

N° d'ordre :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

المركز الجامعي بلحاج بوشعيب عين تموشنت

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib-Ain Témouchent



Institut de Technologie
Département de Génie Civil
Laboratoire des Structures Intelligentes



THESE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT 3^{eme} Cycle**

Domaine : Science et Technologie

Filière : Génie Civil

Spécialité : Structure

Par : BOURADA Fouad

Intitulé de la thèse

**Etude de la stabilité des plaques composites épaisses
en utilisant des théories de déformation d'ordre élevé**

Soutenue publiquement, le 30 / 04 / 2018 , devant le jury composé de :

AISSA MAMOUNE Sidi Mohamed	MCA	Président	Centre Universitaire BELHADJ Bouchaib/ Ain Témouchent.
BENYOUCEF Samir	Pr	Examineur	Université DJILALI Liabès/ Sidi-Bel-Abbès
YEGHNEM Réda	MCA	Examineur	Université MOULAY Tahar / Saida
HOUMADI Youcef	MCA	Examineur	Centre Universitaire BELHADJ Bouchaib/ Ain Témouchent.
AMARA Khaled	Pr	Directeur de thèse	Centre Universitaire BELHADJ Bouchaib/ Ain Témouchent.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Remerciements

Nous tenons à remercier ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la foi et de nous avoir permis d'en arriver là.

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination... Ces trois années de recherches nous ont permis de comprendre la signification de cette phrase. Ce parcours, en effet, n'aurait pas pu être réalisé sans l'aide de nos nombreux professeurs, pour cela nous adressons nos profonds remerciements à :

Professeur **AMARA Khaled** notre encadreur qui a été attentif à l'évolution de nos recherches et qui a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme nous ont été très bénéfiques durant cette année.

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur **Dr. AISSA MAMOUNE Sidi Mohamed** pour avoir accepté de présider le jury de thèse.

Mes ardents remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **HOUMADI Youcef, YEGHNEM Réda, BENYOUCEF Samir**, de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse et de l'avoir consentie. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

J'exprime également toute ma reconnaissance à l'égard du Professeur **TOUNSI Abdelouahed** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche, sa disponibilité et ses conseils précieux qui m'ont permis d'aplanir bien les différentes difficultés trouvées..

A toutes les personnes qui ont aidé de près ou de loin par le fruit de leur connaissance pendant toute la durée de notre parcours éducatif.

Dédicace

Dédicace

Je dédie cette thèse

À mes parents, À mes frères et sœurs.

À toute ma famille, À tous mes enseignants, À tous mes Ami(e)s.

Résumé

Résumé

Dans le présent travail, on présente une analyse du flambement des plaques isotrope, orthotrope et fonctionnellement gradué en proposant une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables. Contrairement à la théorie existante de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) et la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), le modèle proposé utilise un nouveau champ de déplacement et par l'introduction des termes d'intégrale indéterminé on obtient que quatre inconnues. Les équations d'équilibre pour l'analyse de flambement sont déterminées en utilisant le principe des travaux virtuels. La solution analytique pour une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à un chargement axial a été déterminé par l'intermédiaire de la méthode de Navier. Des résultats numériques sont présentés en utilisant le modèle proposé et des comparaisons avec la CPT, FSDT, HSDT et les solutions exactes a été effectuée. Il a été conclu que la théorie développée à quatre variables et qui n'utilise pas de coefficient de correction de cisaillement, est non seulement simple mais efficace pour l'étude de la stabilité des plaques.

Mots clé : Théorie des plaques ; Analyse du flambement ; Plaque isotrope ; Plaque orthotrope ; Plaque FGM.

Abstract

Abstract

The current research presents a buckling analysis of isotropic, orthotropic and functionally graded plates by proposing a new four variable refined plate theory. Contrary to the existing higher order shear deformation theories (HSDT) and the first shear deformation theory (FSDT), the proposed model uses a new displacement field which incorporates undetermined integral terms and involves only four variables. The governing equations for buckling analysis are deduced by utilizing the principle of virtual works. The analytical solution of a simply supported rectangular plate under the axial loading has been determined via the Navier method. Numerical investigations are performed by using the proposed model and the obtained results are compared with CPT solutions, FSDT solutions, and the existing exact solutions in the literature. It can be concluded that the developed four variable refined plate theory, which does not use shear correction coefficient, is not only simple but also comparable to the FSDT.

Keywords: Refined plate theory; Buckling analysis; Isotropic plate; Orthotropic plate; FG plate.

ملخص

ملخص

في هذا العمل ،نعرض تحليل إلتواء الصفائح موحدة ومختلفة الخواص وذات خواص متغيرة وظيفيا باقتراح نظرية جديدة مكررة بأربع متغيرات ، وخلافا لنظريات تشوه القص ذات درجة أعلى (HSDT) ونظرية تشوه القص درجة أولى (FSDT) ، فإن النموذج المقترح يستخدم حقل نزوح جديد ، ويإدخال مصطلحات التكامل غير المعرفة نتحصل على أربعة متغيرات فقط . يتم استخلاص معادلات التوازن لتحليل الإلتواء عن طريق إستخدام مبدأ الأعمال الإفتراضية . يتم تحديد الحل التحليلي لصفيحة مستطيلة بدعائم بسيطة تحت تحميل محوري من خلال طريقة نافيبي ، يتم عرض النتائج الرقمية باستخدام النموذج المقترح ، ويتم مقارنتها مع نتائج النظرية الكلاسيكية للصفائح (CPT) ،نظرية تشوه القص درجة أولى (FSDT) ، درجة أعلى (HSDT) والحلول الدقيقة ، ويمكن الإستنتاج أن النظرية المطورة بأربعة متغيرات والتي لا تستخدم معامل تصحيح القص ، ليست بسيطة فحسب ، بل فعالة لدراسة توازن الصفائح .

كلمات المفتاح : نظرية الصفائح ؛ تحليل الإلتواء ؛ صفيحة موحدة الخواص ؛ صفيحة مختلفة الخواص ؛ صفيحة متغيرة وظيفيا .

Table des matières

Table des matières

Remerciement.....	i
Dédicace.....	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
ملخص.....	v
Table des matières.....	vi
Liste des figures.....	ix
Liste des Tableaux.....	xii
Liste des Notations et symboles.....	xiii
Introduction générale.....	1
CHAPITRE I	
I.1. Introduction :	4
I.2. Les composants élémentaires de matériaux composites :	5
I.2.1. Le renfort :	5
I.2.1.1. Les fibres de verre :	6
I.2.1.2. Les fibres de carbone :	7
I.2.1.3. Les fibres d'aramides « Kevlar » :	9
I.2.1.4. Les fibres métalliques ou céramiques :	10
I.2.1.5. Autres renforts (bore et carbure de silicium) :	10
I.2.2. Architecture des renforts :	11
I.2.2.1. Les unidirectionnels : (UD) :	11
I.2.2.2. Tissus standards :	12
I.2.3. Les matrices :	14
I.2.3.1. Les matrices organiques :	15
I.2.3.1.1. Les résines thermodurcissables(TD) :	15
I.2.3.1.2. Les résines thermoplastiques (TP) :	16
I.2.3.2. Les matrices minérales :	18
I.2.3.2.1. Les matrices métalliques :	18
I.2.3.2.2. Les matrices céramiques :	18

1.2.4. Charges et aditifs :	19
I.2.5. Mise en œuvre des matériaux composites :	19
1.2.6. Les matériaux composites structuraux :	20
1.2.6.1. Les monocouches :	20
I.2.6.2. Structures composites stratifiées :	21
I.2.6.2.1. Désignation des structures stratifiées :	22
I.2.6.2.2. Structures sandwichs :	22
I.2.6.2.3. Zone inter-faciale :	24
I.2.6.2.4. Endommagement :	25
I.3. Les matériaux fonctionnellement graduée FGM :	25
I.3.1. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés :	26
I.3.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés :	28
I.3.3. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :	30
I.3.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :	32
I.3.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :	33
I.3.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :	34
I.3.4.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	35
I.3.4.4. Loi de mélange en puissance (P-FGM) symétrique:	35
I.3.4.5. Loi de mélange exponentielle (E-FGM) symétrique :	36
I.3.4.6. Loi de mélange sinusoidale (S-FGM) symétrique :	36
I.3.9. Conclusion :	38
 CHAPITRE II	
II.1. Introduction :	39
II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :	40
II.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :	40
II.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :	41
II.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :	43
II.2.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :	45
II.2.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques :	48
II.2.6. Théorie de zig-zag :	48
II.3. Conclusion :	50

CHAPITRE III

III.1. Introduction :	51
III.2. Modèle CPT :	52
III.3. Modèles FSDT :	53
III.4. Modèles TSDT :	56
III.5. Modèles HSDT :	57
III.6. Modèles RPT :	58
III.7. Théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D) :	59
III.8. Analyse thermo élastique statique :	61
III.9. Analyse thermomécanique du flambement :	62
III.10. Conclusion :	63

CHAPITRE IV

IV.1. Introduction :	64
IV.2. Cinématique et déformation :	64
IV.3. Equations Constitutives :	66
IV.4. Equation d'équilibre :	67
IV.5. Solution analytique :	70
IV.6. Conclusion :	72

CHAPITRE V

V.1. Introduction :	73
V.2. Plaques isotropes et orthotropes :	73
V.3. Plaques hybride en FGM :	81
V.4. Plaques S-FGM symétrique :	88
V.5. Conclusion :	92

CONCLUSION GENERALE	93
----------------------------------	----

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	95
--	----

ANNEXE	118
---------------------	-----

Liste des figures

Liste des figures

CHAPITRE I

Figure I.1 : <i>Constituants d'un matériau composite (Benatta 2011).</i>	4
Figure I.2 : <i>Exemple d'un matériau composite (Benatta 2011).</i>	5
Figure I.3 : <i>Classification des fibres (Gornet 2008).</i>	6
Figure I.4 : <i>Fibres de verre (Glossaire 2006).</i>	7
Figure I.5: <i>Fibre de verre (Glossaire 2006).</i>	7
Figure I.6: <i>Fibre de carbone (Glossaire 2006).</i>	8
Figure I.7: <i>Fibres de carbone (Glossaire 2006).</i>	8
Figure I.8: <i>Fibre d'aramide (Glossaire 2006).</i>	9
Figure I.9 : <i>les renforts unidirectionnels (Berthelot 2010).</i>	11
Figure I.10 : <i>Fibres multidirectionnelles (Gornet 2008).</i>	12
Figure I.11 : <i>la toile ou taffetas (Berthelot 2010).</i>	12
Figure I.12 : <i>sergé (Berthelot 2010).</i>	13
Figure I.13 : <i>le satin (Berthelot 2010).</i>	13
Figure I.14: <i>Fibres orientées (Gomet 2008).</i>	14
Figure I.15 : <i>Les différentes familles de matrice (Gomet 2008).</i>	14
Figure I.16 : <i>Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite</i>	20
Figure I.17 : <i>Matériau composite monocouche (Ait Atmane 2011).</i>	21
Figure I.18 : <i>Matériau avec deux directions de renfort (Gomet 2008)</i>	21
Figure I.19 : <i>Désignation d'un stratifié (Mechab 2009)</i>	22
Figure I.20 : <i>Matériau composite sandwich (Ait Atmane 2011).</i>	23
Figure I.21 : <i>Contraintes de cisaillement et de compression dans les sandwiches (Ait Atmane 2011).</i>	23
Figure I.22: <i>Sandwich à âme en nid d'abeille (Benatta 2011).</i>	23
Figure I.23 : <i>Sandwich à âme viscoélastique (Benatta 2011).</i>	23
Figure I.24 : <i>Désignations d'une âme nid d'abeilles (Gornet 2008).</i>	24
Figure I.25 : <i>Concept des matériaux à gradient de propriétés (Bouhadra 2015).</i>	29
Figure I.26 : <i>Protection thermique (Bouhadra 2015).</i>	30
Figure I.27 : <i>Les principaux domaines d'application des FGM.</i>	31
Figure I.28 : <i>Géométrie d'une plaque en FGM.</i>	32
Figure I.29 : <i>Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.</i>	33
Figure I.30: <i>Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.</i>	34

Figure I.31 : <i>Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.</i>	35
Figure I.32 : <i>Variation de la fraction volumique du P-FGM symétrique.</i>	37
Figure I.33 : <i>Variation du module d'Young E ([Pa] x 10⁻¹¹) (E-FGM Al₂O₃-SUS304-Al₂O₃).</i>	37
Figure I.34 : <i>Variation de la fraction volumique du S-FGM symétrique.</i>	38

CHAPITRE II

Figure II.1: <i>Description d'une plaque</i>	39
Figure II.2 : <i>Illustration de la plaque de Love Kirchhoff</i>	41
Figure III.3 : <i>Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin</i>	42
Figure II.4: <i>Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur</i>	42
Figure III.5: <i>Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997)</i>	44
Figure II.6: <i>Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur</i>	47
Figure II.7: <i>Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur</i>	47
Figure II.8 : <i>Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. (Nguyen 2004)</i>	49
Figure II.9: <i>Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé (Carrera, 2004)</i>	49

CHAPITRE V

Figure V.1: <i>les conditions de chargement d'une plaque carrée pour (a) compression uni axiale, (b) compression bi axial et (c) traction suivant la direction x et compression suivant la direction y.</i>	73
Figure V.2: <i>L'effet du rapport de géométrie et le rapport des modules sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous un chargement uniaxial de compression : (a) isotrope, (b) $E_1 / E_2 = 10$, (c) $E_1 / E_2 = 25$ et (d) $E_1 / E_2 = 40$</i>	78
Figure V.3: <i>L'effet du rapport des modules sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous un chargement uni-axiale de compression: (a) $a = 10h$ et (b) $a = 20h$.</i>	79

Figure V.4: <i>L'effet du rapport des modules sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous un chargement bi-axiale de compression: (a) $a = 10h$ et (b) $a = 20h$.</i>	80
Figure V.5: <i>Géométrie d'une plaque hybride fonctionnellement graduée.</i>	81
Figure V.6 : <i>La charge critique non dimensionnelle de flambement d'une plaque FGM hybride par rapport à l'indice matériel p pour les différents types de chargement avec $a/h=10$ et $t_{FGM}/h=0.8$.</i>	85
Figure V.7: <i>La charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) d'une plaque FGM hybride en fonction du rapport t_{FGM}/h avec $a/h=10$ et $p=1$.</i>	86
Figure V.8: <i>L'effet du rapport des modules et la puissance p sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) d'une plaque FGM hybride carrés sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$).</i>	87
Figure V.9: <i>L'effet du rapport des modules et l'épaisseur de la couche FGM (t_{FGM}) d'une plaque FGM hybride carrés sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p=1$.</i>	87
Figure V.10 : <i>Géométrie d'une plaque S-FGM symétrique.</i>	88
Figure V.11 : <i>La Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une plaque S-FGM symétrique.</i>	88
Figure V.12: <i>La charge critique non dimensionnelle de flambement d'une plaque S-FGM symétrique par rapport à l'indice matériel p pour les différents types de chargement avec $a/h=5$.</i>	91
Figure V.13: <i>L'effet du rapport des modules et la puissance p sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) d'une plaque S-FGM symétrie carrés sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $a/h=5$.</i>	91
Figure V.14: <i>L'effet du rapport des modules et l'épaisseur de la couche FGM (a/h) d'une plaque S-FGM symétrique carrés sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p=2$.</i>	92

Liste des Tableaux

Liste des Tableaux

CHAPITRE I

Tableau I.1 : <i>Propriétés des fibres de Verre (Mechab 2009)</i>	7
Tableau I.2 : <i>Propriétés des fibres de carbone (Tounsi 2006)</i>	9
Tableau I.3 : <i>Propriétés des fibres de Kevlar (Mechab 2009)</i>	10
Tableau I.4 : <i>Caractéristiques moyennes des matrices (Ait Atmane 2011)</i>	16
Tableau I.5 : <i>Propriétés physiques et mécaniques des résines thermoplastiques (Ait Atmane 2011)</i>	17
Tableau I.6 : <i>Principales différences entre TP et TD (Glossaire 2006)</i>	17
Tableau I.7 : <i>les composites à matrice métallique (Ait Atmane 2011)</i>	18
Tableau I.8: <i>Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Bouhadra 2015)</i>	29

CHAPITRE V

Tableau V.1: <i>Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement uni-axiale de compression.</i>	74
Tableau V.2 : <i>Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement bi-axiale de compression</i>	75
Tableau V.3: <i>Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée soumise à une traction suivant l'axe x et compression suivant l'axe y</i>	76
Tableau V.4 : <i>propriétés des matériaux: métal et céramique</i>	81
Tableau V.5 : <i>Comparaison de la charge critique de flambement N_{cr} (MN/m) de la plaque FG rectangulaire avec $a/h=10$.</i>	82
Tableau V.6 : <i>L'effet de l'indice matériel (p) et (t_{FGM}/h) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque hybrides avec ($a/h=10$) sous les différents conditions de chargements.</i>	83
Tableau V.7: <i>L'effet de l'indice matériel (p) et le rapport de géométrie (a/h) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque hybrides avec ($t_{FGM}/h=0.8$) sous les différents conditions de chargements.</i>	84
Tableau V.8: <i>La variation de la charge critique du flambement N_{cr} (MN/m) des plaques S-FGM symétrique en fonction des rapports de géométrie (a/h) et de dimension (b/a).</i>	89
Tableau V.9: <i>L'effet de l'indice matériel (p) et le rapport de géométrie (a/h) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carré S-FGM symétrique sous les différentes conditions de chargements.</i>	90

*Liste des notations
et symboles*

Liste des notations et symboles

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young
E_C	Module de Young de la céramique
E_M	Module de Young de la céramique
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$V_C(z)$	Fraction volumique de la céramique
$V_M(z)$	Fraction volumique du métal
k, p	Indice matériel
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z,
A', B'	Des coefficients adopté selon le type de solution

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	La variation de l'énergie de déformation
δV	La variation du travail extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0	Charges axiales appliquées à la plaque
\bar{N}	Charge critique du flambement non dimensionnelle
N_{cr}	Charge critique du flambement
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse

M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentielles
∂	Dérivée partielle
i et j	Des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Introduction générale

Introduction générale

La stabilité des plaques rectangulaires a été un sujet de recherche dans les structures d'ingénieur pour plus d'un siècle (Matsunaga, 2009; Bachir Bouiadjra et al., 2013; Altunsaray et Bayer, 2014; Afsharmanesh et al., 2014; Bakora et Tounsi, 2015; Bouguenina et al., 2015; Nguyen et al., 2015; Tagrara et al., 2015; Tebboune et al., 2015; Larbi Chaht et al., 2015; Musa, 2016; Rajanna et al., 2016; Boudierba et al., 2016; Yousefitabar et Matapouri, 2016; Chikh et al., 2016; Eltaher et al., 2016). Un grand nombre de solutions exactes ont été proposées pour les plaques isotropes, orthotropes et à gradient de propriété, et les plus connues peuvent être trouvées dans les travaux de Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959), Timoshenko et Gere (1961), Bank et Jin (1996), Kang et Leissa (2005), Hwang et Lee (2006) et Musa (2016). Avec l'avancement des investigations de la réponse de la stabilité des plaques, un grand nombre des modèles de plaque ont été proposés. Le plus simple est la théorie classique des plaques (CPT) qui ignore les effets de cisaillement transverse. Ce modèle est non applicable pour les plaques épaisses et orthotropes avec un degré important du rapport des modules. Afin de surmonter ces limitations, la théorie de déformation de cisaillement qui considère l'effet du cisaillement transverse a été introduite par plusieurs chercheurs. En effet, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été proposées comme une amélioration de la CPT. La FSDT développée par Reissner (1945) et Mindlin (1951) considère les effets du cisaillement transverse par l'intermédiaire d'une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Plusieurs investigations ont été présentées dans différents articles scientifiques en utilisant la FSDT dans la vibration libre des plaques composites (Yan et al., 1966; Whitney, 1969; Whitney et Pagano, 1970; Ambartsumyan, 1970; Sun et Whitney, 1973; Bert et Chen, 1978; Reddy, 1979; Noor et Burton, 1989; Kant et Swaminathan, 2001). Kant et Swaminathan (2001) ont employé la FSDT présentée par Whitney et Pagano (1970) pour la réponse dynamique des plaques composites stratifiées et des plaques sandwich. Sadoune et al. (2014) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour le comportement mécanique des plaques stratifiées. Meksi et al. (2015) ont proposé aussi une nouvelle théorie simple de déformation de cisaillement du premier ordre avec seulement quatre variables pour l'analyse vibratoire et statique des plaques fonctionnellement graduées. Bellifa et al. (2016) ont utilisé une nouvelle théorie FSDT pour l'analyse statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduées. Hadji et al. (2016) ont analysé une poutre fonctionnellement graduée en employant une nouvelle théorie FSDT. Yaghoobi et al. (2014)

ont proposé une formulation analytique pour l'analyse de la vibration non linéaire et du post flambement des poutres fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique non linéaire et soumise à un chargement thermomécanique. Bourada et al. (2012) ont présenté une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse de la stabilité thermique des plaques sandwich fonctionnellement graduée. Il est à noter que plusieurs HSDTs sont utilisés aussi pour étudier la déformation des structures composites soumises à une grande distorsion géométrique (Mahapatra et al. 2016a, b, Katariya et Panda 2016, Mehar et Panda 2016, Panda et Katariya 2015, Kar et Panda 2014, Panda et Singh 2013a, b, c, 2010a, b, 2011). Tounsi et ces collaborateurs (Benachour et al. 2011, Houari et al. 2013, Tounsi et al. 2013, Ould Larbi et al. 2013, Saidi et al. 2013, Bousahla et al. 2014, Draiche et al. 2014, Fekrar et al. 2014, Hadji et al. 2014, Khalfi et al. 2014, Zidi et al. 2014, Klouche Djedid et al. 2014, Ait Yahia et al. 2015, Zemri et al. 2015, Sallai et al. 2015, Bennai et al. 2015, Bouchafa et al. 2015, Meradjah et al. 2015, Merazi et al. 2015, Al-Basyouni et al. 2015, Attia et al. 2015, Ait Atmane et al. 2015, Belkorissat et al. 2015, Boukhari et al. 2016, Bounouara et al. 2016, Mouaici et al. 2016, Beldjelili et al. 2016) ont proposé des nouvelles HSDTs pour étudier le comportement des structures composites. Récemment Mantari et Granados (2015) ont proposé une nouvelle FSDT avec quatre variables dans laquelle des termes d'intégrale sont utilisés dans la cinématique de la plaque. Puisque les FSDTs ne respectant pas les conditions d'équilibre dans les surfaces supérieures et inférieures, des coefficients de corrections de cisaillement sont exigés pour corriger la distribution irréaliste de la contrainte/déformation de cisaillement à travers l'épaisseur. Pour ces raisons, plusieurs HSDTs ont été proposées pour améliorer les limitations de la FSDT tels que Levinson (1980), Bhimaraddi et Stevens (1984), Reddy (1984), Ren (1986), Kant et Pandya (1988), et Mohan et al. (1994). Une bonne revue et synthèse de ces modèles pour l'investigation des plaques stratifié peut être trouvé dans la littérature (Noor et Burton 1989a, b, Reddy 1990 et 1993, Mallikarjuna et Kant 1993, Dahsin et Xiaoyu 1996). Reddy (1984) a proposé une HSDT avec des distributions cubiques des déplacements axiaux. En se basant sur la théorie de Reddy, Xiang et al. (2011) ont développé une théorie de déformation de cisaillement à n-ordre. Kant et Pandya (1988), Mallikarjuna et Kant (1989) et Kant et Khare (1997) ont employé aussi des théories HSDTs avec des distributions cubiques pour les déplacements axiaux. Récemment, une nouvelle classe de théories HSDTs est proposée par plusieurs chercheurs tels que Shahrjerdi et al. (2011), Boudarba et al. (2013), Viswanathan et al. (2013), Ait Amar Meziane et al. (2014), Belabed et al. (2014), Ahmed (2014), Swaminathan et Naveenkumar (2014),

Nedri et al. (2014), Bourada et al. (2015), Hamidi et al. (2015), Kar et al. (2015), Hebali et al. (2014), Mahi et al. (2015), Saidi et al. (2016), Bennoun et al. (2016) and Tounsi et al. (2016).

Dans le présent travail, l'analyse du flambement des plaques isotropes, orthotropes et fonctionnellement graduée soumises à un chargement axiale est étudiée en utilisant une nouvelle HSDT avec quatre variables, dans laquelle les déplacements de rotations sont remplacés par des termes en intégrale dans les champs de déplacement. En utilisant, la procédure de Navier, des solutions analytiques sont déterminées. Des résultats numériques considérant le rapport d'élancement, les rapports d'orthotropie et les indices matérielles sont présentés pour démontrer la validité et l'efficacité de la présente théorie dans le calcul des charges critiques du flambement des plaques.

Dans ce travail, on s'intéresse sur la stabilité des plaques composites rectangulaires épaisses en utilisant une nouvelle théorie de déformation d'ordre élevée.

Ce travail, s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux composites et à fonctionnellement graduées, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre se focalise sur les différentes théories des plaques.

Le troisième chapitre présente une revue bibliographique sur les travaux effectués sur les composites et les FGM.

Le quatrième chapitre est consacré sur un modèle analytique pour le calcul des charges critiques du flambement des plaques rectangulaires simplement appuyées isotropes orthotropes et en FGM.

Dans le cinquième chapitre, nous présenterons les résultats obtenus par l'exécution des différents codes de calculs développés dans le cadre de cette recherche.

En fin, une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant.

Chapitre I :
Généralités sur
les matériaux composites

I.1. Introduction :

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, etc... Les composites seront traité dans ce chapitre. Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique).

Un matériau composite est défini d'une manière générale comme étant la combinaison macroscopique de deux ou plusieurs matériaux non miscibles, qui se complètent et qui ont des caractéristiques différentes. Ce qui donne un matériau hétérogène et anisotrope. Le composé final aura des propriétés que les éléments constitutifs seuls ne possèdent pas, On appelle maintenant de façon courante, matériaux composites, des arrangements de renforts (fibres et/ou particules) noyés dans une matrice (résines), dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible, que celle des renforts. La matrice assure la cohésion du matériau et l'orientation et la tenue des fibres. Elle permet aussi de transmettre à ces fibres, qui assurent l'ossature du matériau, les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts, sous forme de fibres, contribuent à l'amélioration de la résistance mécanique et de la rigidité de la pièce obtenue, dans laquelle ils sont incorporés.

Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériaux pour réaliser des pièces ou des produits directement à la forme désirée, avec des propriétés bien précises (résistance mécanique, densité); donc la logique qui nous induit à penser composite est expliquée par l'exemple suivant:

Les métaux sont en général tenaces (ils résistent à la propagation de fissures) et ductiles (ils présentent des déformations importantes avant de se rompre), mais de masse volumique élevée. Les matières plastiques sont légères mais présentent de faibles propriétés mécaniques. Les céramiques sont rigides et résistantes, mais fragiles.

Il est donc du ressort des spécialistes du domaine, de concevoir des structures tout en plaçant le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition dans l'espace).

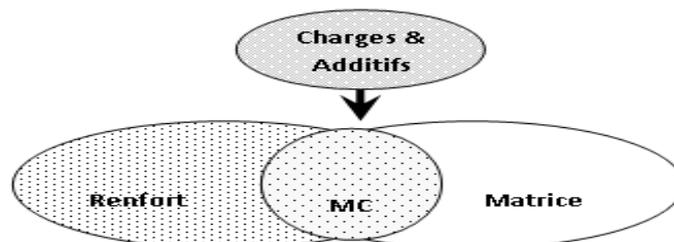


Figure I.1 : Constituants d'un matériau composite (Benatta 2011).

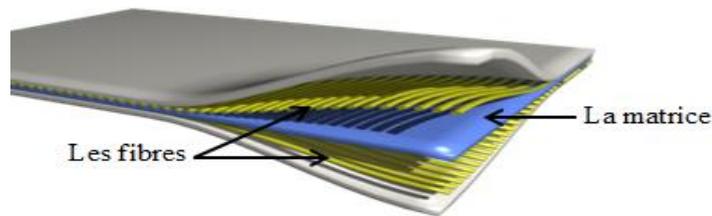


Figure I.2 : Exemple d'un matériau composite (Benatta 2011).

I.2. Les composants élémentaires de matériaux composites :

Les performances mécaniques des composites fibreux sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants : la matrice, les fibres mais aussi l'interface fibre-matrice.

- La rigidité d'un composite est assurée principalement par les **fibres** qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice.
- Quant à la **matrice**, elle permet de donner la forme géométrique de la structure, d'assurer la cohésion de l'ensemble des fibres et de les protéger contre le milieu ambiant. Mais son rôle principal est de transférer les efforts mécaniques d'une fibre à l'autre.
- L'**interface** est la zone de transition entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice.

Une large gamme de fibres et de matrices est disponible, mais dans ce qui suit, nous présenterons quelques-uns des matériaux les plus couramment utilisés.

I.2.1. Le renfort :

Les fibres ou les renforts, doivent assurer la bonne tenue mécanique des matériaux. Le renfort se présente généralement sous la forme de fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elles doivent supporter. Leurs caractéristiques doivent être les suivantes : caractéristiques mécaniques élevées en termes de rigidité et de résistance, compatibilité physico-chimique élevée avec les matrices.

Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition, notamment pour les 3D (feutres, nappe de mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissage 3D) ou par leur nature (minérale ou organique).

Une variété de fibres est présentement disponible : différents types de fibres de verre, de carbone, d'aramide (Kevlar), de graphite, de bore, de silice, de carbure de silicium et d'aluminium sont disponibles. Elles représentent une gamme de propriétés mécaniques incluant des résistances en traction de 700 à 4200 MPa et des modules d'élasticité de 50 GPa à 400 GPa. Les principales fibres utilisées sont :

- Fibre de Carbone ;
- Fibre de Kevlar ;
- Fibre de Verre;
- Fibre de Bore.

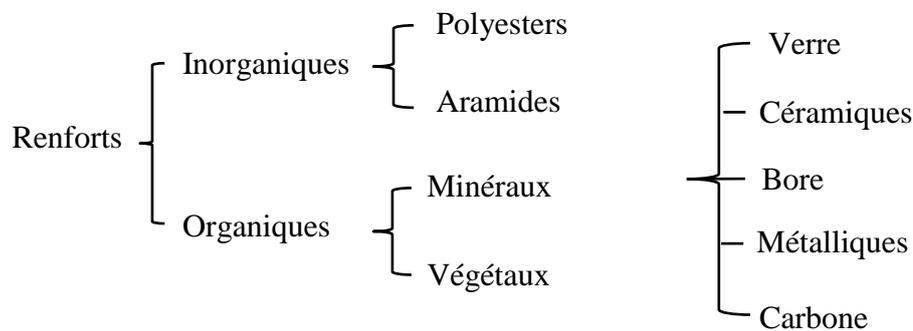


Figure I.3: *Classification des fibres (Gornet 2008).*

I.2.1.1. Les fibres de verre :

Sont obtenues à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1.250°C à travers une filière en platine-rhodium après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- **fibres E** pour les composites grandes diffusions (GD) et les applications courantes.
- **fibres D** pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés).
- **fibres R** pour les composites hautes performances (HP).

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 90% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD).

A titre indicatif, les fibres de verre utilisées dans les composites dans le domaine de la santé ont un diamètre de l'ordre de 10 micromètres, nettement supérieur au diamètre critique (de l'ordre de 3 micromètres) pour que la fibre ne présente pas de risque respiratoire et ne puisse engendrer des cancers.

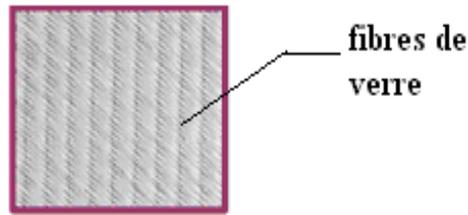


Figure I.4 : Fibres de verre (Glossaire 2006).



Figure I.5: Fibre de verre (Glossaire 2006).

Les propriétés de ces fibres sont présentées dans le tableau I.1.

Tableau I.1 : Propriétés des fibres de Verre (Mechab 2009).

Propriétés en traction	Verre E	Verre R	Verre D
R_t (MPa)	3400	4400	4900
E_{oT} (MPa)	73000	86000	87000
A_R (%)	4.9	5.2	-----
Masse volumique (g / cm ³)	2.54	2.55	2.54

I.2.1.2. Les fibres de carbone :

Doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites, Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200°C), puis pyrolyse (1500 à 2500°C). Selon la température et le temps de cuisson.

Suivant les conditions de fabrication ; il existe toute une variété de fibres de carbone mais actuellement trois sortes sont commercialisées :

- les fibres haute résistance classique (HR) (types : As4, As6, T300 et X635).

- les fibres haute résistance module intermédiaire (type : IM6, X636).
- les fibres haute module (HM) (type : M40 et HM5).

D'un fabricant à l'autre, les propriétés mécaniques varient suivant les propriétés physiques et mécaniques moyennes.

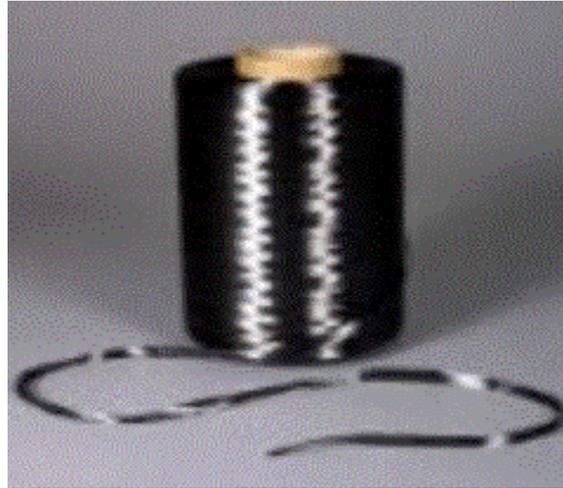


Figure I.6: *Fibre de carbone (Glossaire 2006).*

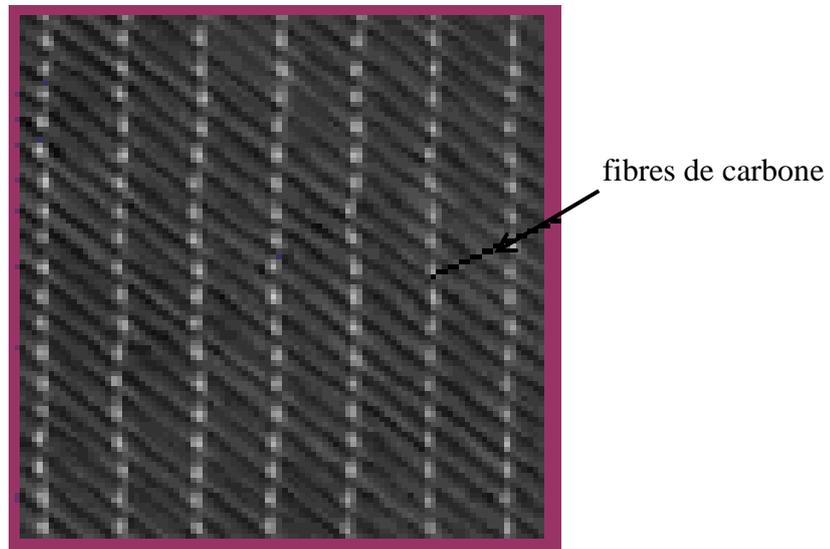


Figure I.7: *Fibres de carbone (Glossaire 2006).*

Les propriétés mécaniques et physiques des différents types de fibres de carbone sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Tableau I.2 : Propriétés des fibres de carbone (Tounsi 2006).

Propriétés en traction	HR		IM	HM	Propriétés en traction
R_t (MPa)	3000 à 5000	4000 à 4500	47000 à 52000	2000 à 2500	1100 à 2000
E_{oT} (MPa)	220000 à 240000	235000 à 250000	275000 à 300000	350000 à 400000	450000 à 500000
A_R (%)	1.2 à 1.5	1.6 à 1.8	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
Masse volumique (g/cm ³)	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.7 à 1.8	1.8 à 1.85	1.9 à 1.95

I.2.1.3. Les fibres d'aramides « Kevlar » :

Issue de la chimie organique des polyamides aromatiques (ou poly aramide) par synthèse chimique à basse température ; ses propriétés diffèrent des polyamides aliphatiques classiques (type PA 6-6, dit « Nylon ») ; on la nomme souvent « **Kevlar** », qui est la marque de son créateur, Dupont de Nemours.

Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- d'une adhérence moyenne entre matrice et fibre.
- d'un prix encore trop élevé.

Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- La fibre basse module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles.
- La fibre haute module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

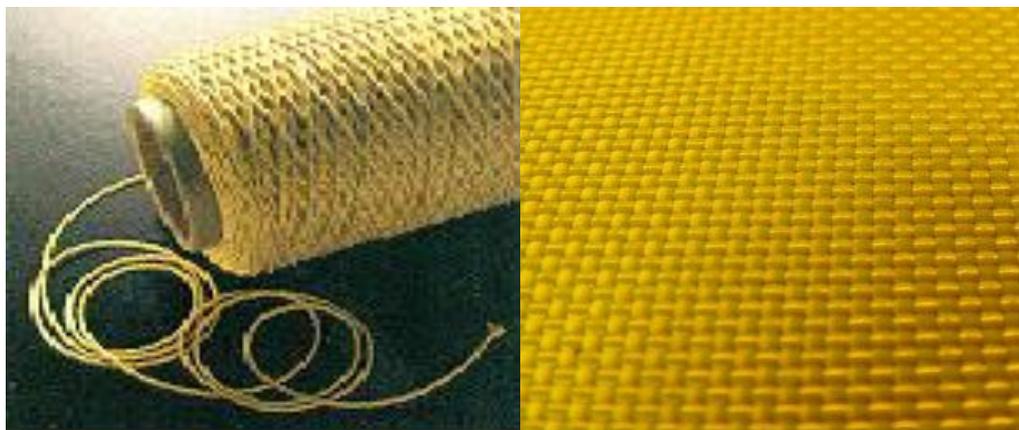


Figure I.8: Fibre d'aramide (Glossaire 2006).

Les propriétés physiques et mécaniques de ces deux types de fibres sont représentées dans le Tableau I.3

Tableau I.3 : Propriétés des fibres de Kevlar (Mechab 2009).

Propriétés en traction	Kevlar 49	Kevlar 29
R_t (MPa)	3000	2700
E_{oT} (Mpa)	120000 à 130000	60000
A_R (%)	2.1	4
Masse volumique (g/cm³)	1.45	1.44

I.2.1.4. Les fibres métalliques ou céramiques :

Sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication ; Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100°C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre.

Le diamètre résultant est de 100 à 200µm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("whiskers") qui sont des monocristaux filamenteux obtenus.

Par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1µm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

I.2.1.5. Autres renforts (bore et carbure de silicium) :

Ces deux types de renforts sont appelés au même principe de fabrication et ont des propriétés et des domaines d'application voisins. Leur utilisation reste toutefois très marginale (navette spatiale).

Ces matériaux sont fabriqués à base de bore, bore-carbure de bore, carbure de silicium, bore-carbure de silicium ; On opère par dépôt en phase gazeuse sur une âme en tungstène portée à 1200°C, qui sert de substrat. Le diamètre du mono filament est plus important que pour les autres fibres (100 à 150 microns).

Les prix et difficultés de mise en œuvre (fragilité, usinage difficile, manipulation dangereuse) freinent le développement de ces types de renforts.

I.2.2. Architecture des renforts :

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Il existe différentes géométries et textures de renforts :

I.2.2.1. Les unidirectionnels (UD) :

Dans un tissu unidirectionnel, les fils sont alignés parallèlement à la direction chaîne, et ils sont réunis par un fil fin dans la direction trame. Ainsi, le tissu est unidirectionnel avec des performances élevées dans la direction chaîne. Les performances mécaniques des divers tissus dépendent :

- Du type de fils constituant le tissu : nature (verre, carbone, etc.....), fils avec ou sans torsion, etc.
- De l'armure, Les armures unidirectionnelles et haut module donnent les meilleures Performances. L'armure satin est à un degré moindre, le sergé a des performances supérieures à celles de l'armure toile.

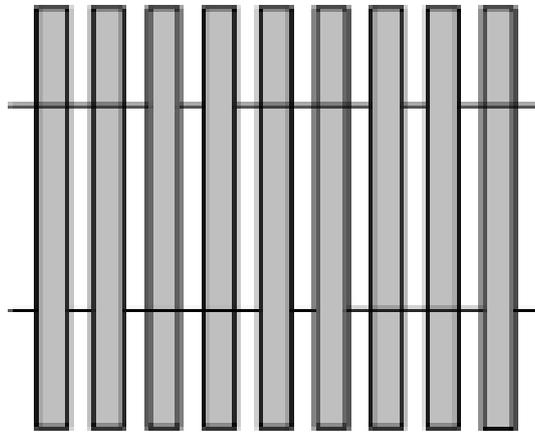


Figure I.9 : *les renforts unidirectionnels (Berthelot 2010).*

- **multidirectionnelle aléatoire :**

- fibres coupées et broyées, sans arrangement particulier.
- feutre de fibres agglomérées par un liant : le mat peut être à fibres courtes (longueur inférieure à 50 mm), sans orientations particulière ou à fibres continues.

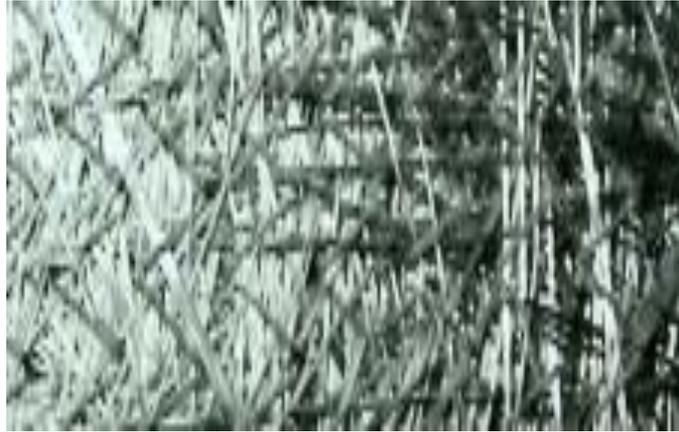


Figure I.10 : *Fibres multidirectionnelles (Gornet 2008).*

I.2.2.2. Tissus standards :

a. Toile ou taffetas : Dans l'armure taffetas, les fils de chaînes et de trame d'entrecroisent alternativement, conduisant à un tissu très plat, stable, mais peu déformable, Cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame. Toutefois, l'armure taffetas conduit à un haut degré de courbure des fibres qui induit une diminution des performances mécaniques des composites.

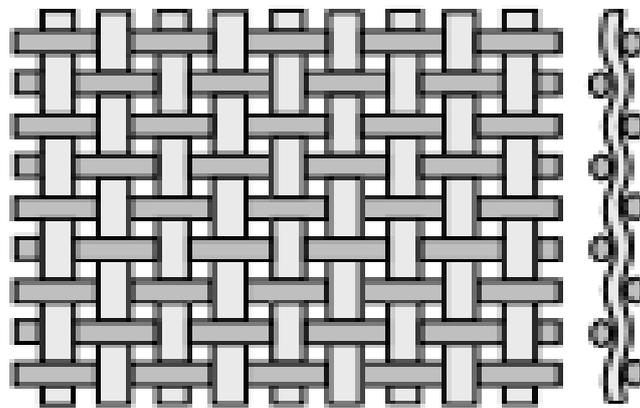


Figure I.11 : *la toile ou taffetas (Berthelot 2010).*

b. Sergé : Pour l'armure sergé, le nombre de fils chaîne et de fils trame qui s'entrecroisent peut varier. Dans un sergé 2x1, les fils trame passent sur un fil chaîne et sous deux fils chaînes, et dans un sergé 2x2, les fils trame passent sur deux fils chaîne et sous deux fils chaîne. Ce type d'entrecroisement conduit à un motif répétitif du tissu sous forme de nervures diagonales. L'armure sergé offre l'avantage d'être à la fois souple et dense. Le tissu sergé

permet ainsi un glissement entre les fils chaîne et trame et s'adapte bien à des moulages de formes complexes.

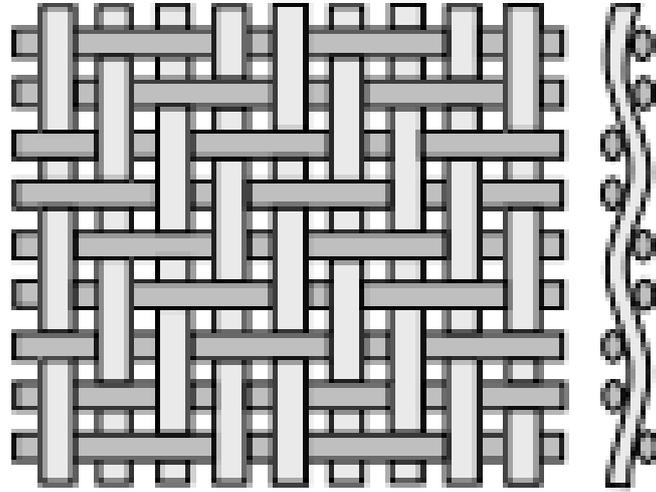


Figure I.12 : *sergé* (Berthelot 2010).

c. Satin : L'armure satin est assez semblable à celle du sergé, mais le nombre de fils chaîne et de fils trame qui passent les uns sur les autres avant de s'entrecroiser est plus élevé. Chaque tissu satin est caractérisé par un nombre, usuellement 4 ou 8, indiquant que les fils chaîne passent sur 4 ou 8 fils trame. Il en résulte un tissu avec une face qui contient plus de fils chaîne et une autre face plus de fils trame. L'armure satin est bien adaptée au moulage de formes complexes.

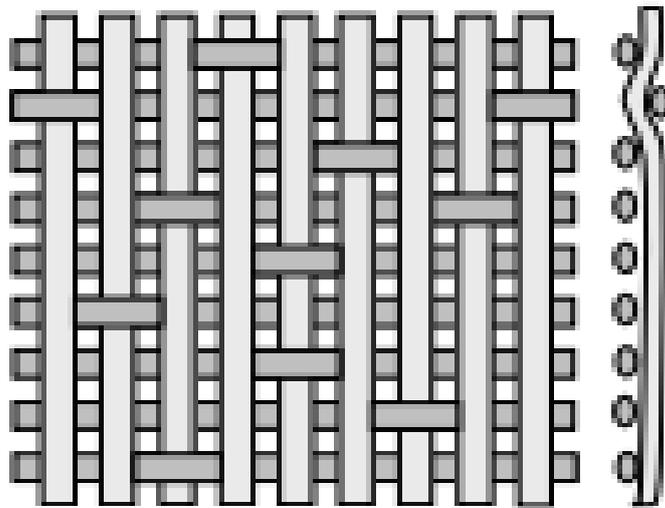


Figure I.13 : *le satin* (Berthelot 2010).

- **Orientée :**

-Le tissu comporte des fils de chaîne ou de trame (fibres bidirectionnelles) ; suivant le mode de croisement de la trame et de la chaîne, le tissu sera une toile, un sergé ou un satin.



Figure I.14: *Fibres orientées (Gornet 2008).*

I.2.3. Les matrices :

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2200°C peuvent être atteintes. Les objectifs de l'utilisation de la matrice sont multiples, les plus importants sont :

- Support et protection chimique des fibres ou particules ;
- Répartition et transfert de charges ;
- Donner la forme désirée au produit final.

La classification des types des matrices couramment rencontrées est donnée sur figure ci-dessous :

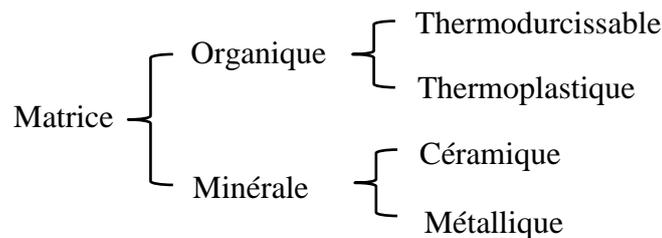


Figure I.15 : *Les différentes familles de matrice (Gornet 2008).*

I.2.3.1. Les matrices organiques :

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, d'assurer le transfert de charge entre elles, de les protéger des chocs, des frottements et de l'environnement extérieur. En outre, elle présente l'avantage d'être chimiquement réactive, ce qui permet l'établissement de liaisons fortes avec le renfort. Elle apporte aussi la tenue chimique de la structure et enfin d'assurer la forme de la structure. Cependant, la matrice ne doit pas être trop rigide pour ne pas contrarier le travail des fibres ce qui fait de sa ductilité un paramètre important. La satisfaction simultanée de tous ces critères étant difficile, les matrices sont choisies selon le domaine d'utilisation du matériau composite. Cela a donné différentes matrices utilisées selon la fonction pour laquelle le composite est destiné. Ce qui a donné naissance à un matériau nouveau, modulable et adaptable aux caractéristiques mécaniques exigées. Elle est à base de polymères. Un polymère est un enchaînement de groupes organiques identiques appelés monomères. Un monomère est une suite d'atomes de carbone liés entre eux et avec d'autres éléments (H, N, Si, Cl...).

I.2.3.1.1. Les résines thermodurcissables(TD) :

Les composites à matrice thermodurcissable représentent 70% des composites utilisés en Europe. Ces résines sont très utilisées pour des raisons de prix et de facilité de mise en œuvre. Ils sont formés de macromolécules orientées selon un réseau tridimensionnel et polymérisent selon la forme souhaitée par une transformation irréversible, qu'il est très difficile à rompre, sinon par l'apport d'une importante quantité de chaleur. Cette caractéristique confère à ces résines de meilleures performances thermomécaniques. Ces polymères ne sont pas recyclables, et ce phénomène pose un problème, qui n'a pas encore de solution fiable (Menail, 2009).

Les principales résines thermodurcissables sont :

- Les polyesters insaturés : pour les applications grandes diffusion qui présentent un bon compromis cout/performance ;
- Les résines époxy (ou époxydes) qui constituent la résine type des composites HP ;
- Les vinylesters, dont la chimie de durcissement est identique à celle des polyesters insaturés, mais avec un cout supérieur d'un facteur deux à trois, justifié par une très bonne tenue à la corrosion ;

-Les phénoliques, pour leur tenue au feu et à hautes températures. D'autres familles sont également utilisées (polyuréthanes, mélamines, silicones..) mais encore en quantités faibles pour les applications composites.

Le tableau suivant regroupe les caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables :

Tableau I.4 : Caractéristiques moyennes des matrices (Ait Atmane 2011).

Matrices TD	Masse volumique (kg.m ³)	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Module de Cisaillement (Mpa)	Coefficient du poisson	Contrainte de rupture (traction) (Mpa)	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique x10 ⁻⁵ °C ⁻¹
	P	E	G	v	Sr	A	A
Epoxyde	1200	4500	1600	0.4	130	2	11
Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70	2.5	1
Polyester	1200	4000	1400	0.4	80	2.5	8
Polycarbonate	1200	2400	--	0.35	60	--	6
Vinylester	1150	3300	--	--	75	4	5
Silicone	1100	2200	--	0.5	35	--	--
Uréthane	1100	700à7000	--	--	30	100	--
Polyimide	1400	4000à19000	1100	0.35	70	1	8

I.2.3.1.2. Les résines thermoplastiques (TP) :

L'emploi de ces matrices s'est développé à partir des années 1970. Ils se présentent sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible et ces polymères sont recyclés par simple chauffage. Ils sont de loin les plus employés du fait de leur faible coût et de leur facilité d'utilisation. Le changement d'état solide/liquide ou pâteux peut se faire plusieurs fois avec une perte de caractéristiques à chaque cycle (Menail, 2009). Ils comportent deux classes: les amorphes, sans ordre moléculaire, et les cristallins. Les principales matrices TP utilisées (possédant tous une tenue en température supérieure à 100 °C) sont les suivantes :

- Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;
- Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

De plus en plus, on utilise des thermoplastiques thermostables (tenue thermomécanique est de l'ordre de 140°C), en particulier les suivants :

- Polyéther-imide (PEI) ;
- Polyéther-sulfone (PES) ;
- Polyéther-éther-cétone (PEEK).

Dans le tableau qui suit des Propriétés physiques et mécaniques de plusieurs types de résines thermoplastiques sont présentées :

Tableau I.5 : Propriétés physiques et mécaniques des résines thermoplastiques (Ait Atmane 2011)

Matrices TP	Masse volumique (kg.m ⁻³)	Module d'élasticité longitudinal	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
PP	900	1200	0.4	30	20 à 400	9 x 10 ⁻⁵
PPS	1300	4000	--	65	100	5 x 10 ⁻⁵
PA	1100	2000	0.35	70	200	8 x 10 ⁻⁵
PES	1350	3000	--	85	60	6 x 10 ⁻⁵
PEI	1150	3300	--	105	60	6 x 10 ⁻⁵
PEEK	1300	4000	--	90	50	5 x 10 ⁻⁵

Tableau. I.6 : Principales différences entre TP et TD (Glossaire 2006).

Matrices	Thermoplastiques (TP)	Thermodurcissables (TD)
Etat de base	Solides prêt à l'emploi	Liquide visqueux à polymériser
Stockage	Illimité	Réduit
Mouillabilité renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage + refroidissement	Chauffage continu
Cycle	Court	Long
Tenue au choc	Assez Bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite	Bonne
Chutes et déchets	Recyclables	Perdus ou recyclés en charge
Conditions de travail	Propreté	Emanation pour « méthode humide »

I.2.3.2. Les matrices minérales :

I.2.3.2.1. Les matrices métalliques :

Les matériaux composites à matrice métallique dont il est question ici ont été développés à partir des années 1960-1965 en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel. Voici quelques composites à matrices métalliques :

Tableau I.7 : *les composites à matrice métallique (Ait Atmane 2011).*

Symbole	Définition
CMAI	composite à matrice aluminium
CMM	composite à matrice métallique
CMMg	composite à matrice magnésium
CMTi	composite à matrice titane
PAN	polyacrylonitrile
PCS	polycarbosilane
PTCS	polytitanocarbosilane

I.2.3.2.2. Les matrices céramiques :

Dans les années 80, la disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile, à l'initiative de l'industrie japonaise.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel. Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine

aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

1.2.4. Charges et aditifs :

Dans une formulation, une charge est une substance solide, non miscible et dispersée par un moyen mécanique dans une matrice. Elle est introduite dans un mélange pour en particulier diminuer le coût, améliorer certaines propriétés ou modifier la densité. On distingue une toute variété des charges (minérales ou celluloses) et additifs (colorants, pigments, plastifiants, protecteurs, agents anti-UV,...etc.) des matières plastiques sont des éléments ajoutés aux matériaux composites au cours de leur élaboration ou de leur transformation et qui visent leur conférer des caractéristiques particulières utiles lors de la transformation ou des fonctionnalités pour leur usage final. La typologie proposée repose sur le type de fonction de l'additif.

Enfin les charges et additifs sont incorporés dans un matériau composite pour :

- Modifier la couleur ;
- Modifier sensiblement les propriétés mécanique, électrique ou thermique ;
- Réduire le coût ;
- Résister au feu ;
- Diminuer le retrait ;
- Faciliter le démoulage ;
- Améliorer la résistance au vieillissement ;
- Modifier la densité du matériau.

1.2.5. Mise en œuvre des matériaux composites :

Les méthodes de mise en œuvre spécifiques aux matières plastiques renforcées ont contribué à l'évolution des termes utilisés pour désigner ces matériaux depuis leur origine, c'est-à-dire depuis une cinquantaine d'années.

Des techniques originales ont été élaborées pour la mise en œuvre de composites à fibres longues. La description de ces méthodes spécifiques occupe évidemment une place importante dans les rubriques 'composites'.

Soit par polycondensation et réticulation(ou polymérisation) pour les matrices thermodurcissables, soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques. Il existe différentes techniques mais la plus utilisée est par moulage :

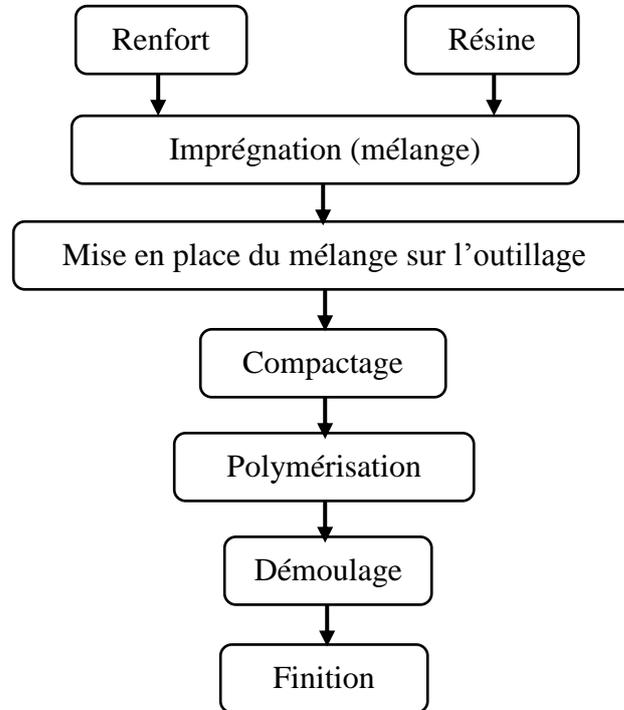


Figure I.16 : *Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite.*

1.2.6. Les matériaux composites structuraux :

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc.

Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches ;
- Les stratifiés ;
- Les sandwiches.

1.2.6.1. Les monocouches :

Les monocouches ou pli, représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes (figure 1.17).

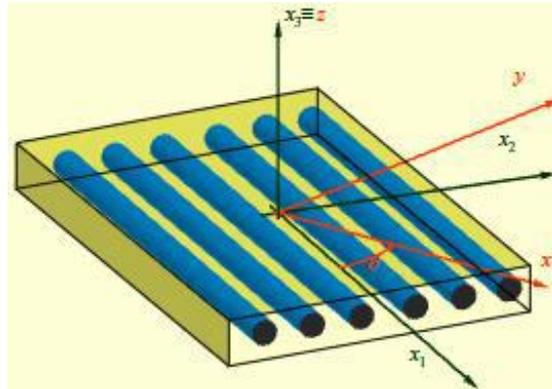


Figure I.17 : Matériau composite monocouche (Ait Atmane 2011).

I.2.6.2. Structures composites stratifiées :

On appelle « stratifié » un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux. Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate (Cugnoni 2004). Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bi-directionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine (Figure I.22).

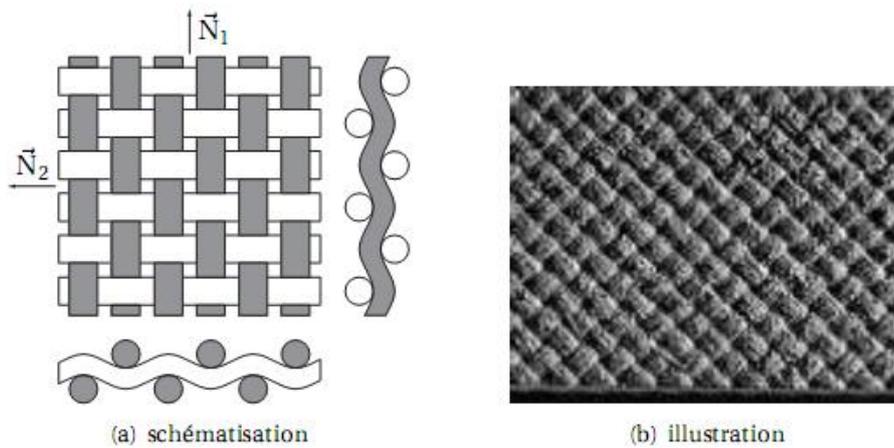


Figure I.18 : Matériau avec deux directions de renfort (Gornet 2008).

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces interlaminaires. La couche et l'interface sont les deux entités, qui

forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées comme illustré sur la (Figure I.14). L'interface interlaminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier. L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches).

I.2.6.2.1. Désignation des structures stratifiées :

Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type $(90^\circ, 0^\circ) 2s$ est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à 90° et 0° , puis par symétrie de deux groupes de plis à 0° et 90° . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

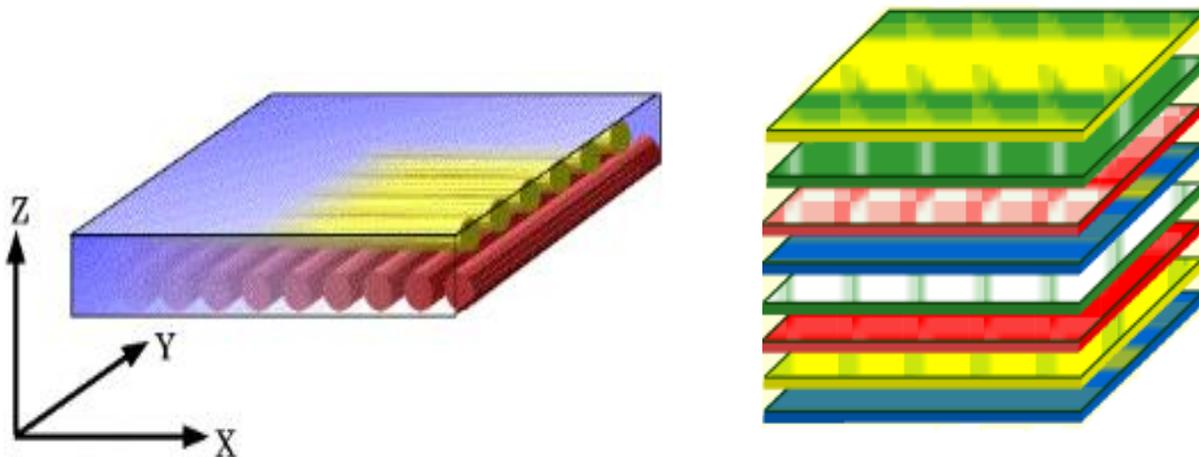


Figure I.19 : *Désignation d'un stratifié (Mechab 2009).*

I.2.6.2.2. Structures sandwichs :

Les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme (cœur) et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence.

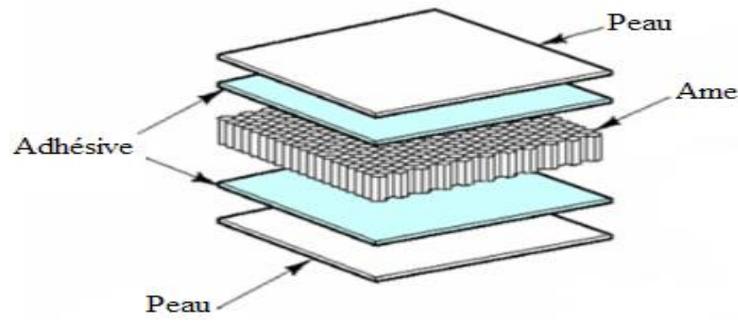


Figure I.20 : Matériau composite sandwich (Ait Atmane 2011).

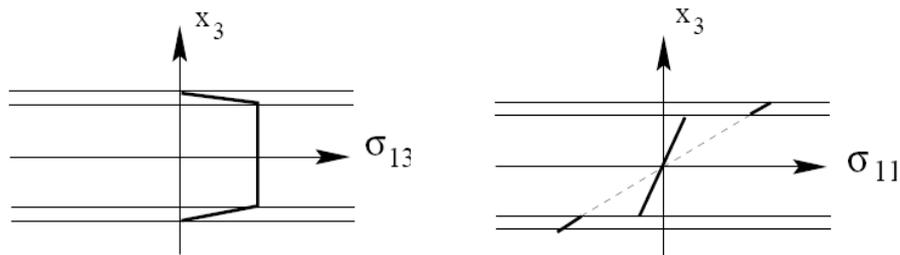


Figure I.21 : Contraintes de cisaillement et de compression dans les sandwichs (Ait Atmane 2011).

Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la (Figure I.24). Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.

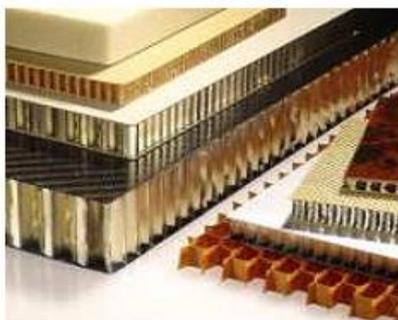


Figure I.22: Sandwich à âme en nid d'abeille (Benatta 2011).



Figure I.23: Sandwich à âme viscoélastique (Benatta 2011).

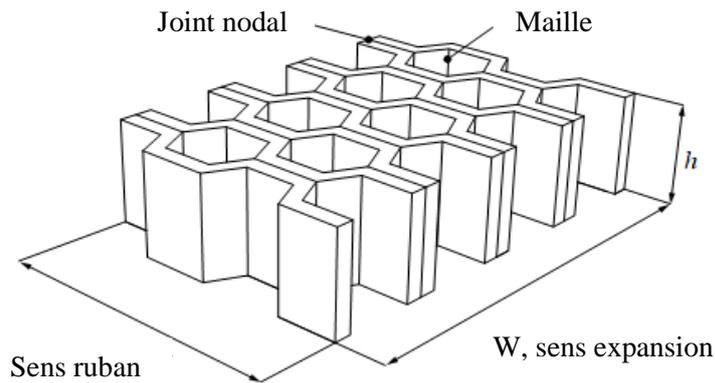


Figure I.24 : Désignations d'une âme nid d'abeilles (Gornet 2008).

Les matériaux composites ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température) ;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Tolérance aux dommages (représente le point faible le plus important) ;
- Problèmes d'assemblage (grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs).

I.2.6.2.3. Zone inter-faciale :

Les composites à fibres sont généralement composés de deux matériaux aux propriétés mécaniques différentes et de deux interfaces: fibre/ensimage et résine/ensimage. L'ensimage est une opération de lubrification réalisée en sortie de filière sur les fils de base. Le filament est revêtu d'une pellicule d'ensimage constituée, en général, d'une dispersion aqueuse de divers composés chimiques présentant chacun une fonction bien définie. Cet ensimage est ensuite enlevé et remplacé par l'ensimage définitif à base de silane pour accrochage. Il se forme donc une interface qui constitue et assure la continuité. Elle peut être considérée comme un troisième constituant avec des propriétés mécaniques particulières, si son épaisseur n'est pas négligeable. La contrainte appliquée sur la matrice est transmise à la fibre par l'intermédiaire de l'interface. Ses propriétés ont donc une influence importante sur les propriétés du composite. L'interface joue un rôle primordial dans la résistance à la propagation des fissures.

I.2.6.2.4. Endommagement :

Les mécanismes d'endommagement des composites unidirectionnels dépendent essentiellement du mode de sollicitation. Trois principaux modes d'endommagement peuvent intervenir sur un composite unidirectionnel : les ruptures de fibres, l'endommagement matriciel et la décohésion interfaciale. Lors de la fissuration d'une matrice, ce phénomène se déroule en deux étapes :

- a- des microfissurations apparaissent au niveau de défauts présents dans la matrice (inclusions, porosités...);
- b- une fissure se propage ensuite selon la direction perpendiculaire à la sollicitation. Si la contrainte en fond de fissure est suffisamment importante, la fissure peut provoquer, à l'arrivée à une interface, une rupture de fibre ou un décollement interfaciale (l'une de ces deux possibilités sera favorisée par rapport à l'autre selon la plus ou moins bonne cohésion fibre/ matrice).

Dans les structures composites monocouches, stratifiés ou sandwiches, La matrice et les fibres sont toujours sollicitées et peuvent être endommagées, en plus de plus la zone inter faciale représente une zone d'accumulation et de concentration des contraintes peut influencer gravement sur les différentes types de composites citées auparavant, pour éviter la décohésion inter faciale et le phénomène d'endommagement de ces structures ainsi que assurer une meilleure résistance mécanique et thermique, on à procéder à la conception des matériaux plus performant que les composites, généralement possèdent des caractéristiques chimiques et mécaniques beaucoup plus élevées et disposent d'une excellente adhérence fibres/ matrices. La nouvelle classe de composites appelée les matériaux à gradient de propriétés (*Functionally Graded Materials : F.G.M*).

I.3. Les matériaux fonctionnellement graduée FGM :

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials-FGM-). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus

biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques (Zhong et Yu, 2007). La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales (Baron et Naili, 2008).

I.3.1. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi, 1992). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique (Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (Nguyen et *al.*, 2007).

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet (Koizumi, 1997).

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi, 1992).

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches (Okamura, 1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, constructions (Okamura, 1991).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels «Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer

l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

I.3.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique (Koizumi, 1992).

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (Kokini et Takeuchi, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.8.

Tableau I.8: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Bouhadra 2015).

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	- Élimination des problèmes de l'interface - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.25. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al. 1986).

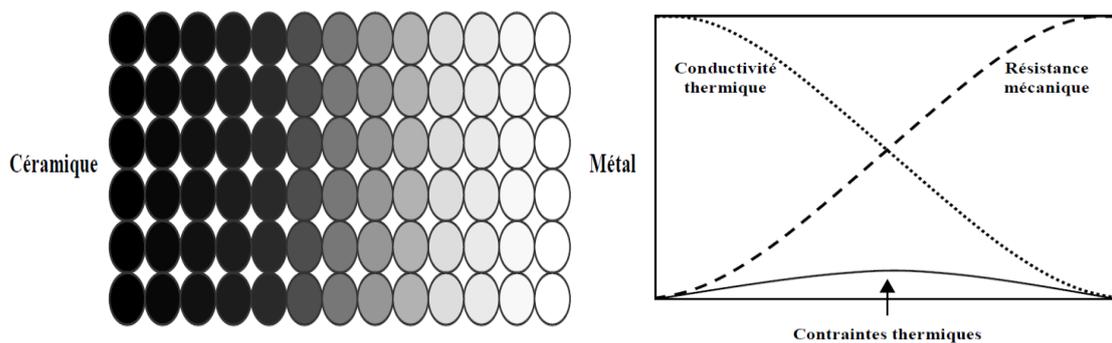


Figure I.25 : Concept des matériaux à gradient de propriétés (Bouhadra 2015).

La figure I.26 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

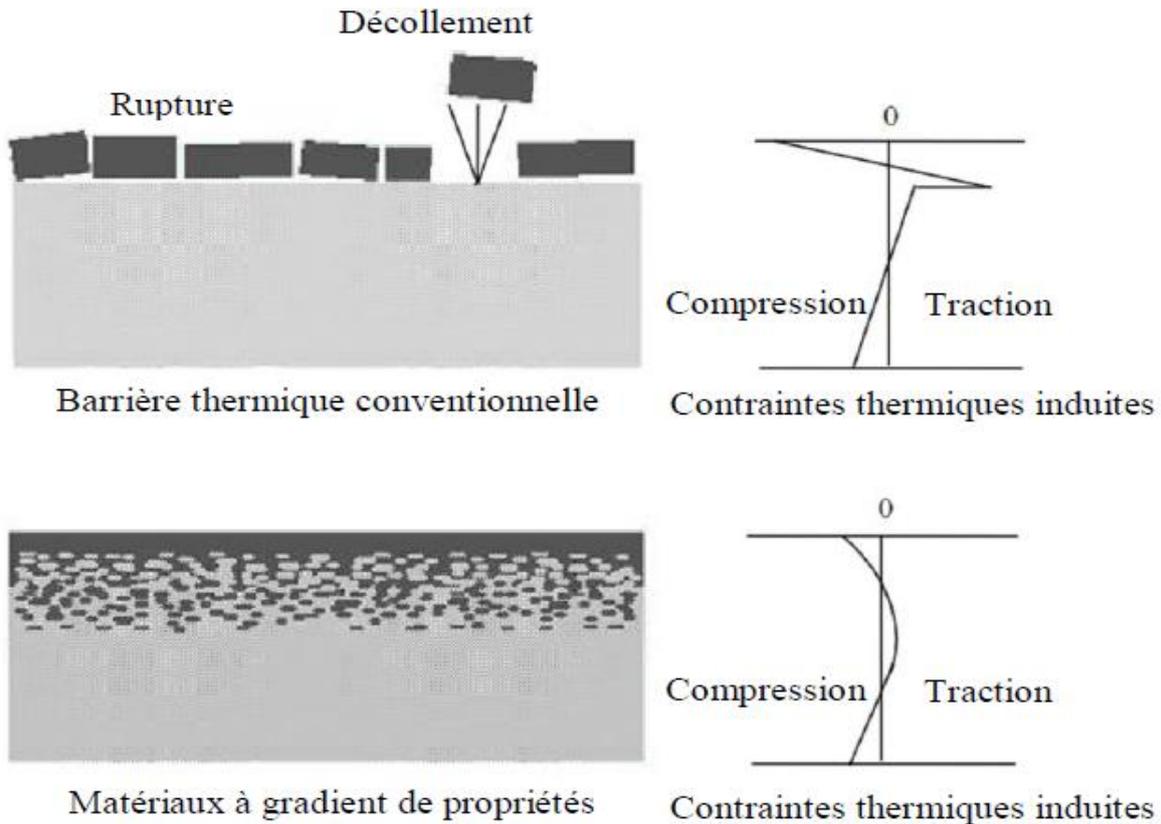


Figure I.26 : Protection thermique (Bouhadra 2015).

