

N° d'ordre :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب

Universite Ain Témouchent-Belhadj Bouchaib



Faculté :Sciences et de la Technologie
Departement : Génie civil et travaux publics
Laboratoire des Structures Intelligentes



THESE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT**

Domaine : Sciences et technologie

Filière : Travaux Publics

Spécialité : voies et ouvrages d'arts

Par : Mesbah Abdelhak

Intitulé

Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis

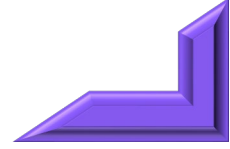
Soutenue publiquement, le 10 / 07 / 2023 , devant le jury composé de :

Nom & Prénom(s)	Grade	Qualité	Etablissement de rattachement
M. DERBAL Rachid	MCA	Président	Université d'Ain Témouchent
M. BELABED Zakaria	MCA	Rapporteur	Centre Universitaire de Naama
M. MEDJAHED Meddah Driss	MCA	Examinateur	Centre Universitaire de Naama
M. GUENANECHÉ Boucif	Pr.	Examinateur	Université d'Ain Témouchent
Mme. ABDELBARI Salima	MCA	Examinatrice	Université d'Ain Témouchent
M. AMARA Khaled	Pr.	Invité	Université d'Ain Témouchent



DEDICACE

DEDICACE



Je dédie ce travail à :

Mon très cher père, mon exemple et la lumière sur mon chemin, tu es la flamme de toutes mes réussites, qui a travaillé dur et m'a soutenu financièrement et moralement avec tout ce qu'il pouvait.

Ma très chère mère qui m'a toujours accompagné avec ses prières bénies et ses paroles aimables.

Mes frères, Mes sœurs, et toute Ma famille.

Ainsi qu'à tous mes amis sans exception.


Abdelhak



REMERCIEMENTS



Remerciements

Je remercie en premier et en dernier lieu, **ALLAH** tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je suis très heureux de témoigner ma profonde estime à mon directeur de thèse, Monsieur **BELABED Zakaria**, Professeur au Centre Universitaire de Naama, de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordée tout au long de ce travail, ses aides et son sens de la motivation, ses précieux conseils, sa disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont été très utile pour mener à terme ce travail.

*J*adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur **DERBAL Rachid**, Professeur à l'Université d'Ain Témouchent, de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **KHATIR Tawfiq**, **MEDJAHED Meddah Driss** et **GUENANECHÉ Boucif** ainsi qu'à Mme **ABDELBARI Salima** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

*J*exprime ma profonde gratitude au Professeur **AMARA Khaled**, responsable du Doctorat « Travaux Publics » à l'Université d'Ain Témouchent, de m'avoir donné l'opportunité de poursuivre des études en doctorat, aussi pour ses qualités humaines et scientifiques. Je tiens à lui remercier très chaleureusement pour ses conseils avisés et son soutien scientifique et moral durant ces années.

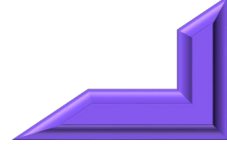
*J*adresse également mes sincères remerciements au Directeur du Laboratoire des Structures Intelligentes (**SSL**) à l'Université d'Ain Témouchent, le Professeur **AISSA MAMOUN Sidi Mohamed**, aussi à l'ensemble du personnel de Laboratoire, sans oublier les personnels de départements de Génie Civil et Travaux Publics, de l'Université d'Ain Témouchent.

Enfin, je ne remercierais jamais assez mes parents pour leur soutien inconditionnel pour accomplir ce travail et leur amour.



ملخص

ملخص



ملخص:

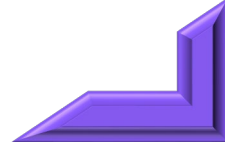
تقدم هذه الدراسة نموذجًا جديدًا شبه ثلاثي الأبعاد لعناصر محدودة لتقييم سلوك الاهتزاز الحر والانبعاج للروافد ذات التدرج الوظيفي السميكة (FG) والروافد ذات التدرج الوظيفي المسامية (FGP). يعتمد نموذج الرافدة FG على نظرية دقيقة لتشوه القص والتمدد الطولي ، بينما يعتمد نموذج الرافدة FGP على نظرية تشوه القص ذات الترتيب العالي البسيطة والفعالة. تتم ضمان الفاعلية الحسابية دون عوامل تصحيح القص باستخدام الوظيفة الشكلية الزائدي لكل من تشوه القص العرضي والإجهاد عبر إحداثي السمك للروافد FG ، ويتم الحفاظ على استمرارية العنصر الفاصل باستخدام استمراريات C^0 و C^1 للمتغيرات الحركية. على النقيض من ذلك ، يستخدم نموذج رافدة FGP ثلاث درجات حرية لكل عقدة ويتم ضمان استمرارية العنصر الفاصل باستخدام استمراريات C^0 و C^1 لحقل التشوه وظائف الشكل المشتقة الأولى على التوالي. تم اشتقاق المعادلات المحكمة من النسخة الضعيفة لمبدأ التغير للروافد FGP ومبدأ هاميلتون لأشعة FGP. يتم استخدام نظام الإحداثيات المتساوية المعلمات لإنشاء المصفوفات الأولية للصلابة والهندسة والكتلة لكلا النموذجين. تتغير خصائص المواد لكل من روافد FG و FGP بشكل مستمر عبر سماكة الرافدة وفقًا لشكل قانون القوة. يتم إجراء أبحاث عددية مفصلة لاستقصاء تأثيرات الحدود، ومؤشر قانون القوة، ونسبة المدى إلى الارتفاع، وأنماط توزيع المسامية على استجابات الاهتزاز الحر والانبعاج لروافد FG و FGP. يتم إظهار أداء العناصر الرافدة المطورة من خلال مقارنة النتائج مع تلك المتوقعة من النظريات البديلة الحالية. تحديد تأثيرات هذه المعلمات على الترددات الطبيعية وأحمال الانبعاج الحرجة أمر بالغ الأهمية لعملية تصنيع هذه المواد ونمذجتها الميكانيكية في مجالات الفضاء والطاقة النووية والهندسة المدنية وغيرها من الهياكل.

كلمات مفتاحية: أرافدة ؛ ب نمذجة عددية ؛ المواد المركبة المتقدمة ؛ المسامية ج نظرية الروافد المتقدمة ؛ د سلوك الانبعاج؛ ه اهتزاز حر



RESUME

KEZDŐLAP



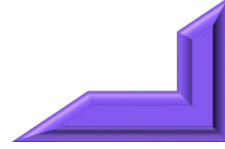
Résumé:

Pour évaluer les comportements de vibration libre et de stabilité des poutres épaisses à gradient de propriétés (FG) avec et sans porosité, cette étude doctorale propose un nouveau modèle élément fini quasi-3D. Le modèle est basé sur une théorie avancée de cisaillement et de déformation normale précise, simple et efficace pour les poutres FG et/ou la présence de porosités. Grâce à l'utilisation de la fonction de gauchissement hyperbolique pour les deux types de poutres, la performance de l'élément formulé dans cette étude est assurée sans le recours aux facteurs de correction de cisaillement transversal. Pour les poutres FG et FGP, l'élément de poutre proposé a quatre inconnus nodaux par nœud, et pour les variables cinématiques, les continuités inter-éléments sont garanties à l'aide des continuités C^1 et C^0 . La version faible du principe variationnel est la source des équations gouvernantes qui forment les deux modèles. Selon la loi de puissance, les caractéristiques matérielles des poutres FG et FGP varient en continu sur l'épaisseur de la poutre. Une analyse numérique détaillée est menée pour examiner les effets de plusieurs paramètres matériels et géométriques sur les réponses de flambage et vibrationnelle des poutres FG et FGP. Les résultats numériques montrent qu'en raison des facteurs mentionnés précédemment, l'évaluation du comportement mécanique de ces poutres est difficile. Les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits par d'autres théories existantes, et les effets de ces paramètres sur les fréquences naturelles et les charges critiques sont importants pour la conception et la modélisation mécanique de ces matériaux dans diverses structures.

Mots clefs : **A.** Poutre ; **B.** modélisation numérique ; matériaux composites avancés ,Porosité **C** Théorie des poutres avancé, **D.** comportement au flambage, **E.** vibration libre



ABSTRACT



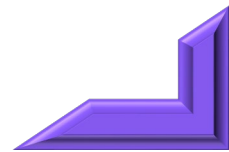
Abstract:

This dissertation describes a new quasi-3D finite element model for evaluating the free vibration and stability behaviors of thick functionally graded (FG) and functionally graded porous (FGP) beams. The FG beam model is based on an accurate shear and normal deformation beam theory, whereas the FGP beam model is based on a simple and efficient higher-order shear deformation theory. Without shear correction factors, traction-free boundary conditions are guaranteed for FG beams using the hyperbolic warping function for both transverse shear deformation and stress through the thickness coordinate, and inter-element continuity is maintained using both C1 and C0 continuities for kinematics variables. The FGP beam model, on the other hand, has three degrees of freedom per node and ensures inter-element continuity by using both C0 and C1 continuities for the displacement field and its first derivative form functions. The governing equations for FG beams are obtained from a weak version of the variational principle and the Hamilton principle for FGP beams. For both models, the isoparametric coordinate system is used to create the elementary stiffness, geometry, and mass matrices. According to the power-law form, the material properties of both FG and FGP beams vary constantly over the beam thickness. The effects of boundary conditions, power-law index, span-to-height ratio, and porosity distribution patterns on the free vibration and buckling responses of FG and FGP beams are studied in detail. The developed beam elements' performance is proved by comparing the results to those anticipated by alternative existing theories. The effects of these factors on natural frequencies and critical buckling loads are significant for the manufacturing process and mechanical modeling of such materials in aeronautical, nuclear, civil, and other structures.

Key words : **A.** Beam; **B.** Computational modelling; Advanced composite materials , Porosity, **C** Advanced beam theory, **D** buckling response , **E** Free vibration



TABLE DES CONTENTS MATERES



T able des matières

Dédicace:	i
Remerciement:	ii
Résumé en langue arabe	iii
Résumé en langue française	iv
Résumé en langue anglaise	v
Liste des Matières	vi
Figures	xii
Tableaux	xvii
Notations	xix

Introduction Générale

1. Introduction et problématique:.....	1
2. Méthodologie :.....	4
3. Organisation de la thèse :.....	4

CHAPITRE I : Etat de l'art sur les Matériaux Composites Avancés

I.1. Introduction :.....	6
I.2. Histoire sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM) :.....	7
I.3. Categoriisation des matériaux à gradient de propriétés :	10
I.3.1. Categoriisation basée sur la structure :.....	10
I.3.2. Classification basée sur le type de gradients des FGM :.....	11
I.3.2.1. matériaux à gradient fonctionnel de composition :.....	11
I.3.2.2. matériaux à gradient fonctionnel de porosité :.....	12
I.3.2.3. matériaux à gradient fonctionnel microstructural :.....	12
I.4. Concept des matériaux fonctionnellement gradués :.....	13
I.5. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnel :	14
I.6. Procédés de fabrication des matériaux à gradient de propriétés:	16

I.6.1.	Procédés de fabrication à l'état liquide :	16
I.6.1.1.	Coulage en bande (Tape Casting) :	16
I.6.1.2.	Coulage centrifuge (Centrifugal Casting) :	17
I.6.2.	Procédés de fabrication à l'état solide :	18
I.6.3.1.	Métallurgie des poudres :	18
I.6.3.2.	Méthodes de fabrication additive:	19
I.6.3.	Procédés de dépôt :	22
I.6.4.1.	Méthodes de sédimentation à vapeur.....	22
I.6.4.2.	Procédé de projection thermique	23
I.7.	Application des FGM :	24
I.7.1.	Aérospatiale :	25
I.7.2.	Application biomédicale :	26
I.7.3.	Défense :	27
I.7.4.	Applications énergétiques et électroniques	27
I.7.5.	Industrie automobiles	28
I.7.6.	usage des FGM dans dans travaux publics et constructions civiles :	28
I.8.	Caractérisation des poutres FGM parfaite :	30
I.8.1.	La loi des mélanges :	31
I.8.1.1.	Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM :	32
I.8.1.2.	Propriétés matérielles d'une poutre S-FGM :	33
I.8.1.3.	Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :	34
I.9.	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM poreuses:	35
I.9.1.	Poutre FG avec porosité symétriques :	36
I.9.2.	Poutre FG avec porosité non-symétriques :	36
I.9.3.	Poutre FG avec porosité uniforme :	36
I.9.4.	Poutre FG avec porosité non uniforme :	37
I.9.5.	Poutre FG avec porosité logarithmiques-non uniformes :	37
I.10.	Conclusion :	38

