(x)$ au voisinage de θ pour $|u| \to 0$, nous avons pour le premier terme du majorant

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[S_t(\theta+u,x_t) - S_t(\theta,x_t)\right]^2 dt = \int_0^T \left[\dot{S}_t(\theta,x_t)(u) + \circ(u)\right]^2 dt \\
&= \int_0^T \dot{S}_t^2(\theta,x_t)\ u^2 dt + \circ(u^2) \\
&= u^2 I(\theta) + \circ(u^2) \\
&\geq C_K u^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, par l'hypothèse de régularité (H_2) et d'après le théorème des accroissement finis, pour $\theta_1 \in]\theta, \theta+u[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left[S_t(\theta+u,x_t) - S_t(\theta,x_t)\right]^2 dt &= \int_0^T \left[\dot{S}_t(\theta_1,x_t)(\theta+u-\theta))\right]^2 dt \\
&= \int_0^T \dot{S}_t^2(\theta_1,x_t) u^2 dt \\
&\leq k^2 u^2 T = A^2 u^2,
\end{aligned}$$

donc
$$C_K u^2 \leq \int_0^T \left[S_t(\theta+u,x_t) - S_t(\theta,x_t)\right]^2 dt \leq A^2 u^2. \tag{2.13}$$

Pour le dernier terme de (2.12), nous appliquons l'inégalité de Cauchy schwarz, le théorème des accroissement finis et l'inégalité (2.7)

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T |S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)|\,|S_t(\theta+u,X_t)-S_t(\theta+u,x_t)|\,dt\right)^2\\
&\le\left(\int_0^T |S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)|^2\,dt\right)\left(\int_0^T |S_t(\theta+u,X_t)-S_t(\theta+u,x_t)|^2\,dt\right)\\
&\le A^2u^2\int_0^T \left[S_t^{'}(\theta+u,\tilde{X}_t)(X_t-x_t)\right]^2 dt\\
&\le A^2u^2k^2T\sup_{0\le t\le T}|X_t-x_t|^2\\
&\le A^2u^2k^2TK_1^2\varepsilon^2\left(\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right)^2,
\end{aligned}$$

nous obtenons l'estimation suivant

$$\int_0^T |S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)|\,|S_t(\theta+u,X_t)-S_t(\theta+u,x_t)|\,dt\le A\,|u|\,k\sqrt{T}K_1\varepsilon\left(\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right), \tag{2.14}$$

de même, nous avons la majoration

$$\int_0^T |S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)|\,|S_t(\theta,X_t)-S_t(\theta,x_t)|\,dt\le A\,|u|\,k\sqrt{T}K_1\varepsilon\left(\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right), \tag{2.15}$$

donc d'après (2.12),(2.13),(2.14),(2.15), nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\exp\left[-\gamma\varepsilon^{-2}\int_0^T\left(S_t(\theta_\varepsilon+\varphi_\varepsilon(\theta)u,X_t)-S_t(\theta,X_t)\right)^2dt\right]\\
&\le\mathbb{E}_\theta\exp\left(-\gamma\varepsilon^{-2}\int_0^T\left(S_t(\theta_\varepsilon+\varphi_\varepsilon(\theta)u,x_t)-S_t(\theta,x_t)\right)^2dt\right)\\
&\qquad\times\mathbb{E}_\theta\exp\left[4\gamma\varepsilon^{-2}A\,|u|\,k\sqrt{T}K_1\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)\left(\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right)\right]\\
&\le\exp\left(-\gamma C_Ku^2I^{-1}(\theta)\right)\times\mathbb{E}_\theta\exp\left[4\gamma A\,|u|\,k\sqrt{T}K_1I^{-1/2}(\theta)\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right],
\end{aligned}$$

donc d'après le lemme (1.3.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\exp\left[4\gamma A\,|u|\,k\sqrt{T}K_1I^{-1/2}(\theta)\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right]\\
&\qquad\le 1+4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\exp\left[8\gamma^2A^2u^2k^2K_1^2T^2I^{-1}(\theta)\right].
\end{aligned}$$

On pose
$$\gamma = \frac{C_K}{16T^2k^2K_1^2A^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta(Z_\varepsilon^p(u)) \\
&\leq \left[\exp\left(-\gamma C_K u^2 I^{-1}(\theta)\right)\left(1+4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\exp(\frac{1}{2}\gamma C_K u^2 I^{-1}(\theta))\right)\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&= \left[\exp\left(-\gamma C_K u^2 I^{-1}(\theta)\right)+4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\exp(-\frac{1}{2}\gamma C_K u^2 I^{-1}(\theta))\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&\leq \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma C_K u^2 I^{-1}(\theta)\right)+4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\exp(-\frac{1}{2}\gamma C_K u^2 I^{-1}(\theta))\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&= \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma C_K u^2 I^{-1}(\theta)\right)\left(1+4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\right)\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}\frac{q-p^2}{q}C_K u^2 I^{-1}(\theta)\right)\left(1+4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\right)^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{4}(p-q)C_K u^2 I^{-1}(\theta)\right)\exp\left(4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\frac{q-p^2}{q}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{4}(p-q)C_K u^2 I^{-1}(\theta)+4\gamma A\,|u|\,kK_1TI^{-1/2}(\theta)\sqrt{8\pi}\frac{q-p^2}{q}\right),
\end{aligned}$$

où nous appliquons l'inégalité :$1+x\leq\exp(x)$.
Et par suite : $\mathbb{E}_\theta(Z_\varepsilon^p(u)) \leq e^{-g(|u|)}$, avec $g(y) = g(\Bbbk, p, y) = c_1y^2 - c_2y, c_1, c_2 > 0$, donc pour tout $N > 0$ on a $\lim_{y\longrightarrow\infty} y^N e^{-g(y)} = 0$. Alors on a bien $g(.) \in \mathbf{G}$, d'où le résultat. □