I.3.3. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

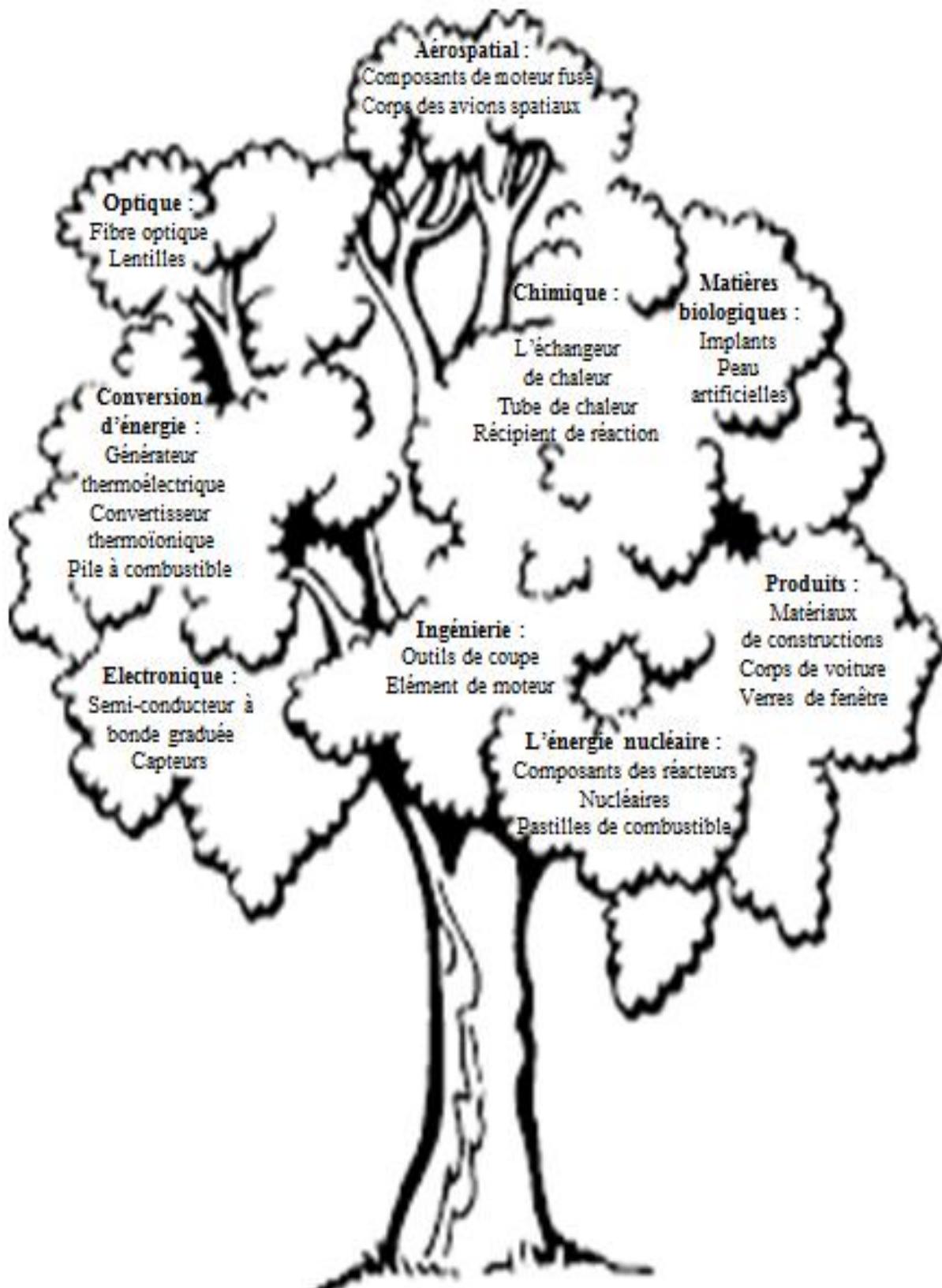


Figure I.27 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.3.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

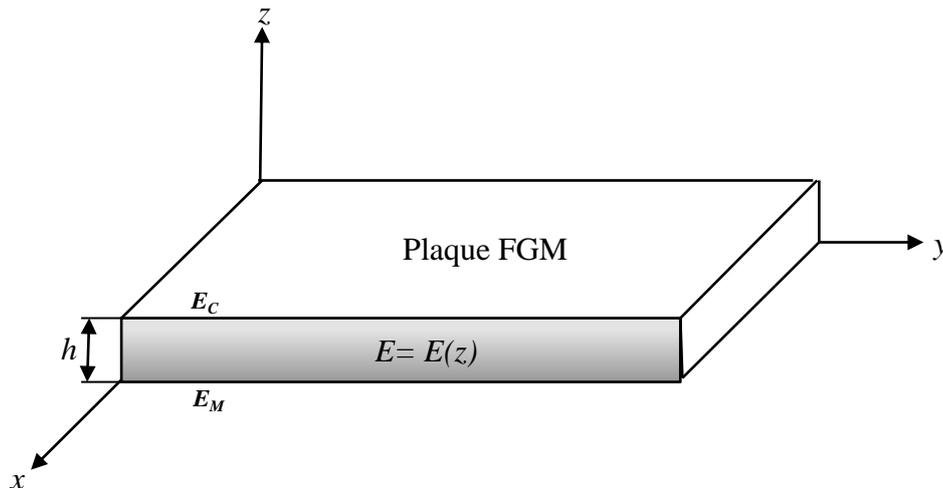


Figure I.28 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de

l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (SFGM).

I.3.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \tag{I.1}$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao, 1995) :

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)V(z) \tag{I.2}$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.29, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

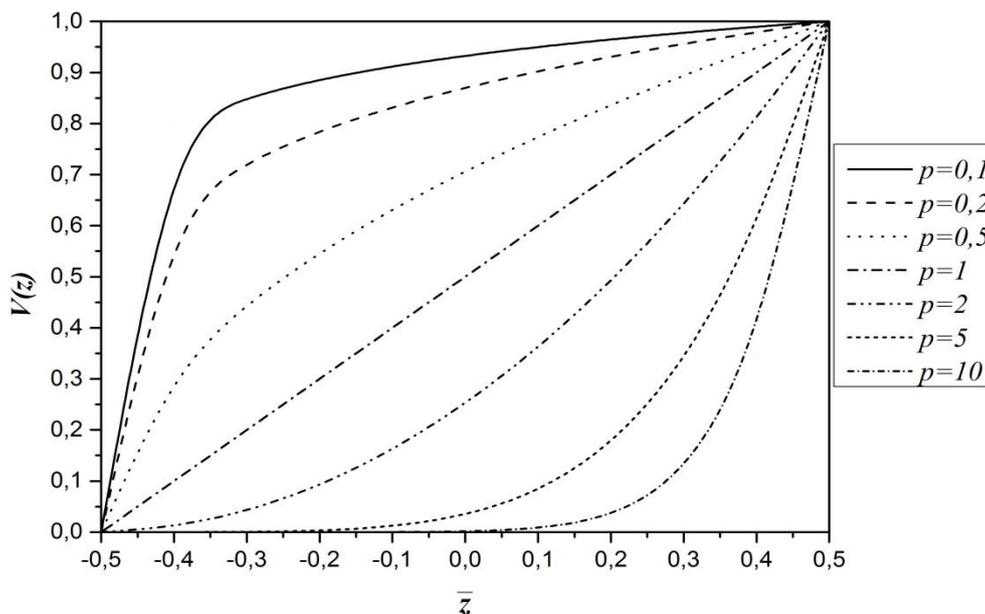


Figure I.29 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.3.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995). Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.30 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

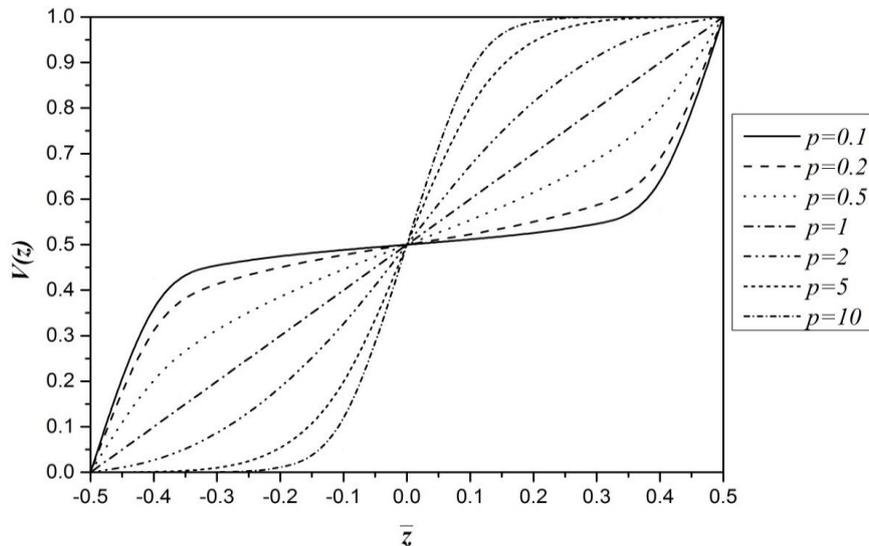


Figure I.30: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.3.4.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale, 1983):

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \tag{I.5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.31.

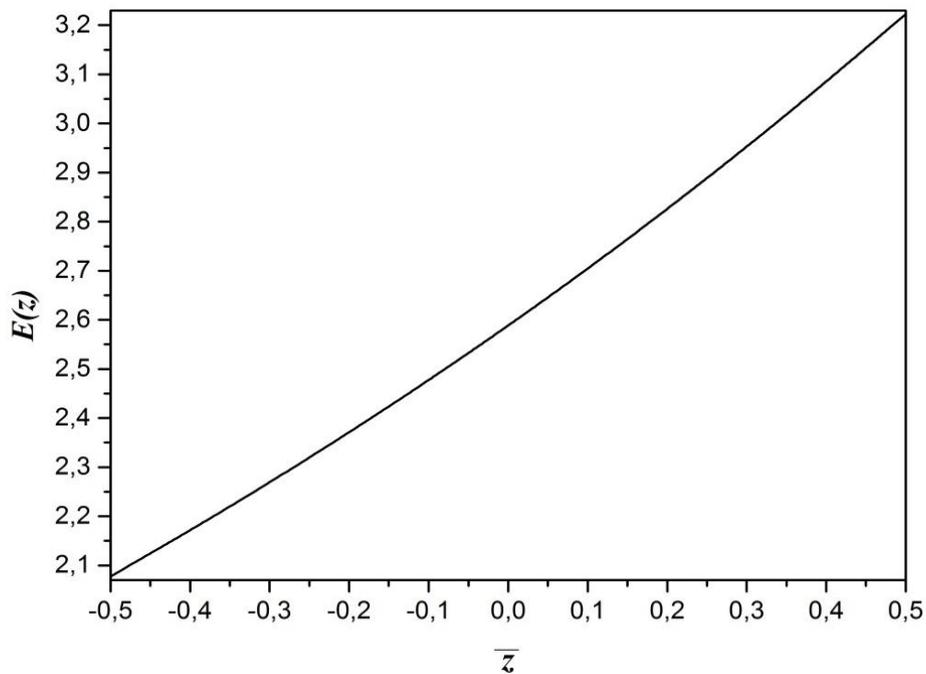


Figure I.31 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

Pour le cas d'une poutre ou d'une plaque FGM symétrique, (Mahi et al. 2010) :

I.3.4.4. Loi de mélange en puissance (P-FGM) symétrique:

La propriété du P-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$E(z) = [E_1 - E_{mb}] \left(-\frac{2z}{h} \right)^P + E_{mb} \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I.6.a}$$

$$E(z) = [E_2 - E_{mb}] \left(\frac{2z}{h} \right)^p + E_{mb} \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6.b})$$

I.3.4.5. Loi de mélange exponentielle (E-FGM) symétrique :

La propriété du E-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$E(z) = E_{mb} \text{ Exp } \left[\left(-\frac{2z}{h} \right) \ln \left(\frac{E_1}{E_{mb}} \right) \right] \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7.a})$$

$$E(z) = E_{mb} \text{ Exp } \left[\left(\frac{2z}{h} \right) \ln \left(\frac{E_2}{E_{mb}} \right) \right] \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.7.b})$$

I.3.4.6. Loi de mélange sinusoïdale (S-FGM) symétrique :

La propriété du S-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$E(z) = [E_1 - E_{mb}] \left[1 - 0.5 \left(2 + \frac{4z}{h} \right)^p \right] + E_{mb} \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq -h/4 \quad (\text{I.8.a})$$

$$E(z) = [E_1 - E_{mb}] \left[0.5 \left(-\frac{4z}{h} \right)^p \right] + E_{mb} \quad \text{Pour } -h/4 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8.b})$$

$$E(z) = [E_2 - E_{mb}] \left[0.5 \left(\frac{4z}{h} \right)^p \right] + E_{mb} \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/4 \quad (\text{I.8.c})$$

$$E(z) = [E_2 - E_{mb}] \left[1 - 0.5 \left(2 - \frac{4z}{h} \right)^p \right] + E_{mb} \quad \text{Pour } h/4 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8.d})$$

Où E_1 , E_2 , E_{mp} sont les propriétés mécaniques au niveau des surfaces supérieure, inférieure et médiane et qui sont dépendantes de la température. Il faut noter que la distribution est symétrique lorsque $E_1 = E_2$.

n et p sont les index des fractions volumiques qui pilotent le profil de variation des propriétés à travers l'épaisseur.

Les fractions volumiques du P-FGM symétrique, du S-FGM symétrique ainsi que le module de Young obéissant à la loi E-FGM symétrique sont représentées graphiquement sur les figures 2.11, 2.12 et 2.13 respectivement.

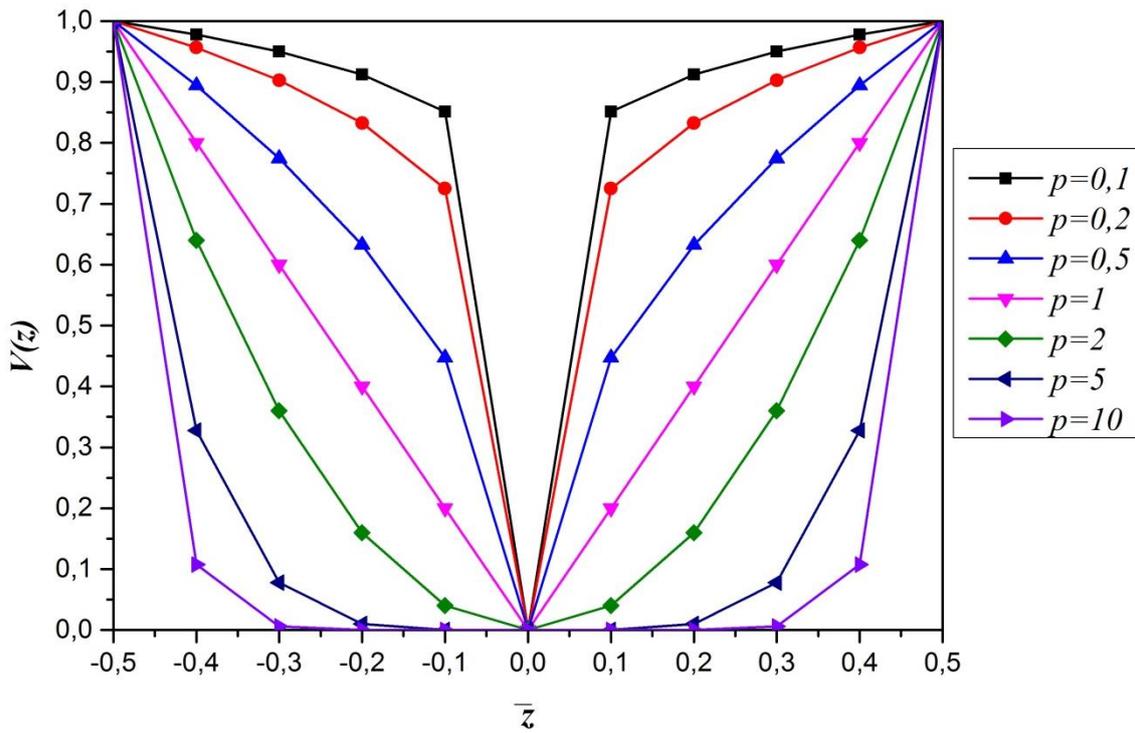


Figure I.32 : Variation de la fraction volumique du P-FGM symétrique.

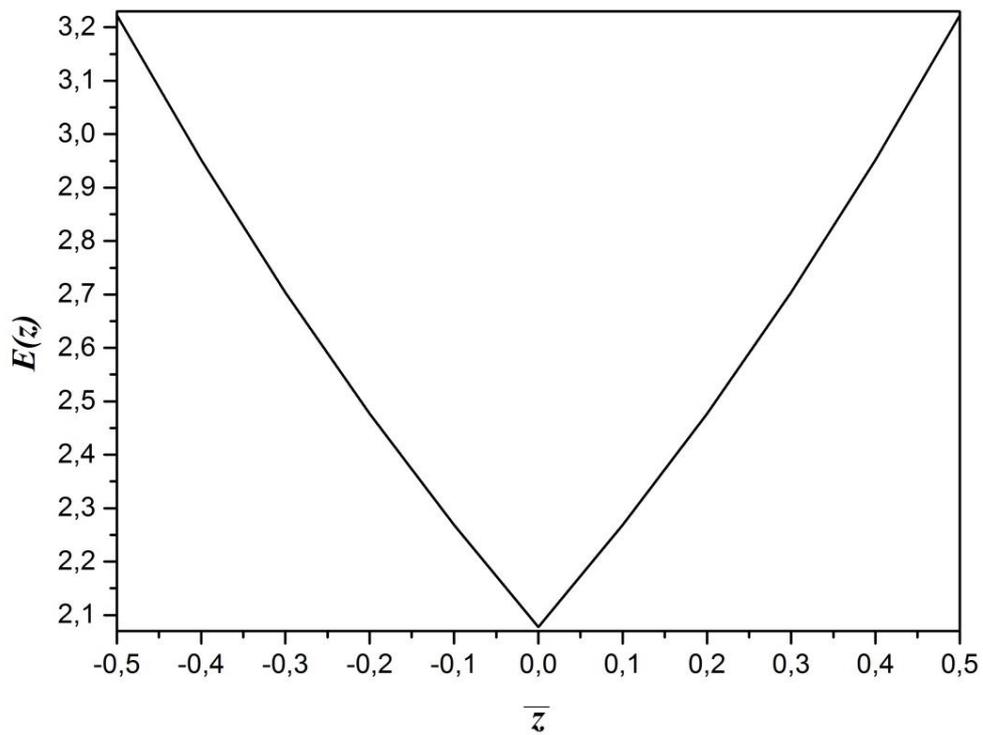


Figure I.33 : Variation du module d'Young E ([Pa] $\times 10^{-11}$) (E-FGM Al_2O_3 -SUS304- Al_2O_3).

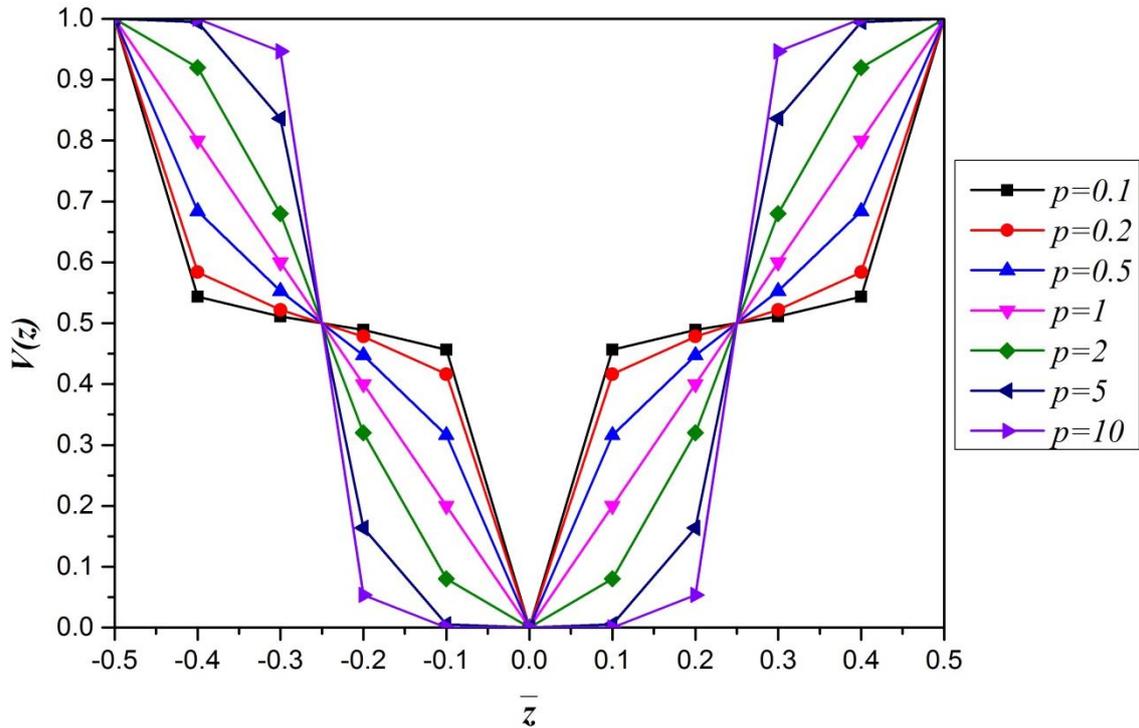


Figure I.34 : Variation de la fraction volumique du S-FGM symétrique.

I.3.9. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux composites et à gradient de propriétés « FGM », leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Dans le chapitre suivant, on exposera une revue bibliographique sur les différentes théories rencontrées dans la littérature pour l'étude de la déformation de cisaillement des plaques.

Chapitre II:

Les théories des plaques

II.1. Introduction :

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface plane (plan x, y) et par une petite épaisseur notée (h) par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur, figure I), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue empilement des différentes couches de matériaux orthotropes. Les plaques peuvent être classées en trois catégories :

1) *Les plaques isotropes*: elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).

2) *Les plaques orthotropes*: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aeronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art (Batoz, 1990).

3) *Les plaques anisotropes*: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

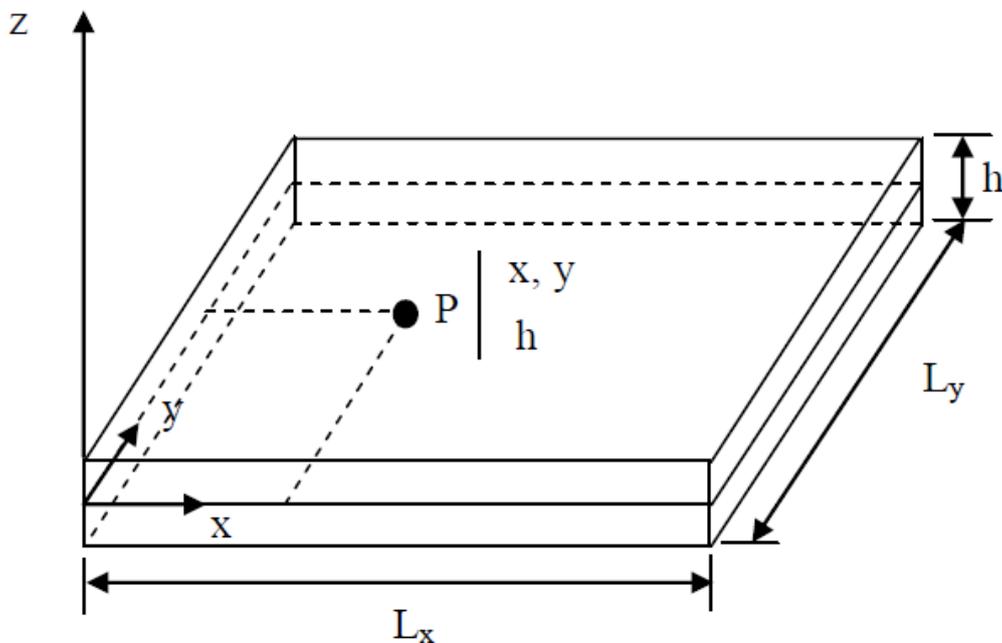


Figure II.1: Description d'une plaque.

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous-marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,...), etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle. Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :

II.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (Reissner 1961). L'hypothèse adoptée est celle de Kirchhoff 1950 des contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure II.2) ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Plusieurs chercheurs ont utilisé cette théorie telle que Yanga et Shen (2003), Ghannadpour et Alinia (2009), Chakraverty et Pradhan (2014), Chakraverty et Pradhan (2014), Ruan et Wang (2014), Loy et al. (1999), Du et al. (2014), Ebrahimi et Najafizadeh (2014).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{II.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{II.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.1c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

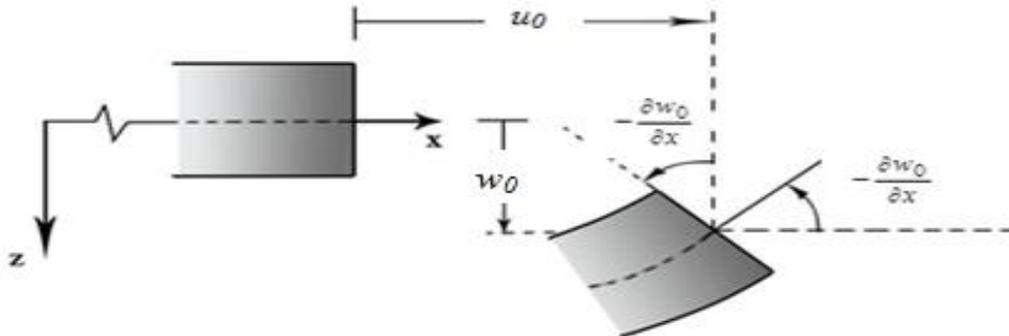


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.

II.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

Puisque la CPT donne des résultats non précis pour les plaques épaisses, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouve dans les références (Reissner 1945; Mindlin 1951). La FSDT est utilisé par plusieurs chercheurs Reddy (1998), Della Croce et Venini (2004), Memar Ardestani et al. (2014), Bouazza et al. (2010), Valizadeh et al. (2013).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y), \quad (\text{II.2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y), \quad (\text{II.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.2c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

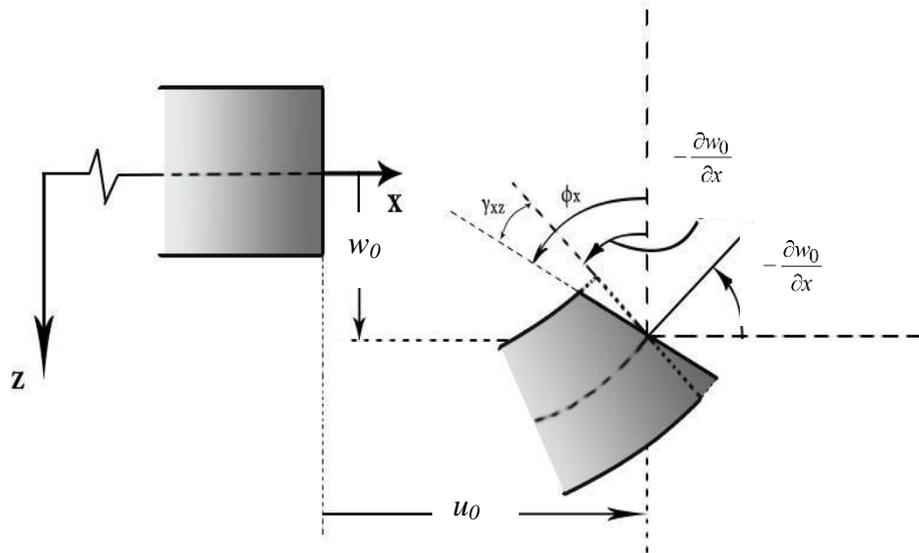


Figure III.3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

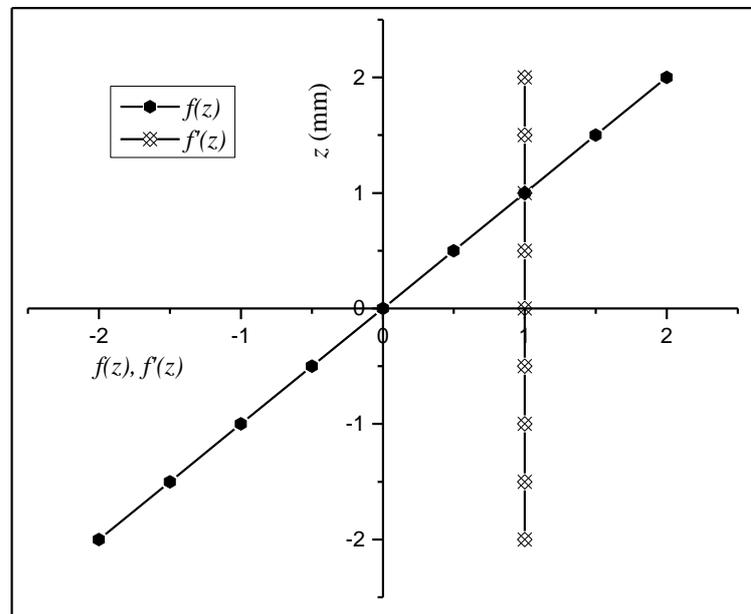


Figure II.4: Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur.

II.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

A la différence de la théorie classique des plaques (CPT) qui se base sur la distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur et la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) qui introduit le cisaillement transversal d'une façon uniforme à travers l'épaisseur, La théorie d'ordre élevé (HSDT) est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al., 1949; Naghdi, 1957; Reissner, 1975; Reddy, 1984; Soldatos 1992 ; Kant et Swaminathan, 2002 ; Zenkour 2007; Akavci 2010 ; Mantari et al. 2011 ; Mantari et Guedes Soares 2012 ; Mantari et Guedes Soares 2012 ; Mantari et Guedes Soares 2013 ; Akavci 2014 ; Mahi et al. 2014).

Le champ de déplacement de cette théorie est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{II.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{II.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

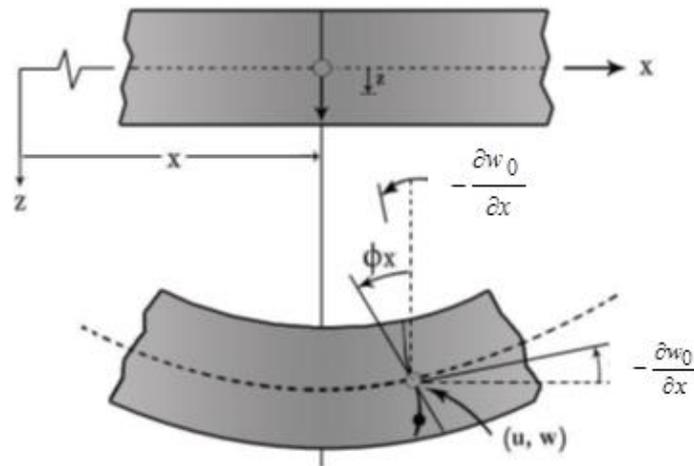


Figure III.5: Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).

Dans ce qui suit, nous allons présenter quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques en FGM.

Le premier modèle et celle de Reddy, (1997,1999), les déplacements sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Ce qui donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle (Elasticité 3D).

En 1991, une fonction trigonométrique sinusoïdale est introduite dans un modèle sinus (SSDT) pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur est proposé par Touratier (1991), ce modèle (SSDT) est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (SSDT) prennent une forme co-sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Karama et al., (2003) ont développé une version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de Touratier (1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement interlaminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes (Duong, 2007).

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al., (2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.7})$$

II.2.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Plusieurs chercheurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés pour franchir les limites des théories du premier ordre (Ambartsumyan (1969) Reissner (1945), Levinson, (1981) Whitney, 1973 ; Nelson, 1974 ; Lo, 1977 ; Touratier, 1991), ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le

gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée par des fonction de cisaillement $f(z)$.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (1969) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche de Reissner (1945), avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de Levinson, (1981) et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

- L'approche de Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z) = z \alpha \frac{-2 \left(\frac{z}{h} \right)^2}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

- L'approche de El Meiche et al. (2011) avec ;

$$f(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh(\pi/2 - 1)} \quad (\text{II.12})$$

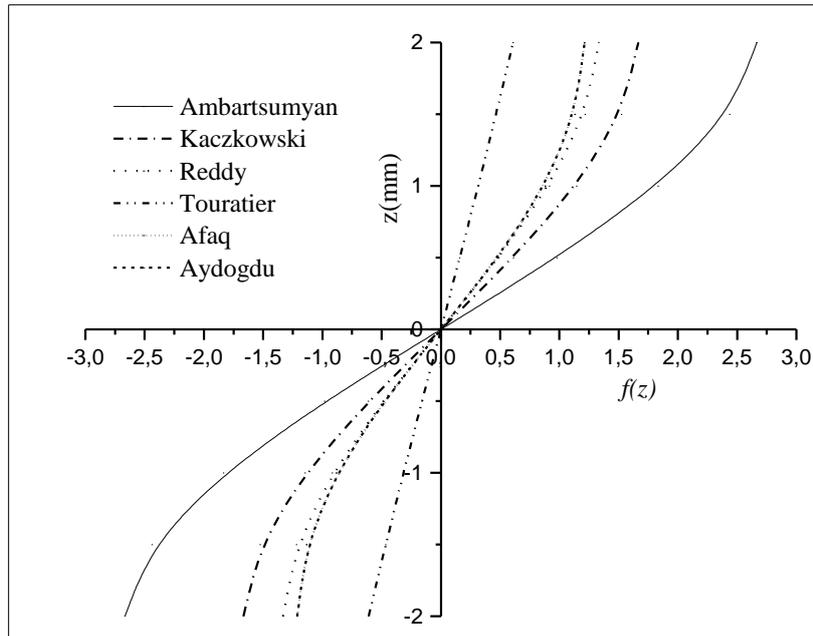


Figure II.6: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

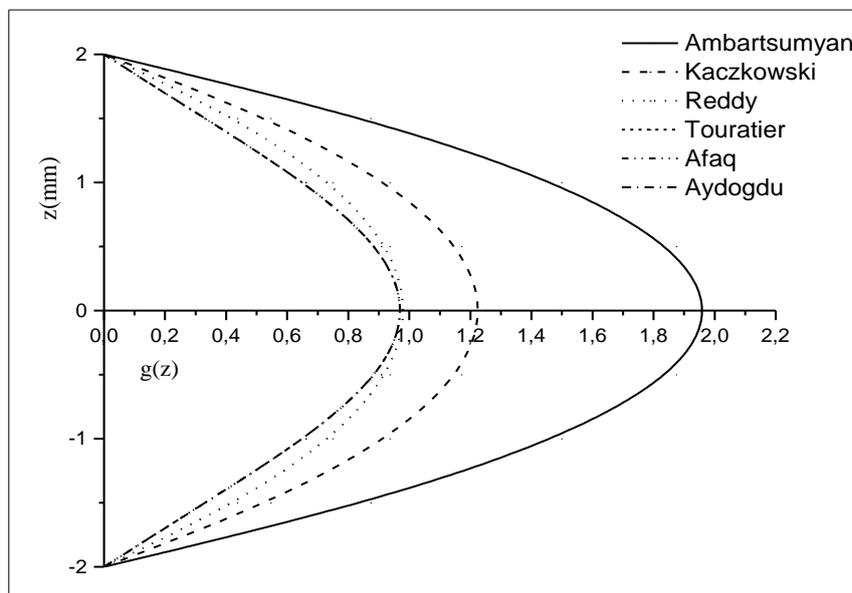


Figure. II.7: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

II.2.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques :

En (2002) un nouveau modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory) a été développé par Shimpi. Ce modèle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique, avec une distribution parabolique des contraintes cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement Aussi, elle est similaire avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. la flexion des plaques FGM a été étudié par Ait Atmane et al. (2010) en utilisant la RPT. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji et al. (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de cette théorie raffinée pour l'étude de la stabilité des plaques épaisses isotrope et orthotrope et fonctionnellement graduées (FGM) avec ou sans la présence de fondations élastique. En plus la position exacte de la surface neutre de telle plaque sera déterminée.

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (3b)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (3c)$$

II.2.6. Théorie de zig-zag :

En 1987, Di Sciuva a proposé un modèle de théorie de zig-zag du premier ordre (Di Sciuva 1987). Dans ce modèle, la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre (FSDT) et d'une fonction zig-zag, la fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue à travers l'épaisseur mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. II.8). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

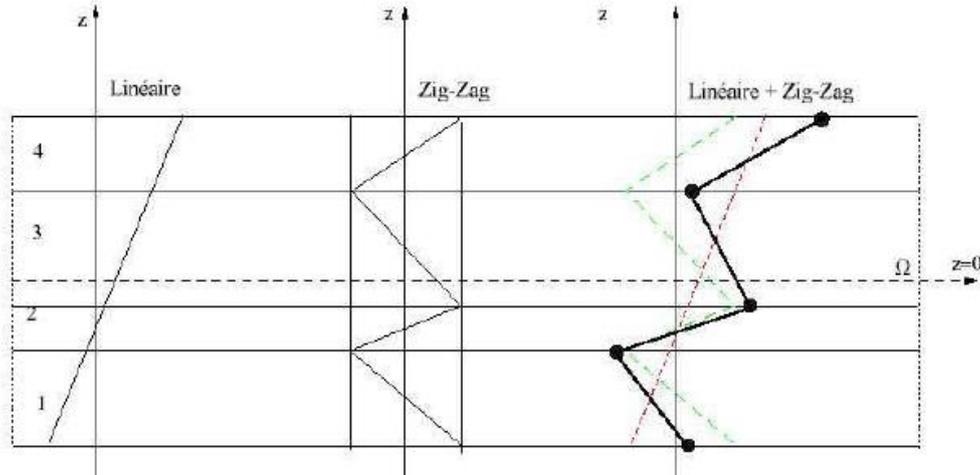


Figure II.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen 2004).

La bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée est l'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag , ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité. Plusieurs chercheurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Murakami, 1986 ; He, 1994 ; Icardi, 2001 ; Carrera, 2004) en se basant sur le concept de Di Sciuva (1987). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (figure II.9). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres (Tafla, 2007).