CHAPITRE II : Mécanique et Modeles des Poutres en FGM

II.1.	Introduction :	39
II.2.	Définition d'une poutre :	40
II.3.	Les modèles de la théorie des poutres :	41
II.3.1.	Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :	41

II.3.2.	Modèle de poutre basé sur la théorie de cisaillement d'ordre un (Timoshenko TBT) :.....	42
II.3.3.	Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :	44
II.3.4.	Modèle raffiné de poutre de cisaillement avancé (RHSdT) :	48
II.3.5.	Modèle la théorie de poutre tridimensionnelle (élasticité 3D) :	50
II.3.6.	Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation quasi-3D:	51
II.4.	La méthode des éléments finis :	53
II.5.	Modèles Analytiques des structures à gradient material fonctionnel:.....	55
II.6.	Modèles Numériques des structures en gradient material fonctionnel :	56
II.7.	Conclusion :	68

CHAPITRE III : Formulation et Evaluation d'un Nouvel Element Fini pour Analyse le Comportement Vibratoire et le Flambage des Poutres FGMs Parfaites et Imparfaites

III.1.	Introduction :	69
III.2.	Formulation théorique :	69
III.2.1.	Configuration géométrique et concept de la poutre FG :	69
III.2.2.	Propriétés matérielles des poutres FGP :	70
III.2.3.	Théorie d'ordre supérieur de cisaillement des poutres:	72
III.2.3.1.	Cinématique :	72
III.2.3.2.	Relations Constitutives :	74
III.2.3.3.	Équations Gouvernantes :	74
III.2.3.4.	Formulation par éléments finis :	76
III.3.	Conclusion:.....	82

CHAPITRE IV : Resultats et Discussions

IV.1.	Introduction :	83
IV.2.	Résultats numériques et discussion :	83
IV.2.1.	Analyse des poutres FG parfaites :	85
IV.2.1.1.	Études de la convergence :	85
IV.2.1.2.	Évaluation et validation :	87
IV.2.2.	Analyse des poutres FG imparfaites :	96

Table des Matières

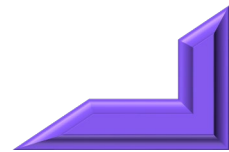
IV.2.2.1.	Etude vibratoire :	96
IV.2.2.2.	Etude de flambement :	105
IV.2.2.3.	Etude paramétrique :	111
IV.3.	Conclusion:.....	115

Conclusions et Recommandations

1.	Introduction et problématique:.....	116
2.	Remarques et conclusions :.....	116
3.	Recommandations pour des travaux futurs :	117
	references bibliographiques:	118
	Annexe 1:	136



LISTE DES TABLE DES FIGURES





CHAPITRE I

Figure I.1 : Progrès matériel orienté vers les FGMs (El-Galy, 2019).....	7
Figure I.2 : Préservation thermique des FGMs	8
Figure I.3 : aperçu historique des jalons pertinents dans la recherche et le développement des FGMs (Saleh, 2020)	9
Figure I.4 : Les fondements scientifiques annuelles en relation avec FGM (Saleh, 2020)	9
Figure I.5 : Classification basée sur la structure des FGM.....	10
Figure I.6 : Illustration représentative de trois variétés distinctes de gradients de FGM (Mahmoud, 2017).....	11
Figure I.7 : Exemples des combinaisons possibles en matériaux utilisés dans les FGM (El-Galy, 2019)	12
Figure I.8 : Types de Gradation de la microstructure (a) microstructure doucement graduée (b) vue agrandie et (c) FGM céramique/métal (Jha, 2013)	13
Figure I.9 : Traits distinctifs des composites FGM par rapport aux matériaux composites usuels (Koizumi, 1997).....	14
Figure I.10 : La disposition des composantes matérielles : (a) Composite plan, (b) Matériau associé, (c) Matériau à Evolution de propriété. (Yoshihisa, 2004)	15
Figure I.11 : Méthodes de fabrication des FGMs (Saleh, 2020).....	16
Figure I.12 : Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande (Saleh, 2020).....	17
Figure I.13 : Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée) (Saiyathi, 2015).....	18
Figure I.14 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM (Surya, 2018).....	19
Figure I.15 : (a) : Illustration du procédé de frittage laser sélectif (SLS) (Saleh, 2020), (b) : Illustration du procédé de dépôt d'énergie dirigé par laser (DED) (Li, 2017).....	20
Figure I.16 : Illustration du procédé de projection de matériau (Sireesha, 2018)	21
Figure I.17 : Illustration du procédé de fabrication additive fil et arc : (a) Concept du procédé WAAM pour les produits FGM, (b) unités d'alimentation à double fil (Wang, 2018).....	22

Figure I.18 : (a) : Le processus de dépôt physique en phase vapeur (PVD) (Saleh, 2020), (b) : Diagramme de l'installation pour la synthèse d'un SiC/C FGM par le biais du dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	23
Figure I.19 : Schéma illustratif du processus de pulvérisation thermique (Sulzer, 2013)	24
Figure I.20 : Domaines d'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel.....	25
Figure I.21 : usage des matériaux fonctionnel en aérospatial (Saleh, 2020).....	26
Figure I.22 : usage des matériaux fonctionnel en médecine	27
Figure I.23 : usage des matériaux fonctionnel en automobile (Saleh, 2020).....	28
Figure I.24 : Traits du béton durci en réponse à une élévation progressive de la porosité (Herrmann, 2016).....	29
Figure I.25 : Géométrie d'une poutre FGM.....	31
Figure I.26 : Evolution de la fraction volumique dans une poutre P-FGM	32
Figure I.27 : Evolution de la fraction volumique dans une poutre S-FGM	33
Figure I.28 : Evolution de la fraction volumique dans une poutre E-FGM.....	34
Figure I.29 : Répartition de porosité sur l'épaisseur, (a) porosité symétriques (b) porosité non symétriques.....	36
Figure I.30 : Représentation de divers schémas de porosité.....	37

CHAPITRE II

Figure II. 1 : Cinématique d'Euler-Bernoulli	42
Figure II. 2 : Cinématique de Timoshenko.....	43
Figure II. 3 : La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT.....	44
Figure II. 4 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.....	45
Figure II. 5 : La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT.....	45
Figure II. 6 : Evolution de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	47
Figure II. 7 : Evolution de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur	48
Figure II. 8 : Distribution des contraintes de cisaillement selon trois théories (Tafla, 2007).....	49
Figure II. 9 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur	52
Figure II. 10 : des éléments : (a) unidimensionnel, (b) bidimensionnels et (c) Trois dimensionnels...	53
Figure II. 11 : la discrétisation du domaine du problème en petits éléments appelés « éléments finis »	54

Figure II. 12 : <i>la transformation géométrique d'un élément de référence en un élément réel</i>	55
Figure II. 13 : <i>Un élément de poutre non local à deux degrés de liberté par nœud (Neto, 2019)</i>	58
Figure II. 14 : <i>Un élément de poutre à dix degrés de liberté (Kahya, 2017)</i>	59
Figure II. 15 : <i>Un élément de poutre multicouche (Kahya, 2018)</i>	60
Figure II. 16 : <i>Un élément de plaques à quatre nœuds (Tran, 2020)</i>	60
Figure II. 17 : <i>(a) Paramètres géométriques de la poutre courbe ; (b) Élément de poutre avec les degrés de liberté (Anirudh, 2019)</i>	61
Figure II. 18 : <i>Présenter un élément de poutre à deux nœuds avec les degrés de liberté correspondants (Belarbi, 2021a)</i>	62
Figure II. 19 : <i>Discrétisation par éléments finis de la surface moyenne de la coque (Murillo, 2020)</i> 64	
Figure II. 20 : <i>élément fini plan à douze nœuds (Akbas, 2018)</i>	66
Figure II. 21 : <i>élément isoparamétrique de poutre courbe à trois nœuds (Nazargah, 2020)</i>	66

CHAPITRE III

Figure III. 1 : <i>Configuration géométrique d'une poutre en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires</i>	70
Figure III. 2 : <i>Modèles de distributions de porosité dans les sections transversales de poutre (FGP): (a) Type-I (b) Type-II, (c) Type-III et (d) Type-IV</i>	72
Figure III. 3 : <i>Géométrie et degrés de liberté nodaux pour un élément isoparamétrique à deux nœuds</i>	77

CHAPITRE IV

Figure IV. 1 : <i>La convergence de la fréquence fondamentale non dimensionnelle et les charges critiques de flambement des poutres FG parfaites avec $p=1$ et $L/h=5$</i>	86
Figure IV. 2 : <i>Evolution de la fréquence fondamentale adimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $(L/h=5)$</i>	90
Figure IV. 3 : <i>Evolution de la fréquence fondamentale adimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $(L/h=20)$</i> ..	91
Figure IV. 4 : <i>Evolution de la charges critiques des flambages non dimensionnels \bar{P}_{cr} des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p $(L/h=5)$</i>	91

Figure IV. 5 : Evolution de la charges critiques des flambages non dimensionnels \bar{P}_{cr} des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p ($L/h=10$) 92

Figure IV. 6 : Evolution des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour ($p=1$)..... 94

Figure IV. 7 : Evolution de la charge critique des flambages non dimensionnels \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 parfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour ($p=1$).... 94

Figure IV. 8 : Evolution des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres FG Al_2O_3 parfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)..... 95

Figure IV. 9 : Evolution des charges critiques des flambages non dimensionnels \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 parfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)..... 65

Figure IV. 10 : Evolution de la fréquence fondamentale non dimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.20$ et $p=5$ 102

Figure IV. 11 : Evolution de la fréquence fondamentale non dimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.20$ et $p=0.50$ 103

Figure IV. 12 : Evolution de la fréquence fondamentale non dimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $e_0=0.10$ et $L/h=10$ 104

Figure IV. 13 : Evolution de la fréquence fondamentale non dimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $e_0=0.20$ et $L/h=10$ 104

Figure IV. 14 : Evolution de la fréquence fondamentale non dimensionnels $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de porosité e_0 pour $L/h=10$ 105

Figure IV. 15 : Evolution de la fréquence fondamentale non dimensionnels $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.50$ 105

Figure IV. 16 : Evolution de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0 = 0.10$ et $p=0.5$ 108

Figure IV. 17 : Evolution de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0 = 0.20$ et $p=0.5$ 108

Figure IV. 18 : Evolution de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $e_0 = 0.10$ et $L/h=10$ 109

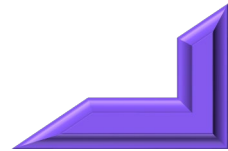
Figure IV. 19 : Evolution de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $e_0 = 0.20$ et $L/h=10$ 109

Figure IV. 20 : Evolution de la charges critiques du flambage adimensionnelles \hat{P}_{cr} des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0 = 0.50$ 110

Figure IV. 21 : Evolution de la charges critiques du flambage adimensionnelles \hat{P}_{cr} des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et paramètre de porosité e_0 pour $L/h=10$ 110



LISTE DES TABLEAUX



Liste des Tableaux

CHAPITRE I

Tableau I. 1 : *Analyse comparative des caractéristiques de la céramique et du métal (Nguyen, 2008)*
 14

CHAPITRE IV

Tableau IV. 1 : *Propriétés matérielles de la poutre FGP*..... 84

Tableau IV. 2 : *Les conditions aux limites considérées dans cette étude* 84

Tableau IV. 3 : *La convergence de la fréquence fondamentale adimensionnelle et les charges critiques de flambement des poutres FG parfaites avec $p=1$ et $L/h=5$* 85