Les Lemmes (2.2.3) et (2.2.4) impliquent que la famille des lois des processus du rapport de vraisemblance $(Z_\epsilon(u); u \in \varepsilon^{-1}(\Theta-\theta))$ est tendue dans l'espace $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 à l'infini. De plus, le théorème (2.2.1) implique que les processus convergent faiblement dans $C_0(\mathbb{R})$ vers un processus que l'on note $(Z(u))$. En effet, du théorème (2.2.1), pour tout $u \in \varepsilon^{-1}(\Theta-\theta)$,

$$Z_\varepsilon(u) := L(\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u, \theta, X^T) = \exp\left(u\Delta_\varepsilon - \frac{1}{2}u^2 + \psi_\varepsilon(u,\theta)\right),$$

où $\mathcal{L}_\theta(\Delta_\varepsilon) \Longrightarrow \mathcal{L}_\theta(\Delta) \equiv \mathcal{N}(0,1)$. Nous pouvons donc introduire : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $Z(u) = \exp(u\Delta - \frac{1}{2}u^2)$. Ces résultats assurent aussi que le processus limite atteint son maximum. Voir théorèmes 1.1 et 1.6, cités dans [2] pour plus de détails.

Chapitre 3

Application

Introduction

Les processus stochastiques continus sont des outils largement utilisés dans divers domaines. En finance, par exemple, ils sont essentiels pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt et des cours des actions, ce qui nécessite souvent la simulation de leurs trajectoires. Aujourd'hui, les avancées en informatique encouragent les scientifiques à développer des schémas numériques pour résoudre approximativement les équations différentielles stochastiques.

Dans ce chapitre, nous étudions un exemple de processus d'Ornstein-Uhlenbeck et illustrons le comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance, comme étudié dans le chapitre 2, dans le cadre des petites diffusions. Nous allons également simuler des trajectoires d'un mouvement brownien, de ce processus de diffusion, ainsi que du comportement de l'EMV. Nous utilisons le logiciel R avec le package Sim.DiffProc (Simulation of Diffusion Processes), qui offre des outils pour explorer les données et illustrer le comportement des estimateurs lorsque le coefficient de diffusion tend vers zéro.
Nous nous somme baser dans ce chapitre des références suivants [4] et [2].

3.1 Exemple d'application

3.1.1 Processus de Orenstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est souvent utilisé pour modéliser des phénomènes où un système est soumis à un rappel vers une position d'équilibre, avec une composante aléatoire, il est souvent décrit par l'équation différentielle stochastique (SDE) suivante :

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

où :

- (X_t) est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à l'instant t.
- (θ) est la coefficient de rappel, qui détermine la force du rappel vers la position d'équilibre μ.
- (μ) est la position d'équilibre du processus.
- (σ) est l'écart type du bruit gaussien dW_t, qui représente la composante aléatoire.
- (dW_t) est une variation infinitésimale du mouvement brownien (processus de wiener), qui est une source de bruit.

Nous nous intéressons à étudier, dans ce chapitre, le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck où $\mu = 0$,

$$\begin{cases} dX_t = -\theta X_t dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Notons que le processus est stationnaire seulement pour $\theta > 0$.
Pour résoudre l'équation (3.1), on pose :

$$Y_t = X_t e^{\theta t}.$$

En appliquant la formule d'Itô (1.5) à la fonction $f(t, x) = xe^{\theta t}$, on trouve

$$df(t, x_t) = \theta x_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dx_t.$$

Et par suite

$$\begin{aligned} dY_t &= X_t\theta e^{\theta t}dt + e^{\theta t}dX_t \\ &= X_t\theta e^{\theta t}dt + e^{\theta t}\left[-\theta X_t dt + \varepsilon dW_t\right] \\ &= \varepsilon e^{\theta t}dW_t, \end{aligned}$$

sous forme intégrale

$$Y_t = Y_0 + \varepsilon \int_0^t e^{\theta s}dW_s,$$

et

$$X_t e^{\theta t} = X_0 + \varepsilon \int_0^t e^{\theta s}dW_s,$$

donc on en déduit la solution pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = x_0 e^{-\theta t} + \varepsilon \int_0^t e^{-\theta(t-s)}dW_s.$$

Le processus d'Orenstein-Uhlenbeck a pour moyenne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(x_0 e^{-\theta t} + \varepsilon \int_0^t e^{-\theta(t-s)}dW_s) \\ &= e^{-\theta t}\left[x_0 + \mathbb{E}(\int_0^t e^{\theta s}dW_s)\right], \end{aligned}$$

d'après les propriétés (1.4.1) de l'intégrale stochastique, on a :

$$\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\theta t},$$

et la variance

$$\begin{aligned} &Var(X_t) = Var\left(e^{-\theta t}\left(x_0 + \varepsilon \int_0^t e^{\theta s}dW_s\right)\right) \\ &= \varepsilon^2 e^{-2\theta t}\int_0^t e^{2\theta s}ds \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta t}\right). \end{aligned}$$