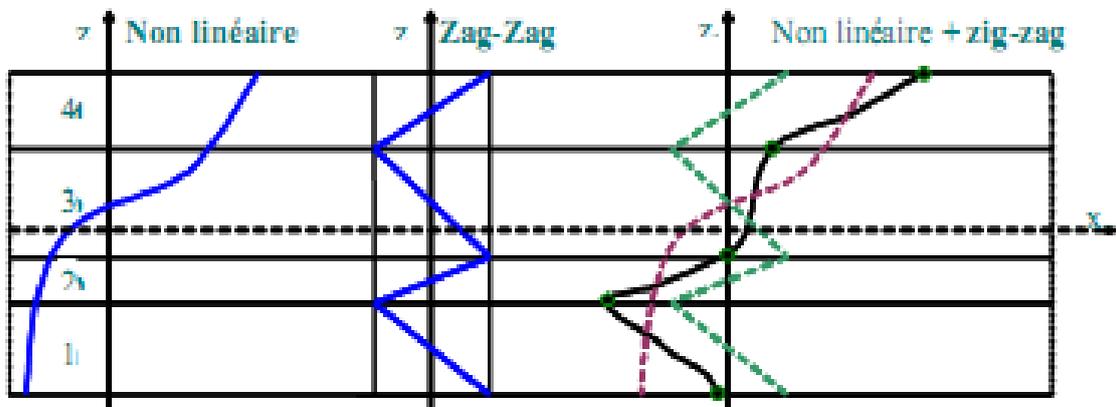


Figure II.9: Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé (Carrera, 2004).

II.3. Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté les différentes théories des plaques telle que la théorie classique des plaques minces de Love- Kirchhoff, théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (Reissner –Mindlin) et la théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé, et aussi la théorie raffinée des plaque à deux variables (RPT). Nous concluons que l'approche monocouche équivalente (CPT, FSDT et HSDT) est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter. Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé ou la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en terme de formulations.

*Chapitre III: Revue
bibliographique sur
les travaux effectués
sur les composites*

III.1. Introduction :

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux composites et fonctionnellement gradué et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes de la stabilité, de la vibration des poutres et des plaques composites et en FGM. Néanmoins, une partie de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermomécanique du flambage. En général, le comportement des plaques et coques fonctionnellement graduées (FG) sous sollicitations mécaniques et thermiques peut être prédit en utilisant soit la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D) ou les théories équivalentes des monocouches (ESL). Les modèles ESL sont dérivés de la théorie de l'élasticité 3D en faisant des hypothèses appropriées sur la cinématique de déformation ou de l'état des contraintes à travers l'épaisseur des plaques et coques Reddy (2004). Ces théories ESL peuvent expliquer à la fois les effets du cisaillement et de la déformation normale en fonction du niveau d'hypothèses. Le modèle ESL simple est la théorie classique des plaques (CPT), aussi connu comme la théorie de Kirchoff (1850), qui ignore à la fois les effets de cisaillement et de la déformation normale. Ainsi, il est seulement approprié pour les plaques minces. La théorie suivante dans la hiérarchie des modèles ESL est la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) développée par Mindlin (1951). Les comptes FSDT pour l'effet de déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements plans au travers de l'épaisseur. Un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire. Le facteur de correction de cisaillement est difficile à déterminer car il dépend non seulement des paramètres géométriques, mais également de la charge et des conditions aux limites. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDTs) étaient introduites. La HSDT peut être formulée en développant les composants du déplacement en série de puissance des coordonnées de l'épaisseur. En principe, les théories développées par ce moyen deviennent précises par une simple inclusion d'un certain nombre suffisant de termes dans les séries. Parmi les HSDTs, la théorie (TSDT) de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy (1984) est la plus largement utilisée en raison de sa simplicité et de sa précision. Un examen des théories de déformation de cisaillement des plaques stratifiées et isotropes a été effectué par Ghugal et Shimpi (2002) et Khandan et al. (2012). Un examen complet des différents modèles analytiques et numériques pour la prédiction de la flexion, du flambement et des réponses en vibrations des plaques composites et fonctionnellement gradué

(FG) sous chargements mécaniques et thermiques a été récemment effectué par Swaminathan et al. (2015). Cependant, aucun examen du développement des diverses théories pour la modélisation et l'analyse des plaques composites n'a été rapporté dans la littérature.

L'objectif de ce chapitre est de fournir un examen complet des théories existantes pour la modélisation et l'analyse des plaques composites et fonctionnellement gradué dans la littérature en mettant l'accent principalement sur les modèles ESL tels que la CPT, FSDT, TSDT, HSDTs et RPT. En outre, un examen détaillé de la littérature liée au développement des solutions d'élasticité 3D et une formulation unifiée est également reporté.

III.2. Modèle CPT :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff-Love qui stipule que les lignes droites restent droites et perpendiculaires au plan médian après déformation. Ces hypothèses impliquent l'annulation de la déformation normale et du cisaillement et, par conséquent, elles négligent les effets de cisaillement et de déformation normale. La CPT est le modèle ESL le plus simple et il est seulement approprié pour les plaques et coques minces FG où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeables.

Quelques chercheurs ont utilisé la théorie des plaques classique (CPT) Pour étudier la stabilité élastique des plaques fonctionnellement graduée sous chargement axial de compression en utilisant une combinaison d'approches micromécanique et structurelles Feldman et Aboudi (1997) . Les équations régissant les dérivées de la théorie classique des plaques (CPT) ont été résolues analytiquement pour la charge de flambement des plaques FG avec différentes conditions aux limites. Javaheri et Eslami ont utilisé la CPT pour étudier le comportement en flambement des plaques à gradient de propriété sous quatre types de charges thermiques et de charges de compression Javaheri et Eslami (2002). Le flambement des plaques fonctionnellement gradué soumises à la compression non uniforme a été examiné par Mahdavian (2009) en utilisant la CPT et les solutions de Fourier.

Woo et al. (2006) ont étudié la vibration non linéaire des plaques fonctionnellement graduée dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires issues de la CPT avec des hypothèses de Von-Karman ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode de série. Abrate (2008) a présenté les fréquences naturelles d'une plaque fonctionnellement graduée simplement appuyée en

utilisant la théorie classique des plaques (CPT). La vibration libre, le flambement et l'analyse de déflexion des plaques minces fonctionnellement graduée FG a été présentée par Zhang et Zhou (2008) sur la base de la neutralité physique surface. Hu et Zhang (2011) ont également adopté la CPT avec les hypothèses de Von-Karman pour effectuer l'analyse de la vibration et de la stabilité des plaques FG sous excitation en plan. La vibration libre des plaques FG reposant sur fondation élastique avec diverses conditions aux limites a été étudiée par Chakraverty et Pradhan (2014) en utilisant la CPT et la méthode de Rayleigh-Ritz. Chakraverty et Pradhan (2014) ont amélioré leur travail antérieur (2014) en tenant compte de l'effet des ambiances thermiques. Ruan et Wang (2014) ont investigué sur la vibration et la stabilité du déplacement des plaques obliques FG en utilisant la CPT et la DQM.

En se basant sur la CPT, Mohammadi et al. (2010) ont dérivé les solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres bords ayant des conditions aux limites arbitraires (par exemple des plaques de type Levy). Les équations régissant les dérivées de la CPT ont été analytiquement résolues en utilisant l'approche de la solution de type Levy. Kiani et al. (2011) ont présenté des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG encastres et reposant sur une fondation élastique sous trois différents types de charges thermiques. Ghannadpour et al. (2012) ont également examiné la déformation thermique des plaques FG en utilisant la CPT. Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode de la bande finie à la place de la solution de Navier dans le travail Javaheri et Eslami (2002).

Le couplage étirement-flexion produit des déflexions transversales et des moments de flexion quand une plaque FG est soumise à des charges de compression dans son plan. Par conséquent, le flambement de type bifurcation ne se produit pas. Les conditions du flambement de type bifurcation produit sous l'action des charges de compression dans le plan ont été examinés par Aydogdu (2008). On observe que le flambement de type bifurcation se produit lorsque la plaque est complètement encastree. Pour une plaque sur appuis mobiles, le flambement de type bifurcation se produit lorsque les charges dans le plan sont appliquées à la surface neutre.

III.3. Modèles FSDT :

La FSDT développé par Reissner (1945) et Mindlin (1951) considère les effets du cisaillement transverse par l'intermédiaire d'une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Il est à noter que la théorie développée par Reissner (1945,1947)

représente également l'effet de la déformation de cisaillement. Cependant, la théorie de Reissner n'est pas semblable à la théorie de Mindlin comme le perçoivent de nombreux chercheurs à travers l'utilisation de fausses descriptions telles que « plaques Reissner-Mindlin » et " FSDT de Reissner ". Wang et al. (2001) ont établi la différence entre les deux théories en dérivant les relations de flexion entre les quantités Mindlin et Reissner pour un problème général de plaques. Depuis, la théorie de Reissner a été fondée sur l'hypothèse d'une répartition linéaire des contraintes de flexion et une distribution parabolique des contraintes de cisaillement, sa formulation va inévitablement conduire à la variation du déplacement étant donné qu'il n'est pas nécessairement linéaire à travers l'épaisseur de la plaque Wang et al. (2001). Ainsi, il est incorrect de se référer à la théorie FSDT de Reissner qui implique une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Une autre différence entre les deux théories est que la contrainte normale qui a été inclus dans la théorie de Reissner a été omise dans celle de Mindlin (1951).

Plusieurs travaux ont été présentés en utilisant la FSDT dans la vibration libre des plaques composites et fonctionnellement graduée Whitney (1969). Praveen et Reddy (1998) ont étudié les réponses transitoires non linéaires des plaques FG sous chargements thermiques et mécaniques à l'aide de la méthode des éléments finis et de la FSDT avec les hypothèses de Von-Karman. Della Croce et Venini (2004) ont utilisé la FSDT et une formulation variationnelle pour l'analyse de la flexion des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques. Toutefois, le couplage étirement-flexion a été ignoré dans leur travail. Chen (2005) a étudié la vibration non linéaire des plaques FG soumises à une action combinée de la compression initiale dans le plan et les contraintes de flexion à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de Von-Karman. La fréquence non linéaire des plaques simplement appuyées a été obtenue en utilisant la méthode de Galerkin en combinaison avec la procédure itérative de Runge-Kutta. Le comportement non linéaire en flexion des plaques et des coques FG a été étudié par Kim et al. (2008) en utilisant la FSDT avec une définition complète du tenseur contrainte de Green. Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a été développé par Sadoune et al. (2014) pour le comportement mécanique des plaques stratifié. Meksi et al. (2015) et Bellifa et al. (2016) ont propose aussi une nouvelle théorie simple FSDT avec seulement quatre variables pour l'analyse vibratoire et statique des plaques fonctionnellement graduée.

Ganapathi et al. (2006) ont employé la méthode des éléments finis et la théorie des plaques du premier ordre pour étudier le flambement des plaques obliques FG sous charges de

compression. En utilisant la FSDT et la solution de Navier, Lanhe (2004) et Bouazza et al. (2010) ont dérivé les solutions analytiques pour la température de flambement des plaques FG simplement appuyées sous deux types de charges thermiques. Yaghoobi et Yaghoobi (2013) ont étudié la stabilité des plaques sandwich fonctionnellement gradué reposant sur une fondation élastique sous charges thermiques et mécaniques.

Hosseini-Hashemi et al. (2010) ont utilisé la théorie des plaques du premier ordre et la solution de Levy pour l'analyse vibratoire de plaque type Levy reposant sur une fondation élastique et ils ont amélioré leur travail antérieur (2010) en tenant compte de l'effet couplé entre les déplacements en plan et transversaux Hosseini-Hashemi et al. (2011). Mohammadi et al. (2010) ont découplé cinq équations régissant la FSDT en deux équations indépendantes. Les équations obtenues ont ensuite été résolues pour la charge de flambement des plaques fonctionnellement graduée sous chargement plan en utilisant l'approche de la solution type Levy. Yaghoobi et Torabi (2013) ont également suivi une approche similaire pour dériver la solution type Levy pour la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique et soumises à un chargement thermique. L'approche de la solution type Levy a été employée par Saidi et Jomehzadeh (2009) pour dériver la solution type Levy pour la flèche et les contraintes des plaques FG soumises à des charges transversales.

Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement dans la FSDT, Yang et al. (2005) ont utilisé une technique de perturbation pour étudier l'influence du caractère aléatoire des propriétés des matériaux et des paramètres de rigidité de la fondation sur la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique, Nguyen et al. (2008) ont adopté les équations d'équilibre dans le calcul des contraintes de cisaillement transversal et des forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de la flexion statique des plaques FG simplement appuyées et des panneaux sandwich FG encastres indiquent que la valeur du facteur de correction de cisaillement des modèles FG n'est pas le même que celui des modèles homogènes. Prakash et al. (2009) ont reformulé la FSDT basée sur la surface neutre pour étudier l'effet de la position de la surface neutre sur la stabilité non linéaire des plaques obliques FG sous chargement plan. Les équations fondées sur des les hypothèses de Von-Karman ont été résolues en utilisant un élément continu à huit nœud C0. Singha et al. (2011) ont étudié le comportement non linéaire de la flexion des plaques FG sous charges transversale en utilisant la FSDT basée sur la surface neutre et la méthode des éléments finis. Les équations d'équilibre ont été utilisées pour calculer les contraintes de cisaillement transversal, tandis que la méthode de l'énergie a été adoptée pour obtenir les expressions du

facteur de correction de cisaillement. Hadji et al. (2016) ont analysé une poutre fonctionnellement graduée en employant une nouvelle théorie de déformation du premier ordre.

III.4. Modèles TSDT :

Puisque les FSDTs ne respectant pas les conditions d'équilibre dans les surfaces supérieures et inférieures, et peut éviter la nécessité d'introduction des coefficients de corrections de cisaillement qui corrigent la distribution irréal de la contrainte/ déformation de cisaillement à travers l'épaisseur de la FSDT. Reddy (1984) a développé la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) pour les plaques composites stratifiées et qui représente l'effet de la déformation de cisaillement transversal et satisfait la condition de la nullité des contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Il est à noter que le champ de déplacement de la théorie de Reddy est identique à celle de la théorie de Levinson (1980). Cependant, les équations du mouvement des deux théories sont différentes les unes des autres. Cela est dû au fait que Levinson (1980) a utilisé les équations d'équilibre de la FSDT qui sont variationnellement incompatibles avec celles dérivées de l'approche variationnelle de Reddy (1984).

Les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG simplement appuyées sous quatre types de charges thermiques ont été dérivées par Javaheri et Eslami (2002) en utilisant la TSDT et la solution de Navier. Samsam Shariat et Eslami (2007) ont réalisé un travail similaire pour les plaques fonctionnellement graduées soumises à trois types de sollicitations mécaniques et deux types de charges thermiques. Yang et al. (2004) ont étudié le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques sandwich FG sous une action combinée de changement de température uniforme et de compression périodique dans le plan en utilisant la TSDT et une méthode semi-analytique. En utilisant la TSDT et la méthode des séries de Fourier, Akbarzadeh et al. (2011) ont présenté les réponses statiques et dynamiques des plaques FG sous chargement latérales. Thai et Kim (2013) ont reformulé la TSDT basée sur la surface neutre et ont dérivée la solution type Levy pour la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Zhang (2014) a utilisé la méthode de Ritz et la théorie de déformation de cisaillement du premier basée sur la surface neutre avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier la réponse non linéaire de la flexion des plaques FG reposant sur une fondation élastique dans des environnements thermiques avec six conditions aux limites différentes.

Gulshan Taj et al. (2013) ont développé un élément continu isoparamétrique de neuf nœuds C0 avec sept degrés de liberté par nœud pour l'analyse de la flexion des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques en utilisant la TSDT. Les analyses de la flexion statique, le flambement et de la vibration libre des plaques FG ont été effectués par Tran et al. (2013) utilisant la TSDT et l'IGA. Puis, Tran et al. (2013) étendirent leurs travaux précédents (2013) au flambement thermique des plaques fonctionnellement gradué. La TSDT et l'IGA ont également été employées par Jari et al. (2015) pour étudier le comportement de la flexion linéaire et non linéaire, du flambement et de la vibration libre des plaques FG soumises à des charges thermiques et mécaniques. Foroughi et Azhari (2014) ont utilisé la TSDT et la méthode spline des bandes finies pour étudier le flambement et la vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

III.5. Modèles HSDT :

Les théories de déformations de cisaillement d'ordre élevé peuvent être développées à l'aide fonctions de forme polynômiale ou des fonctions de forme non-polynômiale respectant les conditions d'équilibre dans les surfaces supérieures et inférieures. ce qui nécessite pas l'introduction des coefficients de corrections comme le cas de la FSDT ,les HSDTs représentent les variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou à la fois les déplacements dans le plan et les déplacements transversaux (théorie quasi-3D) à travers l'épaisseur, et par conséquent, la capture des effets de la déformation de cisaillement ou à la fois le cisaillement et les déformations normales.

Levy (1877) a utilisé une nouvelle fonction non-polynomiale sinusoïdale pour développer une théorie raffiné pour des plaques isotropes. Plusieurs chercheurs ont adopté la fonction sinusoïdale proposé par Levy (1877) pour développer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale à cinq variables (SSDT) pour les plaques composites isotropes et stratifiés Stein (1986) et Touratier (1991). La SSDT a été largement utilisée pour étudier la flexion thermique des plaques composites (2004,2005), le flambement des plaques composites (2004), la flexion des plaques sandwich fonctionnellement gradué (2005,2010), le flambement et la vibration des plaques sandwich FG (2004,2005), la vibration des plaques FG. Plusieurs HSDTs ont été proposé pour améliorer les limitations de la FSDT tel que Levinson (1980), Bhimaraddi et Stevens (1984), Reddy (1984). Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé a été proposée par Reddy (1984) HSDT avec des distributions cubiques des déplacements axiaux.

Xiang et al. (2011) ont développé une théorie de déformation de cisaillement à n-ordre pour la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées et composite sandwich. Mantari et al. (2012) ont utilisé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse statique des plaques isotrope, composites et sandwichs, dans laquelle le déplacement de la surface médiane développé comme une fonction trigonométrique tangentielle et le déplacement transverse constant à travers l'épaisseur ce qui explique la répartition adéquate des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur.

Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D a été développée par Zenkour (2007) pour l'analyse du flambement thermique des plaques à gradient de propriété en utilisant une fonction sinusoïdale. Mantari et Guedes Soares (2012) ont proposé une nouvelle HSDTs hybride quasi-3D généralisé avec 06 inconnues pour l'étude de la flexion des plaques composites avancées. Mantari et Guedes Soares (2013) ont amélioré leur travail antérieur (2012) en incluant l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans des plaques FG. Hebali et al. (2014) ont proposé une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D pour l'analyse statique et vibratoire des plaques FG. Une nouvelle simple hyperbolique HSDT est développée par Saidi et al. (2016) pour l'étude de la vibration des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées resté sur une fondation élastique. Tounsi et al. (2016) ont développé une nouvelle HSDT avec 03 inconnues pour l'analyse du flambement et la vibration des plaques sandwich fonctionnellement graduée.

III.6. Modèles RPT :

Les théories HSDTs et quasi-3D développées sont reconnues coûteuses car en élargissant les déplacements en série de puissances des coordonnées de l'épaisseur, le calcul de puissance supplémentaire de ces coordonnées va induire une inconnue supplémentaire à la théorie. Ainsi il est plus commode de simplifier les HSDTs existantes et les théories quasi-3D ou de développer des théories simples avec moins d'inconnues.

Une nouvelle théorie des plaques raffinée (RPT) a été développée par Shimpi (2002) pour les plaques isotropes, cette théorie ne contient que deux inconnues comparée avec trois inconnues dans le cas de la FSDT et de la TSDT, en divisant le déplacement en composants de flexion et de cisaillement. La théorie des plaques raffinée est suffisamment précise pour prédire les réponses globales des plaques isotropes et orthotropes.

Une théorie raffinée à deux variables (RPT) a d'abord été développée pour des plaques isotropes par Shimpi (2002), et a été ensuite appliquée au plaques orthotropes par Shimpi et

Patel (2006) et Kim et al. (2009) Cette théorie qui ressemble à la théorie d'ordre supérieur utilise seulement deux fonctions inconnues afin d'obtenir deux équations gouvernantes pour les plaques orthotropes. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, La théorie des plaques raffinée est suffisamment précise pour prédire les réponses globales des plaques isotropes et orthotropes. La RPT a été largement appliquée à des plaques fonctionnellement gradué, plaques sandwichs FG, plaques FG avec des couches piézoélectriques, nano plaques, et nano poutres. Plusieurs théories de déformation de cisaillement à quatre inconnus ont été développées en utilisant des hypothèses similaires à celles de Shimpi (2002), et des différentes fonctions de forme. Par exemple le modèle de El Meiche et al. (2011) pour les plaque sandwich fonctionnellement gradué et le modèle de Mechab et al. (2013) pour les plaques FG, en utilisant des fonctions hyperboliques. Merdaci et al. (2011), Tounsi et al. (2013), Ameer et al. (2011) et Thai et Vo (2013) ont développé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée à quatre inconnus pour les plaques sandwich FG et les plaques FG en utilisant la fonction sinusoïdale. En se basant sur une fonction tangentielle inverse, Thai et Uy (2013) ont reformulé la RPT basée sur la surface neutre et ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG type Levy. Thai et Choi (2014) ont amélioré la RPT en tenant compte de l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques FG.

Plusieurs HSDTs à quatre inconnues a été proposé par Thai et Choi (2013) pour les plaques fonctionnellement graduée en utilisant des différentes fonctions de forme cubiques (1984), sinusoïdales (1991), hyperboliques (1992) et exponentielles (2003), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre (n) développée par Xiang et al. (2011,2014). Pour le flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique soumises à des charges thermiques a été simplifiée par Yaghoobi et Fereidoon (2014). Thai et Choi (2013) ont simplifié la FSDT pour les plaques FG (2013) et les plaques composites laminées, Thai et al. (2014) ont également développé une autre FSDT simplifiée pour les plaques sandwich FG en utilisant les hypothèses de Shimpi et al. (2007). Des solutions analytiques pour la déflexion, la charge de flambement et la fréquence naturelle ont été obtenues pour les plaques dans des conditions limites arbitraires en utilisant la méthode des solutions de Sobhy (2013).

III.7. Théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D) :

L'avantage des solutions basées sur l'élasticité tridimensionnelle est que celle-ci ne nécessite aucune hypothèse restrictive. L'un des précurseurs dans ce domaine est Pagano, qui,

en 1969, a analysé la flexion cylindrique des composites stratifiés et en 1970 la flexion des plaques rectangulaires sandwiches (Pagano, 1970). En raison de la complexité relative à la formulation 3-D, peu d'articles l'utilisant ont été publiés dans le domaine des vibrations libres.

Les solutions de la flexion, la vibration et le flambement des plaques stratifiées en appuis simples ont été développées par Srinivas et Rao, (1970) ; Srinivas et *al.* (1970). En se basant sur les travaux des précédents auteurs, Wittrick, (1987) a présenté une solution analytique 3-D d'une plaque rectangulaire simplement appuyée pour des problèmes de valeurs propres, de flambage et de vibration libre ainsi que pour des flexions statiques sous chargement latérales sinusoïdales. D'autres solutions tridimensionnelles ont été proposées pour étudier les vibrations libres des plaques isotropes, composites stratifiées et FGM pour différentes conditions aux limites : (Cheung et Chakrabarti, 1972 ; Liew, Hung et *al.*, 1993,1994,1995a, 1995b). Mian et Spencer (1998) ont établis des solutions exactes pour les plaques fonctionnellement graduée et les composites laminées. Des solutions exactes 3D pour les problèmes de contraintes thermiques des plaques FG simplement appuyées sous transfert partiel de chaleur ont été développées par Ootao et Tanigawa (1999). Vel et Batra (2002) ont adopté une méthode des séries de puissance pour dériver les solutions exactes de l'analyse de la flexion 3D des plaques FG simplement appuyées soumises à des charges thermiques et mécaniques. Vel et Batra (2003) ont amélioré leur travail antérieur (2002) pour analyser les problèmes transitoires de conduction de chaleur des plaques FG simplement appuyées soit soumises à la température en fonction du temps ou le flux étendu sur les surfaces supérieure et inférieure. Récemment, Vel et Batra, (2004) ont présenté une solution tridimensionnelle exacte des vibrations libres et forcées de plaques rectangulaires FGM en appuis simples. Des solutions précises pour les fréquences naturelles, les déplacements et les contraintes sont comparés à celles prédites par les modèles ESL. Uymaz et Aydogdu (2007) ont présenté des solutions exactes pour l'étude dynamique 3D des plaques FG avec différentes conditions aux limites en utilisant la méthode de Ritz avec les fonctions de déplacement de Chebyshev. Lu et *al.* (2009) et Malekzadeh (2009) ont également étudié la vibration libre 3D des plaques FG reposant sur une fondation élastique, mais ont utilisé des approches différentes. Les études de la flexion 3D des plaques fonctionnellement graduée sous sollicitations thermiques et mécaniques ont été effectuées par Alibeigloo (2010).

La stabilité thermique 3D des plaques à gradient de propriété sous des différents types de chargement : uniforme, linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur a été étudié par Na et Kim (2004) au moyen d'un élément solide de 18 nœuds. Pour éviter le blocage du cisaillement et pour maintenir la stabilité cinématique des structures minces, une formulation assumée de déformation mixte a été employée. Na et Kim (2005) ont étendu leur travail antérieur (2004) en tenant compte de l'augmentation de la température en fonction du temps. Na et Kim (2006) ont employés une numérisation par la méthode des éléments finis pour étudier le comportement post flambement thermique 3D des plaques FG sous un chargement thermique croissant de température uniformes ou non uniforme. Un élément solide composé de 18 nœuds basé sur la relation de Green- Lagrange a été analysé et développé pour tenir compte de la grande déformation. Le schéma d'itération de Newton-Raphson a été utilisé pour déterminer le chemin d'équilibre post flambement. Na et Kim (2006) ont étendu leur travail antérieur (2006) pour étudier la flexion non linéaire 3D des plaques FG soumises à des charges de pressions uniformes et à des charges thermiques.

III.8. Analyse thermo élastique statique :

Un système FGM conçu pour une application donnée doit prouver sa capacité à supporter simultanément des charges thermiques et mécaniques. Toutes les études menées prennent en considération la variation de la température due à des contraintes thermiques initiales impliquant des changements des propriétés des matériaux. Ces changements peuvent influencer le comportement vibratoire des structures. Aussi, la réponse quasi statique de n'importe quel membre structural chargé doit être prise en considération avant toute étude dynamique.

Le comportement thermo élastique des plaques rectangulaires fonctionnellement gradué a été analysé par Praveen et Reddy, (1998) en incluant les déformations de cisaillement transverse, l'inertie de rotation et les effets non linéaires. Ce travail a été étendu par Reddy et *al.* (1999) pour étude de la flexion des plaques FG circulaires en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Reddy (2000) a étendu la théorie de Praveen et Reddy, (1998) à des relations plus générale des plaques FGM permettant de prendre la TSDT en considération. En utilisant la théorie classique des plaques Woo et Meguid, (2001) ont développé une formulation des grandes déformations des plaques et coques minces en FGM sous un chargement thermo mécanique.

Vel et Batra, (2002) ont étudié les petites déformations d'une plaque simplement appuyée, les champs de déplacement et de température sont sous forme de série de Taylor en respectant les équations constitutives d'un matériau thermo élastique isotrope et linéaire ainsi que les conditions aux limites. Les solutions obtenues par les séries en puissance ont alors été comparées à celles générées par CPT, FSDT et TSDT. Récemment, Abrate, (2008) a démontré que les plaques fonctionnellement graduées ont beaucoup de similitudes avec les plaques homogènes. La méthode usuelle pour la détermination des matrices de rigidité en flexion est d'utiliser le plan moyen de la plaque comme surface de référence. Abrate a également montré que le choix judicieux de la surface de référence de telle sorte que le couplage flexion-traction disparaisse simplifie énormément l'analyse.

III.9. Analyse thermomécanique du flambement :

L'importance des éléments structuraux des FGM dans la conception des structures aérospatiales, leurs comportements statique, vibratoire et de flambement ont attiré l'attention de nombreux scientifiques ces dernières années. Il a été observé à partir des recherches connues dans la littérature que les travaux effectués pour des plaques isotropes sont considérables, et les recherches sur les plaques composites sont limitées. Cependant, les travaux sur l'analyse des plaques en FGM est très peu. Un certain nombre de travaux traitant le flambement thermique des plaques FGM a été publié dans la littérature. Les propriétés mécaniques homogènes des plaques FGM variant à travers l'épaisseur sont décrites par une fonction de puissance en termes de la variable de l'épaisseur. Javaheri (2002) a déterminé les équations d'équilibre pour l'analyse de flambement d'une plaque FGM sous quatre types de charge thermique en utilisant la théorie des plaques d'ordre élevé. Le flambement thermique des structures composites FGM due aux rapports des épaisseurs de FGM a été étudié par Na et Kim (2004), le flambement des plaques circulaires fonctionnellement graduées a été publié par Najafizadeh et Heydaru (2004). En se passant sur la théorie classique des plaques. Shariat et Eslami (2005) ont présenté une analyse du flambement thermique des plaques rectangulaires FG avec des imperfections géométriques sous trois types de chargement thermique. La flexion, le flambement et la vibration libre de plaque sandwiches FGM simplement appuyés en utilisant la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale a été publié par Zenkour (2005) Ganapathi (2006) a étudié le flambement thermique d'une plaque biaisée à gradient de propriété simplement appuyée, en utilisant la FSDT. Une distribution linéaire et non linéaire de la température à travers l'épaisseur a été considérée. Les effets du rapport géométriques,

l'indice matériel et l'analyse d'inclinaison sur la température critique de flambement sont étudiés. Ibrahim et *al.*, (2007) ont étudié le flambement thermique d'une plaque FGM sous l'effet combiné de température élevée et du chargement aérodynamique. . Sohn et Kim (2008) ont étudié la stabilité des panneaux en FGM soumise à des charges thermiques et aérodynamique.

En utilisant une méthode semi-analytique Ying et *al.*, (2009) ont étudié les déformations thermiques des plaques FGM épaisses. Leurs analyses sont basées directement sur la théorie d'élasticité 3D. Le flambement thermo-élastique des plaques FGM a été étudié par Bouazza et *al.*, (2010), en utilisant la FSDT. Les effets des caractéristiques géométriques de la plaque, la composition matérielle, et la fraction volumique des constituants du matériau sur la température critique des plaques FGM simplement appuyées ont été aussi analysés.

III.10. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue sur les différents travaux trouvés dans la littérature tel que la CPT, FSDT, TSDT, HSDT, RPT et l'élasticité 3D, ainsi qu'un aperçu de l'analyse thermo-élastique statique et thermomécanique des matériaux FGM.

Dans le chapitre suivant, on exposera la nouvelle théorie développée pour l'analyse du flambement des plaques rectangulaires simplement appuyées.

*Chapitre IV:
Formulation
théorique*

IV.1. Introduction :

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) pour l'analyse du flambement des plaques isotropes, orthotropes et fonctionnellement graduée est développée. Les plaques sont soumises à un chargement axial (uni axiale et bi axiale). Les solutions analytiques sont déterminées en utilisant la méthode de Navier,

IV.2. Cinématique et déformation :

Dans cette étude, des hypothèses simplificatrices sont considérées aux théories HSDT conventionnelle afin de diminuer le nombre des variables inconnues. La cinématique des HSDTs conventionnelle est exprimé par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{IV.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{IV.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.1c})$$

Où $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ sont les cinq inconnues des déplacements de la surface moyenne de la plaque, $f(z)$ présente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. En supposant que $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$, le champ de déplacement de la présente théorie peut être exprimé dans une forme plus simple comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{IV.2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{IV.2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{IV.2c})$$

Dans cette étude, la théorie des plaques de déformation de cisaillement d'ordre élevé est proposée comme suit Reissner (1945) :

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.3)$$

Il peut être remarqué que dans la cinématique de l'équation (2), on trouve seulement quatre variables (u_0, v_0, w_0 et θ). Les déformations non nulles associées avec la cinématique de l'équation (02) sont:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (IV.4)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad (IV.5a)$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.5b)$$

Les termes d'intégrale utilisée dans les expressions précédente peuvent être résolus en utilisant la procédure de Navier et peuvent être exprimé comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV.6)$$

Où les coefficients A' et B' sont adopté selon le type de solution employé, dans ce cas la solution de Navier. Ainsi, A' et B' sont définie par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.7})$$

Où α et β sont définie dans l'expression (20).

IV.3. Equations Constitutives :

Pour des plaques élastiques et orthotropes, les relations constitutives peuvent être exprimée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Où Q_{ij} présente des constantes élastiques en élasticité plane de la matrice de rigidité dans les axes matériels de la plaque, et sont exprimé par :

- **Plaque isotrope :**

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \quad (\text{IV.9a})$$

- **Plaque orthotrope :**

Pour les exemples proposés, on a utilisé des constantes d'ingénieur définie par (Reddy,1997):

$$E_1 / E_2 \text{ varie } G_{12} / E_2 = G_{13} / E_2 = 0.5, \quad G_{23} / E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (\text{IV.9b})$$

Où E_1 , E_2 sont les modules de Young, G_{12} , G_{23} , G_{13} sont les modules de cisaillement et ν_{12} , ν_{21} sont les coefficients de poisson. Pour une plaque isotrope, ces derniers propriétés matériels seront $E_1 = E_2 = E$, $G_{12} = G_{23} = G_{13} = G$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$. Les indices 1, 2, 3 correspondent respectivement aux directions du système de coordonnées cartésien x, y, z.

- **Plaque Hybride FGM :**

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.9c})$$

Avec

$$E(z) = (E_C - E_M) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^P + E_M \quad (\text{IV.9d})$$

- **Plaque symétrique S-FGM :**

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.9e})$$

Avec

$$E(z) = (E_C - E_M) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^P + E_M \quad (\text{IV.9f})$$

$$V_M(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z+h}{h} \right)^P & \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{-2z+h}{h} \right)^P & \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \end{cases} : V_C(z) = 1 - V_M(z) \quad (\text{IV.9g})$$

Où $E(z), E_C, E_M$ sont les module de Young de la plaque, céramique et métal respectivement , ν est le coefficient de poisson. p est l'indice matériel, $V_C(z), V_M(z)$ sont les fractions volumiques du céramique et du métal.

IV.4. Equation d'équilibre :

Dans cette étude, le principe des travaux virtuels est utilisé pour déterminé les équations d'équilibre. Ce principe peut être exprimé sous la forme analytique comme suit :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (\text{IV.10})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; et δV est la variation du travail extérieur engendré par les charges extérieur appliqué à la plaque.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donné par :

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0\end{aligned}\quad (IV.11)$$

Où A est la surface et les résultants des contraintes N , M et S sont exprimé par :

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{and} \quad \left(S_{xz}^s, S_{yz}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (IV.12)$$

La variation du travail extérieur peut être exprimé par :

$$\delta V = - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \quad (IV.13)$$

Où (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont les charges axiaux appliqué à la plaque.

En substituant les équations (11) et (13) dans l'équation (10), on obtient les équations d'équilibre comme suit :

$$\begin{aligned}\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \\ \delta \theta : \quad & -M_x^s - M_y^s - (A+B) \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + B \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (IV.14)$$

En substituant l'équation (4) dans l'équation (8) et les résultats obtenue dans l'équation (12), les résultantes de contraintes peuvent être exprimé par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.15a})$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.15b})$$

Et les composantes de rigidité sont définie par :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)\} dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (\text{IV.16a})$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} [g(z)]^2 dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (\text{IV.16b})$$

En remplaçant les équations (15) dans l'équation (14), les équations d'équilibre peuvent être exprimé en terme de déplacements ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$) prennent la forme suivante :

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - (B_{11} d_{111} w_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0) + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{122} \theta + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 \theta = 0, \quad (\text{IV.17a})$$

$$(A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + A_{66} d_{22} v_0 + A_{22} d_{22} v_0 - ((B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + B_{22} d_{222} w_0) + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{112} \theta + (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s) d_2 \theta = 0, \quad (\text{IV.17b})$$

$$(B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0) + ((B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0) - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) d_{11} \theta + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s d_{1122} \theta + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) d_{22} \theta + N_x^0 d_{11} w_0 + 2N_{xy}^0 d_{12} w_0 + N_y^0 d_{22} w_0 = 0 \quad (\text{IV.17c})$$

$$\begin{aligned}
 & -\left((k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{122} u_0 + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 u_0\right) - \left((k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{112} v_0 + (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s) d_2 v_0\right) \\
 & + (D_{11}^s + D_{12}^s) d_{11} w_0 + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s d_{1122} w_0 + (D_{12}^s + D_{22}^s) d_{22} w_0 \\
 & - k_1^2 H_{11}^s \theta - k_2^2 H_{22}^s \theta - 2 k_1 k_2 H_{12}^s \theta - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s d_{1122} \theta \\
 & + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta = 0
 \end{aligned} \tag{IV.17d}$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont des opérateurs différentiels tel que :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \tag{IV.18}$$

IV.5. Solution analytique :

Les charges critiques du flambement des plaques rectangulaires orthotropes ou FGM simplement appuyé seront déterminé dans cette partie en utilisant la méthode de Navier. Considérons que la plaque est soumise à des charges de compressions axiale de la forme $N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}$, $N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$ (où γ_1 et γ_2 sont des paramètres de charge non dimensionnelle). Les fonctions de déplacement suivant sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{IV.19}$$

Avec

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \tag{IV.20}$$

Et U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer.