Tableau IV. 4 : *La comparaison des fréquences naturelles adimensionnelle $\bar{\omega}$ des poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)*
 88

Tableau IV. 5 : *La comparaison des charges critiques des flambages adimensionnels \bar{P}_{cr} des poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)* 89

Tableau IV. 6 : *La comparaison des trois premières fréquences propres non dimensionnelles des poutres FG parfaites avec diverses valeurs de le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)*..... 93

Tableau IV. 7 : *La comparaison des fréquences fondamentale non dimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.50$* 96

Tableau IV. 8 : *La comparaison des six premières fréquences propres adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres encastrée-libre FG imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h) et du paramètre de porosité e_0*
 98

Tableau IV. 9 : *La comparaison des cinq premières fréquences propres adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG encastrée-encastrée imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.50$* 99

Tableau IV. 10 : *La comparaison des fréquences propres adimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres encastrée-encastrée FG Al_2O_3 imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h), le paramètre de puissance matériel p et du paramètre de porosité e_0* 100

Tableau IV. 11 : *La comparaison des fréquences propres adimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres encastrée– libre FG Al_2O_3 imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement(L/h), le paramètre de puissance matériel p et du paramètre de porosité e_0* 101

Tableau IV. 12 : *La comparaison des charges critiques de flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres encastrée– encastrée FG Al_2O_3 imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement(L/h), le paramètre de puissance matériel p et du paramètre de porosité e_0* 107

Tableau IV. 13 : *les résultats de référence pour les trois premières fréquences propres adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de porosité e_0 (L/h=5)* 111

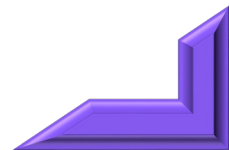
Tableau IV. 14 : *les résultats de référence pour les trois premières fréquences propres adimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le paramètre de porosité e_0 (L/h=5).....* 112

Tableau IV. 15 : *les résultats de référence pour les trois premières des charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le paramètre de porosité e_0 (L/h=5)* 113

Tableau IV. 16 : *les résultats de référence pour les trois premières des charges critiques du flambage adimensionnelles \hat{P}_{cr} des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de porosité e_0 (L/h=5).....* 114



LISTE DES NOTATIONS



Liste des notations

P	Propriété matérielle effective.
$E(z)$	Module Elastique en fonction de (z) .
E_m	Module Elastique de la céramique.
E_c	Module Elastique du Métal.
V	Fraction volumique.
$G(z)$	Module Cisaillement en fonction de (z) .
h	L'épaisseur de la poutre.
L	La longueur de la poutre.
$x, y, z :$	Le système des coordonnées cartésiennes
$\rho(z)$	La masse volumique en fonction de (z) .
ν	Coefficient de Poisson.
b	La largeur de la poutre.
A	La section de la poutre.
t	Temps
e_0	Coefficients de porosité.
p	L'indice de la variation matériel.
u	Le déplacement selon la direction de x .
w	La flèche.
u_0, w_0	Les inconnues de déplacement au niveau de l'axe neutre.
φ_x	Rotation.
$f(z)$	La fonction de gauchissement.
$g(z)$	La dérivée de la fonction de gauchissement
(σ_x, τ_{xz})	Les composantes de contrainte.
$(\varepsilon_x, \gamma_{xz})$	Les composantes de déformation.
C_{ij}	Les coefficients de rigidité.

Liste des notations

δ	une variation.
U	L'énergie due à la déformation.
V	L'énergie potentielle due à la charge de compression.
T	L'énergie cinétique.
N_x, M_x, S_{xz} et Q_{xz}	Les résultantes de contrainte.
$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, H_{11}^s, D_{11}^s)$	Les composantes constitutives de la membrane, de la flexion et du couplage.
A_{44}^s	La composante constitutive du cisaillement transversale.
$(\dot{\quad}) = \frac{\partial}{\partial t}$	La dérivée par rapport le temps t.
$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$	Les inerties de masse.
$\delta u_0, \delta w_0$ et $\delta \varphi_x$	Les termes de déplacement virtuels.
ξ, η	Le système des coordonnées isoparamétriques.
N_i	Les fonctions de forme de Lagrange.
\bar{N}_i	Les fonctions de forme de forme d'Hermite.
J	L'opérateur de transformation jacobien.
$[B_m]$	Matrice d'opérateur de membrane
$[B_b]$	Matrice de flexion.
$[B_s]$	Matrice de cisaillement.
$[\bar{B}_s]$	Matrice d'ordre supérieur.
$[B_0]$	Matrice de la dérivée géométrique.
$\{u_i\}$	Le vecteur de degré de liberté global de l'élément.
$[K_g]$	La matrice de rigidité globale
$[M_g]$	La matrice de masse globale
$[G_g]$	La matrice du géométrique globale.
$f_{,x}$	La dérivée de la fonction f par rapport à x.
Σ	Somme.
ω	La fréquence naturelle de la poutre.
P_0	La charge critique du flambage.

Liste des notations

\int	Intégrale.
\square	Matrice.
$\}$	Vecteur.
T	La transposée d'un vecteur ou d'une matrice.

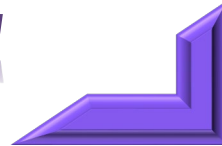


INTRODUCTION

INTRODUCTION

GENERALE

GENERALE



I.1. Introduction et problématique:

Depuis les dernières décennies, la recherche et le développement technologique ont permis l'avènement de nouveaux matériaux avancés tels que les composites, qui offrent des performances mécaniques et physiques supérieures par rapport aux matériaux classiques. Ces matériaux sont largement utilisés pour répondre aux besoins toujours plus exigeants en termes de performance et de durabilité dans divers domaines technologiques, tels que l'aérospatiale, l'automobile, l'énergie renouvelable et la construction. Les composites sont une combinaison matérielle des matériaux de base différents qui sont alliés de manière à maximiser les avantages de chaque matériau tout en réduisant les inconvénients de chacun. Les avantages des composites par rapport aux matériaux classiques notamment : les métaux et leurs alliages, les céramiques et les polymères sont nombreux. Tout d'abord, les composites sont plus légers que les métaux, ce qui les rend idéaux pour les applications où le poids est un facteur important, comme dans l'industrie aérospatiale. De plus, les composites ont une résistance spécifique plus élevée que les métaux, ce qui signifie qu'ils peuvent résister à des contraintes plus élevées pour un poids donné. Les composites sont également résistants à la corrosion, ce qui en fait des matériaux de choix pour les applications en environnements ultimes. Enfin, les composites offrent une grande liberté de conception, ce qui leur permet d'être utilisés dans des applications où les formes et les tailles sont critiques. Cependant, malgré leurs nombreux avantages, les composites présentent également des inconvénients par rapport aux matériaux classiques. Comme par exemple, la fabrication de composites est plus complexe que celle des matériaux métalliques ou polymères, ce qui peut entraîner des coûts plus élevés. En outre, les composites peuvent être plus sensibles aux ruptures causés par les impacts et les charges de fatigue, ce qui peut nécessiter une inspection et une maintenance plus fréquentes. Enfin, les composites peuvent être moins résistants aux températures élevées que les matériaux métalliques. Bien que les composites présentent des avantages significatifs, leur utilisation nécessite une compréhension approfondie de leurs propriétés et de leurs limites, ainsi qu'une expérience en matière de fabrication, d'inspection et de maintenance.

Les matériaux composites laminés soient largement utilisés dans de nombreuses applications industrielles, ils sont souvent limités par des problèmes de délaminage, de crack et d'endommagement qui peuvent compromettre leur intégrité structurelle. Pour franchir ces problèmes, de nouveaux matériaux ont été développés, tels que les matériaux à gradient fonctionnel (en anglais **Functionally Graded Materials**) (Koizumi, 1992) ; (Miyamoto, 1999) ; (Muller, 2003), qui offrent des performances mécaniques supérieures et une meilleure

résistance aux dégradations. Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux composites qui présentent une variation continue de propriétés à travers l'épaisseur ou la longueur de la structure. Cette variation peut être obtenue en modifiant les matériaux de base, la géométrie ou la composition de la structure. Les matériaux à gradient fonctionnel sont souvent utilisés pour résoudre des problèmes de délaminage et d'endommagement dans les composites laminés en créant une transition progressive à travers l'épaisseur pour réduire la concentration des contraintes. Les matériaux à gradient fonctionnel offrent également des avantages dans d'autres domaines de l'ingénierie, tels que la biomécanique, la micro-électronique et la photonique, où ils peuvent être utilisés pour créer des structures complexes avec des propriétés spécifiques à chaque zone de la structure. Par exemple, les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être utilisés pour créer des implants biomédicaux avec une résistance accrue dans les zones de charge élevée et une flexibilité accrue dans les zones de faible charge.

Au cours des dernières années, la nécessité de concevoir des matériaux avancés avec des performances mécaniques supérieures a conduit à une utilisation croissante des matériaux à gradient fonctionnel (**FGM**) dans différents domaines de la nouvelle technologie, tels que les constructions aérospatiales, la marine, l'automobile, l'énergie nucléaire, la biomédicale et l'ingénierie civile. Les FGM sont des matériaux fabriqués en combinant ou en modifiant des composants de céramique et de métal pour améliorer leurs propriétés mécaniques telles que la résistance et la ductilité. Ils offrent une excellente réponse thermo/mécanique pour des structures soumises à diverses charges, grâce à une composante de chaque matériau qui change avec une graduation continue dans une direction spécifique, évitant ainsi la concentration de contraintes et le délaminage qui se produisent souvent dans d'autres structures composites (Madenci, 2017) ; (Ebrahimi, 2018) ; (Punera, 2019) ; (Belabed, 2021). Par ailleurs, les structures en poutre ont de nombreuses applications pratiques dans divers domaines de l'ingénierie civile, mécanique et aérospatiale, et sont l'une des composantes d'ingénierie les plus importantes. Cela en fait un sujet de recherche intéressant. Afin d'étudier les comportements mécaniques des poutres en FGM, diverses théories et techniques d'analyse ont été développées. La théorie de base des poutres également connue sous le nom de théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, est la plus simple et ne s'applique qu'aux poutres minces (Sarkar, 2013) ; (Taeprasartsit, 2015) ; (Şimşek, 2016) ; (Lee, 2017) ; (Nejad, 2018). Pour les poutres modérément épaisses, la théorie d'Euler-Bernoulli surestime les charges critiques de la stabilité élastique et les fréquences naturelles en omettant les effets de cisaillement

transversal. La théorie des poutres d'ordre un, connue comme la théorie des poutres de Timoshenko, a été proposée pour franchir les limites de la théorie d'Euler-Bernoulli en impliquant l'effet de cisaillement (Mohanty, 2012) ; (Nguyen, 2013) ; (Hadji, 2016) ; (Huang, 2016) ; (Al Rjoub, 2017). Cependant, un facteur de correction de cisaillement transversal est impératif pour réviser la rigidité de cisaillement, car la répartition de la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur est incorrecte selon l'hypothèse de cisaillement transversal. La théorie des poutres d'ordre élevé a été élaborée pour le but de décrire correctement la réponse mécanique de ces structures (Reddy, 1984) ; (Benatta, 2008) (Mantari, 2012) (Belabed, 2014). Dans ces théories, la répartition de la contrainte tangentielle sur l'épaisseur est prédite en utilisant la fonction gauchissement de cisaillement afin de prendre en compte la déformation due au cisaillement et la distribution des contraintes tangentielles de manière plus précise. De plus, la contrainte de cisaillement transversale est nulle sur les deux facettes de la poutre, ce qui élimine la nécessité d'un facteur de correction de cisaillement. L'efficacité des théories de cisaillement d'ordre supérieur dépend du choix du champ de déplacement, ce qui est un sujet intéressant qui a attiré de nombreux chercheurs (Pradhan, 2015) ; (Frikha, 2016) ; (Trinh, 2016) ; (Karamanli, 2017). De nombreuses études ont été menées sur les poutres isotropes ou en FGM (Vo, 2014) ; (Li, 2019) ; (Yarasca, 2016) ; (Kahya, 2017) ; (Anirudh, 2019) ; (Belarbi, 2021a) ; (Liu, 2021a) ; (Garg, 2021), et les résultats montrent que la théorie des poutres d'ordre supérieur peut obtenir des solutions relativement précises, en particulier dans les problèmes de vibration et de flambement. D'autre part, l'effet de la porosité sur le comportement mécanique des matériaux à gradient de propriétés est un sujet d'intérêt croissant dans le domaine des matériaux et de la mécanique. La porosité est un facteur clé qui influence le comportement mécanique des FGM. Les pores, qui sont des cavités ou des espaces vides à l'intérieur d'un matériau, peuvent avoir un impact significatif sur les propriétés mécaniques, notamment sur la traction, la compression, la résistance à la fatigue et la ténacité. La porosité élevée peut entraîner une réduction de la rigidité et la densité du matériau et une augmentation de des déformations supplémentaires. L'étude de l'effet de la porosité sur le comportement mécanique des FGM est essentielle pour optimiser la conception et les performances des matériaux à gradient de propriétés utilisés dans des variétés d'utilisation, telles que l'aérospatiale, l'automobile, la biomécanique et l'électronique. En comprenant comment la porosité influence les propriétés mécaniques des FGM, les chercheurs et les concepteurs peuvent concevoir des matériaux avec des performances améliorées et une durabilité accrue (Akbas, 2018) ; (Maliki, 2019) ; (Akbas, 2020) ; (Eltaher, 2018) ; (Noori, 2021) ; (Chen, 2016) ; (Wu, 2018) ; (Fazzolari, 2018).