Déterminons la covariance de ce processus :

$$Cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_s).$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_tX_s) &= \mathbb{E}\Big(x_0e^{-\theta t} + \varepsilon\int_0^t e^{-\theta(t-v)}dW_v\Big)\Big(x_0e^{-\theta s} + \varepsilon\int_0^s e^{-\theta(s-v)}dW_v\Big)\\ &= x_0^2e^{-\theta(t+s)} + \mathbb{E}\Big(\varepsilon^2\int_0^t e^{-\theta(t-v)}dW_v\int_0^s e^{-\theta(s-v)}dW_v\Big),\end{aligned}$$

d'après les propriétés (1.4.1) on a :

$si : s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_tX_s) &= x_0^2e^{-\theta(t+s)} + \varepsilon^2\int_0^s e^{-\theta(t+s-2v)}dv\\ &= x_0^2e^{-\theta(t+s)} + \varepsilon^2e^{-\theta(t+s)}\Big(\frac{1}{2\theta}e^{2\theta s}\Big)\\ &= x_0^2e^{-\theta(t+s)} + \frac{\varepsilon^2}{2\theta}e^{-\theta(t-s)}.\end{aligned}$$

Alors

$$Cov(X_t, X_s) = \frac{\varepsilon^2}{2\theta}e^{-\theta|t-s|}, \qquad \forall t, s.$$

3.1.2 Information de Fisher

Nous rappelons que l'information de Fisher pour ce type de problème, où $\Theta \subset \mathbb{R}$, est donnée par :

$$I(\theta) = \int_0^T \dot{S}_t^2(\theta, x_t)dt,\ \ \theta \in \Theta,$$

où x_t est la solution de l'équation différentielle déterministe (EDO) associée à ce problème (l'orsque $\varepsilon = 0$), définit par :

$$\frac{dx_t}{dt} = -\theta x_t, \qquad x_0,\ 0 \leq t \leq T.$$

donc :

$$x_t = x_0e^{-\theta t}.$$

Et par suite, pour $S_t(\theta, x_t) = -\theta x_t$,

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\theta x_0 e^{-\theta t}\right)\right]^2 dt = \int_0^T \left[x_0 e^{-\theta t}(t\theta - 1)\right]^2 dt \\
&= \int_0^T x_0^2 e^{-2\theta t}(t\theta - 1)^2 dt \\
&= -\frac{x_0^2}{2\theta}\int_0^T (t\theta - 1)^2 d(e^{-2\theta t}) \\
&= -\frac{x_0^2}{2\theta}\left[\left[(t\theta - 1)^2 e^{-2\theta t}\right]_0^T - \int_0^T e^{-2\theta t}\left[2\theta(t\theta - 1)\right]\right] dt \\
&= -\frac{x_0^2}{2\theta}\left[(T\theta - 1)^2 e^{-2\theta T} - 1 - 2\theta\int_0^T (t\theta - 1)e^{-2\theta t} dt\right],
\end{aligned}$$

après une deuxième intégration par partie on trouve :

$$I(\theta) = \frac{x_0^2}{4\theta}\left[1 - e^{-2\theta T}\left(1 + 2\theta^2 T^2 - 2\theta T\right)\right].$$

Remarque 3.1.1. *Dans le contexte de l'analyse de l'I.F pour le processus d'O.U, nous considérons la "formule standard" pour $\dot{S}_t(x_t, \theta)$ (sans utiliser l'approximation).*

i/ $\dot{S}_t(x_t)$ est la dérivé de $S_t(x_t)$ par rapport à θ, donc :

$$\dot{S}_t(x_t) = \frac{\partial(S_t(x_t, \theta))}{\partial\theta} = -x_t - \theta x_0 t e^{-\theta t}.$$

ii/ Pour calculer $I(\theta)$, on prend $\left(\dot{S}(x_t) = -x_t, \quad 0 \le t \le T\right)$, et donc :

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= \int_0^T \left(-x_0 e^{-\theta t}\right)^2 dt = x_0^2 \int_0^T e^{-2\theta t} dt \\
&= x_0^2\left[-\frac{1}{2\theta}[e^{-2\theta t}]_0^T\right] \\
&= \frac{x_0^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta T}).
\end{aligned}$$

Cette expression permet d'évaluer la précision de l'estimateur du paramètre θ en fonction de la durée d'observation et des condition initial.

on peut aussi donner le rapport de vraisemblance associé à ce problème d'après la formule (2.5) pour deux valeurs de paramètre,θ_1 et θ_2, on a :

$$\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X^T) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left[S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)\right] dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left[S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)\right]^2 dt\right]$$
$$= \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left[-\theta_1 X_{t,\theta_1} + \theta_2 X_{t,\theta_2}\right] dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left[-\theta_1 X_{t,\theta_1} + \theta_2 X_{t,\theta_2}\right]^2 dt\right],$$

où X_{t,θ_1} (resp.X_{t,θ_2}) sont les processus solutions pour les valeurs du paramètre θ_1 (resp. θ_2).