En substituant l'équation (19) dans l'équation (17), la solution analytique de la charge de flambement peut être déterminé comme suit:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33+k} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV.21}$$

Où

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\
 S_{14} &= \alpha(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\beta^2), \\
 S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \quad S_{24} = \beta(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\alpha^2), \\
 S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4), \\
 S_{34} &= -(k_1D_{11}^s + k_2D_{12}^s)\alpha^2 + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - (k_2D_{22}^s + k_1D_{12}^s)\beta^2, \\
 S_{44} &= -k_1(k_1H_{11}^s + k_2H_{12}^s) - (k_1A' + k_2B')^2(H_{66}^s\alpha^2\beta^2) - k_2(k_1H_{12}^s + k_2H_{22}^s) - (k_1A')^2A_{55}^s\alpha^2 - (k_2B')^2A_{44}^s\beta^2 \\
 k &= N_{cr}(\gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2)
 \end{aligned} \tag{IV.22}$$

L'instabilité géométrique est considérée dans la présente analyse en considérant le déterminant de la matrice de l'équation (21) égale à zéro. En effet, pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice de rigidité de l'équation (21) doit être nul. Pour chaque choix de m et n , il y a une valeur unique correspondant à N_{cr} . La charge critique de flambement est la plus petite de $N_{cr}(m, n)$.

En appliquant l'approche de condensation, les déplacements axiaux U_{mn} et V_{mn} peuvent être éliminés et l'équation (21) peut être exprimé par:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{33} + k & \bar{S}_{34} \\ \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV.23}$$

Où

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{33} &= S_{33} - \frac{S_{13}(S_{13}S_{22} - S_{12}S_{23}) - S_{23}(S_{11}S_{23} - S_{12}S_{13})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\
 \bar{S}_{34} &= S_{34} - \frac{S_{14}(S_{13}S_{22} - S_{12}S_{23}) - S_{24}(S_{11}S_{23} - S_{12}S_{13})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\
 \bar{S}_{43} &= S_{34} - \frac{S_{13}(S_{14}S_{22} - S_{12}S_{24}) - S_{23}(S_{11}S_{24} - S_{12}S_{14})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\
 \bar{S}_{44} &= S_{44} - \frac{S_{14}(S_{14}S_{22} - S_{12}S_{24}) - S_{24}(S_{11}S_{24} - S_{12}S_{14})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

Le système de l'équation homogène (23) possède une solution non-triviale seulement pour des valeurs discrètes de la charge critique de flambement. Pour une solution non-triviale, le déterminant des coefficients (W_{mn}, X_{mn}) doit être nulle.

$$\begin{vmatrix} \bar{S}_{33} + k & \bar{S}_{34} \\ \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

L'équation obtenue peut être résolue pour la charge de flambement. On obtient ainsi l'expression suivante pour la charge de flambement :

$$k = \frac{\bar{S}_{34}\bar{S}_{43} - \bar{S}_{33}\bar{S}_{44}}{\bar{S}_{44}} \quad (\text{IV.26})$$

En utilisant l'équation (25), l'expression de la charge critique de flambement sera donné par :

$$N_{cr} = \frac{1}{(\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2)} \frac{\bar{S}_{34}\bar{S}_{43} - \bar{S}_{33}\bar{S}_{44}}{\bar{S}_{44}} \quad (\text{IV.27})$$

IV.6. Conclusion :

Dans le présent chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de l'étude analytique sur la stabilité des plaques isotropes, orthotropes et fonctionnellement graduée soumises à un chargement mécanique et ce, en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevée (HSDT) à quatre variables, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Dans la présente théorie les déplacements de rotations sont remplacés par des termes en intégrale dans les champs de déplacement. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettant d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec ceux obtenus par les autres théories du premier ordre et d'ordre élevé.

Chapitre V: Résultats et discussions

V.1. Introduction :

Dans cette partie l'exactitude de la théorie proposée HSDT qui utilise seulement quatre variables inconnues, sera examiné. Pour ce but, des plaques rectangulaires simplement appuyé et soumise à des conditions de chargement comme est montré de la figure V.1, seront examiné pour montrer l'exactitude de la présente formulation dans l'investigation de comportement en flambement des plaques orthotropes et fonctionnellement graduée.

Pour des raisons d'interprétation, la charge de flambement non dimensionnelle est définie comme suit:

$$\bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{E_2 h^3} \tag{V.1}$$

Où a est la longueur d'une plaque carrée et h son épaisseur.

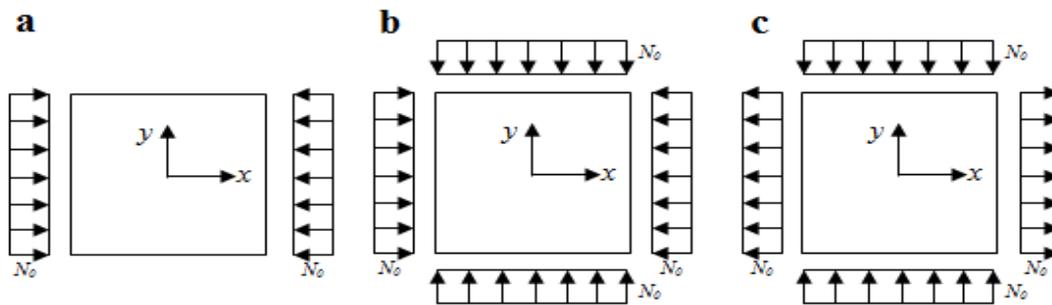


Figure V.1: les conditions de chargement d'une plaque carrée pour (a) compression uni axiale, (b) compression bi axial et (c) traction suivant la direction x et compression suivant la direction y .

V.2. Plaques isotropes et orthotropes :

Exemple 1: Le tableau V.1 donne les valeurs non dimensionnelles des charges critiques de flambement \bar{N} des plaques carrées isotropes et orthotropes soumise à une compression uni axiale et cela pour des différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h et le rapport des modules E_1/E_2 . Les résultats obtenus sont comparé avec ceux trouvé par Kim et al. (2009) qui a utilisé la FSDT et la théorie des plaques raffinées (RPT). Plusieurs coefficients de correction de cisaillement ($k_s = 2/3$, $k_s = 5/6$ et $k_s = 1$) sont employé dans la FSDT Kim et al. (2009) afin de comparer les résultats avec le présent modèle. Un excellent accord est constaté pour les plaques minces et épaisses.

Tableau V.1: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement uni-axiale de compression.

a/h	Theories	Isotrope $\nu = 0.3$	Orthotrope		
			$E_1 / E_2 = 10$	$E_1 / E_2 = 25$	$E_1 / E_2 = 40$
5	Présente	2.9512	6.3478	9.1039	10.5785
	RPT ^(*)	2.9512	6.3478	9.1039	10.5785
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	2.8200	5.5679	7.1122	7.7411
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	2.9498	6.1804	8.2199	9.1085
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.0432	6.6715	9.1841	10.3463
10	Présente	3.4224	9.3732	16.7719	22.2581
	RPT ^(*)	3.4224	9.3732	16.7719	22.2581
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.3772	8.8988	14.7011	18.3575
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.4222	9.2733	15.8736	20.3044
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.4530	9.5415	16.7699	21.8602
20	Présente	3.5650	10.6534	21.3479	31.0685
	RPT ^(*)	3.5650	10.6534	21.3479	31.0685
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.5526	10.4926	20.4034	28.85
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.5650	10.6199	20.9528	30.0139
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.5733	10.7066	21.3363	30.8451
50	Présente	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	RPT ^(*)	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.6051	11.0497	22.9366	34.4886
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.6071	11.0721	23.0461	34.7487
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.6085	11.0871	23.1197	34.9244
100	Présente	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	RPT ^(*)	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.6127	11.1343	23.3527	35.4852
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.6132	11.1400	23.3810	35.5538
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.6135	11.1438	23.3999	35.5996

^(*) Pris à partir de Référence (Kim et al. 2009).

Exemple 2: Dans le tableau 2 on a présenté les valeurs des charges non dimensionnelles du flambement \bar{N} des plaques carrées isotropes et orthotropes soumises à une compression bi axiale pour les différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h et du rapport des modules E_1/E_2 . Encore une fois, les valeurs calculées par la présente méthode sont comparé avec ceux donnes par Kim et al. (2009) en utilisant la FSDT et la RPT. Il est a remarqué qu'un bon accord est confirmé entre les résultats présenté par les différentes théories et cela pour les différentes valeurs a/h et E_1/E_2 .

Tableau V.2 : Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement bi-axiale de compression.

a/h	Theories	Isotrope $\nu = 0.3$	Orthotrope		
			$E_1/E_2 = 10$	$E_1/E_2 = 25$	$E_1/E_2 = 40$
5	Présente	1.4756	2.8549 ^a	3.3309 ^a	3.3800 ^a
	RPT ^(*)	1.4756	2.8549 ^a	3.3309 ^a	3.3800 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.4100	2.5042 ^a	2.7332 ^a	2.8303 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.4749	2.8319 ^a	3.1422 ^a	3.2822 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.5216	3.1027 ^a	3.4933 ^a	3.6793 ^a
10	Présente	1.7112	4.6718 ^a	6.0646 ^a	7.2536 ^a
	RPT ^(*)	1.7112	4.6718 ^a	6.0646 ^a	7.2536 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.6886	4.4259	5.4351 ^a	6.0797 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.7111	4.6367	5.8370 ^a	6.6325 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.7265	4.7708	6.1425 ^a	7.0690 ^a
20	Présente	1.7825	5.3267	7.6643 ^a	9.6614 ^a
	RPT ^(*)	1.7825	5.3267	7.6643 ^a	9.6614 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.7763	5.2463	7.3701 ^a	8.9895 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.7825	5.3100	7.5546 ^a	9.3049 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.7866	5.3533	7.6834 ^a	9.5297 ^a
50	Présente	1.8036	5.5390	8.2784 ^a	10.6576 ^a
	RPT ^(*)	1.8036	5.5390	8.2784 ^a	10.6576 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.8025	5.5249	8.2199 ^a	10.5111 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.8036	5.5361	8.2566 ^a	10.5810 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.8042	5.5436	8.2812 ^a	10.6282 ^a

100	Présente	1.8066	5.5707	8.3744 ^a	10.8172 ^a
	RPT ^(*)	1.8066	5.5707	8.3744 ^a	10.8172 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.8063	5.5672	8.3593 ^a	10.7788 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.8066	5.5700	8.3687 ^a	10.7972 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.8068	5.5719	8.3751 ^a	10.8095 ^a

^(*) Pris à partir de Référence (Kim et al. 2009).

^a Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 2)$.

Exemple 3: Cet exemple est établi pour des plaques carrées isotropes et orthotropes soumise à une traction dans la direction x et une compression dans la direction y . Dans le tableau 03, les forces de flambement non dimensionnelles calculé par le modèle proposé sont comparées avec ceux données par Kim et al. (2009) qui a utilisé la FSDT et la RPT. On peut remarquer qu'il existe un excellent accord entre les résultats pour presque toutes les valeurs des rapports d'épaisseurs et des modules.

Tableau V.3: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée soumise à une traction suivant l'axe x et compression suivant l'axe y .

a/h	Theories	Isotrope $\nu = 0.3$	Orthotrope		
			$E_1 / E_2 = 10$	$E_1 / E_2 = 25$	$E_1 / E_2 = 40$
5	Présente	4.8274 ^a	4.0258 ^b	4.1044 ^c	4.1525 ^c
	RPT ^(*)	4.8274 ^a	4.0258 ^b	4.1044 ^c	4.1525 ^c
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	4.4175 ^a	3.2849 ^d	3.3001 ^e	3.3053 ^e
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	4.8158 ^a	3.9241 ^c	3.9794 ^c	4.0075 ^d
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	5.1237 ^a	4.4488 ^b	4.5691 ^c	4.6073 ^c
10	Présente	6.6024 ^a	7.7863	8.5471 ^b	9.1638 ^b
	RPT ^(*)	6.6024 ^a	7.7863	8.5471 ^b	9.1638 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	6.4032 ^a	7.2656	7.7820 ^b	8.1208 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	6.6010 ^a	7.7748	8.4774 ^b	8.9039 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	6.7398 ^a	8.0651	9.0153 ^b	9.5197 ^b
20	Présente	7.2754 ^a	9.2811	11.6347 ^b	12.8031 ^b
	RPT ^(*)	7.2754 ^a	9.2811	11.6347 ^b	12.8031 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.2139 ^a	9.1310	11.2544 ^b	12.1990 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.2753 ^a	9.2782	11.6015 ^b	12.6339 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.3168 ^a	9.3790	11.8453 ^b	12.9428 ^b

50	Présente	7.4895 ^a	9.8101	12.9531 ^b	14.4177 ^b
	RPT ^(*)	7.4895 ^a	9.8101	12.9531 ^b	14.4177 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.4790 ^a	9.7830	12.8751 ^b	14.2839 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.4895 ^a	9.8097	12.9463 ^b	14.3789 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.4965 ^a	9.8275	12.9942 ^b	14.4430 ^b
100	Présente	7.5211 ^a	9.8907 ^a	13.1666 ^b	14.6827 ^b
	RPT ^(*)	7.5211 ^a	9.8907 ^a	13.1666 ^b	14.6827 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.5185 ^a	9.8838 ^a	16.1463 ^b	14.6474 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.5211 ^a	9.8906 ^a	13.1648 ^b	14.6724 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.5229 ^a	9.8951 ^a	13.1772 ^b	14.6891 ^b

(*) Pris à partir de Référence (Kim et al. 2009).

^a Mode de la plaque est $(m, n) = (1,2)$;

^b Mode de la plaque est $(m, n) = (1,3)$;

^c Mode de la plaque est $(m, n) = (1,4)$;

^d Mode de la plaque est $(m, n) = (1,5)$;

^e Mode de la plaque est $(m, n) = (1,6)$.

La figure 2: montre l'effet des rapports d'épaisseurs et des modules sur la charges critique de flambement \bar{N} d'une plaque carrée soumise à une compression uni axiale. On remarque que le nouveau modèle proposé et la RPT donne presque les mêmes valeurs, et la CPT surestime les charges de flambement de la plaque à cause de l'omission de l'effet de la déformation de cisaillement transversale. La différence entre la CPT et les théories de déformation de cisaillement diminue lorsque le rapport a/h devient important. Au fur et à mesure que la plaque devient fortement orthotrope, la différence entre la présente théorie et la FSDT augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur.

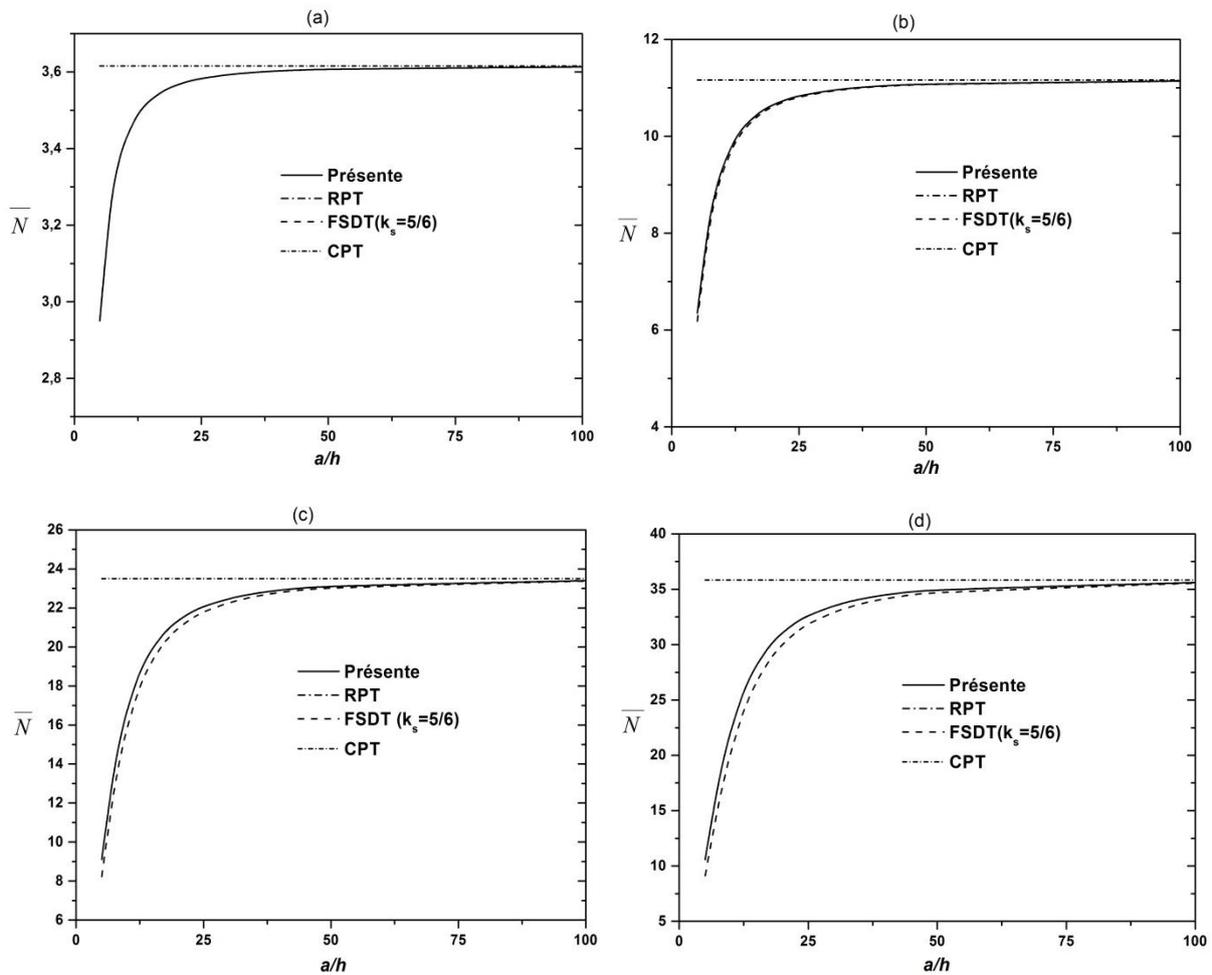


Figure V.2: L'effet du rapport de géométrie et le rapport des modules sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous un chargement uniaxial de compression : (a) isotrope, (b) $E_1 / E_2 = 10$, (c) $E_1 / E_2 = 25$ et (d) $E_1 / E_2 = 40$.

Les variations de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque carrée en fonction du degré d'orthotropie (rapport des modules) sont montrées dans la figure 3. La plaque étudiée est soumise à une compression bi axiale. Les graphes présentés en utilisant le présent modèle sont comparé avec ceux donné par la CPT, FSDT et la RPT. A partir de ces résultats on peut conclure que les graphes présentée par la théorie actuelle sont très proche a ceux de la RPT, cependant la CPT surestime les résultats lorsque le rapport des modules devient important. On peut constater aussi que la différence entre la présente théorie et la FSDT sera considérable avec l'augmentation des rapports des modules.

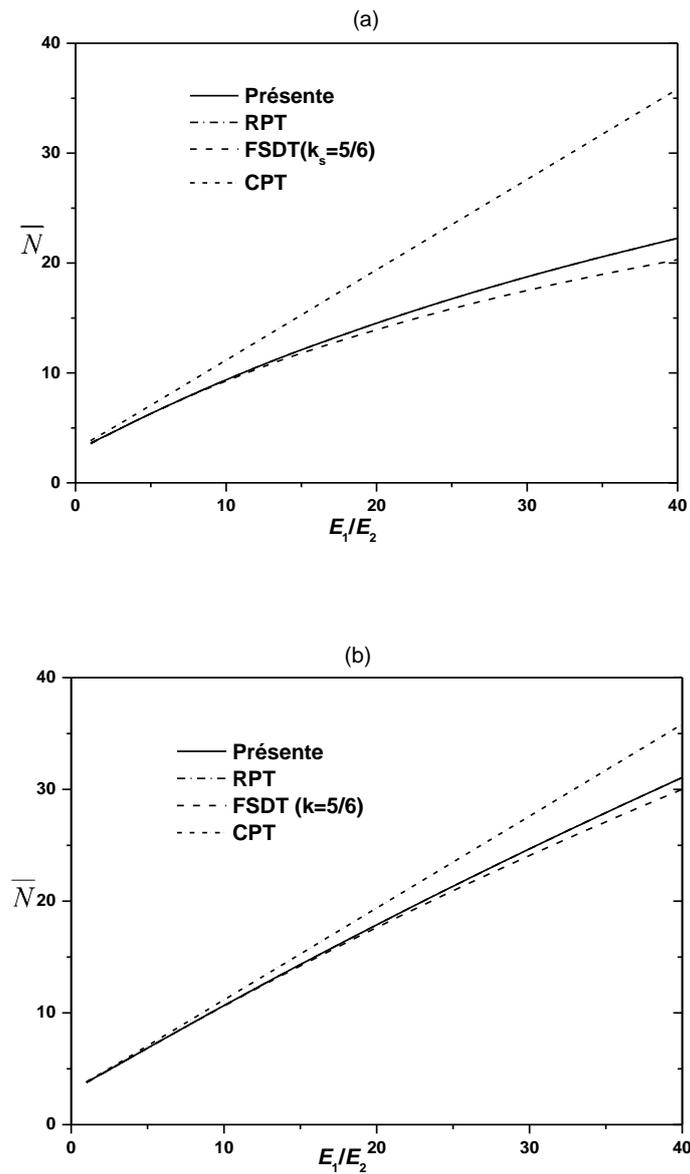


Figure V.3: L'effet du rapport des modules sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous un chargement uni-axiale de compression: (a) $a = 10h$ et (b) $a = 20h$.

L'effet du rapport des modules sur la charge critique du flambement d'une plaque carrée soumise à une traction suivant la direction x et une compression suivant la direction y est montré dans la figure V.4. Encore une fois, on peut constater que les graphes obtenus par la présente théorie sont presque confondue avec les graphes donnés par la RPT et comme est attendu, la CPT surestime les résultats lorsque le rapport des modules devient important.

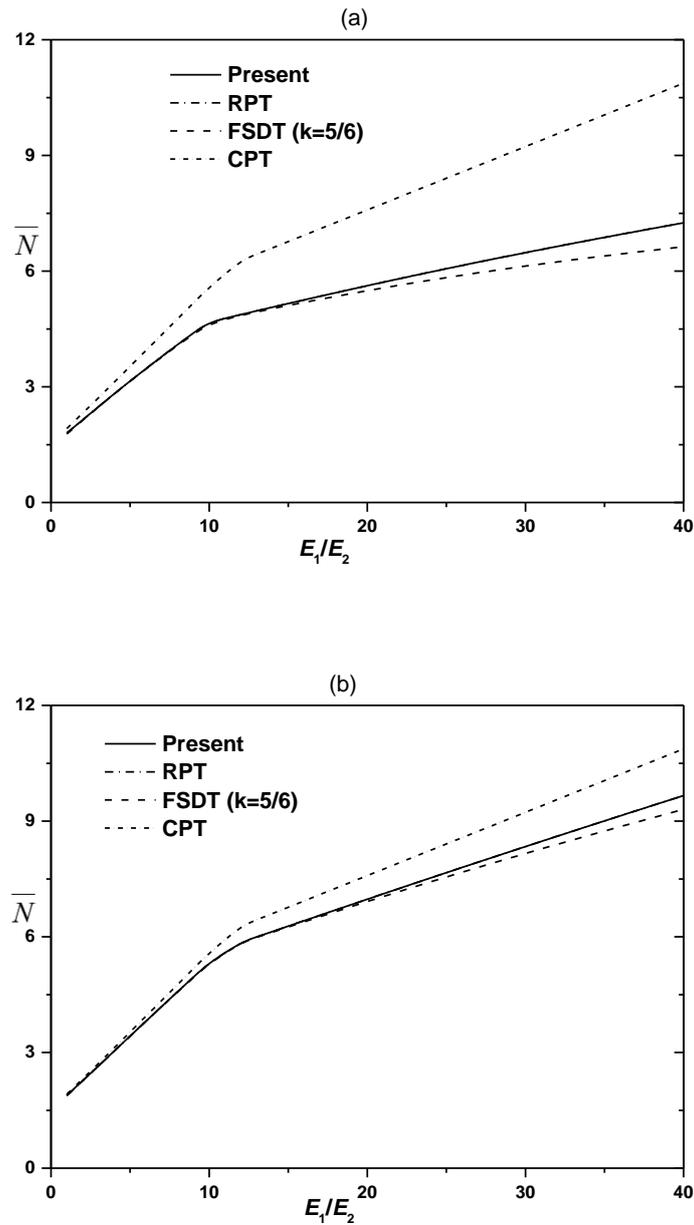


Figure V.4: L'effet du rapport des modules sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous un chargement bi-axiale de compression: (a) $a = 10h$ et (b) $a = 20h$.

Il peut être constaté à partir des tableaux V.1- V.3 et des figures V.2- V.4 que la différence des résultats entre la présente théorie et la FSDT dépend non seulement des rapports d'épaisseur et des modules, mais aussi des conditions de chargement axiale (voir figure V.1).

V.3. Plaques hybride en FGM :

Dans cette partie, l'étude du flambement des plaques hybrides (céramique-FGM-métal) est présentée, l'épaisseur totale de la plaque (h) est composée de trois couches ($h=t_c+t_{FGM}+t_m$), une couche supérieure en céramique ($z_c < t_c < h/2$), une couche inférieure en métal ($-h/2 < t_m < z_m$). et une couche intermédiaire en matériau fonctionnellement graduée FGM fig V.5, les matériaux utilisés pour la couche FGM et les couches inférieure et supérieure sont le silicium de carbone et l'aluminium, avec un coefficient de poisson constant pour les deux matériaux et est égal à 0.3 (Tableau V.4) .

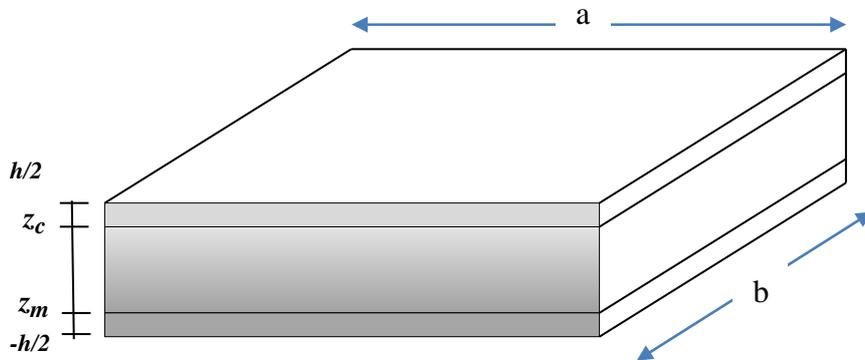


Figure V.5: Géométrie d'une plaque hybride fonctionnellement graduée.

Tableau V.4 : propriétés des matériaux: métal et céramique.

Matériau	Module de Young (GPa)	Coefficient de poisson
Aluminium (Al)	70	0.3
Silicium de carbone (Sic)	420	

Le tableau V.5 présente les charges critiques du flambement N_{cr} (MN/m) des plaques entièrement en FGM ($h=t_{FGM}$), en fonction du rapport de dimension (b/a) et l'indice matériel (p). Une comparaison est faite entre les résultats obtenus par le présent modèle et ceux données (trouvés) par Bodaghi et Saidi (2010) en utilisant la solution de Levy et ceux obtenus par Fekrar et al. (2012) basés sur une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) à quatre variables, les résultats obtenus sont en bon accord avec les modèles déjà développés par Bodaghi et Saidi (2010) et Fekrar et al. (2012).

Tableau V.5 : Comparaison de la charge critique de flambement N_{cr} (MN/m) de la plaque FG rectangulaire avec $a/h=10$.

(γ_1, γ_2)	b/a	Théories	p		
			0	1	2
(-1,0)	0.5	Présente	2079.758	1028.449	780.228
		HSDT *	2080.010	1028.554	780.149
		HSDT **	2079,721	1028,412	780,097
	1	Présente	1437.390	702.251	534.835
		HSDT *	1437.452	702.276	534.807
		HSDT **	1437,361	702,304	534,441
	1.5	Présente	1527.994 ^a	748.988 ^a	569.825 ^a
		HSDT *	1528.089 ^a	749.027 ^a	569.786 ^a
		HSDT **	1527,903 ^a	748,92 ^a	569,751 ^a
(-1,-1)	0.5	Présente	1663.807	822.759	624.182
		HSDT *	1664.008	822.843	624.119
		HSDT **	1663,777	822,738	624,158
	1	Présente	718.695	351.126	267.418
		HSDT *	718.726	351.138	267.403
		HSDT **	718,692	351,124	267,416
	1.5	Présente	526.862	256.776	195.714
		HSDT *	526.878	256.782	195.706
		HSDT **	526,861	256,776	195,714
(-1,1)	0.5	Présente	2773.011	1371.265	1040.304
		HSDT *	2773.347	1371.406	1040.199
		HSDT **	2772,98	1371,653	1040,519
	1	Présente	2773.011 ^a	1371.265 ^a	1040.304 ^a
		HSDT *	2773.347 ^a	1371.406 ^a	1040.199 ^a
		HSDT **	2772,98 ^a	1371,653 ^a	1040,519 ^a
	1.5	Présente	2773.011 ^b	1371.265 ^b	1040.304 ^b
		HSDT *	2773.347 ^b	1371.406 ^b	1040.199 ^b
		HSDT **	2772,98 ^b	1371,653 ^b	1040,519 ^b

^a Mode de la plaque est (m, n) = (1, 2);

^b Mode de la plaque est (m, n) = (1, 3);

* Fekrar et al.(2012);

** Bodaghi et Saidi (2010).

Dans les tableaux V.6 et V.7, on a présenté les valeurs de la charge critique non dimensionnelle du flambement (\bar{N}) des plaques carrées hybrides (céramique-FGM-métal) soumises à des efforts axiaux (uni-axial de compression, bi-axial de compression, une compression suivant l'axe x et traction suivant l'axe y) en fonction de l'indice matériel (p), les résultats sont comparés avec ceux obtenus par Fekrar et al. (2012). Il est à remarquer qu'une

bonne concordance est confirmée avec les résultats de Fekrar et al. (2012) et cela pour les différents valeurs de l'épaisseur de la couche FGM (t_{FGM}) et le rapport de géométrie (a/h).

Tableau V.6 : L'effet de l'indice matériel (p) et (t_{FGM}/h) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque hybrides avec ($a/h=10$) sous les différents conditions de chargements.

t_{FGM}/h	(γ_1, γ_2)	Théories	p								
			0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	∞
0	(-1,0)	Présente	7.5618	7.5618	7.5618	7.5618	7.5618	7.5618	7.5618	7.5618	7.5618
		HSDT*	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632	7.5632
	(-1,-1)	Présente	3.7809	3.7809	3.7809	3.7809	3.7809	3.7809	3.7809	3.7809	3.7809
		HSDT*	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816	3.7816
	(-1, 1)	Présente	15.0339 ^a	15.0339 ^a	15.0339 ^a	15.0339 ^a	15.0339 ^a	15.0339 ^a	15.0339 ^a	15.0339 ^a	15.0339 ^a
		HSDT*	15.0408 ^a	15.0408 ^a	15.0408 ^a	15.0408 ^a	15.0408 ^a	15.0408 ^a	15.0408 ^a	15.0408 ^a	15.0408 ^a
0.2	(-1,0)	Présente	8.5611	8.3968	8.2601	7.9635	7.6805	7.4249	7.216	7.1429	7.0767
		HSDT*	8.5641	8.3996	8.2626	7.9655	7.6818	7.42520	7.2150	7.1411	7.0740
	(-1,-1)	Présente	4.2806	4.1984	4.1301	3.9818	3.8403	3.7124	3.608	3.5714	3.5384
		HSDT*	4.2820	4.2000	4.1313	3.9828	3.8409	3.7126	3.6075	3.5705	3.5370
	(-1, 1)	Présente	17.0813 ^a	16.7430 ^a	16.4611 ^a	15.8469 ^a	15.2552 ^a	14.71 ^a	14.2454 ^a	14.072 ^a	13.9013 ^a
		HSDT*	17.095 ^a	16.7562 ^a	16.4733 ^a	15.8565 ^a	15.2614 ^a	14.7118 ^a	14.2411 ^a	14.0641 ^a	13.8888 ^a
0.4	(-1,0)	Présente	10.2427	9.8218	9.4722	8.7206	8.0265	7.4470	7.0535	6.9504	6.8801
		HSDT*	10.2454	9.8243	9.4746	8.7225	8.0275	7.4463	7.0493	6.9438	6.8707
	(-1,-1)	Présente	5.1213	4.9109	4.7361	4.3603	4.0132	3.7235	3.5267	3.4752	3.4401
		HSDT*	5.1227	4.9122	4.7373	4.3613	4.0138	3.7231	3.5247	3.4719	3.4354
	(-1, 1)	Présente	20.3808 ^a	19.536 ^a	18.8332 ^a	17.3160 ^a	15.8980 ^a	14.6780 ^a	13.7699 ^a	13.4792 ^a	13.2168 ^a
		HSDT*	20.3936 ^a	19.5482 ^a	18.8448 ^a	17.3252 ^a	15.903 ^a	14.675 ^a	13.7512 ^a	13.4502 ^a	13.1758 ^a
0.6	(-1,0)	Présente	12.7325	11.9330	11.2697	9.8518	8.5695	7.5563	6.9523	6.8137	6.6783
		HSDT*	12.7333	11.9341	11.2709	9.853	8.5702	7.5551	6.946	6.8039	6.6679
	(-1,-1)	Présente	6.3663	5.9665	5.6348	4.9259	4.2847	3.7782	3.4762	3.4069	3.3391
		HSDT*	6.3667	5.9670	5.6354	4.9265	4.2851	3.7776	3.4730	3.4019	3.3340
	(-1, 1)	Présente	25.1446 ^a	23.5741 ^a	22.2687 ^a	19.4666 ^a	16.9027 ^a	14.8089 ^a	13.3907 ^a	12.9505 ^a	12.4865 ^a
		HSDT*	25.1484 ^a	23.5792 ^a	22.2746 ^a	19.47264 ^a	16.906 ^a	14.8037 ^a	13.363 ^a	12.9086 ^a	12.4435 ^a
0.8	(-1,0)	Présente	16.1301	14.802	13.7008	11.3549	9.2604	7.6612	6.7618	6.5137	6.0209
		HSDT*	16.1289	14.8014	13.7007	11.3554	9.2608	7.6603	6.7565	6.5073	6.0209
	(-1,-1)	Présente	8.0650	7.401	6.8504	5.6775	4.6302	3.8306	3.3809	3.2569	3.0105
		HSDT*	8.06443	7.4007	6.8503	5.6777	4.6304	3.8302	3.3782	3.2537	3.0105
	(-1, 1)	Présente	31.5034 ^a	28.9501 ^a	26.8273 ^a	22.2815 ^a	18.1746 ^a	14.9426 ^a	12.8795 ^a	12.1886 ^a	11.1667 ^a
		HSDT*	31.4984 ^a	28.948 ^a	26.8271 ^a	22.2839 ^a	18.1768 ^a	14.939 ^a	12.857 ^a	12.1622 ^a	11.1671 ^a

1	(-1,0)	Présente	20.5341	18.4960	16.8069	13.2159	10.0322	7.6405	6.2504	5.6352	3.4224
		HSDT*	20.535	18.4968	16.8076	13.2165	10.0325	7.6401	6.2476	5.6339	3.4225
	(-1,-1)	Présente	10.2671	9.2480	8.4034	6.608	5.0161	3.8203	3.1252	2.8176	1.7112
		HSDT*	10.2675	9.2484	8.4038	6.6082	5.0163	3.8201	3.1238	2.817	1.7112
	(-1,1)	Présente	39.6144 ^a	35.7697 ^a	32.5716 ^a	25.7292 ^a	19.5895 ^a	14.8615 ^a	11.8698 ^a	10.5713 ^a	6.6024 ^a
		HSDT*	39.6192 ^a	35.7739 ^a	32.5753 ^a	25.7322 ^a	19.5915 ^a	14.86 ^a	11.8583 ^a	10.5663 ^a	6.6032 ^a

^a Mode de la plaque est (m, n) = (1, 2);

* Fekrar et al.(2012).