I.2. Méthodologie :

Dans le domaine de l'ingénierie, les poutres en matériaux à gradient de propriétés avec ou sans porosités sont de plus en plus utilisées en raison de leurs propriétés mécaniques supérieures. Cependant, l'analyse du flambage et des vibrations libres de ces structures est un défi en raison des variations continues de propriétés à travers l'épaisseur ou la longueur de la poutre en tenant en compte les pores. Pour achever ce défi, cette étude propose une nouvelle contribution en basant sur la méthode des éléments finis pour modéliser avec une haute précision les poutres en matériaux à gradient de propriétés. Cette méthode prend en compte l'effet de cisaillement transversal, pour obtenir une solution précise pour l'analyse du flambage et des vibrations libres des poutres en matériaux à gradient de propriétés avec ou sans porosités. La méthode des éléments finis est une méthode numérique largement utilisée pour l'analyse des structures en génie civil, en mécanique des structures, en aéronautique et dans de nombreux autres domaines. Dans ce contexte, *la formulation et l'évaluation d'un nouveau élément fini de type poutre pour l'analyse du comportement au flambage et vibration libre des poutres en FGM avec ou sans porosité* présente l'esprit fondamentale de cette étude doctorale, par la suite et à travers la validation, on peut conclure que l'élément fini développé dans cette étude peut offrir des avantages numériques dans le domaine de la modélisation et la simulation des poutres en FGM avec ou sans porosités.

I.3. Organisation de la thèse :

La thèse est composée de quatre chapitres principaux, d'une introduction générale et d'une conclusion pour atteindre nos objectifs. **Le premier chapitre** présente les matériaux à gradient de propriétés (FGM) en discutant de leur histoire, de leur classification, de leurs méthodes d'usinage et de leurs domaines d'utilisation. Par la suite, en nous appuyant sur les principes fondamentaux du comportement des matériaux hétérogènes, nous explorons les méthodes pour déterminer leurs caractéristiques mécaniques. Ce chapitre traite également de la porosité et de ses modèles mathématiques, ainsi que de leurs variations à travers l'épaisseur. **Le deuxième chapitre** décrit un état actuel des théories utilisées dans le cadre de l'analyse des structures en poutre avancée, y compris celles avec ou sans porosité. Ils abordent également une évaluation critique de leurs principes et hypothèses. Ce chapitre détaille les théories d'ordre supérieur et leurs améliorations, tout en soulignant que le nombre de variables augmente en fonction de la théorie choisie, impactant ainsi le temps de calcul. Une revue des travaux récents et complémentaires portant sur leurs modèles numériques est

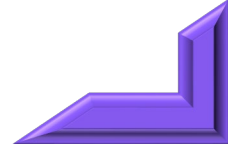
présentée en fin de chapitre. **Dans le troisième chapitre**, nous exposons la formulation et l'évaluation d'un nouvel élément fini. Ce chapitre explicite la transition de la théorie de cisaillement avancée des poutres vers un modèle numérique à deux nœuds, en intégrant l'effet de la porosité. Ce modèle est destiné à l'analyse des comportements vibratoires et du flambage des poutres épaisses FGM, parfaites et imparfaites. **Le quatrième chapitre** se concentre sur la validation et l'évaluation de notre modèle en éléments finis, en le comparant aux résultats numériques et/ou analytiques obtenus par des groupes de validation dans des travaux récents pour diverses configurations de poutres FGM, avec ou sans porosité. L'effet de la répartition de la porosité à travers l'épaisseur est également étudié et discuté en termes de vibrations libres et d'analyse du flambage. De plus, une étude numérique approfondie est réalisée pour examiner les effets de multitude des paramètres sur la réponse vibratoire et le flambage des poutres en matériaux composites avancées, parfaites et imparfaites. **En conclusion**, nous récapitulons les principales découvertes et présentons des recommandations pour les recherches futures.



I

CHAPITRE

CHAPITRE



I.1. Introduction :

La technologie contemporaine et la recherche de matériaux avancés sont deux domaines qui interagissent pour permettre le développement de produits et de technologies innovantes. Les nouveaux matériaux peuvent offrir des propriétés et des fonctionnalités uniques qui sont essentielles à de nombreux secteurs industriels, tels que l'aéronautique, la médecine, l'énergie, l'électronique, les télécommunications et bien d'autres. Les avancées de la technologie moderne ont permis d'accélérer la recherche de nouveaux matériaux en offrant des outils et des méthodes plus avancées pour la découverte, la caractérisation et la fabrication de nouveaux matériaux. La modélisation informatique, la microscopie électronique, la spectroscopie et d'autres techniques avancées permettent aux scientifiques de découvrir de nouveaux matériaux avec des propriétés uniques et de comprendre leur structure et leur comportement. La recherche de nouveaux matériaux est également essentielle pour résoudre des problèmes contemporains tels que la production d'énergie verte, la réduction des émissions de gaz à effet de serre, le recyclage et la conservation des ressources naturelles. Par exemple, les nanotechnologies permettent la possibilité de créer des matériaux plus légers, plus résistants et plus efficaces pour la production d'énergie renouvelable, tandis que la recherche de nouveaux matériaux pour la réduction des émissions de gaz à effet de serre peut aider à développer des matériaux plus durables et moins polluants. En conclusion, la relation étroite entre la technologie moderne et la recherche de nouveaux matériaux est un moteur important de l'innovation et de la croissance économique. Les avancées technologiques permettent aux scientifiques et aux ingénieurs de découvrir et de créer de nouveaux matériaux avec des propriétés uniques, tandis que la recherche de nouveaux matériaux offre des opportunités pour relever des défis contemporains et répondre aux besoins futurs de la société.

Les matériaux composites laminés sont des matériaux qui combinent plusieurs couches de matériaux différents pour créer un matériau plus résistant et plus léger que les matériaux d'origine. Ils sont largement utilisés dans de multitude d'application industrielle et de la construction pour leurs propriétés exceptionnelles telles que leur résistance élevée et leur légèreté. Cependant, bien que les composites laminés offrent de nombreux avantages, ils présentent également des inconvénients. L'un des principaux inconvénients est que leur fabrication est plus complexe que celle des matériaux traditionnels. Les processus de fabrication sont plus coûteux et plus longs, nécessitant souvent l'utilisation de technologies avancées. De plus, les composites laminés peuvent être plus difficiles à réparer en cas de

dommages. Les couches individuelles peuvent être endommagées ou délaminées, ce qui peut compromettre la résistance globale du matériau. La détection des défauts dans les composites laminés peut également être difficile, ce qui peut rendre leur inspection et leur maintenance plus complexes. (Shanmugavel, 2012) ; (Jha, 2013).

Les matériaux à gradients de propriétés sont une nouvelle classe de matériaux qui offrent une alternative prometteuse aux composites laminés traditionnels. Ces matériaux présentent une distribution continue et graduelle de leurs propriétés sur l'épaisseur ou la longueur du matériau, plutôt qu'une uniformité. Cette caractéristique permet de répondre à des besoins spécifiques en modifiant les propriétés du matériau à différents endroits, ce qui peut améliorer leur performance globale tout en réduisant leur complexité de fabrication et de réparation. Les matériaux de propriété fonctionnelle sont de plus en plus utilisés dans l'industrie pour résoudre les problèmes associés aux composites laminés traditionnels, tels que leur fragilité et leur résistance limitée à certains types de contraintes. Donc, Il est nécessaire d'améliorer les performances des matériaux composites utilisant une nouvelle conception sont Les matériaux à gradient Fonctionnel (Functionally Graded Materials : FGM). La figure. I.1 montre l'évolution chronologique de l'utilisation des métaux vers le développement révolutionnaire à travers les matériaux composites avancés.



Figure I.1 : Progrès matériel orienté vers les FGMs (El-Galy, 2019)

I.2. Chronologie d'évolution des matériaux à gradient fonctionnel :

L'utilisation des matériaux à gradients de propriétés remonte à plusieurs siècles. Les artisans ont souvent créé des objets en utilisant différents matériaux pour leurs propriétés uniques, en les combinant pour créer des objets avec des propriétés variées. Cependant, ce n'est que récemment que les matériaux à gradients de propriétés ont commencé à être conçus et fabriqués de manière systématique. Les FGM ont été découvertes pour la première fois en 1972 par Bever et al (Bever, 1972), et ce concept a été formellement proposé par les scientifiques japonais Niino et ses collègues en 1987 dans un projet aérospatial au laboratoire national d'aérospatial (Niino, 1987). Comme indiqué dans la Figure I.2, le but du projet est de produire des matériaux qui présentent des structures utilisées comme barrière thermique dans les structures aérospatiales. Depuis, des nombreux chercheurs ont mené des recherches pour

développer les matériaux à gradients de propriétés en utilisant des techniques de fabrication avancées, telles que la fabrication additive, la lithographie et la pulvérisation cathodique. Ces techniques permettent de créer des matériaux avec des propriétés graduées à multi-échelles, de nanométrique au macroscopique.

A l'issue de la première phase (1987-1989), les chercheurs sont parvenus à fabriquer des morceaux expérimentale à petits de taille (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) capables de supporter des températures jusqu'à 2000K (température de surface) et des gradients de température jusqu'à 1000K. Quatre technologies sont utilisées pour fabriquer des matériaux à gradients de composition et de structure ; Le système SIC/C est fabriqué par la méthode CVD, le système PSZ/Mo est fabriqué par la métallurgie en poudre, le système TIB2/Cu est fabriqué par la synthèse auto-propagée à haute température et le système (Ni-Cr-Al -Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) est fabriqué par projection plasma bi-torche (Okamura, 1991).

L'objectif de la deuxième étape (1990-1991) était de produire des composants plus grands de tailles et de formes plus complexes que dans la première étape. La première conférence internationale sur les matériaux à gradients de propriétés a eu lieu à Sendai, au Japon, en 1990 (Koizumi 1997).