3.1.3 Vérifications des hypothèses de régularité

(H_1) la fonction $S_t(\theta, x_t)$ satisfait les conditions $\mathcal{L}$, en effet pour toute constante assez grande $C < \infty$ (ne dépend pas du paramètre à estimer θ)

on a :

i) $|-\theta x + \theta y| = \theta\,|x - y| \leq C\,|x - y|\,.$

ii) $|-\theta x| + \varepsilon = \theta\,|x| + \varepsilon \leq \max(\theta, \varepsilon)\,(|x| + 1) \leq C\,(|x| + 1)\,.$

iii) $X_0 = x_0$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_t, t \geq 0\}$.

(H_2) la fonction $S_t(\theta, x_t) = -\theta x_t$ est dérivable par rapport à θ.

(H_3) l'information de fisher $I(\theta) = \frac{x_0}{2\theta}(1 - e^{-2\theta T})$ est strictement positive.

(H_4) pour tout $\nu > 0$ et tout compact $\Bbbk \subset \Theta$ ona

$$\|-(\theta + u)x + \theta x\|^2 = \|ux\|^2 = u^2 \int_0^T x_t^2 dt > 0.$$

car si $\int_0^T x_t^2 dt = 0$ alors $x \equiv 0$. on en déduit que

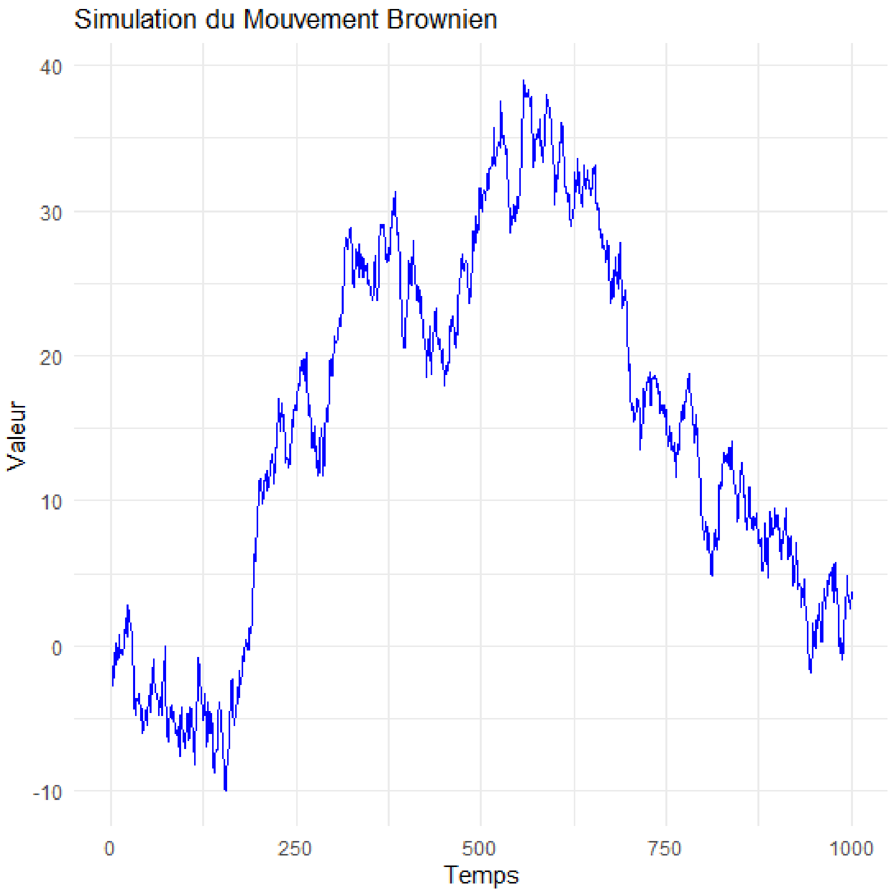
$$\inf_{\theta \in K}\ \inf_{u > \nu, \theta + u \in \Theta} \|S(\theta + u, x) - S(\theta, x)\| > 0.$$

3.2 Simulation numérique

3.2.1 Trajectoire d'un mouvement Brownien

Nous utilisons la fonction "brownien_motion" pour simuler le mouvement brownien dans un intervalle de temps $[0, T]$, $W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}$, représentant des variables aléatoires indépendantes de distribution gaussienne centrées réduites $\mathcal{N}(0, 1)$.

```
library(ggplot2)
# Fonction pour simuler le mouvement brownien
brownian_motion <- function(n_steps = 1000, delta_t = 1)
{
# Générer les incréments de mouvement brownien
increments <- rnorm(n_steps, mean = 0, sd = sqrt(delta_t))
# Calculer les valeurs du mouvement brownien
brownian_values <- cumsum(increments)
return(brownian_values) }
# Paramètres de simulation
n_steps <- 1000    # Nombre de pas
delta_t <- 1    # Intervalle de temps
# Simulation du mouvement brownien
brownian_values <- brownian_motion(n_steps, delta_t)
# Créer un data frame pour les données
data <- data.frame(temps = seq(1, n_steps), valeur = brownian_values)
# Tracer le mouvement brownien avec ggplot2
ggplot(data, aes(x = temps, y = valeur)) +
geom_line(color = "blue") +
labs(x = "Temps", y = "Valeur", title = "Simulation du Mouvement Brownien")
+
theme_minimal()
```