Tableau V.7 : L'effet de l'indice matériel (p) et le rapport de géométrie (a/h) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque hybrides avec ($t_{FGM}/h=0.8$) sous les différents conditions de chargements.

a/h	(γ_1, γ_2)	Théories	p								
			0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	∞
10	(-1,0)	Présente	16.1301	14.802	13.7008	11.3549	9.2604	7.6612	6.7618	6.5137	6.0209
		HSDT*	16.1289	14.8014	13.7007	11.3554	9.2608	7.6603	6.7565	6.5073	6.0209
	(-1,-1)	Présente	8.0650	7.401	6.8504	5.6775	4.6302	3.8306	3.3809	3.2569	3.0105
		HSDT*	8.0644	7.4007	6.8503	5.6777	4.6304	3.8302	3.3782	3.2537	3.0105
	(-1,1)	Présente	31.5034 ^a	28.9501 ^a	26.8273 ^a	22.2815 ^a	18.1746 ^a	14.9426 ^a	12.8795 ^a	12.1886 ^a	11.1667 ^a
		HSDT*	31.4984 ^a	28.9480 ^a	26.8271 ^a	22.2839 ^a	18.1768 ^a	14.9390 ^a	1.857 ^a	12.1622 ^a	11.1671 ^a
20	(-1,0)	Présente	16.6871	15.3014	14.1540	11.7169	9.5546	7.9319	7.0951	6.9061	6.4175
		HSDT*	16.6868	15.3012	14.154	11.717	9.5547	7.9316	7.0936	6.9043	6.4175
	(-1,-1)	Présente	8.3435	7.6507	7.0770	5.8584	4.7773	3.9659	3.5476	3.4531	3.2087
		HSDT*	8.3434	7.6506	7.0770	5.8585	4.7774	3.9658	3.5468	3.4521	3.2087
	(-1,1)	Présente	34.1746 ^a	31.3489 ^a	29.0076 ^a	24.0271 ^a	19.5941 ^a	16.2378 ^a	14.4258 ^a	13.9669 ^a	12.9433 ^a
		HSDT*	34.1729 ^a	31.3482 ^a	29.0074 ^a	24.0277 ^a	19.5946 ^a	16.2366 ^a	14.4185 ^a	13.958 ^a	12.9833 ^a
30	(-1,0)	Présente	16.7946	15.3976	14.2413	11.7865	9.6112	7.9841	7.1605	6.9841	6.4968
		HSDT*	16.7944	15.3975	14.2413	11.7865	9.6113	7.984	7.1599	6.9832	6.4968
	(-1,-1)	Présente	8.3973	7.6988	7.1206	5.8932	4.8056	3.9921	3.5803	3.4920	3.2484
		HSDT*	8.397	7.6988	7.1206	5.8933	4.8056	3.9920	3.5799	3.4916	3.2484
	(-1,1)	Présente	34.7204 ^a	31.8380 ^a	29.4514 ^a	24.3813 ^a	19.8821 ^a	16.5031 ^a	14.7545 ^a	14.3557 ^a	13.3372 ^a
		HSDT*	34.7196 ^a	31.8377 ^a	29.4513 ^a	24.3816 ^a	19.8823 ^a	16.5026 ^a	14.7511 ^a	14.3514 ^a	13.3371 ^a
40	(-1,0)	Présente	16.8325	15.4316	14.2721	11.8110	9.6312	8.0026	7.1837	7.0118	6.5250
		HSDT*	16.8324	15.4315	14.2721	11.8111	9.6312	8.0025	7.1833	7.0113	6.5250
	(-1,-1)	Présente	8.4162	7.7158	7.1361	5.9055	4.8156	4.0013	3.5919	3.5059	3.2625
		HSDT*	8.4162	7.7158	7.1360	5.9055	4.8156	4.0013	3.5917	3.5057	3.2625
	(-1,1)	Présente	34.9156 ^a	32.0129 ^a	29.6100 ^a	24.5078 ^a	19.9849 ^a	16.5981 ^a	14.8732 ^a	14.497 ^a	13.4808 ^a
		HSDT*	34.9151 ^a	32.0127 ^a	29.61 ^a	24.508 ^a	19.985 ^a	16.5978 ^a	14.8713 ^a	14.4945 ^a	13.4808 ^a

50	(-1,0)	Présente	16.8501	15.4473	14.2864	11.8224	9.6405	8.0112	7.1945	7.0247	6.5382
		HSDT*	16.8501	15.4473	14.2864	11.8225	9.6405	8.0111	7.1943	7.0244	6.5381
	(-1,-1)	Présente	8.4251	7.7237	7.1432	5.9112	4.8202	4.0056	3.5973	3.5124	3.2691
		HSDT*	8.425	7.7237	7.1432	5.9112	4.8202	4.0056	3.5971	3.5122	3.2691
	(-1,1)	Présente	35.0067 ^a	32.0945 ^a	29.6840 ^a	24.5668 ^a	20.0329 ^a	16.6424 ^a	14.9288 ^a	14.5633 ^a	13.5483 ^a
		HSDT*	35.0064 ^a	32.0943 ^a	29.684 ^a	24.5669 ^a	20.033 ^a	16.6422 ^a	14.9275 ^a	14.5618 ^a	13.5408 ^a

^a Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 2)$;

*Fekrar et al.(2012).

La figure V.6 illustre l'effet de l'indice matériel (p) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement sous les différents types de chargement avec $a/h=10$ et $t_{FGM}/h=0.8$, on peut constater que les valeurs de la charge critique non dimensionnelle du flambement est en relation inverse avec l'indice matériel p .

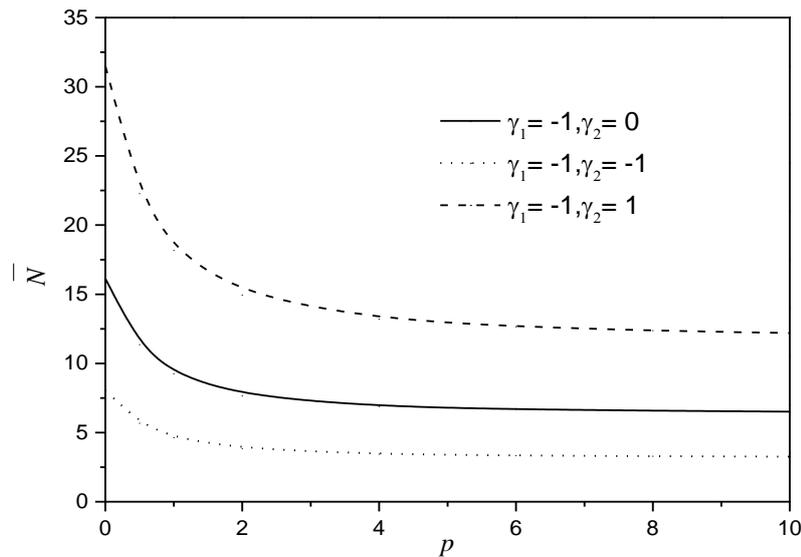


Figure V.6: La charge critique non dimensionnelle de flambement d'une plaque FGM hybride par rapport à l'indice matériel p pour les différents types de chargement avec $a/h=10$ et $t_{FGM}/h=0.8$.

La variation de la charge critique non dimensionnelle du flambement en fonction de l'épaisseur de la couche FGM (t_{FGM}) est montrée dans la figure V.7, on peut observer que la charge critique du flambement (\bar{N}) augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du cœur de la plaque (t_{FGM}), et on peut remarquer que les plus grandes valeurs de la charge critique (\bar{N}) sont

obtenus pour un chargement bi-axial avec une compression suivant l'axe x et une traction suivant l'axe y .

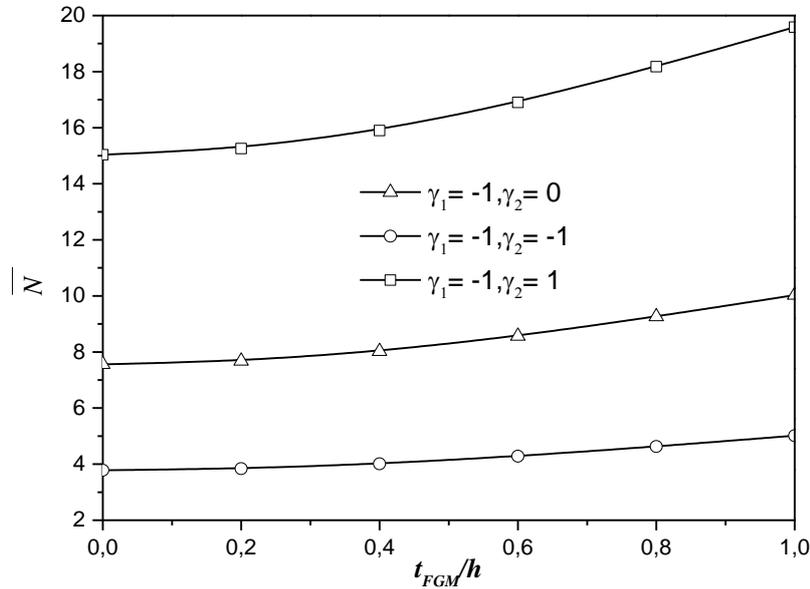


Figure V.7 : La charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) d'une plaque FGM hybride en fonction du rapport t_{FGM}/h avec $a/h=10$ et $p=1$.

Les effets des rapports des modules (E_c/E_m) et la variation de l'épaisseur de la couche FGM (t_{FGM}/h) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée hybride sont présentés dans les figures V.8 et V.9 respectivement, on peut constater que la charge critique du flambement (\bar{N}) augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche FGM (t_{FGM}/h) et le rapport des modules (E_c/E_m).

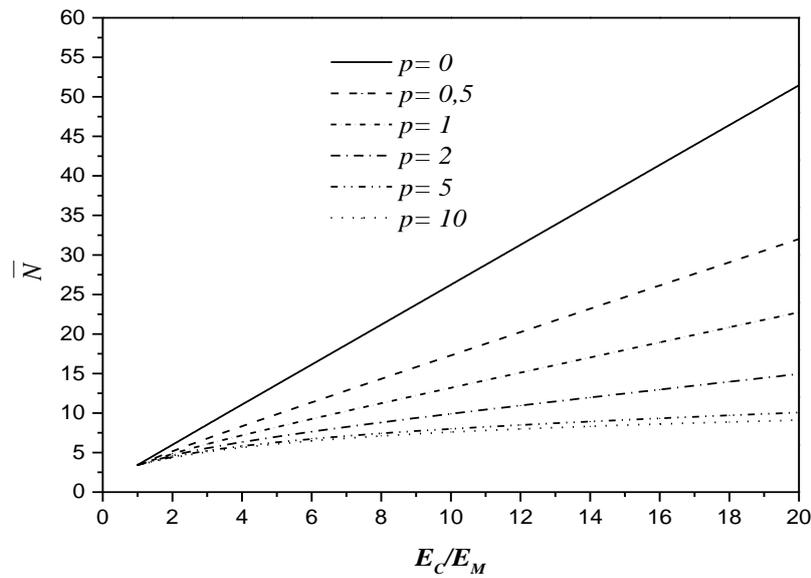


Figure V.8: L'effet du rapport des modules et la puissance p sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) d'une plaque FGM hybride carrés sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$).

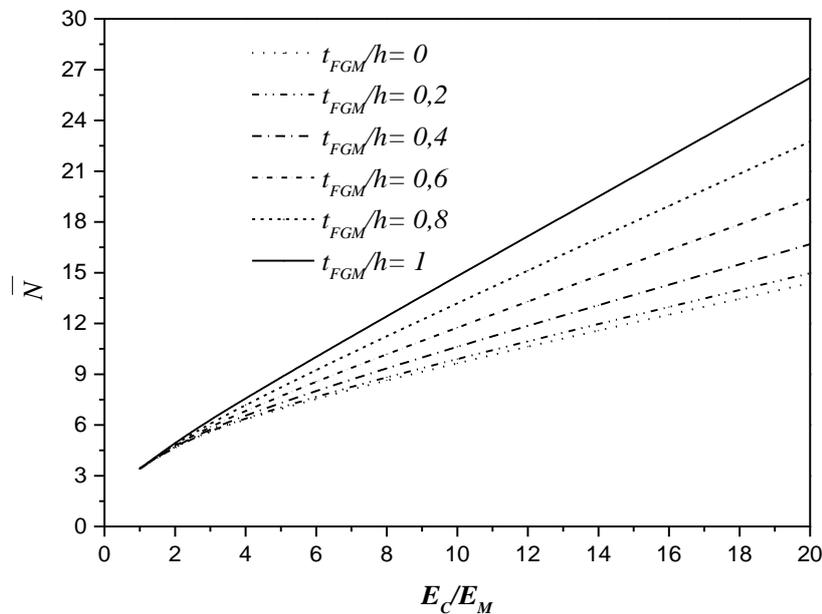


Figure V.9: L'effet du rapport des modules et l'épaisseur de la couche FGM (t_{FGM}) d'une plaque FGM hybride carrés sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p=1$.

V.4. Plaques S-FGM symétrique :

Dans cette section, l'étude de la stabilité des plaques rectangulaires S-FGM symétriques est présenté, la plaque est composée du silicium de carbone et l'aluminium, la plaque FGM est symétrique par rapport a l'axe médian, le matériau est en métal à mi-épaisseur de la plaque, et les surfaces supérieure et inférieure sont en céramique (fig V.10).

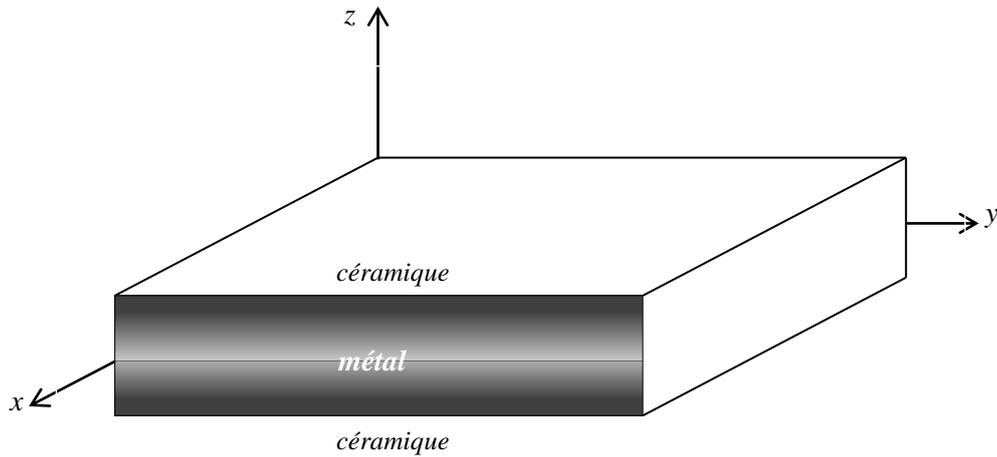


Figure V.10 : Géométrie d'une plaque S-FGM symétrique.

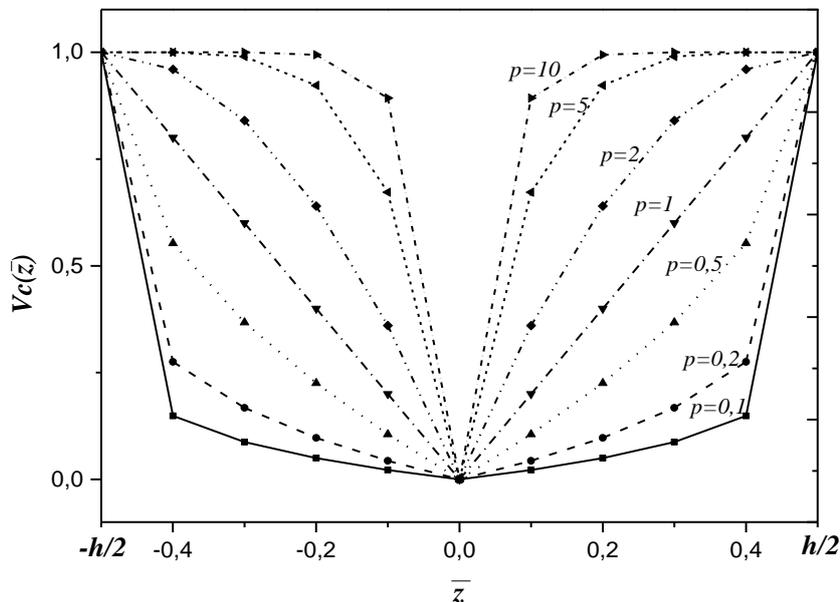


Figure V.11 : La Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une plaque S-FGM symétrique.

La variation de la charge critique du flambement N_{cr} (MN/m) des plaques S-FGM symétrique en fonction des rapports de géométrie (a/h) et de dimension (b/a) est présenté dans le tableau V.08 pour les différents types de chargement (uni-axial, bi-axial), on peut observer que la charge critique du flambement N_{cr} (MN/m) est en relation de corrélation directe avec l'indice materiel p , il est à remarquer que les plus faibles valeurs de la charge critique du flambement N_{cr} sont obtenus pour les plaques carrées.

Tableau V.8 : La variation de la charge critique du flambement N_{cr} (MN/m) des plaques S-FGM symétrique en fonction des rapports de géométrie (a/h) et de dimension (b/a).

(γ_1, γ_2)	b/a	a/h	p							
			0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
(-1,0)	0.5	10	346.626	596.729	787.223	1168.493	1503.366	1780.511	1977.262	2034.639
		5	1013.749	1596.665	2024.656	2909.524	3776.341	4628.765	5424.033	5745.541
	1	10	239.565	424.258	567.430	852.237	1092.888	1278.46	1394.162	1421.39
		5	826.349	1389.326	1812.725	2665.856	3438.599	4112.494	4634.953	4806.456
	1.5	10	254.666 ^a	447.471 ^a	596.165 ^a	892.397 ^a	1145.46 ^a	1344.668 ^a	1473.860 ^a	1506.517 ^a
		5	837.080 ^a	1378.468 ^a	1781.791 ^a	2600.223 ^a	3360.999 ^a	4052.681 ^a	4625.764 ^a	4829.492 ^a
(-1,-1)	0.5	10	277.301	477.383	629.779	934.795	1202.692	1424.409	1581.81	1627.711
		5	810.999	1277.332	1619.725	2327.619	3021.073	3703.012	4339.226	4596.433
	1	10	119.782	212.129	283.715	426.118	546.444	639.23	697.081	710.695
		5	413.175	694.663	906.362	1332.928	1719.299	2056.247	2317.477	2403.228
	1.5	10	87.810	156.422	209.82	315.936	404.860	472.349	513.127	522.145
		5	314.414	537.750	707.231	1047.024	1348.055	1600.960	1785.207	1840.936
(-1,1)	0.5	10	462.169	795.638	1049.631	1557.991	2004.487	2374.015	2636.35	2712.852
		5	1351.665	2128.887	2699.542	3879.365	5035.121	6171.687	7232.043	7660.722
	1	10	462.169 ^a	795.638 ^a	1049.631 ^a	1557.991 ^a	2004.487 ^a	2374.015 ^a	2636.35 ^a	2712.852 ^a
		5	1351.665 ^a	2128.887 ^a	2699.542 ^a	3879.365 ^a	5035.121 ^a	6171.687 ^a	7232.043 ^a	7660.722 ^a
	1.5	10	462.169 ^b	795.638 ^b	1049.631 ^b	1557.991 ^b	2004.487 ^b	2374.014 ^b	2636.35 ^b	2712.852 ^b
		5	1351.665 ^b	2128.887 ^b	2699.542 ^b	3879.365 ^b	5035.121 ^b	6171.687 ^b	7232.043 ^b	7660.722 ^b

^a Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 2)$;

^b Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 3)$.

L'effet de l'indice matériel p et le rapport de géométrie a/h sur la charge critique non dimensionnelle du flambement des plaques carrées S-FGM symétrique est montré dans le tableau V.9, on peut constater que la charge critique (\bar{N}) augmente avec l'augmentation du

rapport de géométrie et les plus grandes valeurs sont obtenues pour un indice matériel le plus important.

Tableau V.9 : L'effet de l'indice matériel (p) et le rapport de géométrie (a/h) sur la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carré S-FGM symétrique sous les différentes conditions de chargements.

a/h	(γ_1, γ_2)	P							
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
5	(-1,0)	2.9512	4.9619	6.4740	9.5209	12.2807	14.6875	16.5534	17.1659
	(-1,-1)	1.4756	2.4809	3.2370	4.7605	6.1404	7.3437	8.2767	8.583
	(-1,1)	4.8274 ^a	7.6032 ^a	9.6412 ^a	13.8549 ^a	17.9826 ^a	22.0417 ^a	25.8287 ^a	27.3597 ^a
10	(-1,0)	3.4224	6.0608	8.1061	12.1748	15.6127	18.2637	19.9166	20.3056
	(-1,-1)	1.7112	3.0304	4.0531	6.0874	7.8063	9.1319	9.9583	10.1528
	(-1,1)	6.6024 ^a	11.3663 ^a	14.9947 ^a	22.2570 ^a	28.6355 ^a	33.9145 ^a	37.6621 ^a	38.7550 ^a
20	(-1,0)	3.565	6.4174	8.6537	8.6539	16.7536	19.4521	20.9859	21.2815
	(-1,-1)	1.7825	3.2087	4.3268	6.5454	8.3768	9.7261	10.493	10.6407
	(-1,1)	7.2754 ^a	12.9874 ^a	17.4393 ^a	26.2834 ^a	33.6725 ^a	39.2479 ^a	42.5773 ^a	43.2957 ^a
50	(-1,0)	3.6071	6.525	8.8207	13.3729	17.104	19.8134	21.3065	21.572
	(-1,-1)	1.8036	3.2625	4.4103	6.6865	8.552	9.9067	10.6532	10.786
	(-1,1)	7.4895 ^a	13.5289 ^a	18.2756 ^a	27.6898 ^a	35.4216 ^a	41.0601 ^a	44.1955 ^a	44.7670 ^a
100	(-1,0)	3.6132	6.5407	8.8451	13.4142	17.1552	19.8662	21.3531	21.6141
	(-1,-1)	1.8066	3.2703	4.4225	6.7071	8.5776	9.9331	10.6765	10.8071
	(-1,1)	7.5211 ^a	13.6100 ^a	18.4018 ^a	27.9032 ^a	35.6866 ^a	41.3329 ^a	44.437 ^a	44.9855 ^a

^a Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 2)$.

La figure V.12 montre la variation de la charge critique non dimensionnelle du flambement (\bar{N}) des plaques carrées S-FGM symétriques pour les trois types de chargement sous l'effet de la puissance p avec un rapport de géométrie $a/h=5$. Il est à remarquer que la charge critique du flambement (\bar{N}) est en relation de corrélation directe avec l'indice matériel p , les valeurs les plus faibles de la charge critique du flambement sont obtenus pour un chargement bi-axial de compression, par contre un chargement bi-axial avec une compression suivant l'axe x et traction suivant l'axe y donne les plus grandes valeurs de la charge critique (\bar{N}).

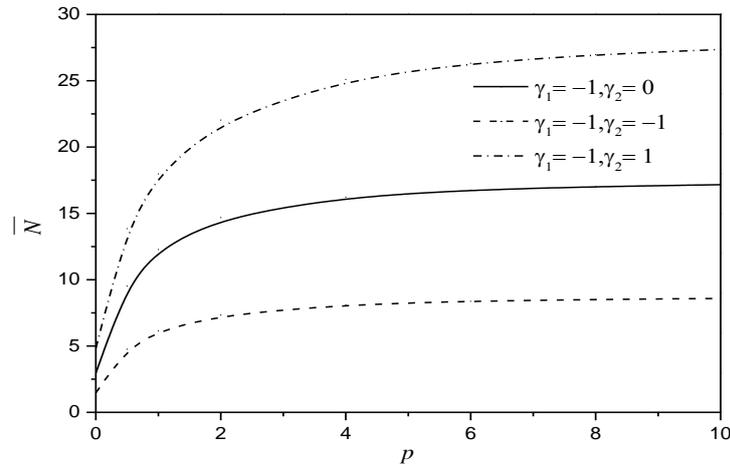


Figure V.12: La charge critique non dimensionnelle de flambement d'une plaque S-FGM symétrique par rapport à l'indice matériel p pour les différents types de chargement avec $a/h=5$.

Les effets des rapports des modules et de géométrie sur la variation de la charge critique non dimensionnelle du flambement (\bar{N}) sont présentés dans les figures V.13 et V.14, les plaques sont soumises à des efforts normaux de compression suivant l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$), on constate que la charge critique non dimensionnelle du flambement augmente avec l'augmentation des rapports des modules et de géométrie a/h .

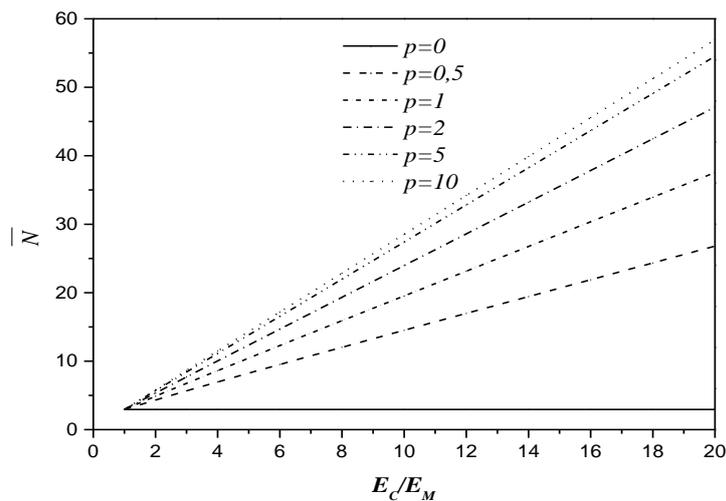


Figure V.13: L'effet du rapport des modules et la puissance p sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) d'une plaque S-FGM symétrie carrés sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $a/h=5$.

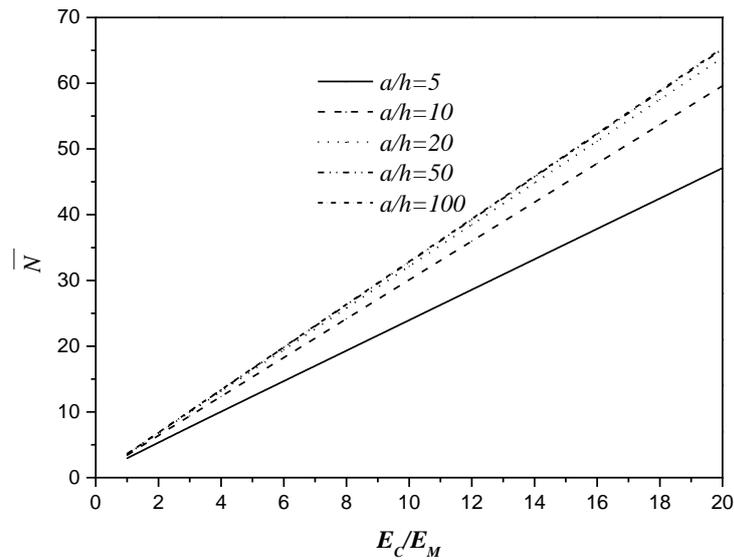


Figure V.14 : L'effet du rapport des modules et l'épaisseur de la couche FGM (a/h) d'une plaque S-FGM symétrique carrés sur la charge critique non dimensionnelle de flambement (\bar{N}) sous un chargement axial de compression ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) avec $p=2$.

V.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la stabilité des plaques composites épaisses en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Cette théorie a été développée dans le chapitre précédent. Tous les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature. Par conséquent, on peut conclure que la théorie proposée est précise pour résoudre le problème du flambement des plaques isotropes, orthotropes, hybrides en FGM et S-FGM symétrique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, une théorie simple et efficace de déformation de cisaillement d'ordre élevée avec seulement quatre variables a été développée pour l'analyse du flambement des plaques isotropes, orthotropes et fonctionnellement graduée sous les différents types de chargement (uni-axiale et bi-axiale). Dans la présente théorie (HSDT à quatre variables) les déplacements de rotations sont remplacés par des termes en intégrale dans les champs de déplacement. L'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire car notre modèle donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Les équations d'équilibres sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels. Des solutions analytiques de la charge critique du flambement sont déterminées pour des plaques simplement appuyées isotropes, orthotropes et FGM.

A travers ce travail on peut conclure :

- La différence entre les résultats trouvés par la théorie classique des plaque (CPT) et les théories de déformation de cisaillement diminue lorsque le rapport de géométrie devient important, ce qui montre que la CPT surestime la charge critique non dimensionnelle du flambement (\bar{N}) des plaques semi épaisses et épaisses.
- La charge critique non dimensionnelle du flambement (\bar{N}) des plaques hybrides en FGM est en relation inverse avec l'indice matériel « p ». Par contre pour une plaque S-FGM symétrique, la charge critique non dimensionnelle du flambement est en relation de corrélation directe avec l'indice matériel « p ».
- La charge critique non dimensionnelle du flambement (\bar{N}) augmente avec l'augmentation des rapports des modules (E_c/E_m) et de géométrie (a/h) quel que soit le type de la plaque (hybride en FGM ou S-FGM symétrique).
- La charge critique non dimensionnelle du flambement augmente avec l'augmentation de la couche du cœur de la plaque (t_{FGM}/h).
- Les plus faibles valeurs de la charge critique non dimensionnelle du flambement sont obtenues pour un chargement bi-axiale de compression, par contre les valeurs les plus importantes de la charge critique non dimensionnelle du flambement sont obtenues

pour un chargement bi-axiale avec une de compression suivant l'axe x et traction suivant l'axe y .

Finalement, nous pouvons dire que la présente théorie est exacte pour résoudre les problèmes du flambement sous chargement mécanique des plaques isotropes, orthotropes et en matériaux fonctionnellement gradués.

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse de doctorat peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour l'étude statique et vibratoire des différentes formes de structures épaisses et modérément épaisses en matériaux fonctionnellement gradué.

*Références
bibliographiques*

Références bibliographiques

- Abrate, S. (2008), “Functionally graded plates behave like homogeneous plates”, *Composites Part B: Engineering.*, **39**(1), 151-158.
- Afsharmanesh, B., Ghaheri, A., Taheri-Behrooz, F. (2014), “Buckling and vibration of laminated composite circular plate on Winkler-type foundation”, *Steel and Composite Structures.*, **17**(1), 1-19.
- Ahmed, A. (2014), “Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory”, *International Journal of Civil, Structural, Environmental.*, **4**(2), 59 – 64.
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials.*, **16**(3), 293–318.
- Ait Atmane, H. (2011), “Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement”, *thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(2), 369-384.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, EA. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *Int J Mech Mater.*, **6**(2),113–121.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **53**(6), 1143-1165.
- Akavci, SS. (2014), “An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”. *Compos , Struct.*, **108**, 667–676.
- Akavci, SS. (2010), “Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates”, *Mech Compos Mater.*, **46**(2),215–626.
- Akbarzadeh, AH., Zad, SH., Eslami, MR., Sadighi, M. (2011), “Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading”. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci.*,**225**(2), 326–333.

- Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position", *Compos. Struct.*, **125**, 621-630.
- Alibeigloo, A. (2010), "Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates". *Compos Struct.*, **92**(1), 113-21.
- Alinia, M.M., Ghannadpour, S.A.M. (2009), "Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates", *Compos Struct.*, **88**(3), 354-359.
- Altunsaray, E., Bayer, I. (2014), "Buckling of symmetrically laminated quasi-isotropic thin rectangular plates", *Steel and Composite Structures.*, **17**(3), 305-320.
- Ambartsumyan, S. A. (1969), "Theory of anisotropic plate". *Technomic Publishing*.
- Ambartsumyan, S.A. (1970), "Theory of anisotropic plates", *Westport, Connecticut: Technomic Publishing Company*.
- Ameur, M., Tounsi, A., Mechab, I., Bedia, E.A. (2011), "A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations". *KSCE J Civil Eng.*, **15**(8), 1405-1414.
- Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 187-212.
- Aydogdu, M. (2005), "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", *International Journal of Mechanical Sciences.*, **47**, 1740-1755.
- Aydogdu, M. (2008), "Conditions for functionally graded plates to remain flat under inplane loads by classical plate theory". *Compos Struct.*, **82**(1), 155-157.
- Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013), "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics.*, **48**(4), 547-567.
- Bakora, A. and Tounsi, A. (2015), "Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **56**(1), 85-106.
- Bank, L., Yin, J. (1996), "Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges", *Thin Wall Struct.*, **24**(1), 83-96.

- Bao, G., Wang, L. (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J. Solids Structures*, **32** (19), 2853–2871.
- Baron and Naili (2008), "Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide", *Compte Rendue Mécanique.*, **336** (9), 722–730.
- Batoz, J.L. (1990), "Modélisation des structures par éléments finis Poutres et Plaques", *Presses de l'Université Laval.*, **2**.
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.
- Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Struct. Syst.Int. J.*, **18**(4). 755-786.
- Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(4), 1063-1081.
- Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265–275.
- Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B.*, **42**(6), 1386-1394.
- Benatta, M. A. (2011), "Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé", *thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*
- Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams" *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(3), 521-546.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23**(4), 423 – 431.

- Bert, C.W., Chen, T.L.C. (1978), "Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle ply laminated rectangular plates", *Int J Solids Struct.*, **14**, 465–473.
- Berthelot, J. M. (2010), "Mécanique des Matériaux et structures composites", *Institut supérieur des matériaux et mécaniques avancés, le Mans, France*.
- Bhimaraddi, A, Stevens, L.K. (1984), "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates", *J Appl Mech-T ASME.*, **51**(1), 195–198.
- Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M, (1986), " Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, **69**(8),191-192,
- Bodaghi, M., Saidi, A. (2010), "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Appl. Math. Model.*,**34**(11), 3659-3673.
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, EA., Megueni, A. (2010), "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach". *Comput Mater Sci* , **49**(4), 865–870.
- Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(6), 1493-1515.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **58**(3), 397-422.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *Steel and Composite Structures.*, **14**(1), 85 – 104.
- Bouguenina, O., Belakhdar, K., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), "Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(3), 679-695.
- Bouhadra, A. (2015), " Etude du comportement mécanique des plaques FGM ayant des coefficients de dilatation thermique variables à travers l'épaisseur", *thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie*.

- Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(5), 837-859.
- Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **20**(2), 227-249.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 409– 423.
- Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14**(1), 5-33.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Computat. Method.*, **11**(6), 1350082.
- Carrera, E.(2004) , “On the use of Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and Shells”, *Computers and Structures.*, **82**, 541-554.
- Chakraverty, S., Pradhan, K.K. (2014), “Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method”, *Int J Appl Mech* ,**6**(4),1450043.
- Chakraverty, S. and Pradhan, K.K. (2014), “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **36**, 132-156.
- Chen, C. S. (2005) , “Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate”, *Compos Struct.*,**68**(3), 295–302.
- Cheung, Y.K., Chakrabarti, S.,(1972), “ Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method”, *Journal of Sound and Vibration.*, **21**, 277–284.
- Chi, Shyang-ho., Chung, Yen-Ling. (2003), “ Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”. *Engineering Fracture Mechanics*, **70** (10), 1227–1243.

- Chikh, A., Bakora, A., Heireche, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2016), “Thermo- mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(4), 617-639.
- Cugnoni, J., Gmür, Th., Schorderet, A.(2004), “ Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements”, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* , **35**, 977–987.
- Dahsin, L, Xiaoyu, L. (1996), “An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis”, *J Compos Mater.*, **30**, 1539–1561.
- Delale, F., Erdogan, F. (1983), “The crack problem for a non homogeneous plane”. *ASME Journal of Applied Mechanics.*, **50** (3), 609-614.
- Della, Croce. L., Venini.P.(2004), “Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates”, *Comput Methods Appl Mech Eng.*, **193**(9),705–25.
- Di Sciuva, M. (1987), “An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates”, *Journal of Applied Mechanics.*, **54**, 589-596.
- Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(1), 69-81.
- Du,C., Li, Y., Jin, X. (2014), “Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells”, *Thin-Walled Struct.* **78**,26–36.
- Duong ,C. N., Wang, C. H. (2007), “Composite Repair / Theory and Design”, *1st ed. ed., Netherlands, Elsevier*, ISBN: 978-0-0804-5146-6.
- Ebrahimi , MJ., Najafizadeh, MM. (2014), “Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells” *Appl Math Model.*,**38**(1),308–324.
- El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Int. J. Mech. Sci.*, **53**, 237-247.
- Eltaher, M.A., Khater, M.E., Park, S., Abdel-Rahman, E. and Yavuz, M. (2016), “On the static stability of nonlocal nanobeams using higher-order beam theories”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, **4**(1), 51-64.

Fekrar, A., E. Meiche, N., Bessaim, A, Tounsi, A., and Bedia, E. A. (2012), "Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory", *Steel and Composite Structures*, **13(1)**, 91 – 10791.

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates", *Meccanica*, **49(4)**, 795-810.

Feldman, E., Aboudi, J., (1997), " Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading", *Compos Struct.*, **38(1)**, 29–36.

Foroughi , H., Azhari, M. (2014), "Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method", *Meccanica*.,**49(4)**,981–993.

Ganapathi, M., Prakash , T., Sundararajan, N. (2006), " Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads", *J Eng Mech.*,**132(8)**,902–905.

Ghannadpour, SAM., Ovesy.HR., Nassirnia, M. (2012), "Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method".,*Comput Struct.*,**108– 109**,93–99.

Ghugal , Y.M., Shimpi, RP. (2002), "A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates", *J Reinf Plast Compos.*, **21(9)**,775–813.

Glossaire (2006) Des Matériaux Composites - CARMA - Actualisation octobre 2006.

Gornet, L. (2008), "Généralités sur les matériaux composites" , ECN « Centrale Nantes » France.

Gulshan, Taj MNA., Chakrabarti, A., Sheikh, AH. (2013), "Analysis of functionally graded plates using higher order shear deformation theory", *Appl Math Model.*, **37(18-19)**,8484–8494.

Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory" , *Applied Mathematics and Mechanics.*, **32(7)**,925–942.

Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Bedia, E.A. (2014), "A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **16(5)**, 507-519.

Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Ait Amar Meziane, M., Tlidji, Y. and Adda Bedia, E.A. (2016), "Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57(2)**, 315-325.

- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 235 – 253.
- He, L.H. (1994), “A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces”, *Int J Solids Structures*, **31**(5), 613-627.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Eng. Mech.*, **140**, 374-383.
- Hildebrand, F.B., Reissner, E., Thomas, GG.(1949), “Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells”, *NACA T. N. N°:1833*.
- Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., Omidi, M. (2010), “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”, *Appl Math Model.*, **34**(5), 1276–1291.
- Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., Omidi, M.(2010), “ Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”. *Appl Math Model .*, **34**(5),1276–1291.
- Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. (2013), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, **76**, 102-111.
- Hu , Y., Zhang ,X. (2011), “Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate”. *Mech Based Des Struct Mach.*,**39**(3),367–377.
- Hwang, I., Lee, J.S. (2006), “Buckling of orthotropic plates under various in-plane loads”, *KSCE J Civ Eng*, **10**(5), 349–356.
- Ibrahim, HH., Tawfik, M., Al-Ajmi, M. (2007), “Thermal buckling and nonlinear flutter behavior of functionally graded material panels”, *Journal Aircraft.*, **44**(5), 1610–1618.
- Icardi, U.(2001), “Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations”. *Composites : Part B.*, **32**, 343-354.
- Jari, H., Atri, HR., Shojaee, S.(2015), “Nonlinear thermal analysis of functionally graded material plates using a NURBS based isogeometric approach”. *Compos Struct .*,**119**,333-345.

- Javaheri, R., Eslami, M. (2002), "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading", *J. Appl. Math. Mech.*, **82**(4), 277-283.
- Javaheri, R., Eslami, MR. (2002), "Thermal buckling of functionally graded plates". *AIAA J.*, **40**(1), 162-169.
- Kang, J.H., Leissa, A.W. (2005), "Exact solutions for the buckling of rectangular plates having linearly varying in-plane loading on two opposite simply supported edges", *Int J Solids Struct.*, **42**(14), 4220-4238.
- Kant, T., Khare, RK. (1997), "A higher-order facet quadrilateral composite shell element", *Int J Numer Meth Eng*, **40**(24), 4477-4499.
- Kant, T., Pandya, BN. (1988), "A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates", *Compos Struct*, **9**(3), 215-264.
- Kant, T., Swaminathan, K. (2001), "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory", *Compos Struct.*, **53**(1), 73-85.
- Kant, T., Swaminathan, K. (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Composite. Structure.*, **56** (4), 329-344.
- Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K. (2015), "Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading", *Steel Compos. Struct.*, **19**(4), 1011-1033.
- Kar, V.R., Panda, S.K. (2014), "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Structural Engineering Mechanics*, **53**(4), 661 - 679.
- Karama, M., Afaq, KS., Mistou, S. (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures.*, **40** (6), 1525-1546.
- Katariya, P.V., Panda, S.K. (2016), "Thermal buckling and vibration analysis of laminated composite curved shell panel", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology.*, **88**(1), 97 - 107.
- Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014), "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(5), 135007.
- Khandan, R., Noroozi, S., Sewell, P., Vinney, J. (2012), "The development of laminated composite plate theories", *a review. J Mater Sci.*, **47**(16), 5901-5910.

- Kiani, Y., Bagherizadeh, E., Eslami, MR. (2011), “ Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions)”, *ZAMM , J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech.*, **91**(7),581–93.
- Kim, KD., Lomboy, GR., Han, SC.(2008), “ Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element”, *J Compos Mater.*,**42**(5),485–511.
- Kim, S.E., Thai, H.T., Lee, J. (2009), “Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory”, *Thin-Walled Structures*, **47**, 455–462.
- Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Ameer, M. (2014), “A n-order four variable refined theory for bending and free vibration of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(1), 21-46.
- Koizumi, M. (1992), “Recent Progress of functionally graded materials in Japan”, *Ceram. Eng. Sci. Pro.*, **13** (7-8),333-347.
- Koizumi, M. (1997), “FGM activities in Japan”, *Compos B Eng.*, **28**(1),1–4.
- Kokini, K., Takeuchi, Y. (1990), “ Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads”, *In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan.*, 31-36.
- Lanhe, W (2004), “ Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM Plate”, *Compos Struct.*,**64**(2),211–218.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 425-442.
- Levinson, M. (1981), “A new rectangular beam theory”, *J. Sound Vib.*, **74**, 81 – 87.
- Levinson, M., (1980), “ An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”, *Mech Res Commun.*, **7**(6), 343–350.
- Levy, M.(1877), “ Memoire sur la theorie des plaques elastiques planes”, *J Math Pures Appl.*,219-306.
- Liew, KM., Hung, KC., Lim, MK. (1993), “ A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates ”, *International Journal of Solids and Structures.*, **30**, 3357–3379.

- Liew, KM., Hung, KC., Lim, MK. (1994), “ Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates: variance of simple support conditions and influence of in-plane inertia ”, *J. Solids Structures.*, **31**(23), 3233-3247.
- Liew, KM., Hung, KC., Lim, MK. (1995), “ Free vibration studies on stress-free three-dimensional elastic solid” , *Journal of Applied Mechanics.*, **62**, 159–165.
- Liew, KM., Hung, KC., Lim, MK. (1995), “ Three-dimensional vibration of rectangular plates: effects of thickness and edge constraints”, *Journal of Sound and Vibration.*, **182**, 709–727.
- Lo, KH., Christensen. R.M., Wu. E.M. (1977), “ A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates”, *J Appl Mech.*, **44**(4),663-668.
- Loy, CT., Lam, KY., Reddy, JN.(1999), “ Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *Int J Mech Sci .*,**41**(3),309–324.
- Lü, CF., Lim, CW., and Chen, WQ. (2009), “Exact Solutions for Free Vibrations of Functionally Graded Thick Plates on Elastic Foundations”, *JournalMechanics of Advanced Materials and Structures .*, **16**(8),576-584
- Mahapatra, T.R., Panda, S.K., Kar, V.R. (2016a), “Geometrically nonlinear flexural analysis of hygro thermo-elastic laminated composite doubly curved shell panel”, *Int J Mech Mater Des.*, **12**(2),153-171.
- Mahapatra, T.R., Panda, S.K., Kar, V.R. (2016b), “ Nonlinear hygro-thermo-elastic vibration analysis of doubly curved composite shell panel using finite element micromechanical model”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, **23**(11),1343-1359.
- Mahdavian, M. (2009), “Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading”,*J Solid Mech.*,**1**(3),213–225.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489–2508.
- Mahi, A., Adda Bedia, EA., Tounsi, A. et Mechab, I. (2010), “An analytical method for temperature dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions”, *Composite Structures.*, **92**, 1877–1887.

- Mahi, A., Bedia, EA., Tounsi, A. (2014), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded sandwich and laminated composite plates”, *Appl Math Model* ,[http:// dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045](http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045).
- Malekzadeh, P.(2009), “Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations”, *Compos Struct.*, **89**(3),367–373.
- Mallikarjuna and Tarun, Kant. (1989), “Finite element formulation of a higher-order theory for dynamic response of laminated composite plates ”, *Engineering Computations.*, **6**(3), 198-208
- Mallikarjuna, M., Kant ,T. (1993), “A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches”, *Compos Struct*, **23**(4), 293–312.
- Mantari, JL., Bonilla, EM, Guedes Soares, C. (2014), “A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates”, *Compos B Eng.*, **60**,319–328.
- Mantari, JL., Granados, EV. (2015), “A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates”, *Thin-Walled Structures*, **90**, 150–158.
- Mantari, JL., Guedes Soares, C. (2012), “Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”, *Compos Struct* .,**94**(6),1991–2000.
- Mantari, JL., Guedes Soares, C.(2012), “Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory”, *Compos Struct.*,**94**(8), 2640–2656.
- Mantari, JL., Guedes Soares, C.(2013), “ Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates”, *Compos Struct.*, **96**,545–553.
- Mantari, JL., Oktem, AS., Guedes Soares, C. (2011), “Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher order shear deformation theory”, *Compos Struct.*, **94**(1),37–49.
- Mantari, JL., Oktem., AS., Guedes Soares, C (2012), “A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates”, *Int J Solids Struct.*, **49**(1),43-53.
- Matsunaga, H. (2009), “Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory”, *Compos Struct*, **90**, 76–86.
- Mechab, I. (2009), “Etude des structures composites en utilisant les théories d’ordre élevé sous chargement thermomécanique”, *thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*

- Mechab, I., Mechab, B., Benaissa, S. (2013), “Static and dynamic analysis of functionally graded plates using four-variable refined plate theory by the new function”, *Compos B Eng.*, **45**(1), 748-57.
- Mechab, I., Tounsi, A., Benatta, MA., Adda bedia, EA. (2008), “Deformation of short composite beam using refined theories” , *J. Math. Anal. Appl.*, **346**, 468–479.
- Mehar, K., Panda, S.K. (2016), “Geometrical nonlinear free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite flat panel under uniform thermal field”, *Composite Structures*, **143**, 336-346.
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53**(6), 1215-1240.
- Memar Ardestani, M., Soltani, B., Shams, S. (2014), “Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method”, *Compos Struct.*, **112**,231–240.
- Menail, Y. (2009), “Analyse de l’effet du vieillissement à l’air, dans l’eau douce et dans l’eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre”, *thèse de doctorat, Université BADJI Mokhtar, Annaba, Algérie.*
- Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(3), 793-809.
- Merazi, M., Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation plate theory for static analysis of FGM plate based on neutral surface position”, *Geomech. Eng., Int. J.*, **8**(3), 305-321.
- Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, MSA., Mechab, I., Hebali, H., Benyoucef, S. (2011), “Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates”, *Arch Appl Mech.*, **81**(11), 1507–1522.
- Mian, M.A., Spencer, A.(1998), “Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials”, *J Mech Phys Solids.*, **46**(12),2283-2295.
- Mindlin, R.D. (1951), “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J Appl Mech-T ASME*, **18**(1), 31–38.
- Mindlin, R.D. (1951), “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J Appl Mech-T ASME*, **18**(1), 31–38.

- Mohammadi, M., Saidi, AR., Jomehzadeh, E. (2010), “Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates”, *Appl Compos Mater.*,**17**(2),81–93.
- Mohan, PR., Naganarayana, BP., Prathap, G. (1994), “Consistent and variationally correct finite elements for higher-order laminated plate theory”, *Compos Struct*, **29**(4), 445–456.
- Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), “Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory”, *Wind Struct., Int. J.*, **22**(4), 429-454.
- Murakami, H. (1986), “Laminated composite plate theory with improved in-plane responses”,*J Appl Mech.*, **53**(3),661–666.
- Musa, IA. (2016), “Buckling of plates including effect of shear deformations: a hyperelastic formulation”, *Structural Engineering and Mechanics*, **57**(6), 1107-1124.
- Na, KS., Kim, JH.(2004), “Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials”, *Compos B Eng.*,**35**(5),429–437.
- Na, KS., Kim, JH.(2005), “Three-dimensional thermomechanical buckling of functionally graded materials”, *AIAA J*,**43**(7),1605–1612.
- Na, KS., Kim, JH.(2006), “Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3D finite element method”, *Finite Elem Anal Des.*,**42**(8–9),749–756.
- Na, KS., Kim, JH.(2006), “Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates”, *Compos Struct.*,**73**(4),413–422.
- Naghdi, PM. (1957), “On the theory of thin elastic shells”, *Quarterly Appl. Math.*, **14**, 369-380.
- Najafizadeh, MM., Heydari, HR.(2007), “Higher-order theory for buckling of functionally graded circular plates”, *AIAA J* ,**45**(6),1153–1160.
- Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory””, *Mechanics of Composite Materials.*, **49**(6), 629 - 640.
- Nelson, RB. and Lorch, DR. (1974), “ A refined theory for laminated orthotropic plates”, *Journal of Applied Mechanics.*, **41**,177–183.

- Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P. (2015), “A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 91-120.
- Nguyen, TK, Sab, K., Bonnet, G. (2007), “Shear correction factors of functionally graded plates”, *Mech. Advanced Mater. Struct.*,**14** (8),567-575.
- Nguyen, TK., Sab, K., Bonnet, G.(2008), “First-order shear deformation plate models for functionally graded materials”, *Compos Struct.*, **83**(1),25–36.
- Nguyen., Viet,Tung. (2004), “Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ”, *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées.*
- Noor, AK., Burton, WS. (1989), “Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates”, *Appl Mech Rev.*, **42**(1), 1–13.
- Noor, AK., Burton, WS. (1989), “Stress and free vibration analysis of multilayer composite plates”, *Compos Struct.*, **11**, 183–204.
- Okamura, H. (1991), “State of the art of material design projects for severe service applications”, *Mater. Sci. Eng :A.*,**143** (1-2), 3-9.
- Ootao, Y., Tanigawa, Y. (1999), “Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating”, *J Therm Stresses.*, **22**(1),35–55.
- Ould Larbi, L, Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, **41**(4), 421-433.
- Pagano, NJ. (1970), “Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates”, *Journal of Composite Materials.*, **4**, 20–34
- Panc, V. (1975), “Theories of elastic plates”. *Springer.*
- Panda, SK., Katariya, PV. (2015), “Stability and free vibration behaviour of laminated composite panels under thermo-mechanical loading”, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, **1**(3), 475 - 490.
- Panda, SK., Singh, BN. (2010a), “Nonlinear free vibration analysis of thermally post-buckled composite spherical shell panel”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design.*, **6**(2), 175-188.

- Panda, SK., Singh, BN. (2010b), "Thermal post-buckling analysis of a laminated composite spherical shell panel embedded with shape memory alloy fibres using non-linear finite element method", *Proc. I, Mech, E Part C: Journal of Mechanical Engineering and Science.*, **224**(4), 757-769.
- Panda, SK., Singh, BN. (2011), "Large amplitude free vibration analysis of thermally post-buckled composite doubly curved panel using nonlinear FEM", *Finite Elements in Analysis and Design.*, **47**(4), 378 - 386.
- Panda, SK., Singh, BN. (2013a), "Large Amplitude Free Vibration Analysis of Thermally Post buckled Composite Doubly Curved Panel Embedded with SMA fibres", *Nonlinear Dynamics.*, **74**(1), 395-418.
- Panda, SK., Singh, BN. (2013b), "Thermal Postbuckling behavior of laminated composite spherical shell panel using NFEM", *Mechanics Based Design of Structures and Machines.*, **41**(4), 468-488.
- Panda, SK., Singh, BN. (2013c), "Nonlinear finite element analysis of thermal post-buckling vibration of laminated composite shell panel embedded with SMA fibre", *Aerospace Science and Technology.*, **29**(1), 47-57.
- Prakash, T., Singha, MK., Ganapathi, M. (2009), " Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates", *Comput Mech.*, **43**(3), 341–350.
- Praveen, GN and Reddy, JN. (1998), "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates", *Int J Solids Struct.*, **35**(33), 4457–4476.
- Rajanna, T., Banerjee, S., Desai, Y.M., Prabhakara, D.L. (2016), "Vibration and buckling analyses of laminated panels with and without cutouts under compressive and tensile edge loads", *Steel and Composite Structures*, **21**(1), 37-55.
- Reddy, JN. (1979), "Free vibration of antisymmetric angle ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method", *J Sound Vib.*, **4**, 565–576.
- Reddy, JN. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J Appl Mech.*, **51**(4), 745–752.
- Reddy, JN. (1990), "A review of refined theories of laminated composite plates", *Shock Vib Dig.*, **22**(7), 3–17.
- Reddy, JN. (1993), "An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates", *Compos Struct.*, **25**(1–4), 21–35.

- Reddy, JN. (1997), “Mechanics of laminated composite plate: theory and analysis”, *New York: CRC Press*.
- Reddy, JN. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **47**, 663-684.
- Reddy, JN. (2004), “Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis”, *CRC Press*.
- Reddy, JN. and Chin.C. D. (1998), “Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates”, *J. Therm. Stresses.*, **21**, 593–626.
- Reddy, JN., Wang. C.M., Kitipornchai. S.(1999), “Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates”, *Eur J Mech A Solids.*, **18**(2),185–199.
- Reddy, KJ., Vijayakumar, K., Nagaraja, KS. (1991), “New approach for the analysis of flexure of symmetric laminates”, *AIAA Journal.*, **29**(11),1960–1966.
- Reissner, E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J Appl Mech-T ASME.*, **12**(2), 69–77.
- Reissner, E. (1947), “On bending of elastic plates”, *Q Appl Math.*, **5**(1),55–68.
- Reissner, E. (1975), “On Transverse Bending of Plates, Including the Effects of Transverse Shear Deformation”, *International Journal of Solids and Structures.*, **11**, 569–573.
- Reissner, E., Stavsky, Y. (1961), “Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate”, *J. Appl. Mech.*, **28**, 402,408.
- Ren, J G.(1986), “A new theory of laminated plate” ,*Composite Science and Technology*, **26**, 225-239.
- Ruan, M., Wang, ZM. (2014), “Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material”, *J Vib Control*. <http://dx.doi.org/10.1177/1077546314563967>.
- Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, MSA., Adda Bedia, EA. (2014), “A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Steel and Composite Structures.*, **17**(3), 321-338.
- Saidi, AR., Jomehzadeh, E.(2009), “On the analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported”, *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci.*, **223**(9), 2009-2016.

Saidi, H., Houari, MSA., Tounsi, A. and Adda Bedia, EA. (2013), “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **15**(2), 221-245.

Saidi, H., Tounsi, A., and Bousahla, A.A. (2016), “A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations”, *Geomechanics and Engineering.*, **11**(2), 289-307.

Sallai, B., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, EA. (2015), “Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(4), 829-841.

Samsam, Shariat, BA., Eslami, MR.(2007), “Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Compos Struct.*, **78**(3),433–439.

Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., Majid, DLA. (2011), “Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory”, *Journal of Mechanical Science and Technology.*, **25** (9), 2195 – 2209.

Shariat, BAS., Eslami, MR. (2005), “Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates”, *Journal of Thermal Stresses.*, **28**, 1183–1198.

Shimpi, RP. (2002), “Refined plate theory and its variants ”, *AIAA Journal.*, **40**(1),137–146.

Shimpi, RP., Patel, HG. (2006), “Free vibrations of plate using two variable refined plate theory”, *J Sound Vib.*, **296**(4),979–999.

Shimpi, RP., Patel, HG., Arya, H.(2007), “New first-order shear deformation plate theories” ,*J Appl Mech.*, **74**(3),523–533.

Singha, MK., Prakash, T., Ganapathi, M. (2011), “Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load”, *Finite Elem Anal Des.*,**47**(4),453–460.

Sobhy, M.(2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos Struct.*, **99**,76–87.

Sohn, KJ., Kim, JH. (2008), “Structural stability of functionally graded panels subjected to aero thermal loads ”, *Composite Structures.*, **82**, 317–325.

Soldatos, KP. (1992), “Atransverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates”, *Acta Mech.*, **94**(3),195–220.

Srinivas, S., Joga Rao, CV., Rao, AK.(1970), “An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates”, *Journal of Sound and Vibration*.,**12**(2),187-199.

Srinivas, S., Rao, AK.(1970), “Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates” , *International Journal of Solids and Structures* .,**6**,1463–1481.

Stein, M. (1986), “Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing”, *AIAA J.*, **24**(9),1537–1344.

Sun, CT., Whitney, JM. (1973), “Theories for the dynamic response of laminated plates”, *AIAA J.*, **11**, 178–183.

Swaminathan, K., Naveenkumar, DT. (2014), “Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions”, *European Journal of Mechanics A/Solids.*, **47**, 349 – 361.

Swaminathan, K., Naveenkumar, DT., Zenkour, AM., Carrera, E. (2015), “Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art review”, *Compos Struct*,**120**,10–31.

Tafla, A. (2007), “Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches” , *Thèse de doctorat de l’université de Reims Champagne-Ardenne*.

Tagrara, SH., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M. and Tounsi, A. (2015), “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(5), 1259-1277.

Tebboune, W., Benrahou, KH., Houari, MSA. and Tounsi, A. (2015), “Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 443-465.

Thai, H.T. and Choi, D.H. (2013a), “A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, **101**, 332- 340.

Thai, H.T. and Choi, D.H., (2013b), “A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Compos. Struct.*, **106**, 754-763.

Thai, HT. et Kim, SE. (2010), “Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory“, *International Journal of Mechanical Sciences.*, **52**,626–633.

- Thai, HT. et Kim, SE. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.
- Thai, HT., Choi, DH.(2014), "Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates", *Compos B Eng.*, **56**,705–716.
- Thai, HT., Kim, SE.(2013), "Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation", *Int J Mech Sci.*, **75**,34–44.
- Thai, HT., Nguyen TK., Vo, T. (2014), "Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory", *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, **45**, 211-225.
- Thai, HT., Uy, B.(2013), "Levy solution for buckling analysis of functionally graded plates based on a refined plate theory", *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci.*, **227**(12),2649–2664.
- Thai, HT., Vo, TP.(2013), "A new sinusoidal shear deformation theory for bending buckling, and vibration of functionally graded plates", *Appl Math Model .*, **37**(5),3269–3281.
- Timoshenko, SP., Gere, JM. (1961), "Theory of elastic stability", *New York: McGraw-Hill*.
- Timoshenko, SP., Woinowsky-Krieger, S. (1959), "Theory of plates and shells", *New York: McGraw Hill*.
- Tounsi, A. (2006), "cours sur « théorie d'élasticité : Application aux matériaux anisotropes »", *laboratoire des Matériaux et Hydrologie université de Sidi Bel Abbés*.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. (2016), " A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **60**(4), 547-565.
- Tounsi, A., Houari, MSA., Benyoucef, S. and Adda Bedia, EA. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.
- Touratier, M. (1991), "An efficient standard plate theory". *Engng Sci.*, **29**(8),901-916.
- Tran, LV., Thai, CH., Nguyen-Xuan, H.(2013), "An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Finite Elem Anal Des .*, **73**,65–76.
- Uymaz, B., Aydogdu, M.(2007), "Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions", *J Reinf Plast Compos .*,**26**(18),1847–1863.

Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez-Estrada, OA., Rabczuk, T., Bui, TQ., Bordas, SPA.(2013), “NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: Static bending, vibration, buckling and flutter”, *Compos Struct.*, **99**,309–326.

Vel, SS. and Batra, RC. (2002), “Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates”, *Int. J. Solid. Struct.*, **40**, 7181-7196.

Vel, SS. and Batra, RC. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound. Vib.*, **272**, 703-730.

Vel, SS., Batra, RC.(2003), “Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates”, *Int J Solids Struct* .,**40**(25),7181–7196.

Viswanathan, KK., Javed, S., Abdul Aziz, Z. (2013), “Free vibration of symmetric angle-ply layered conical shell frusta of variable thickness under shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics.*, **45**(2), 259 – 275.

Wang, CM., Lim, GT., Reddy, JN., Lee, KH. (2001), “Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories”, *Eng Struct.*,**23**(7) 838–849.

Whitney, JM, Pagano, NJ. (1970), “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, *J Appl Mech-T ASME.*, **37**(4), 1031–1036.

Whitney, JM. (1969), “The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates”, *J Compos Mater.*, **3**, 534–547.

Whitney, JM. (1973), “Shear correction factors for orthotropic laminates under static load”, *Journal of Applied Mechanics.*, **40**,302–304.

Wittrick, W.H. (1987), “Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin’s plate theory” , *Inc. J. Solids Strwtures.*, **23**(4),441–464.

Woo, J., Meguid, SA. (2001), “Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow Shells” ,*Int J Solids Struct*,**38**(42),7409–7421.

Woo, J., Meguid, SA., Ong, LS. (2006), “Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates”, *J Sound Vib.*,**289**(3),595–611.

Xiang, S, Jin, Y.X, Bi, Z.Y, Jiang, S.X, Yang, M.S. (2011), “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates”, *Compos Struct.*, **93**(11), 2826–2832.

- Yaghoobi, H., Fereidoon, A.(2014), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: an assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory”, *Compos B Eng.*,**62**,54–64.
- Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013), “Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions”, *J Therm Stresses.*, **36**(9),869–894.
- Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A., Khoshnevisrad, P. (2014), “Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loadings using VIM”, *Steel and Composite Structures.*, **17**(5), 753-776.
- Yaghoobi, H., Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach”, *Meccanica.*,**48**(8),2019–2035.
- Yan, P.C., Norris, C.H., Stavsky, Y. (1966), “Elastic wave propagation in heterogeneous plates”, *Int J Solids Struct.*, **2**, 665–684.
- Yang, J., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. (2005), “Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates”, *Compos. Sci. Tech.*, **65**, 1165-1175.
- Yanga, J., Shen, HS. (2003), “Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads”, *Int J Non-Linear Mech.*, **38**(4), 467–482.
- Ying, Ji., Lü, Chao-feng., Lim, C. W. (2009), “3D thermoelasticity solutions for functionally graded thick plates”, *Journal of Zhejiang University-Science A.*,**10**(3), 327–336.
- Yousefitabar, M., Matapouri, MKh. (2016), “Thermally induced buckling of thin annular FGM plates”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, doi 10.1007/s40430-016-0555-1.
- Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), “A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **54**(4), 693-710.
- Zenkour, AM. (2005), “A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 2 buckling and free vibration”, *Int J Solids Struct.*, **42**(18–19),5243–5258.
- Zenkour, AM.(2007), “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate”, *Arch Appl Mech.*, **77**(4),197–214.

Zhang, DG., Zhou, YH. (2008), “A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface” *Computational Materials Science.*, **44**, 716-720.

Zhang, LW., Zhu, P., Liew, KM. (2014), “Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method” , *Compos Struct.*,**108**,472–492.

Zhong, Z. and Yu, T. (2007), “Analytical solution of a cantilever functionally graded beam”, *Compos. Sci. Technol.*, **67**(3-4), 481-488.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **34**, 24-34.

Annexe

Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory

Fouad Bourada ^{*1}, Khaled Amara ^{2,3} and Abdelouahed Tounsi ²

¹ *Laboratoire des Structures Intelligentes, Département de Génie Civil, Institut des Sciences et de la Technologie, Centre Universitaire de Ain Témouchent, Algeria*

² *Material and Hydrology Laboratory, University of Sidi Bel Abbès, Faculty of Technology, Civil Engineering Department, Algeria*

³ *Département de Génie Civil, Institut des Sciences et de la Technologie, Centre Universitaire de Ain Témouchent, Algeria*

(Received April 04, 2016, Revised August 08, 2016, Accepted August 10, 2016)

Abstract. The current research presents a buckling analysis of isotropic and orthotropic plates by proposing a new four variable refined plate theory. Contrary to the existing higher order shear deformation theories (HSDT) and the first shear deformation theory (FSDT), the proposed model uses a new displacement field which incorporates undetermined integral terms and involves only four variables. The governing equations for buckling analysis are deduced by utilizing the principle of virtual works. The analytical solution of a simply supported rectangular plate under the axial loading has been determined via the Navier method. Numerical investigations are performed by using the proposed model and the obtained results are compared with CPT solutions, FSDT solutions, and the existing exact solutions in the literature. It can be concluded that the developed four variable refined plate theory, which does not use shear correction coefficient, is not only simple but also comparable to the FSDT.

Keywords: refined plate theory; buckling analysis; isotropic plate; orthotropic plate

1. Introduction

The stability of rectangular plates has been a topic of investigation in engineering structures for more than a century (Matsunaga 2009, Bachir Bouiadja *et al.* 2013, Altunsaray and Bayer 2014, Afsharmanesh *et al.* 2014, Bakora and Tounsi 2015, Bouguenina *et al.* 2015, Nguyen *et al.* 2015, Tagrara *et al.* 2015, Tebboune *et al.* 2015, Larbi Chaht *et al.* 2015, Musa 2016, Rajanna *et al.* 2016, Boudierba *et al.* 2016, Yousefitabar and Matapouri 2016, Chikh *et al.* 2016, Eltaher *et al.* 2016). A great number of exact solutions for isotropic and orthotropic plates have been proposed, and the most known are documented in Timoshenko and Woinowsky-Krieger (1959), Timoshenko and Gere (1961), Bank and Yin (1996), Kang and Leissa (2005), Hwang and Lee (2006) and Musa (2016). In company with investigations of stability response of plate, a great number of plate models have been proposed. The simplest one is the classical plate theory (CPT) which ignores the transverse shear influences. This model is not suitable for the thick and orthotropic plate with important degree of modulus ratio. To avoid this limitation, the shear deformation theory which

*Corresponding author, Professor, E-mail: bouradafouad@yahoo.fr

considers the transverse shear influences is introduced by several researchers. Indeed, the FSDT (first shear deformation theory) and HSDT (high shear deformation theory) were proposed as improvement of the CPT. The FSDT is based on Reissner (1945) and Mindlin (1951) and consider the transverse shear influences by the way of linear distribution of the displacements across the thickness. Many investigations have been presented in different scientific articles by employing FSDT for the free vibration behavior of composite plates (Yan *et al.* 1966, Whitney 1969, Whitney and Pagano 1970, Ambartsumyan 1970, Sun and Whitney 1973, Bert and Chen 1978, Reddy 1979, Noor and Burton 1989a, b, Kant and Swaminathan 2001). Kant and Swaminathan (2001) extended the FSDT presented by Whitney and Pagano (1970) for the dynamic response of laminated composite and sandwich plates. Sadoune *et al.* (2014) developed a novel FSDT for mechanical behavior of laminated plates. Meksi *et al.* (2015) proposed a new simple FSDT with only four variables for static and vibration analysis of functionally graded plates. Bellifa *et al.* (2016) used a new FSDT for bending and dynamic analysis of functionally graded plates. Hadji *et al.* (2016) analyzed a FG beam using a new first-order shear deformation theory. Yaghoobi *et al.* (2014) proposed an analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loadings using VIM. Bourada *et al.* (2012) presented a new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of FG sandwich plates. It is noted that various HSDTs are also used (Mahapatra *et al.* 2016a, b, Katariya and Panda 2016, Mehar and Panda 2016, Panda and Katariya 2015, Kar and Panda 2014, Panda and Singh 2013a, b, c, 2010a, b, 2011) to investigate the geometrical deformation of composite structures under the large geometrical distortion. Tounsi and his co-workers (Benachour *et al.* 2011, Houari *et al.* 2013, Tounsi *et al.* 2013, Ould Larbi *et al.* 2013, Saidi *et al.* 2013, Bousahla *et al.* 2014, Draiche *et al.* 2014, Fekrar *et al.* 2014, Hadji *et al.* 2014, Khalfi *et al.* 2014, Zidi *et al.* 2014, Klouche Djedid *et al.* 2014, Ait Yahia *et al.* 2015, Zemri *et al.* 2015, Sallai *et al.* 2015, Bennai *et al.* 2015, Bouchafa *et al.* 2015, Meradjah *et al.* 2015, Merazi *et al.* 2015, Al-Basyouni *et al.* 2015, Attia *et al.* 2015, Ait Atmane *et al.* 2015, Belkorissat *et al.* 2015, Boukhari *et al.* 2016, Bounouara *et al.* 2016, Mouaici *et al.* 2016, Beldjelili *et al.* 2016) proposed a new HSDTs to investigate the mechanical behavior of composite structures. Recently, Mantari and Granados (2015) proposed a new FSDT with four variables in which integral terms in the plate kinematics are utilized. Since FSDTs do not respect equilibrium conditions at the top and bottom surfaces of the plate, shear correction coefficients are needed to correct the unrealistic distribution of the shear strain/stress within the thickness. For these reasons, many HSDTs have been proposed to improve the limitations of FSDT such as Levinson (1980), Bhimaraddi and Stevens (1984), Reddy (1984), Ren (1986), Kant and Pandya (1988), and Mohan *et al.* (1994). A good review of these models for the investigation of laminated plates is found in (Noor and Burton 1989a, b, Reddy 1990 and 1993, Mallikarjuna and Kant 1993, Dahsin and Xiaoyu 1996). Reddy (1984) proposed a HSDT with cubic distributions for axial displacements. Based on Reddy's theory, Xiang *et al.* (2011) developed a n-order shear deformation theory. Kant and Pandya (1988), Mallikarjuna and Kant (1989) and Kant and Khare (1997) employed also HSDTs with cubic distributions for axial displacements as in the article by Reddy (1984). Recently, a new class of HSDTs is proposed by many researchers such as Shahrjerdi *et al.* (2011), Boudierba *et al.* (2013), Viswanathan *et al.* (2013), Ait Amar Meziane *et al.* (2014), Belabed *et al.* (2014), Ahmed (2014), Swaminathan and Naveenkumar (2014), Nedri *et al.* (2014), Bourada *et al.* (2015), Hamidi *et al.* (2015), Kar *et al.* (2015), Hebali *et al.* (2014), Mahi *et al.* (2015), Saidi *et al.* (2016), Bennoun *et al.* (2016) and Tounsi *et al.* (2016).

In the present research, the buckling analysis of isotropic and orthotropic plates under the in-

plane loading is investigated by utilizing a novel HSDT with four variables in which instead of derivative terms in the displacement field, integral terms are employed. The displacement field presented by Mantari and Granados (2015) is improved by considering higher-order distributions of in-plane displacements within the plate thickness. By employing the Navier procedure, the closed-form solutions have been determined. Numerical results considering side-to-thickness ratio and modulus ratio are carried out to illustrate the validity of the present model in computing the critical buckling load of isotropic and orthotropic plates. It can be concluded that the present model, which does not use shear correction coefficient, is not only simple but also comparable to the FSDT.

2. Theoretical formulation

2.1 Kinematics and strains

In this research work, further simplifying supposition are considered to the conventional HSDT so that the number of variables is diminished. The kinematic of the conventional HSDT is expressed by

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \tag{1a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \tag{1b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{1c}$$

where u_0 ; v_0 ; w_0 , φ_x , φ_y are five unknown displacements of the mid-plane of the plate, $f(z)$ denotes shape function defining the distribution of the transverse shear strains and stresses within the thickness. By supposing that $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$ and $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$, the displacement field of the current theory model can be found in a simpler form as

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \tag{2a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \tag{2b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \tag{2c}$$

In this investigation, the proposed higher-order shear deformation plate theory is determined by considering

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \tag{3}$$

It can be observed that the kinematic in Eq. (2) incorporates only four variables (u_0 , v_0 , w_0 and θ). The nonzero strains associated with the kinematic in Eq. (2) are

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

where

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix},$$

and

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (5b)$$

The integrals used in the above expressions shall be resolved by a Navier type method and can be expressed as follows

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (6)$$

where the coefficients A' and B' are adopted according to the type of solution employed, in this case via Navier. Hence, A' and B' are defined as follows

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (7)$$

where α and β are defined in expression (20).

2.2 Constitutive equations

For elastic and orthotropic plate, the constitutive relations can be expressed as

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

where Q_{ij} present the plane stress reduced elastic constants in the material axes of the plate, and are expressed as

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, & Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \tag{9}$$

where E_1, E_2 are Young’s modulus, G_{12}, G_{23}, G_{13} are shear modulus, and ν_{12}, ν_{21} are Poisson’s ratios. For the isotropic plate, these above material characteristics reduce to $E_1 = E_2 = E, G_{12} = G_{23} = G_{13} = G, \nu_{12} = \nu_{21} = \nu$. The subscripts 1, 2, 3 correspond to x, y, z directions of Cartesian coordinate system, respectively.

2.3 Governing equations

The principle of virtual works is employed herein to derive the governing equations. The principle can be expressed in analytical form as

$$\delta U + \delta V = 0 \tag{10}$$

where δU is the variation of strain energy; and δV is the variation of the external work done by external load applied to the plate.

The variation of strain energy of the plate is given by

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

where A is the top surface and the stress resultants $N, M,$ and S are expressed by

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{and} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \tag{12}$$

The variation of the external work can be expressed as

$$\delta V = - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \tag{13}$$

where (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) are transverse and in-plane applied loads, respectively.

By substituting Eqs. (11) and (13) into Eq. (10), the following governing equations can be derived

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \\ \delta \theta : \quad & -M_x^s - M_y^s - (A'+B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

By substituting Eq. (4) into Eq. (8) and the subsequent results into Eq. (12), the stress resultants can be written as below

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \tag{15a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \tag{15b}$$

and stiffness components are expressed as

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)\} dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \tag{16a}$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} [g(z)]^2 dz, \quad i, j = 4, 5 \tag{16b}$$

Introducing relations (15) into Eq. (14), the governing equations can be expressed in terms of displacements ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$) and the appropriate equations take the form

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - (B_{11}d_{111}w_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0) + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s d_{122}\theta + (k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s) d_1\theta = 0, \tag{17a}$$

$$(A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 + A_{66}d_{22}v_0 + A_{22}d_{22}v_0 - ((B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 + B_{22}d_{222}w_0) + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s d_{112}\theta + (k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s) d_2\theta = 0, \tag{17b}$$

$$(B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0) + ((B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0) - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (k_1D_{11}^s + k_2D_{12}^s) d_{11}\theta + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s d_{1122}\theta + (k_1D_{12}^s + k_2D_{22}^s) d_{22}\theta + N_x^0 d_{11}w_0 + 2N_{xy}^0 d_{12}w_0 + N_y^0 d_{22}w_0 = 0 \tag{17c}$$

$$-((k_1A' + k_2B')B_{66}^s d_{122}u_0 + (k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s) d_1u_0) - ((k_1A' + k_2B')B_{66}^s d_{112}v_0 + (k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s) d_2v_0) + (D_{11}^s + D_{12}^s) d_{11}w_0 + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s d_{1122}w_0 + (D_{12}^s + D_{22}^s) d_{22}w_0 - k_1^2 H_{11}^s \theta - k_2^2 H_{22}^s \theta - 2k_1k_2 H_{12}^s \theta - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s d_{1122}\theta + A_{44}^s (k_2B')^2 d_{22}\theta + A_{55}^s (k_1A')^2 d_{11}\theta = 0 \tag{17d}$$

where d_{ij}, d_{ijl} and d_{ijlm} are the following differential operators

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \tag{18}$$

2.4 Closed-form solution

The critical buckling loads of simply supported, orthotropic, rectangular plate will be computed in this work by employing the Navier method. Considering that the plate is subjected to in-plane compressive loads of form: $N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}, N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}, N_{xy}^0 = 0$ (here γ_1 and γ_2 are non-dimensional load parameters). The following displacement functions are chosen to automatically satisfy the boundary conditions

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{19}$$

with

$$\alpha = m\pi / a \quad \text{and} \quad \beta = n\pi / b \tag{20}$$

and U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} are arbitrary parameters to be determined. Substituting Eq. (19) into Eq. (17), the closed-form solution of buckling load can be determined from

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}+k & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), & S_{12} &= -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}), & S_{13} &= \alpha (B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2 B_{66} \beta^2), \\ S_{14} &= \alpha (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2), \\ S_{22} &= -(A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2), & S_{23} &= \beta (B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\ S_{24} &= \beta (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2), \\ S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4), \\ S_{34} &= -(k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s)\alpha^2 + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - (k_2 D_{22}^s + k_1 D_{12}^s)\beta^2, \\ S_{44} &= -k_1 (k_1 H_{11}^s + k_2 H_{12}^s) - (k_1 A' + k_2 B')^2 (H_{66}^s \alpha^2 \beta^2) - k_2 (k_1 H_{12}^s + k_2 H_{22}^s) \\ &\quad - (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2 \\ k &= N_{cr} (\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2) \end{aligned} \quad (22)$$

The geometrical instability has been taken care in the present analysis by considering the determinant of the coefficient matrix in Eq. (21) to be equal zero. Indeed, for nontrivial solution, the determinant of the coefficient matrix in Eq. (21) must be zero. For each choice of m and n , there is a corresponding unique value of N_{cr} . The critical buckling load is the smallest value of N_{cr} (m, n).