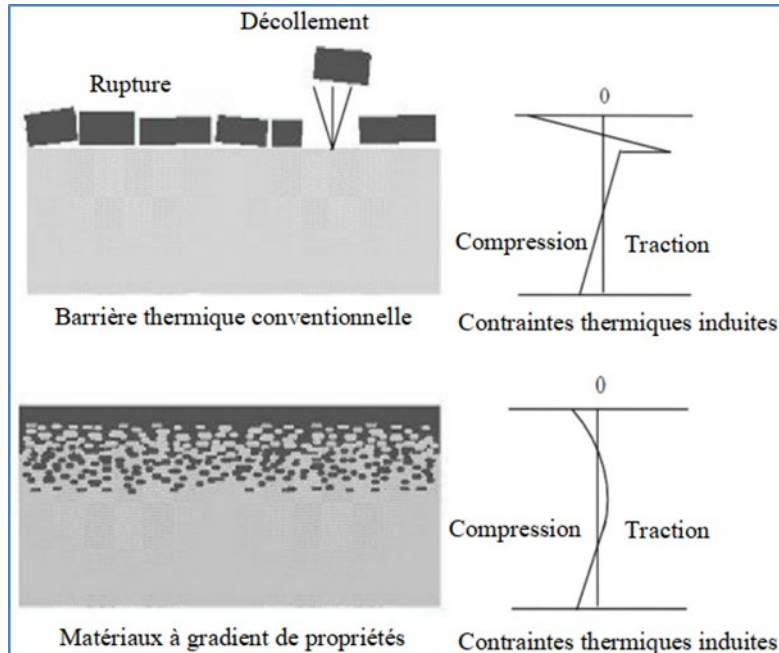


Figure I.2 : *Préservation thermique des FGMs*

Les matériaux à gradients de propriétés ont été classés comme l'une des dix technologies les plus avancées au Japon et même dans le monde en 1992. Le champ d'application des FGM s'est élargi dans les années 1990 pour inclure des matériaux de structure à haute température et d'autres applications : la biomécanique, technologie des

capteurs, optique, etc... (Miyamoto, 1999). Un nouveau projet de recherche est né dans le but de développer des matériaux à gradient de propriétés pour augmenter leur efficacité d'économie d'énergie, son titre est : "Recherche sur les matériaux de conversion d'énergie avec considérant les structures à gradient fonctionnel ". Figure I.3 illustre un aperçu historique des jalons pertinents dans la recherche et le développement des FGMs.

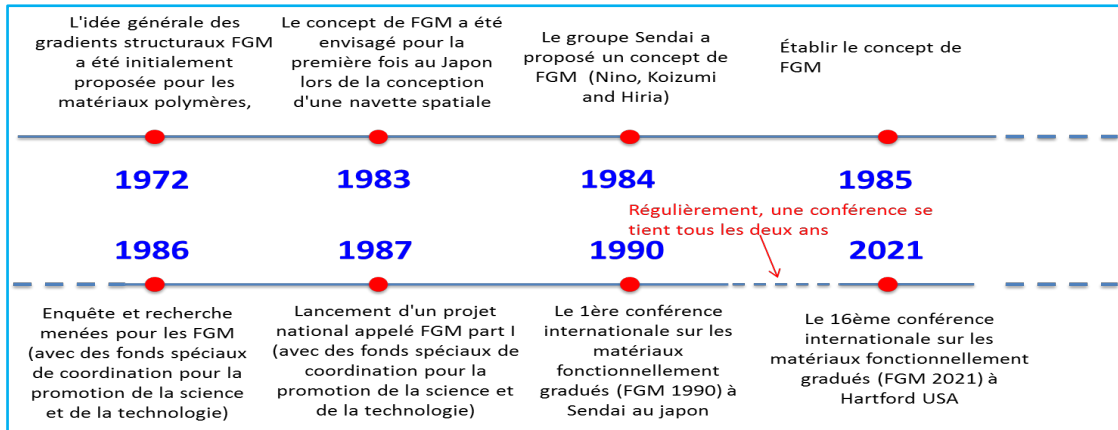


Figure I.3 : aperçu historique des jalons pertinents dans la recherche et le développement des FGMs (Saleh, 2020)

Les matériaux à gradient fonctionnel a été l'un des axe de recherches le plus intéressant au cours ces dernières décennies. Plusieurs travaux ont été trouvés dans la littérature, mais il reste toujours attiré l'attention de beaucoup chercheurs. Comme le montre la Figure I .4, les articles publiés sur les FGM ont continué d'augmenter (Saleh, 2020), cette investigation est indexée sur la plateforme Web of Science au cours de la période 1990-12/2019.

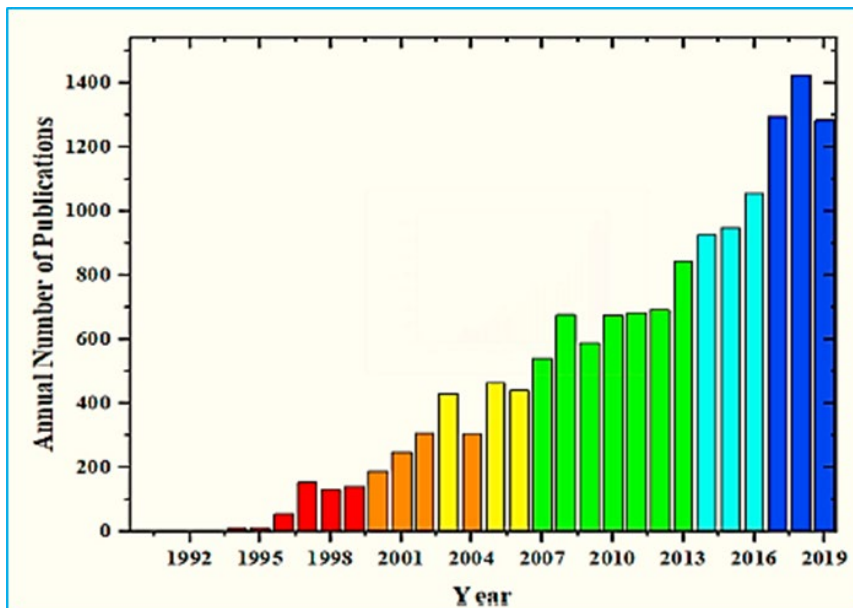


Figure I.4 : les fondements scientifiques annuelles en relation avec FGM (Saleh, 2020)

I.3. Classification des FGM :

I.3.1 Classification basée sur la structure des FGM :

En général, les structures à gradient de propriétés sont regroupées en deux familles (Figure I.5). La deuxième catégorie est appelée gradients discontinus, où le facteur de gradient change pas à pas et la première catégorie est constituée des structures connues sous le nom de gradients continus, dans lesquelles le facteur de gradient s'écoule en continu à travers le volume du matériau. Dans le premier groupe, aucune zone claire ou ligne de coupe de séparation n'a peut être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone. En d'autres termes, non seulement il n'y a pas d'interface entre un côté et l'autre mais aussi, il n'y a aucun vestige entre eux. Les composants matériels changent selon une gradation discontinue par étapes dans un autre groupe, qui est identifié comme FGM en couches ou séparées. Dans cette catégorie, il existe une interface similaire entre les couches qui est visible et distingue chaque couche de la couche suivante.

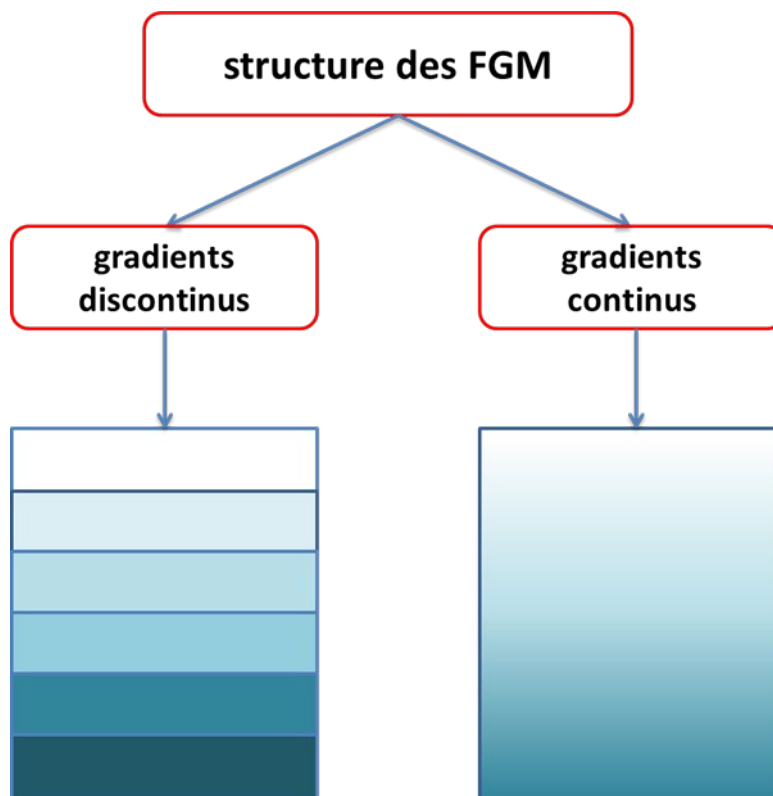


Figure I.5 : Classification basée sur la structure des FGM

Le choix du type de structure de gradient dépend de manière significative des conditions de travail du matériau. L'une des applications de la structure à gradient discontinu concerne les dents. La partie externe des dents est fabriquée avec un matériau hautement résistant à l'usure appelé "enamel". La partie interne des dents est rendue ductile car elle est

nécessaire comme amortisseur et pour améliorer la résistance à la fatigue des dents. Par conséquent, la différence de propriétés dans chaque couche créera une structure de gradient discontinue. Une application des matériaux à gradient continu, par exemple, est celle où l'interface entre deux couches est essentielle. Dans les matériaux insonorisant, l'interface entre les ondes et la couche insonorisant est si importante que les ondes sont réfléchies si l'impédance acoustique entre les deux couches est élevée. Une couche acoustique multicouche avec différents coefficients de diffusion peut être bénéfique dans ces cas. Cependant, l'interface entre les deux couches ne doit pas être trop différente, donc un matériau à gradient continu sans interface est utilisé.

I.3.2 Classification basée sur le type de gradients des FGM :

Afin de distinguer les FGM en fonction des types de gradients, les FGM peuvent généralement être classés en trois groupes différents : la composition du gradient, la microstructure du gradient et la porosité du gradient (Figure I.6) (Mahmoud, 2017).

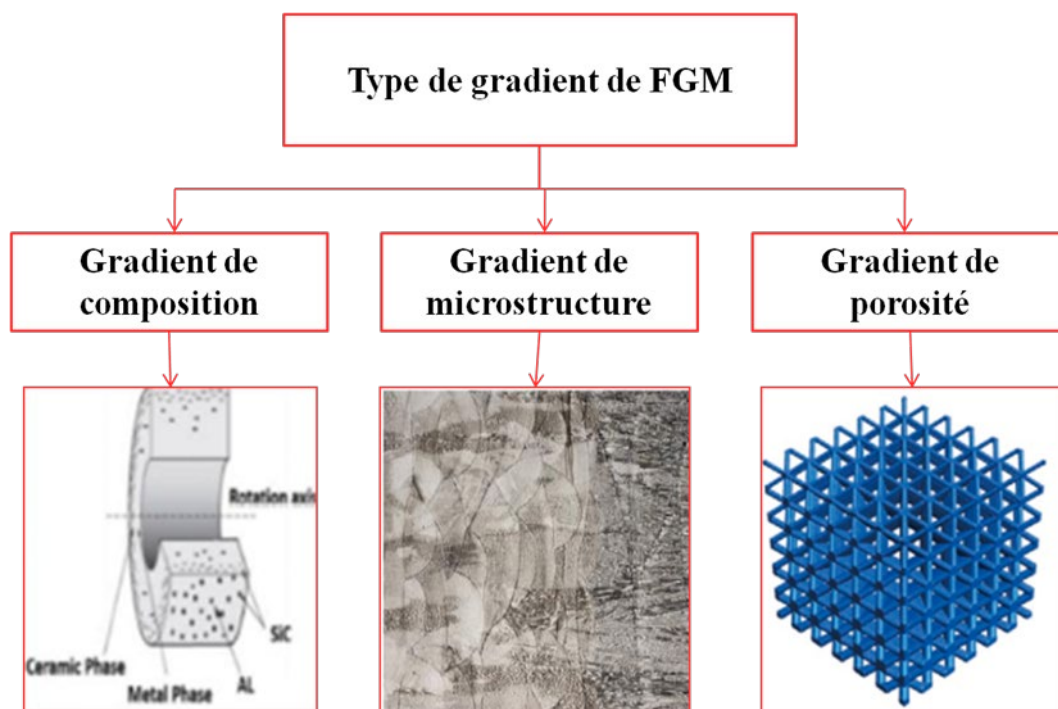


Figure I.6 : Illustration représentative de trois variétés distinctes de gradients de FGM (Mahmoud, 2017)

I.3.2.1 FGM à gradient de composition :

La composition chimique des matériaux à gradient varie progressivement en fonction de leur position spatiale dans le groupe. La combinaison du gradient FGM dépend de la composition du matériau, qui varie d'une substance à l'autre et conduit à des phases séparées avec des structures chimiques différentes.