3.2.2 Trajectoire d'un processus Ornstein-Uhlenbeck

Nous pouvons simuler une trajectoire de processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme suit. on considère la subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$ suivante
$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N < t_{N+1} = T$, avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ et $X_{t_0} = x_0$, ona l'algorithme suivante :

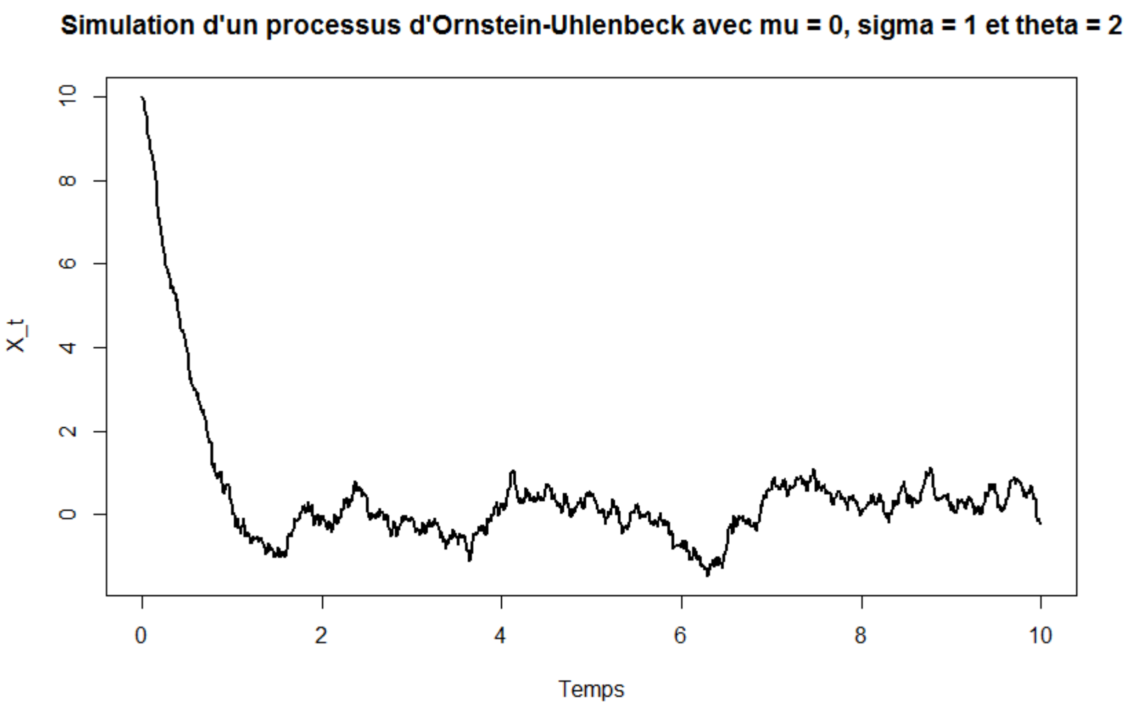
1. Générer une variable aléatoire Z de distribution gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. incrémentation : $i = i + 1$.
3. $W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + Z\sqrt{\Delta t}$.
4. $I_i = e^{-\theta(t_{i+1}-t_i)}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$.
5. $X_{t_i} = X_0 e^{-\theta(t_{i-1})} + \varepsilon \sum_{j=1}^{i} I_j$.
6. si $i \leq N + 1$, réitérez à l'étape 1.

La fonction **"simulate_OU_mu_zero_theta"** permet de simuler une seule trajectoire de X_t dans l'intervalle $[0, T]$ avec un pas $\Delta t = T/N$.