By applying the condensation approach to eliminate the in-plane displacements U_{mn} and V_{mn} , Eq. (21) can be rewritten as

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{33} + k & \bar{S}_{34} \\ \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{S}_{33} &= S_{33} - \frac{S_{13}(S_{13}S_{22} - S_{12}S_{23}) - S_{23}(S_{11}S_{23} - S_{12}S_{13})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ \bar{S}_{34} &= S_{34} - \frac{S_{14}(S_{13}S_{22} - S_{12}S_{23}) - S_{24}(S_{11}S_{23} - S_{12}S_{13})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{43} &= S_{34} - \frac{S_{13}(S_{14}S_{22} - S_{12}S_{24}) - S_{23}(S_{11}S_{24} - S_{12}S_{14})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ \bar{S}_{44} &= S_{44} - \frac{S_{14}(S_{14}S_{22} - S_{12}S_{24}) - S_{24}(S_{11}S_{24} - S_{12}S_{14})}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \end{aligned} \tag{24}$$

The system of homogeneous Eq. (23) has a nontrivial solution only for discrete values of the buckling load. For a nontrivial solution, the determinant of the coefficients (W_{mn}, X_{mn}) must equal zero

$$\begin{vmatrix} \bar{S}_{33} + k & \bar{S}_{34} \\ \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

The resulting equation may be solved for the buckling load. This gives the following expression for buckling load

$$k = \frac{\bar{S}_{34}\bar{S}_{43} - \bar{S}_{33}\bar{S}_{44}}{\bar{S}_{44}} \tag{26}$$

By employing the Eq. (25), the following expression for critical buckling load is determined

$$N_{cr} = \frac{1}{(\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2)} \frac{\bar{S}_{34}\bar{S}_{43} - \bar{S}_{33}\bar{S}_{44}}{\bar{S}_{44}} \tag{27}$$

3. Numerical results and discussions

In this section the accuracy of the proposed HSDT which uses a kinematic with only four variables, is assessed. For this end, a simply supported rectangular plate under loading conditions, as presented in Fig. 1, is examined to demonstrate the accuracy of the current formulation in investigating the buckling response of the plate. For proposed examples, the following engineering constants are employed (Reddy 1997)

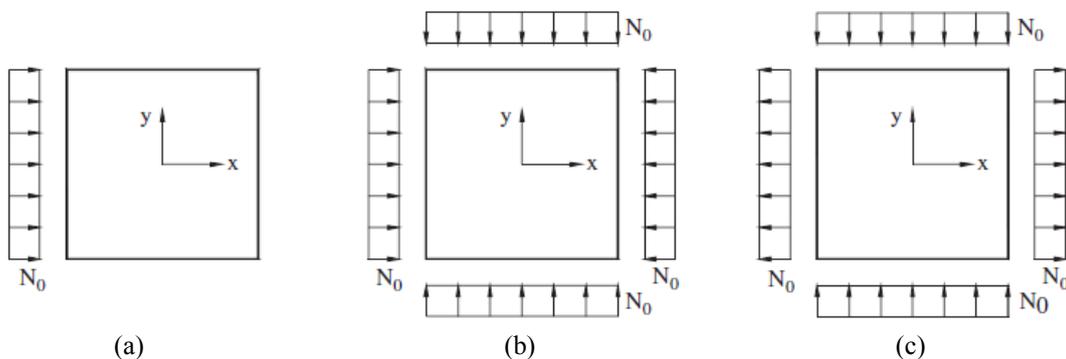


Fig. 1 The loading conditions of square plate for (a) uniaxial compression; (b) biaxial compression; and (c) tension in the x direction and compression in the y direction

$$E_1/E_2 \text{ varied} \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \quad G_{23}/E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (28)$$

For convenience, the following non-dimensional buckling load is utilized

$$\bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{E_2 h^3} \quad (29)$$

where a is the length of the square plate and h is the thickness of the plate.

Table 1 Comparison of non-dimensional critical buckling load of square plates under uniaxial compression

a/h	Theories	Isotropic $\nu = 0.3$	Orthotropic		
			$E_1/E_2 = 10$	$E_1/E_2 = 25$	$E_1/E_2 = 40$
5	Present	2.9512	6.3478	9.1039	10.5785
	RPT ^(*)	2.9512	6.3478	9.1039	10.5785
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	2.8200	5.5679	7.1122	7.7411
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	2.9498	6.1804	8.2199	9.1085
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.0432	6.6715	9.1841	10.3463
10	Present	3.4224	9.3732	16.7719	22.2581
	RPT ^(*)	3.4224	9.3732	16.7719	22.2581
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.3772	8.8988	14.7011	18.3575
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.4222	9.2733	15.8736	20.3044
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.4530	9.5415	16.7699	21.8602
20	Present	3.5650	10.6534	21.3479	31.0685
	RPT ^(*)	3.5650	10.6534	21.3479	31.0685
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.5526	10.4926	20.4034	28.85
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.5650	10.6199	20.9528	30.0139
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.5733	10.7066	21.3363	30.8451
50	Present	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	RPT ^(*)	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.6051	11.0497	22.9366	34.4886
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.6071	11.0721	23.0461	34.7487
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.6085	11.0871	23.1197	34.9244
100	Present	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	RPT ^(*)	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.6127	11.1343	23.3527	35.4852
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.6132	11.1400	23.3810	35.5538
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.6135	11.1438	23.3999	35.5996

* Taken from Ref (Kim *et al.* 2009)

Table 2 Comparison of non-dimensional critical buckling load of square plates under biaxial compression

a/h	Theories	Isotropic $\nu = 0.3$	Orthotropic		
			$E_1/E_2 = 10$	$E_1/E_2 = 25$	$E_1/E_2 = 40$
5	Present	1.4756	2.8549 ^a	3.3309 ^a	3.3800 ^a
	RPT ^(*)	1.4756	2.8549 ^a	3.3309 ^a	3.3800 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.4100	2.5042 ^a	2.7332 ^a	2.8303 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.4749	2.8319 ^a	3.1422 ^a	3.2822 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.5216	3.1027 ^a	3.4933 ^a	3.6793 ^a
10	Present	1.7112	4.6718 ^a	6.0646 ^a	7.2536 ^a
	RPT ^(*)	1.7112	4.6718 ^a	6.0646 ^a	7.2536 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.6886	4.4259	5.4351 ^a	6.0797 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.7111	4.6367	5.8370 ^a	6.6325 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.7265	4.7708	6.1425 ^a	7.0690 ^a
20	Present	1.7825	5.3267	7.6643 ^a	9.6614 ^a
	RPT ^(*)	1.7825	5.3267	7.6643 ^a	9.6614 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.7763	5.2463	7.3701 ^a	8.9895 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.7825	5.3100	7.5546 ^a	9.3049 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.7866	5.3533	7.6834 ^a	9.5297 ^a
50	Present	1.8036	5.5390	8.2784 ^a	10.6576 ^a
	RPT ^(*)	1.8036	5.5390	8.2784 ^a	10.6576 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.8025	5.5249	8.2199 ^a	10.5111 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.8036	5.5361	8.2566 ^a	10.5810 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.8042	5.5436	8.2812 ^a	10.6282 ^a
100	Present	1.8066	5.5707	8.3744 ^a	10.8172 ^a
	RPT ^(*)	1.8066	5.5707	8.3744 ^a	10.8172 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.8063	5.5672	8.3593 ^a	10.7788 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.8066	5.5700	8.3687 ^a	10.7972 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.8068	5.5719	8.3751 ^a	10.8095 ^a

* Taken from Ref (Kim *et al.* 2009)

^a Mode for plate is $(m, n) = (1, 2)$.

Example 1: Table 1 gives the values of the non-dimensional buckling loads \bar{N} of isotropic and orthotropic square plates subjected to uniaxial compression for various values of thickness ratio a/h and modulus ratio E_1/E_2 . The obtained results are compared with the data reported by Kim *et al.* (2009) based on FSDT and refined plate theory (RPT). Many shear correction coefficients ($k_s = 2/3$, $k_s = 5/6$ and $k_s = 1$) are employed for the FSDT (Kim *et al.* 2009) in comparison with the present model. An excellent agreement is proved for all types ranging from thin to very thick plates.

Example 2: In Table 2 we found the values of the non-dimensional buckling loads \bar{N} of isotropic and orthotropic square plates under biaxial compression for various values of thickness

ratio a/h and modulus ratio E_1/E_2 . Again, the computed values are compared with those given by Kim *et al.* (2009) based on FSDT and RPT. It is remarked that there is an excellent agreement between the values computed by the present model and RPT (Kim *et al.* 2009) for all values of thickness ratio a/h and modulus ratio E_1/E_2 .

Example 3: This example is performed for isotropic and orthotropic square plates subjected to tension in the x direction and compression in the y direction. In Table 3 the comparison of non-dimensional buckling loads \bar{N} computed via present model with those provided by Kim *et al.*

Table 3 Comparison of non-dimensional critical buckling load of square plates subjected to tension in the x direction and compression in the y direction

a/h	Theories	Isotropic $\nu = 0.3$	Orthotropic		
			$E_1/E_2 = 10$	$E_1/E_2 = 25$	$E_1/E_2 = 40$
5	Present	4.8274 ^a	4.0258 ^b	4.1044 ^c	4.1525 ^c
	RPT ^(*)	4.8274 ^a	4.0258 ^b	4.1044 ^c	4.1525 ^c
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	4.4175 ^a	3.2849 ^d	3.3001 ^e	3.3053 ^e
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	4.8158 ^a	3.9241 ^c	3.9794 ^c	4.0075 ^d
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	5.1237 ^a	4.4488 ^b	4.5691 ^c	4.6073 ^c
10	Present	6.6024 ^a	7.7863	8.5471 ^b	9.1638 ^b
	RPT ^(*)	6.6024 ^a	7.7863	8.5471 ^b	9.1638 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	6.4032 ^a	7.2656	7.7820 ^b	8.1208 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	6.6010 ^a	7.7748	8.4774 ^b	8.9039 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	6.7398 ^a	8.0651	9.0153 ^b	9.5197 ^b
20	Present	7.2754 ^a	9.2811	11.6347 ^b	12.8031 ^b
	RPT ^(*)	7.2754 ^a	9.2811	11.6347 ^b	12.8031 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.2139 ^a	9.1310	11.2544 ^b	12.1990 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.2753 ^a	9.2782	11.6015 ^b	12.6339 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.3168 ^a	9.3790	11.8453 ^b	12.9428 ^b
50	Present	7.4895 ^a	9.8101	12.9531 ^b	14.4177 ^b
	RPT ^(*)	7.4895 ^a	9.8101	12.9531 ^b	14.4177 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.4790 ^a	9.7830	12.8751 ^b	14.2839 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.4895 ^a	9.8097	12.9463 ^b	14.3789 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.4965 ^a	9.8275	12.9942 ^b	14.4430 ^b
100	Present	7.5211 ^a	9.8907 ^a	13.1666 ^b	14.6827 ^b
	RPT ^(*)	7.5211 ^a	9.8907 ^a	13.1666 ^b	14.6827 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.5185 ^a	9.8838 ^a	13.1643 ^b	14.6474 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.5211 ^a	9.8906 ^a	13.1648 ^b	14.6724 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.5229 ^a	9.8951 ^a	13.1772 ^b	14.6891 ^b

* Taken from Ref (Kim *et al.* 2009)

^a Mode for plate is $(m, n) = (1, 2)$; ^b Mode for plate is $(m, n) = (1, 3)$; ^c Mode for plate is $(m, n) = (1, 4)$

^d Mode for plate is $(m, n) = (1, 5)$; ^e Mode for plate is $(m, n) = (1, 6)$.

(2009) based on FSDT and RPT is presented. It can be seen that there is an excellent agreement for a wide range of values of thickness ratio and modulus ratio.

Fig. 2 demonstrates the effect of thickness and modulus ratios on the non-dimensional critical buckling load \bar{N} of square plate subjected to uniaxial compression. It is observed that the present novel four variable refined plate theory and RPT predict almost the same data, and CPT over-estimates the buckling loads of plate due to neglecting transverse shear deformation influences. The difference between CPT and shear deformation models diminishes when the side-to-thickness ratio a/h increases. As well as the plate becomes more orthotropic, the difference between the present theory and FSDT will increase with respect to the increase of thickness ratio.

The variations of non-dimensional critical buckling load \bar{N} of square plate as a function of the modulus ratio is illustrated in Fig. 3. The considered plate is subjected to biaxial compression. The curves plotted by employing the present model are compared with the curves plotted by utilizing the CPT, FSDT and the RPT. From these results can be concluded that the resulting curves are very close to the curves plotted by using RPT and the CPT over-estimates the results when the

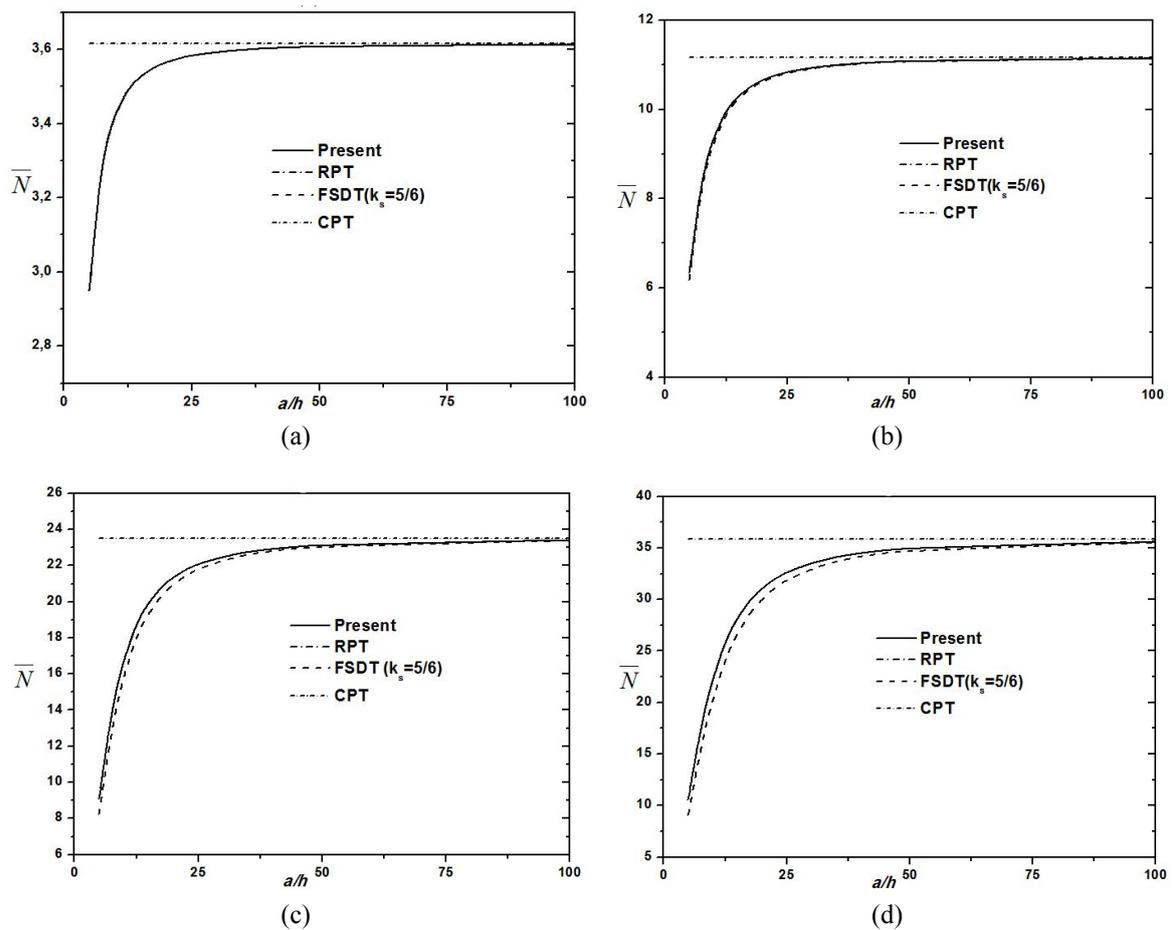


Fig. 2 The effect of side-to thickness and modulus ratios on the critical buckling load of square plate subjected to uniaxial compression: (a) isotropic; (b) $E_1 / E_2 = 10$; (c) $E_1 / E_2 = 25$; and (d) $E_1 / E_2 = 40$

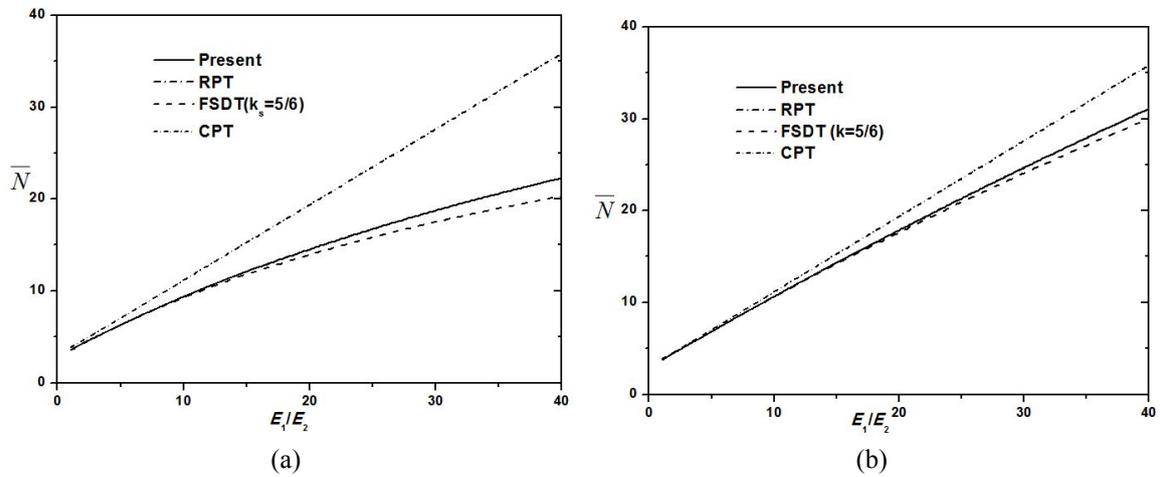


Fig. 3 The effect of modulus ratio on the critical buckling load of square plate subjected to uniaxial compression: (a) $a = 10 h$; and (b) $a = 20 h$

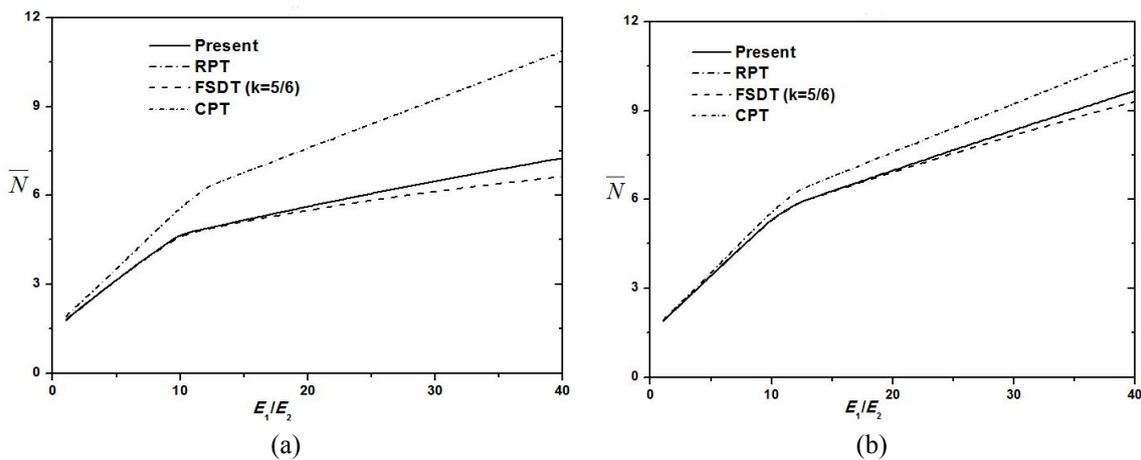


Fig. 4 The effect of modulus ratio on the critical buckling load of square plate subjected to biaxial compression: (a) $a = 10 h$; and (b) $a = 20 h$

modulus ratio increases. It can be also seen that the difference between the present theory and SDT will increase with increasing the modulus ratio.

The effect of modulus ratio on the critical buckling load of square plate subjected to tension in the x direction and compression in the y direction is shown in Fig. 4. Again from Fig. 4 can be observed that the resulting curves are very close to the curves plotted by using RPT and the CPT over-estimates the results when the modulus ratio increases.

It can be observed from Tables 1-3 and Figs. 2-4 that the difference of critical buckling load between the present theory and FSDT depends on not only the thickness and modulus ratios, but also the in-plane loading conditions (Fig. 1).

4. Conclusions

A simplified HSDT with only four unknowns was developed for buckling analysis of isotropic and orthotropic plates. Governing equations are obtained from the principle of virtual works. Closed-form solutions are obtained for simply supported orthotropic plates. The accuracy of the developed model has been checked for the stability analysis of isotropic and orthotropic plates.

References

- Afsharmanesh, B., Ghaehri, A. and Taheri-Behrooz, F. (2014), "Buckling and vibration of laminated composite circular plate on Winkler-type foundation", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(1), 1-19.
- Ahmed, A. (2014), "Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory", *Int. J. Civil Struct. Environ.*, **4**(2), 59-64.
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16**(3), 293-318.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(2), 369-384.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **53**(6), 1143-1165.
- Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position", *Compos. Struct.*, **125**, 621-630.
- Altunsaray, E. and Bayer, I. (2014), "Buckling of symmetrically laminated quasi-isotropic thin rectangular plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(3), 305-320.
- Ambartsumyan, S.A. (1970), *Theory of Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Company, Westport, CT, USA.
- Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 187-212.
- Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013), "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **48**(4), 547-567.
- Bakora, A. and Tounsi, A. (2015), "Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **56**(1), 85-106.
- Bank, L. and Yin, J. (1996), "Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges", *Thin-Wall. Struct.*, **24**(1), 83-96.
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos.: Part B*, **60**, 274-283.
- Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, **18**(4). [In Press]
- Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(4), 1063-1081.
- Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration

- analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**(1), 265-275.
- Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, **42**(6), 1386-1394.
- Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(3), 521-546.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **23**(4), 423-431.
- Bert, C.W. and Chen, T.L.C. (1978), “Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle ply laminated rectangular plates”, *Int. J. Solid. Struct.*, **14**(6), 465-473.
- Bhimaraddi, A. and Stevens, L.K. (1984), “A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates”, *J. Appl. Mech.-T ASME*, **51**(1), 195-198.
- Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(6), 1493-1515.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **14**(1), 85-104.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **58**(3), 397-422.
- Bouguenina, O., Belakhdar, K., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), “Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(3), 679-695.
- Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14**(1), 5-33.
- Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(5), 837-859.
- Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **20**(2), 227-249.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 409-423.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Computat. Method.*, **11**(6), 1350082.
- Chikh, A., Bakora, A., Heireche, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2016), “Thermomechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(4), 617-639.
- Dahsin, L. and Xiaoyu, L. (1996), “An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis”, *J. Compos. Mater.*, **30**(14), 1539-1561.
- Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(1), 69-81.
- Eltaher, M.A., Khater, M.E., Park, S., Abdel-Rahman, E. and Yavuz, M. (2016), “On the static stability of nonlocal nanobeams using higher-order beam theories”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, **4**(1), 51-64.
- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**(4), 795-810.
- Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Bedia, E.A. (2014), “A higher order shear deformation theory for

- static and free vibration of FGM beam”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **16**(5), 507-519.
- Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Ait Amar Meziane, M., Tlidji, Y. and Adda Bedia, E.A. (2016), “Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(2), 315-325.
- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 235-253.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Eng. Mech.*, **140**(2), 374-383.
- Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. (2013), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, **76**, 102-111.
- Hwang, I. and Lee, J.S. (2006), “Buckling of orthotropic plates under various in-plane loads”, *KSCE J. Civil Eng.*, **10**(5), 349-356.
- Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(5), 135007.
- Kang, J.H. and Leissa, A.W. (2005), “Exact solutions for the buckling of rectangular plates having linearly varying in-plane loading on two opposite simply supported edges”, *Int. J. Solid. Struct.*, **42**(14), 4220-4238.
- Kant, T. (1989), “A higher-order theory for free vibration of unsymmetrically laminated composite and sandwich plates-finite element evaluations”, *Comput. Struct.*, **32**(5), 1125-1132.
- Kant, T. and Khare, R.K. (1997), “A higher-order facet quadrilateral composite shell element”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **40**(24), 4477-4499.
- Kant, T. and Pandya, B.N. (1988), “A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates”, *Compos. Struct.*, **9**(3), 215-264.
- Kant, T. and Swaminathan, K. (2001), “Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory”, *Compos. Struct.*, **53**(1), 73-85.
- Kar, V.R. and Panda, S.K. (2014), “Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **53**(4), 661-679.
- Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K. (2015), “Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(4), 1011-1033.
- Katariya, P.V. and Panda, S.K. (2016), “Thermal buckling and vibration analysis of laminated composite curved shell panel”, *Aircraft Eng. Aerosp. Technol.*, **88**(1), 97-107.
- Kim, S.E., Thai, H.T. and Lee, J. (2009), “Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory”, *Thin-Wall. Struct.*, **47**(4), 455-462.
- Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Ameer, M. (2014), “A n-order four variable refined theory for bending and free vibration of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(1), 21-46.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 425-442.
- Levinson, M. (1980), “An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”, *Mech. Res. Commun.*, **7**(6), 343-350.
- Mahapatra, T.R., Panda, S.K. and Kar, V.R. (2016a), “Geometrically nonlinear flexural analysis of hygro-thermo-elastic laminated composite doubly curved shell panel”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **12**(2), 153-171.
- Mahapatra, T.R., Panda, S.K. and Kar, V.R. (2016b), “Nonlinear hygro-thermo-elastic vibration analysis of doubly curved composite shell panel using finite element micromechanical model”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **23**(11), 1343-1359.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending

- and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, **39**(9), 2489-2508.
- Mallikarjuna, M. and Kant, T. (1993), “A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches”, *Compos. Struct.*, **23**(4), 293-312.
- Mantari, J.L. and Granados, E.V. (2015), “A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates”, *Thin-Wall. Struct.*, **90**, 150-158.
- Matsunaga, H. (2009), “Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory”, *Compos. Struct.*, **90**(1), 76-86.
- Mehar, K. and Panda, S.K. (2016), “Geometrical nonlinear free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite flat panel under uniform thermal field”, *Compos. Struct.*, **143**, 336-346.
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **53**(6), 1215-1240.
- Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(3), 793-809.
- Merazi, M., Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation plate theory for static analysis of FGM plate based on neutral surface position”, *Geomech. Eng., Int. J.*, **8**(3), 305-321.
- Mindlin, R.D. (1951), “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J. Appl. Mech.-T ASME*, **18**(1), 31-38.
- Mohan, P.R., Naganarayana, B.P. and Prathap, G. (1994), “Consistent and variationally correct finite elements for higher-order laminated plate theory”, *Compos. Struct.*, **29**(4), 445-456.
- Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), “Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory”, *Wind Struct., Int. J.*, **22**(4), 429-454.
- Musa, I.A. (2016), “Buckling of plates including effect of shear deformations: A hyperelastic formulation”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(6), 1107-1124.
- Nedri, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mech. Compos. Mater.*, **49**(6), 629-640.
- Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P. (2015), “A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 91-120.
- Noor, A.K. and Burton, W.S. (1989a), “Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates”, *Appl. Mech. Rev.*, **42**(1), 1-13.
- Noor, A.K. and Burton, W.S. (1989b), “Stress and free vibration analysis of multilayer composite plates”, *Compos. Struct.*, **11**, 183-204.
- Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, **41**(4), 421-433.
- Panda, S.K. and Katariya, P.V. (2015), “Stability and free vibration behaviour of laminated composite panels under thermo-mechanical loading”, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, **1**(3), 475-490.
- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2009), “Thermal post-buckling behaviour of laminated composite cylindrical/hyperboloidal shallow shell panel using nonlinear finite element method”, *Compos. Struct.*, **91**(3), 366-384.
- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2010a), “Nonlinear free vibration analysis of thermally post-buckled composite spherical shell panel”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **6**(2), 175-188.
- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2010b), “Thermal post-buckling analysis of a laminated composite spherical shell panel embedded with shape memory alloy fibres using non-linear finite element method”, *Proceedings of IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering and Science*, **224**(4), 757-769.

- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2011), "Large amplitude free vibration analysis of thermally post-buckled composite doubly curved panel using nonlinear FEM", *Finite Elem. Anal. Des.*, **47**(4), 378-386.
- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013a), "Large amplitude free vibration analysis of thermally post-buckled composite doubly curved panel embedded with SMA fibres", *Nonlinear Dyn.*, **74**(1), 395-418.
- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013b), "Thermal postbuckling behavior of laminated composite spherical shell panel using NFEM", *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, **41**(4), 468-488.
- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013c), "Nonlinear finite element analysis of thermal post-buckling vibration of laminated composite shell panel embedded with SMA fibre", *Aerosp. Sci. Technol.*, **29**(1), 47-57.
- Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013d), "Post-buckling analysis of laminated composite doubly curved panel embedded with SMA fibers subjected to thermal environment", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **20**(10), 842-853.
- Rajanna, T., Banerjee, S., Desai, Y.M. and Prabhakara, D.L. (2016), "Vibration and buckling analyses of laminated panels with and without cutouts under compressive and tensile edge loads", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **21**(1), 37-55.
- Reddy, J.N. (1979), "Free vibration of antisymmetric angle ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method", *J. Sound Vib.*, **66**(4), 565-576.
- Reddy, J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J. Appl. Mech.*, **51**(4), 745-752.
- Reddy, J.N. (1990), "A review of refined theories of laminated composite plates", *Shock Vib. Dig.*, **22**(7), 3-17.
- Reddy, J.N. (1993), "An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates", *Compos. Struct.*, **25**(1-4), 21-35.
- Reddy, J.N. (1997), *Mechanics of Laminated Composite Plate: Theory and Analysis*, CRC Press, New York, NY, USA.
- Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.-T ASME*, **12**(2), 69-77.
- Ren, J.G. (1986), "A new theory of laminated plate", *Compos. Sci. Technol.*, **26**(3), 225-239.
- Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(3), 321-338.
- Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **15**(2), 221-245.
- Saidi, H., Tounsi, A. and Bousahla, A.A. (2016), "A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations", *Geomech. Eng., Int. J.*, **11**(2), 289-307.
- Sallai, B., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, E.A. (2015), "Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(4), 829-841.
- Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A. (2011), "Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory", *J. Mech. Sci. Technol.*, **25**(9), 2195-2209.
- Sun, C.T. and Whitney, J.M. (1973), "Theories for the dynamic response of laminated plates", *AIAA J.*, **11**(2), 178-183.
- Swaminathan, K. and Naveenkumar, D.T. (2014), "Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions", *Eur. J. Mech. A/Solids*, **47**, 349-361.
- Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M. and Tounsi, A. (2015), "On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(5), 1259-1277.
- Tebboune, W., Benrahou, K.H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 443-465.
- Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, NY, USA.

- Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959), *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, NY, USA.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A. (2016), "A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, [In press].
- Viswanathan, K.K., Javed, S. and Abdul Aziz, Z. (2013), "Free vibration of symmetric angle-ply layered conical shell frusta of variable thickness under shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **45**(2), 259-275.
- Whitney, J.M. (1969), "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates", *J. Compos. Mater.*, **3**(3), 534-547.
- Whitney, J.M. and Pagano, N.J. (1970), "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", *J. Appl. Mech.-T ASME*, **37**(4), 1031-1036.
- Xiang, S., Jin, Y.X., Bi, Z.Y., Jiang, S.X. and Yang, M.S. (2011), "A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates", *Compos. Struct.*, **93**(11), 2826-2832.
- Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A. and Khoshnevisrad, P. (2014), "Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loadings using VIM", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **17**(5), 753-776.
- Yan, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, Y. (1966), "Elastic wave propagation in heterogeneous plates", *Int. J. Solid. Struct.*, **2**(4), 665-684.
- Yousefitabar, M. and Matapouri, M.Kh. (2016), "Thermally induced buckling of thin annular FGM plates", *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 1-12.
- Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **54**(4), 693-710.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Technol.*, **34**, 24-34.

ملخص

في هذا العمل، نعرض تحليل إلتواء الصفائح موحدة ومختلفة الخواص وذات خواص متغيرة وظيفيا باقتراح نظرية جديدة مكررة بأربع متغيرات، وخلافا لنظريات تشوه القص ذات درجة أعلى (HSDT) ونظرية تشوه القص درجة أولى (FSDT)، فإن النموذج المقترح يستخدم حقل نزوح جديد، وبإدخال مصطلحات التكامل غير المعرفة نتحصل على أربعة متغيرات فقط. يتم استخلاص معادلات التوازن لتحليل الإلتواء عن طريق استخدام مبدأ الأعمال الافتراضية. يتم تحديد الحل التحليلي لصفحة مستطيلة بدعائم بسيطة تحت تحميل محوري من خلال طريقة نافبي، يتم عرض النتائج الرقمية باستخدام النموذج المقترح، ويتم مقارنتها مع نتائج النظرية الكلاسيكية للصفائح (CPT)، نظرية تشوه القص درجة أولى (FSDT)، درجة أعلى (HSDT) والحلول الدقيقة، ويمكن الإستنتاج أن النظرية المطورة بأربعة متغيرات والتي لا تستخدم معامل تصحيح القص، ليست بسيطة فحسب، بل فعالة لدراسة توازن الصفائح.

كلمات المفتاح: نظرية الصفائح؛ تحليل الإلتواء؛ صفحة موحدة الخواص؛ صفحة مختلفة الخواص؛ صفحة متغيرة وظيفيا.

Abstract

The current research presents a buckling analysis of isotropic, orthotropic and functionally graded plates by proposing a new four variable refined plate theory. Contrary to the existing higher order shear deformation theories (HSDT) and the first shear deformation theory (FSDT), the proposed model uses a new displacement field which incorporates undetermined integral terms and involves only four variables. The governing equations for buckling analysis are deduced by utilizing the principle of virtual works. The analytical solution of a simply supported rectangular plate under the axial loading has been determined via the Navier method. Numerical investigations are performed by using the proposed model and the obtained results are compared with CPT solutions, FSDT solutions, and the existing exact solutions in the literature. It can be concluded that the developed four variable refined plate theory, which does not use shear correction coefficient, is not only simple but also comparable to the FSDT.

Keywords: Refined plate theory; Buckling analysis; Isotropic plate; Orthotropic plate; FG plate.

Résumé

Dans le présent travail, on présente une analyse du flambement des plaques isotrope, orthotrope et fonctionnellement gradué en proposant une nouvelle théorie raffinée des plaques a quatre variables. Contrairement au théorie existante de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) et la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), le modèle proposé utilise un nouveau champ de déplacement et par l'introduction des termes d'intégrale indéterminé on obtient que quatre inconnues. Les équations d'équilibre pour l'analyse de flambement sont déterminées en utilisant le principe des travaux virtuels. La solution analytique pour une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à un chargement axiale a été déterminé par l'intermédiaire de la méthode de Navier. Des résultats numériques sont présentés en utilisant le modèle proposé et des comparaisons avec la CPT, FSDT, HSDT et les solutions exactes a été effectué. Il a été conclu que la théorie développée à quatre variables et qui n'utilise pas de coefficient de correction de cisaillement, est non seulement simple mais efficace pour l'étude de la stabilité des plaques.

Mots clé : Théorie des plaques ; Analyse du flambement ; Plaque isotrope ; Plaque orthotrope ; Plaque FGM.