Cela pourrait être dans le style d'un matériau mono phase ou multi phase. En général, dans la technologie moderne d'aujourd'hui, l'utilisation des FGM monophasées est moins courante, Bien que cette classe de matériaux soit l'une des classes les plus favorable conçues et utilisées, les compositions chimiques à plusieurs phases (Mahmoud, 2017). Différents combinaisons de matériaux peuvent être utilisées pour créer des FGM. Les plus employées sont : métal-céramique, céramique-céramique, métal-métal et céramique-polymère (Figure I.7).

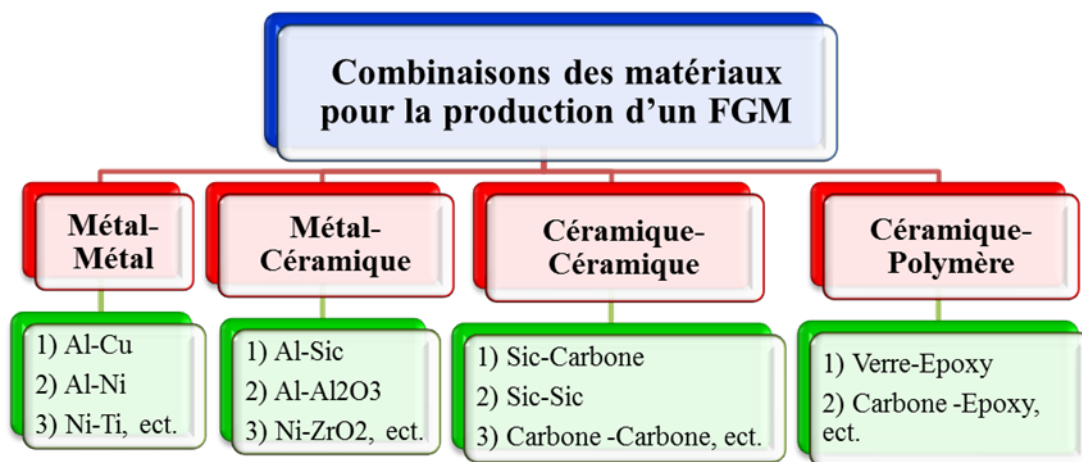


Figure I.7 : Exemples des combinaisons possibles en matériaux utilisés dans les FGM (El-Galy, 2019)

I.3.2.2. matériaux à gradient fonctionnel de porosité :

Dans le deuxième groupe de FGM, que nous connaissons sous le nom de gradient fonctionnel de porosité, les pores se changent en graduation selon l'épaisseur à travers le matériau. Dans la conception des FGM à gradient de porosité, non seulement la taille de la porosité est très importante, mais aussi leur forme est extrêmement importante, selon le type d'application. D'un point de vue industriel, on constate que les matériaux à gradient fonctionnel de porosité, ont été utilisés beaucoup plus dans la conception industrielle médicale et plusieurs études ont été publiées dans ce domaine.

I.3.2.3 FGM à gradient microstructural :

Le troisième type de cette classification, sont une autre sous-classe des FGMs qui ont un changement graduelle sur sa microstructure à travers l'épaisseur ou la longueur du matériau, fait référence à un groupe dont la surface du matériau a une microstructure différente de son noyau. Ces éléments sont principalement produits pendant le processus de refroidissement, donc le traitement thermique dans ces matériaux joue un rôle important

(Popovich, 2016); (Zhang, 2019). Ceux-ci sont utilisés dans les applications et les dispositifs où la surface doit avoir certaines capacités telles que la résistance et la corrosion et la corrosion, etc. tandis que le noyau du corps a une autre propriété (Mahmoud, 2017).

I.4. Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est de produire un matériau dont les propriétés physiques, chimiques ou mécaniques varient progressivement à mesure que l'épaisseur ou la longueur augmentent plutôt qu'à mesure qu'elles sont uniformes (Figure I.8). Cette variation graduelle permet d'adapter les propriétés du matériau aux besoins spécifiques en modifiant les propriétés à différents endroits, ce qui peut améliorer leur performance globale tout en réduisant leur complexité de fabrication et de réparation. Le concept des FGM a été initialement développé pour résoudre les problèmes de transition abrupte de propriétés entre les couches de matériaux distinctes dans les composites stratifiés, qui peuvent causer des défauts, des discontinuités et une réponse imprévisible aux charges externes.

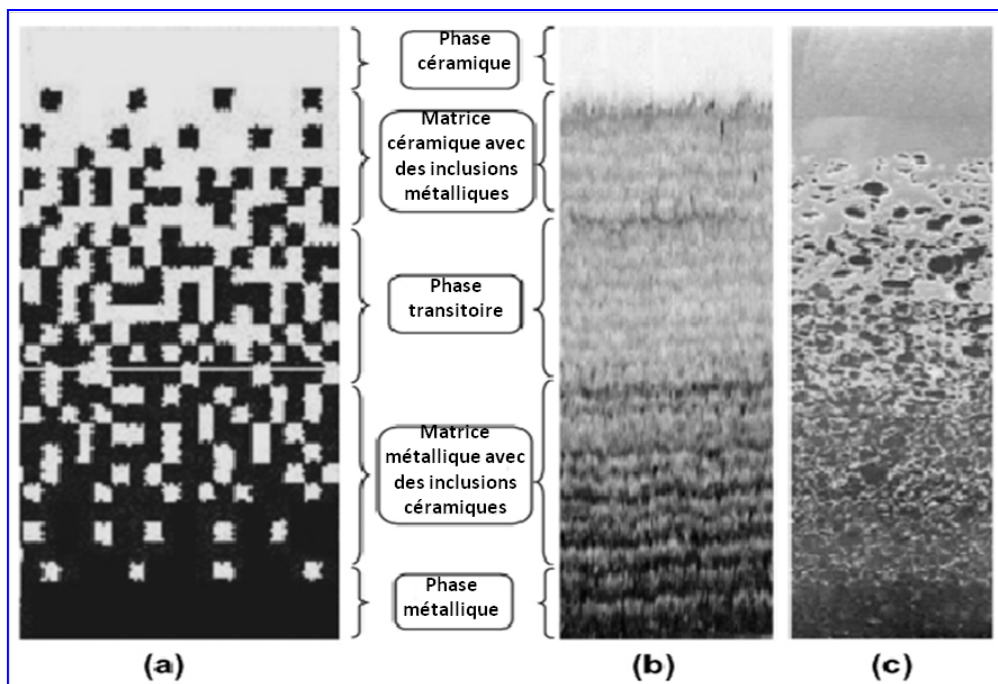


Figure I.8 : Types de Gradation de la microstructure (a) microstructure doucement graduée (b) vue agrandie et (c) FGM céramique/métal (Jha, 2013)

Pratiquement, les FGM sont combinés de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés différentes. Le plus souvent, la céramique et le métal, pour des raisons que la céramique a une bonne résistance à la chaleur, et le métal a une bonne résistance mécanique (Kokini, 1990). Comme montre le Tableau I.1 comparatif des avantages et les inconvénients entre les céramiques et métaux (Nguyen, 2008).

Tableau I. 1 : Analyse comparative des caractéristiques de la céramique et du métal (Nguyen, 2008)

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> -Élimination des problèmes de l'interface - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> -Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

I.5. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnel :

Les matériaux à gradient de propriété sont une classe avancée des matériaux composites qui présentent une microstructure hétérogènes observées au microscope. Les FGM ont une microstructure en constante évolution, contrairement aux matériaux composites traditionnels, ce qui entraîne des changements de gradient dans les propriétés du matériau. La figure I.9 montre les différences entre les FGM et les composites conventionnels en termes de microstructure et de propriétés. Les FGM peuvent être fabriqués avec le même matériau mais avoir une microstructure différente dans certaines situations (Boch, 1986).

Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	Eléments constitutifs: céramique ○ métal ● microporosité ○ fibre ◇		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.9 : Traits distinctifs des composites FGM par rapport aux matériaux composites usuels (Koizumi, 1997)

Les matériaux graduellement à propriétés améliorent la résistance, la durabilité, les performances et l'efficacité en plus de réduire le poids. Yoshihisa (2004) a proposé un modèle simple pour illustrer les différences entre les matériaux à gradient de propriété (FGM) et les matériaux composites plus conventionnels. La figure I.10 montre un matériau composite plan, un matériau composite stratifié et un matériau à gradient de propriété. Alors que les matériaux composites stratifiés ont des interfaces entre deux matériaux différents, les matériaux composites plans ont une structure plane. En raison de leurs variations graduelles de propriétés à travers l'épaisseur ou la longueur du matériau, les FGM se distinguent de ces deux types de matériaux composites. Les FGM sont particulièrement attrayants pour les applications industrielles en raison de leurs caractéristiques distinctives qui les distinguent des matériaux composites traditionnels. Les FGM sont constitués de deux ou plusieurs matériaux qui sont mélangés ensemble de manière à ce que les composants se dispersent progressivement sans interruption. Par exemple, un FGM composé de céramique et de métal présente à la fois la résistance mécanique et la conductivité thermique de la céramique et la résistance aux hautes températures du métal. Par conséquent, les FGM offrent des propriétés uniques qui répondent aux besoins uniques de diverses industries.

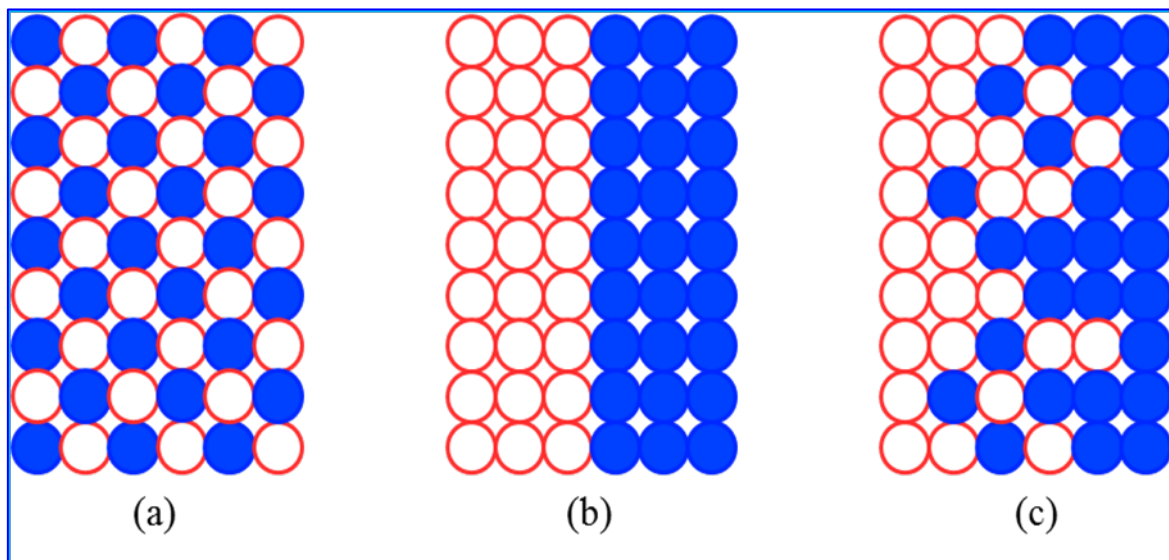


Figure I.10 : La disposition des composantes matérielles : (a) Composite plan, (b) Matériau associé, (c) Matériau à variation de propriété. (Yoshihisa, 2004)

I.6. Procédés de fabrication des matériaux à gradient de propriétés:

Comme mentionné précédemment, il existe généralement trois façons de produire des FGM, y compris les procédés à base solide, à base de gaz et à base de liquide (El-Galy et al. 2019). Chacun d'eux a ses sous-ensembles et est utilisé en fonction du type de produits, des conditions économiques, des conditions de travail, du type de responsabilités et d'autres

caractéristiques techniques (Miyamoto, 1999). Dans cette section, les procédures pour la fabrication de matériaux à gradient de propriétés seront expliqués (Figure I.11).