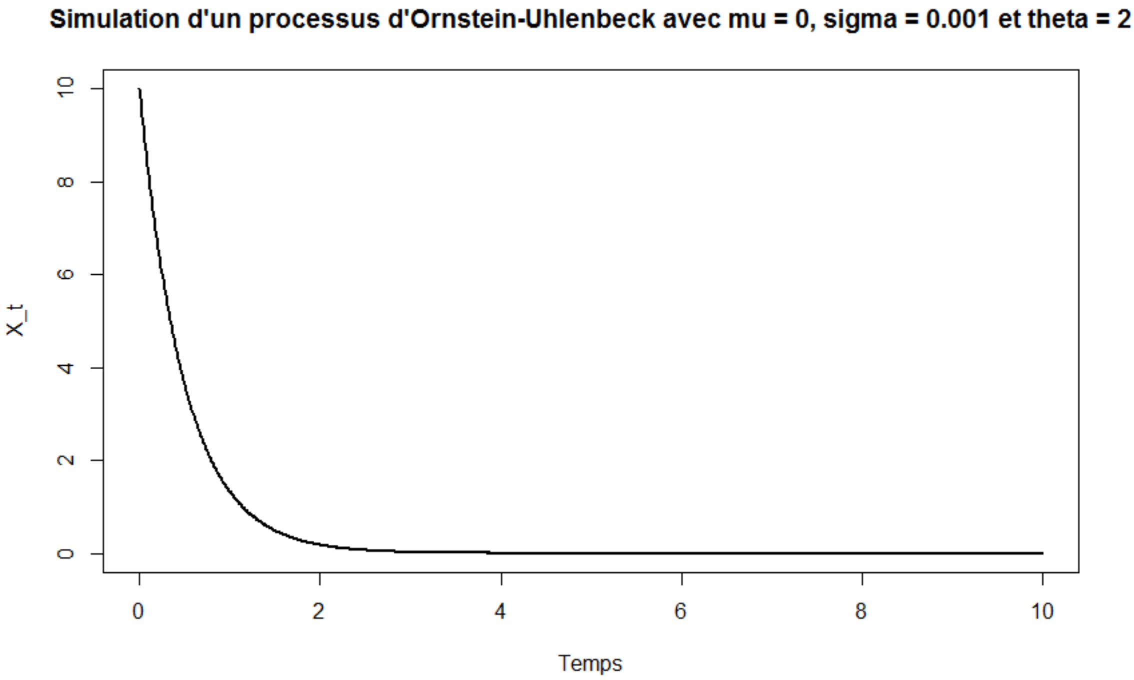
```
# Fonction pour simuler le processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec mu = 0 et
theta
simulate_OU_mu_zero_theta <- function(N, M, x0, t0, T, sigma, theta) {
# Calcul du pas de temps
Dt <- (T - t0) / N
# Initialisation
t <- seq(t0, T, length.out = N)  # Création de la grille de temps
X <- numeric(N)  # Vecteur pour stocker les valeurs de la trajectoire
X[1] <- x0  # Condition initiale
# Simulation
for (i in 2 :N) {
dW <- sqrt(Dt) * rnorm(1)  # Incréments du bruit stochastique
dX <- -theta * X[i-1] * Dt + sigma * dW  # Incréments du processus d'OU
avec mu = 0 et theta
X[i] <- X[i-1] + dX  # Mise à jour de la trajectoire
}
return(list(t = t, X = X))
}

   # Paramètres
N <- 1000  # Nombre de pas de temps
M <- 1  # Nombre de trajectoires à simuler
x0 <- 10  # Condition initiale
t0 <- 0  # Temps initial
T <- 10  # Temps final
sigma <- 1  # l'écart-type du bruit stochastique
theta <- 2  # Coefficient de réversion
# Simulation avec theta = 2
result_theta_2 <- simulate_OU_mu_zero_theta(N, M, x0, t0, T, sigma,
theta)
```

```
# Tracé de la trajectoire
plot(result_theta_2$ , result_theta_2$X, type = "l", lwd = 2, xlab = "Temps",
ylab = "X_t",
main = "Simulation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec mu = 0, sigma
= 1 et theta = 2")
```



On peut changer la valeur de ε (noté σ dans le programme) pour voire l'effet du coefficient de diffusion sur la perturbation de la trajectoire, i.e on prend une valeur plus petite que 1 :



on remarque que cette trajectoire est plus lisse que celle qui a été tracée avec $\varepsilon = 1$

Interprétation : Pour un ω fixé de manière aléatoire la simulation, moyennant le logiciel R, nous permet de mettre en évidence l'idée que la trajectoire de $X_t(\omega)$ est de plus en plus lisse "presque dérivable" quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ (réduction du perturbation) c'est à dire que la régularité de la trajectoire va de paire avec la réduction de la perturbation.

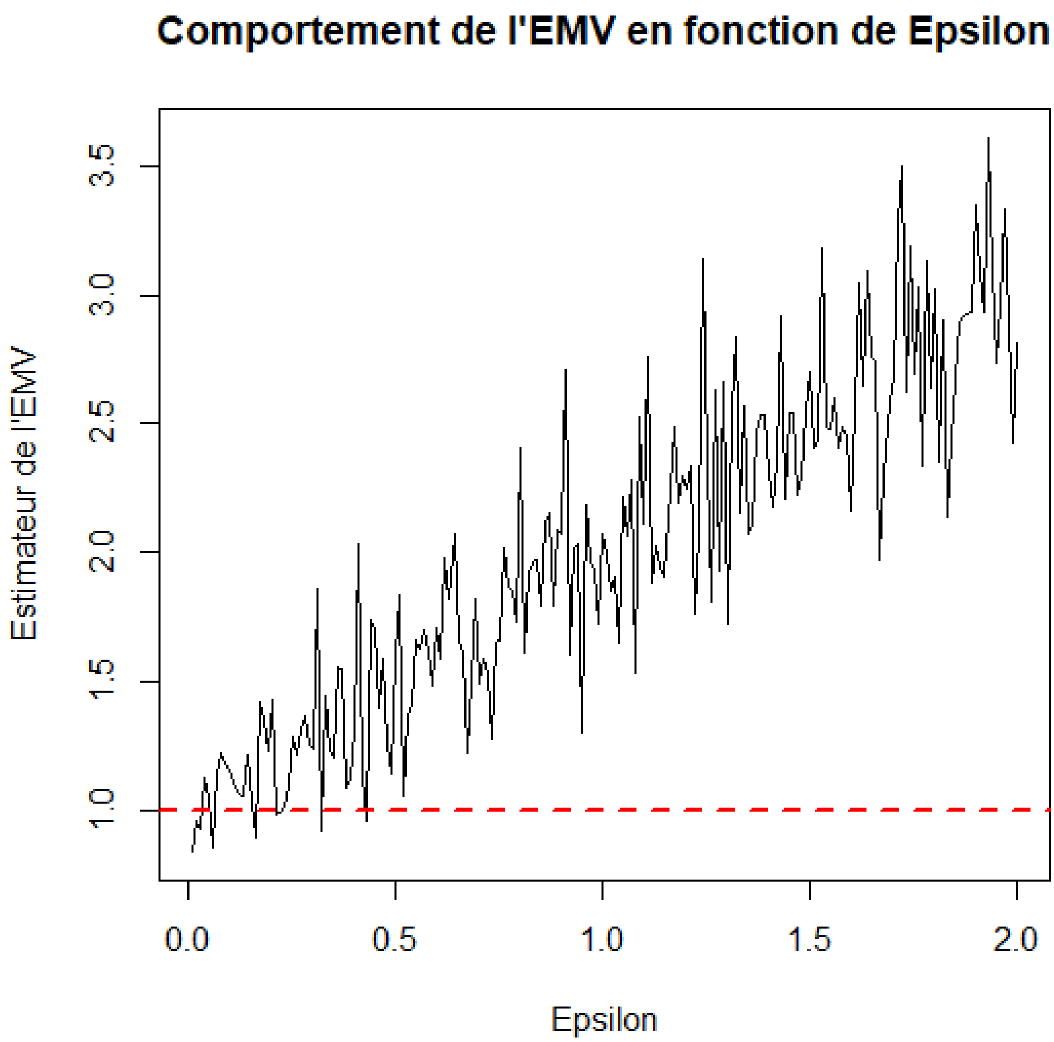
Ici le paramètre à estimer est le coefficient θ. on va utiliser la méthode du maximum de vraisemblance, ensuite illustrer le comportement de l'estimateur quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

3.2.3 comportement de l'estimateur de maximum de vraisemblance

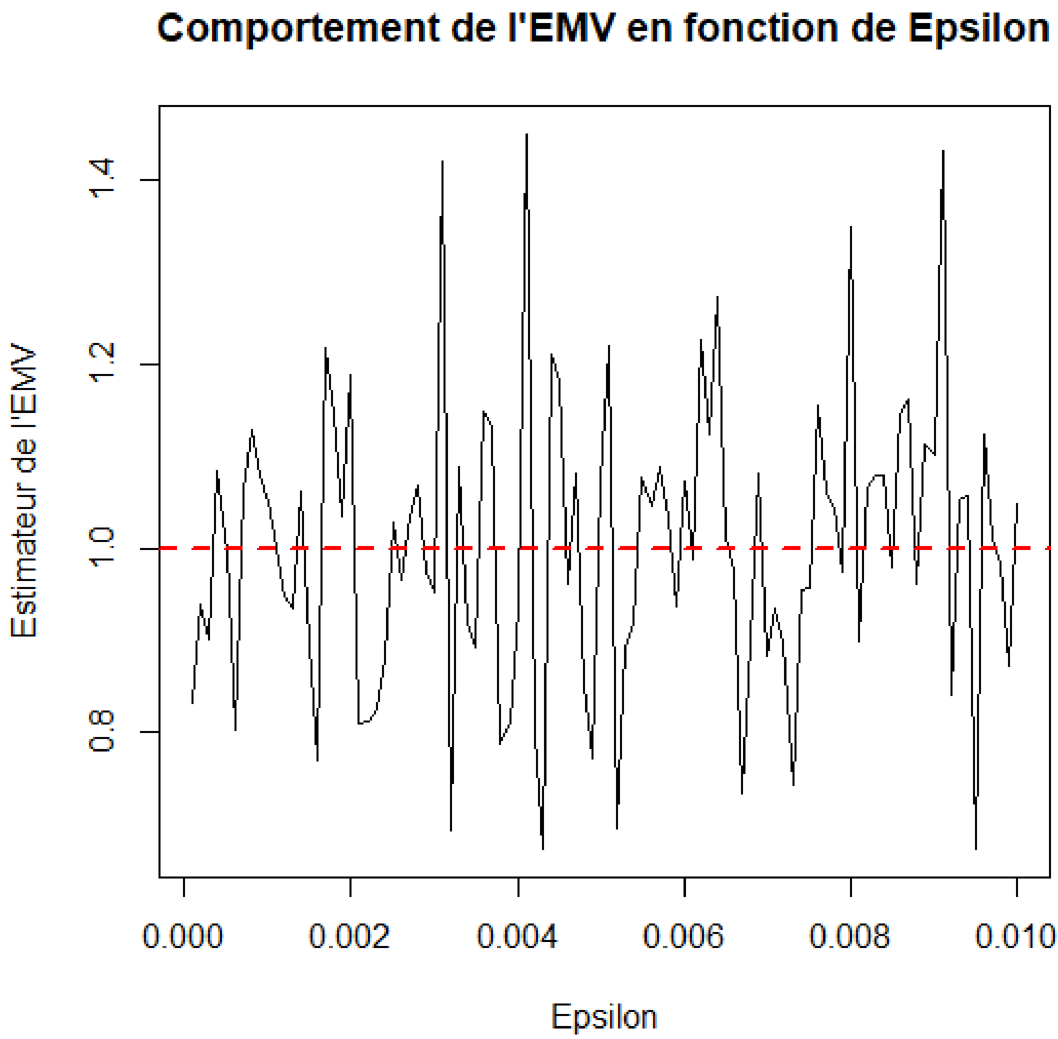
Pour bien mettre en évidence le comportement asymptotique de l'emv pour cet exemple nous abordons une simulation numérique. suit des étapes pour calculer la valeur explicite de l'emv du paramètre inconnu θ

```
# Définir les fonctions manquantes
simulate_brownian_motion <- function(N, delta_t, theta) {
X <- numeric(N)
for (i in 2 :N) {
X[i] <- X[i-1] + sqrt(2 * theta * delta_t) * rnorm(1) }
return(X)
}
EMV_estimator <- function(X, delta_t) {
N <- length(X)
S <- sum((X[2 :N] - X[1 :(N-1)])^2)
theta_hat <- S / (2 * (N-1) * delta_t)
return(theta_hat)
}
# Paramètres
true_theta_value <- 1    # Définir la vraie valeur de theta
N <- 100    # Nombre d'observations
T <- 1    # Temps final
delta_t <- T / N    # Pas de temps
epsilon_values <- seq(0.01, 2, by = 0.01)    # Valeurs de epsilon plus petites
theta_hat_values <- numeric(length(epsilon_values))    # Vecteur pour sto-
cker les estimations de theta_hat
# Simulation de l'estimateur de l'EMV pour différentes valeurs de epsilon
set.seed(123)    # Pour la reproductibilité
for (i in seq_along(epsilon_values)) {
epsilon <- epsilon_values[i]
```

```
# Simulation d'un nouveau X_t avec la valeur de epsilon actuelle
X <- simulate_brownian_motion(N, delta_t, true_theta_value + epsilon)
# Calcul de l'estimateur de l'EMV pour ce X_t
theta_hat_values[i] <- EMV_estimator(X, delta_t) }
# Tracé du graphique
plot(epsilon_values, theta_hat_values, type = "l", xlab = "Epsilon", ylab =
"Estimateur de l'EMV", main = "Comportement de l'EMV en fonction de Ep-
silon")
abline(h = true_theta_value, col = "red", lty = 2, lwd = 2)    # Ajouter une
ligne horizontale à la vraie valeur de theta
```