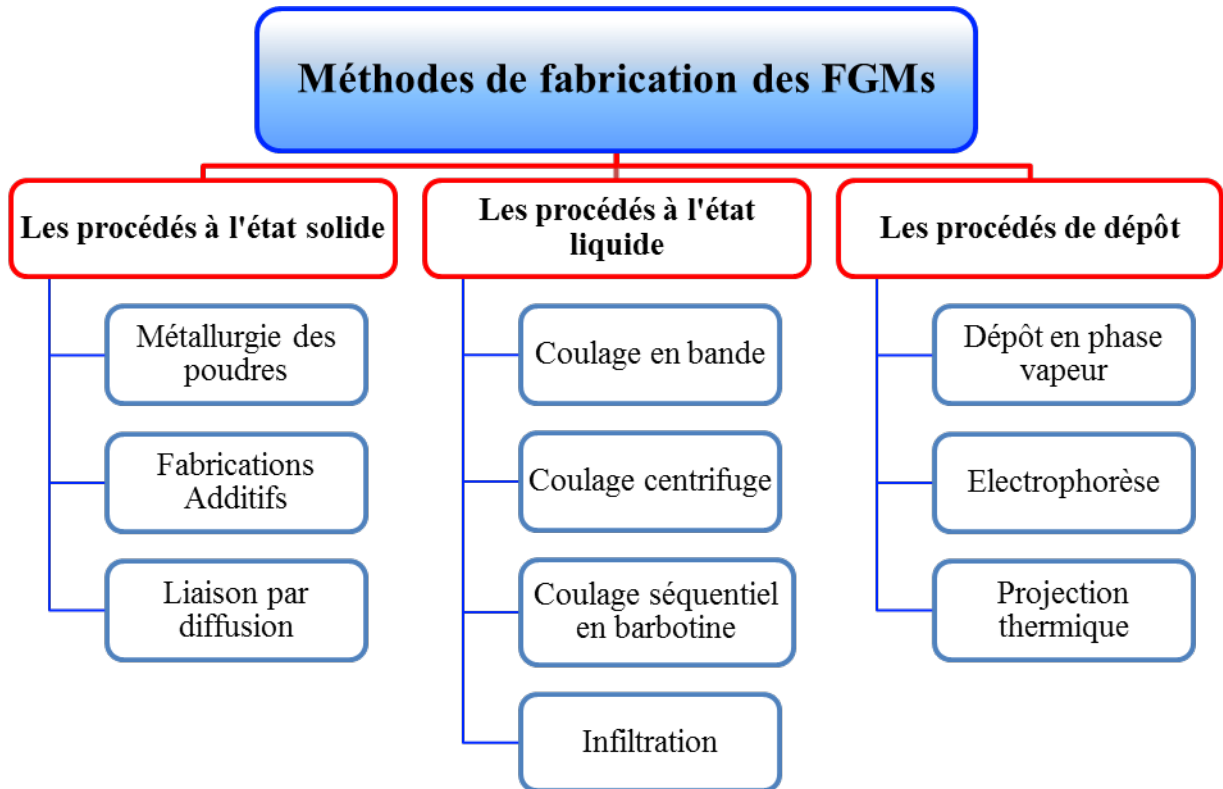


Figure I.11 : *Méthodes de fabrication des FGMs* (Saleh, 2020)

I.6.1 Procédés de fabrication à l'état liquide :

Le coulage en bande, le coulage séquentiel en barbotine, l'infiltration et le coulage centrifuge sont des procédés de fabrication à l'état liquide.

I.6.1.1 Coulage en bande (Tape Casting) :

Au milieu des années 1940, la technique de coulage en bande (TC) a été utilisée pour la première fois dans le cadre d'une tentative de production de matériaux piézoélectriques minces pendant la Seconde Guerre mondiale. Le processus de coulée en bande consiste à étaler la suspension sur une surface à l'aide d'une lame soigneusement contrôlée appelée racle. Comme le montre un schéma du processus de coulage en bande à la Figure I.12 La poudre céramique est un élément essentiel de ce processus, qui est versé en continu sur une couche de support mobile composée d'un matériau plat non adhérent comme le téflon, qui contient un liant plastifiant pour étendre la flexibilité du système de ruban séché (Jabbari, 2016).

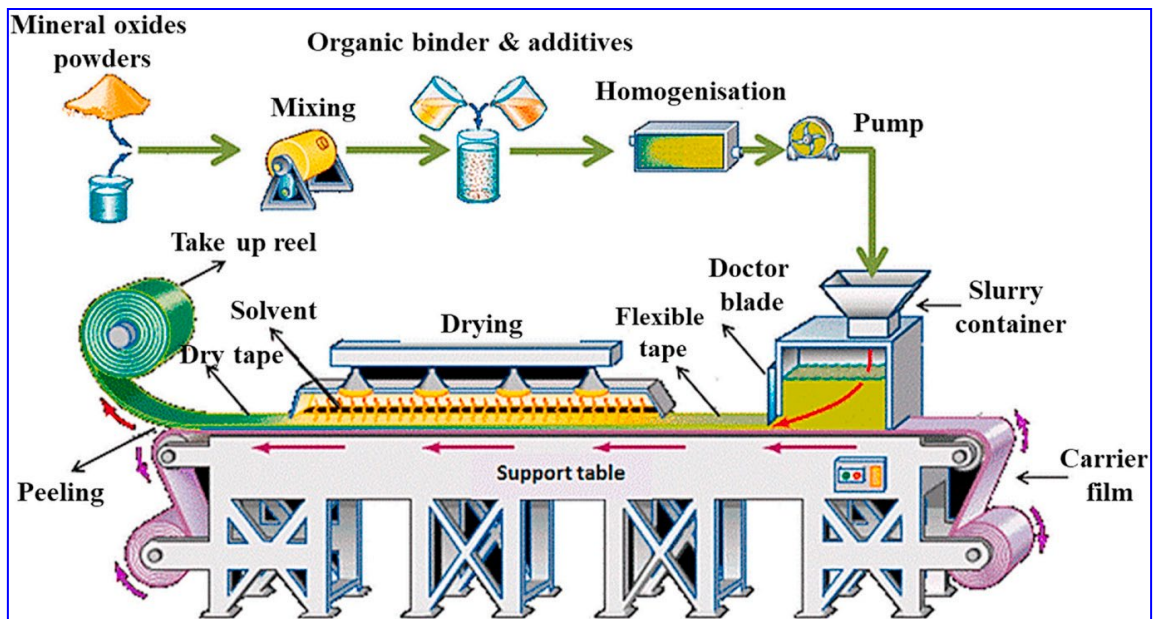


Figure I.12 : Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande (Saleh, 2020)

I.6.1.2 Coulage centrifuge (Centrifugal Casting) :

Le procédé de coulée centrifuge (CC) est une technique de coulage spécialement adapté à la production de pièces cylindriques sans utiliser de noyau. Cette méthode est constituée de cinq étapes comprenant ; préparation de moules; coulée du métal en fusion instantanément dans le moule rotatif ; refroidissement qui commence immédiatement au niveau des parois du moule et se poursuit vers l'intérieur ; élimination de la coulée après refroidissement et solidification de la coulée et enfin finition (qui fait référence à l'usinage, au meulage ou au sablage afin de nettoyer et de lisser le diamètre intérieur de la pièce) comme illustré à la Figure I.13. Dans la fabrication de FGM, le procédé de coulée centrifuge a de bonnes caractéristiques de remplissage du moule, un gradient de composition contrôlé grâce à la force centrifuge et des différences de densité entre les matériaux. De plus, cette méthode présente deux inconvénients : la capacité à produire uniquement des FGM de forme cylindrique et une limite à laquelle le type de gradient peut être créé. (Watanabe, 2005).

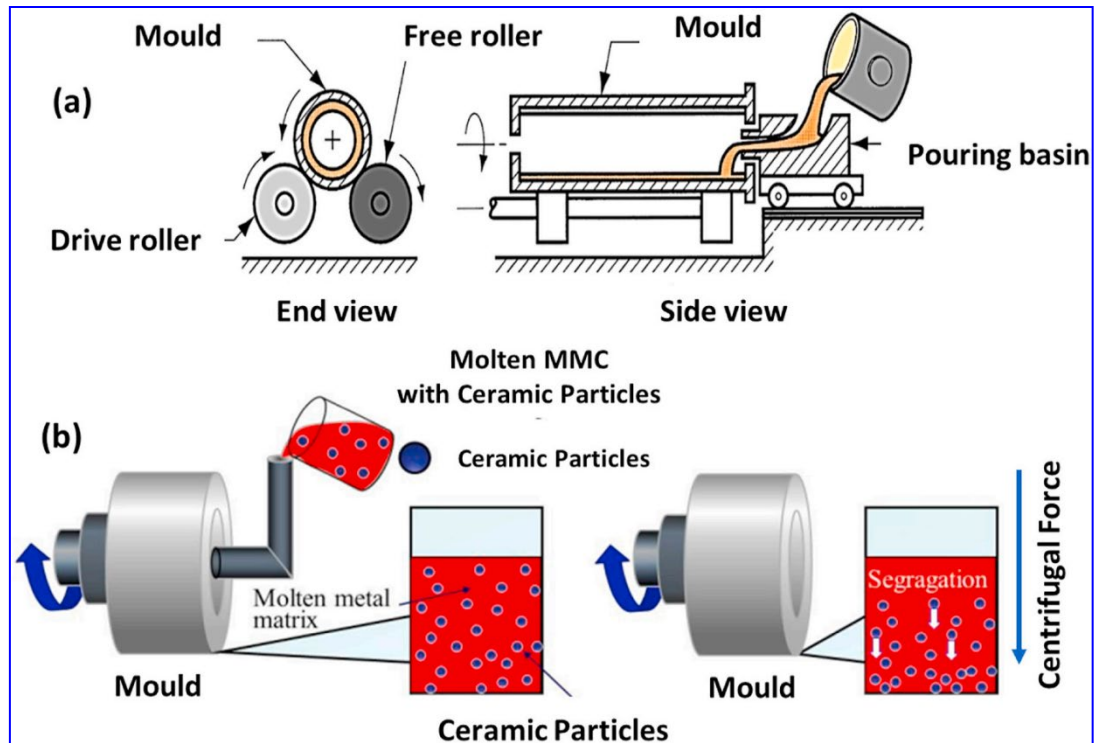


Figure I.13 : Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée) (Saiyathi, 2015)

I.6.2 Procédés de fabrication à l'état solide :

Les méthodes de fabrication à l'état solide, qui comprennent la compaction sèche des poudres et la fabrication additive, sont les plus prometteuses pour produire des matériaux à gradient fonctionnel.

I.6.2.1 Métallurgie des poudres :

La métallurgie en poudre (PM) est l'une des méthodes les plus anciennes pour la fabrication de composants d'ingénierie, mais elle est maintenant utilisée dans la production de FGM. Cette méthode est basée sur quatre étapes principales pour produire des matériaux à gradient fonctionnel :

- Pesée et mélange la poudre.
- L'empilage.
- Le compactage.
- Le frittage.