On peut changer la valeur de ε en une valeur plus petite et voire le comportement de l'emv.



Interprétation :
Nous remarquons des fluctuations récurrentes dues au mouvement brownien et qu'à partir d'un certain ordre de grandeur de ε l'interaction du mouvement brownien diminue. Dans ce cas l'emv est d'autant plus proche de la vraie valeur de θ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. ceci confirme les résultats précédents obtenue théoriquement.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons exploré la théorie de l'estimation paramétrique dans les équations différentielles stochastiques, en nous concentrant sur le cadre des petites diffusions. Nous avons examiné l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas régulier et constaté que, sous certaines conditions, cet estimateur présente de bonnes propriétés asymptotiques.

Nous avons illustré notre approche avec le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O.U), qui satisfait toutes les hypothèses de régularité. Pour mettre en évidence les résultats théoriques,nous avons utilisé le package Sim.DiffProc du logiciel R. Cela nous a permis de tracer la trajectoire du Mouvement Brownien ainsi que quelques trajectoires du processus d'O.U pour différentes valeurs de θ et ε avec un ω fixé, et de calculer les valeurs de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV).

En conclusion, nous avons observé qu'en réduisant ε vers zéro (réduction de la perturbation), nous obtenons une trajectoire plus lisse et un estimateur plus proche de la vraie valeur du paramètre θ.

Bibliographie

[1] **I. A-Ibragimov, R. Z-Has'minskii**, Statistical Estimation-Asymptotic-Theory Springer-Verlag New York (1981) .

[2] **Kutoyants, Y. A.**, Identification of dynamical systems with small noise. Vol. 300. Springer Science & Business Media. (1994).

[3] **Liptser, R.S., and Shiryaev, A.N.**, Statistics of random process I II. Springer New York.(1978).

[4] **Boukhatala Kamal-Guidom Arslane**, package 'Sim.DiffProc', june 5, (2012).

[5] **Monique Jeanblanc**, Cours de Calcul stochastique, Master 2IF EVRY, (2006).

Résumé : Dans ce mémoire, nous avons étudié l'estimation paramétrique dans les équations différentielles stochastiques (EDS). Après avoir introduit les notions fondamentales, nous avons examiné la construction et les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Cette théorie a été appliquée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck, où nous avons vérifié les conditions de régularité et réalisé des simulations numériques pour illustrer l'étude théorique.

Abstract: In this memoir, we studied parametric estimation in stochastic differential equations (SDE). After introducing the fundamental concepts, we examined the construction and asymptotic roperties of the maximum likelihood estimator. This theory was applied to the Ornstein-Uhlenbeck process, where we verified the regularity conditions and performed numerical simulations to illustrate the theoretical study.

ملخص: في هذه المذكرة، درسنا التخمينات المتغيرة في المعادلات التفاضلية العشوائية. بعد تقديم المفاهيم الأساسية، قمنا بفحص بناء وخصائص المقاربة للمخمن الأقصى للاحتمال. تم تطبيق هذه النظرية على المخمن النظرية الافتراضية (البايسياني).، حيث تحققنا من شروط الانتظام وأجرينا محاكاة عددية لتوضيح الدراسة النظرية.