Suite au traitement des poudres (pesée et mélange de la poudre), la deuxième étape consiste à empiler le mélange successivement dans le moule en fonction de la répartition spatiale des matériaux. Ensuite, pour donner une résistance à la pièce, la poudre empilée est

compactée et frittée, comme le montre la figure I.14. Ce processus a plusieurs avantages, notamment : il est moins coûteux et facile à utiliser, il a un large contrôle de la composition et de la microstructure, il a peu d'énergie nécessaire à la combustion et il a un temps court pour produire les pièces finales.

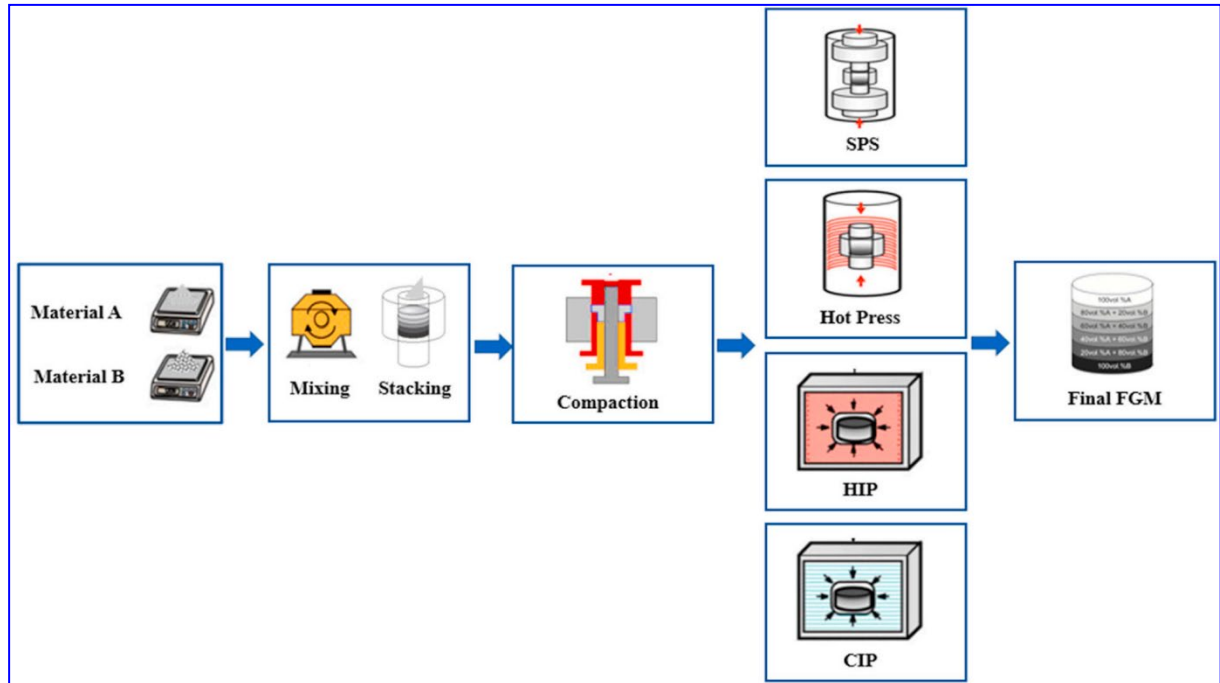


Figure I.14 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM (Surya, 2018)

I.6.2.2 Méthodes de fabrication additive:

La fabrication additive (FA) devenue la méthode la plus stratégique dans l'industrie moderne, qui change rapidement le mode de fabrication conventionnelle (Gardan, 2016). Cette technique est basée sur le principe de l'empilement discret, qui génère de manière cumulative des entités tridimensionnelles grâce à l'empilement continu des couches physiques. La FA possèdent plusieurs avantages aux concepteurs tel que : la fabrication des pièces personnalisées très complexe, la réduction de temps de fabrication, l'élimination de la gestion de la chaîne d'approvisionnement et une réduction remarquable des besoins en énergie. Les technologies de fabrication additive sont utilisées pour produire des structures en FGM avec des multiples propriétés matérielles en modifiant le rapport des matériaux de remplissage et des paramètres de processus de la couche d'accumulation. Actuellement, le procédé FA est le plus adopté pour fabriquer des structures en FGM. Il existe plusieurs techniques de FA, à savoir les méthodes basées sur le laser, méthode de projection de matériau et fabrication additive arc-fil (WAAM).

La technique FA au laser est utilisée un laser à haute énergie comme source de chaleur et un fil métallique ou une poudre comme matière première, empilant les matériaux couche par couche jusqu'à former directement des pièces complètes (figure I.15). Selon les différentes méthodes d'approvisionnement en matière première, cette technique peut être divisée en dépôt d'énergie dirigé par laser (DED) (figure I.15.a) et le frittage de laser sélectif (SLS) (figure I.15.b). La technologie de dépôt d'énergie dirigée (DED) est utilisée un laser comme source de chaleur pour chauffer le matériau directement sur le site de dépôt. Cela provoque la fusion et l'assemblage des matières premières pour former des structures couche par couche lorsque le bain fondu subit une solidification instantanée dès que la source d'énergie est retirée de l'emplacement de dépôt (Li, 2019) ; (Muller, 2013).

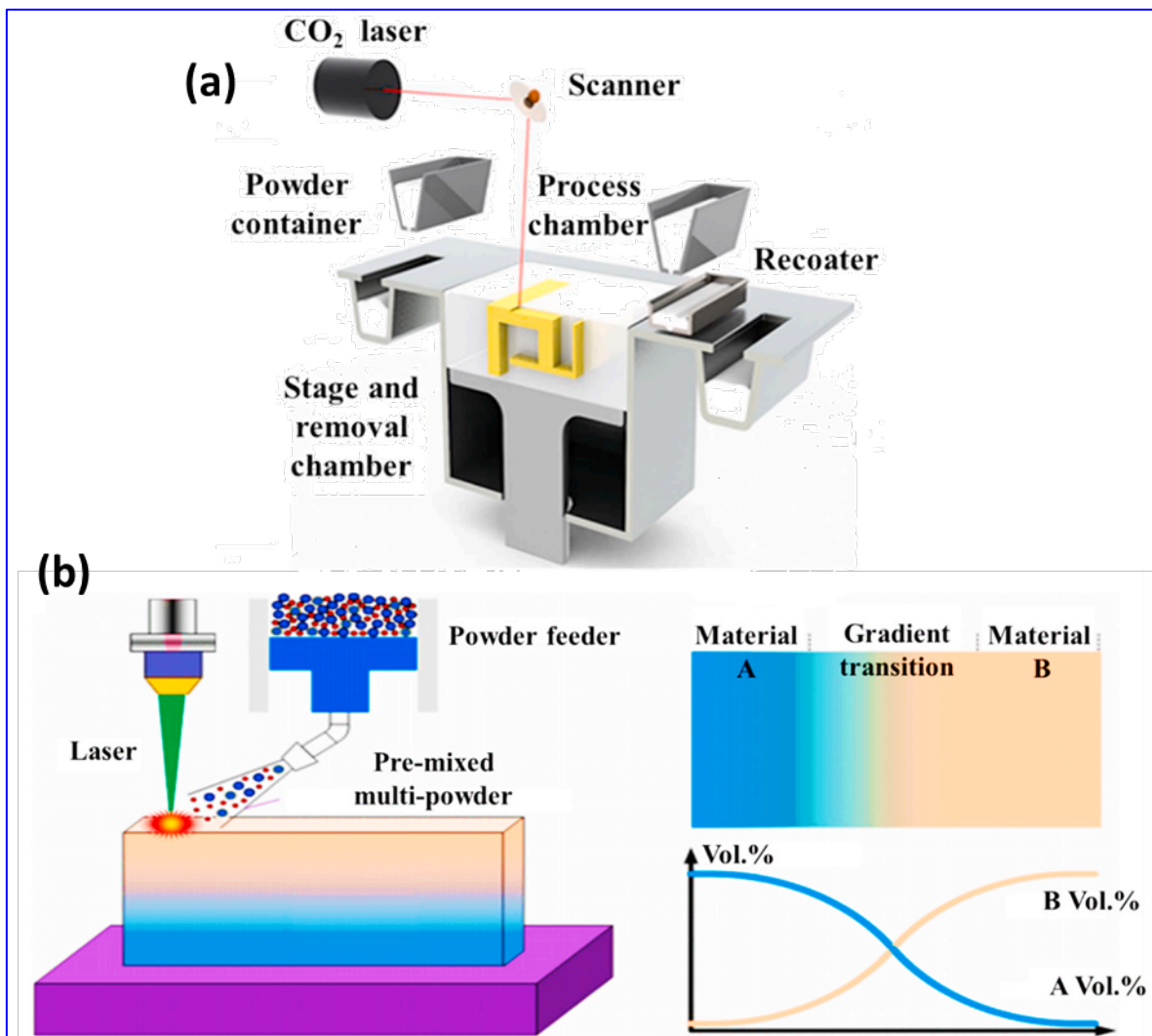


Figure I.15 : (a) : Illustration du procédé de frittage laser sélectif (SLS) (Saleh, 2020),
(b) : Illustration du procédé de dépôt d'énergie dirigé par laser (DED) (Li, 2017)

La méthode de projection de la matière (MJ) est une technologie d'impression 3D dans laquelle les matériaux sont éjectés pour former des gouttelettes et déposés sélectivement sur la plateforme (Amin, 2016). Cette technique dépose des gouttelettes de photopolymères liquides à partir de têtes d'impression piézo-thermiques. Ces gouttelettes déposées se solidifient par refroidissement rapide et forment la première couche. Les mêmes étapes sont répétées pour déposer les couches suivantes, qui s'accumulent progressivement pour construire une structure 3D. Comme illustré la Figure I.16.

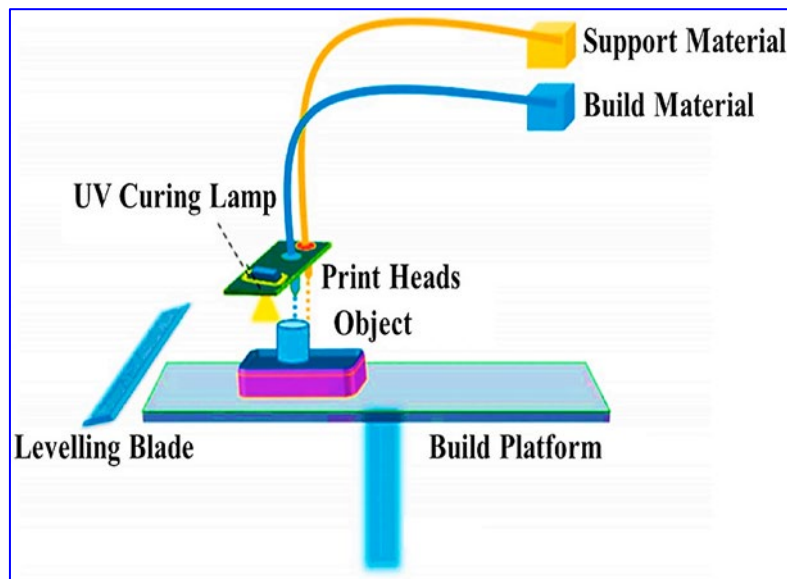


Figure I.16 : Illustration du procédé de projection de matériau (Sireesha, 2018)

La méthode de fabrication additive arc-fil (WAAM) est une nouvelle technique pour développer des pièces complexes, cette méthode est utilisée l'arc comme source de chaleur et la matière première sous la forme de fil métallique pour fabriquer des pièces métalliques couche par couche. Selon la forme de la source de chaleur à arc, une grande variété des techniques de fabrication additive est possible pour l'arc (plasma, TIG et MIG) comme le montre la Figure I. 17. En raison de ses avantages en termes d'efficacité de production, du temps de fabrication et de coût de fabrication, la fabrication additive fil et arc (WAAM) est devenue l'une des méthodes de fabrication les plus prometteuses pour la préparation des structures épaisses en FGM (Martinaa, 2012).

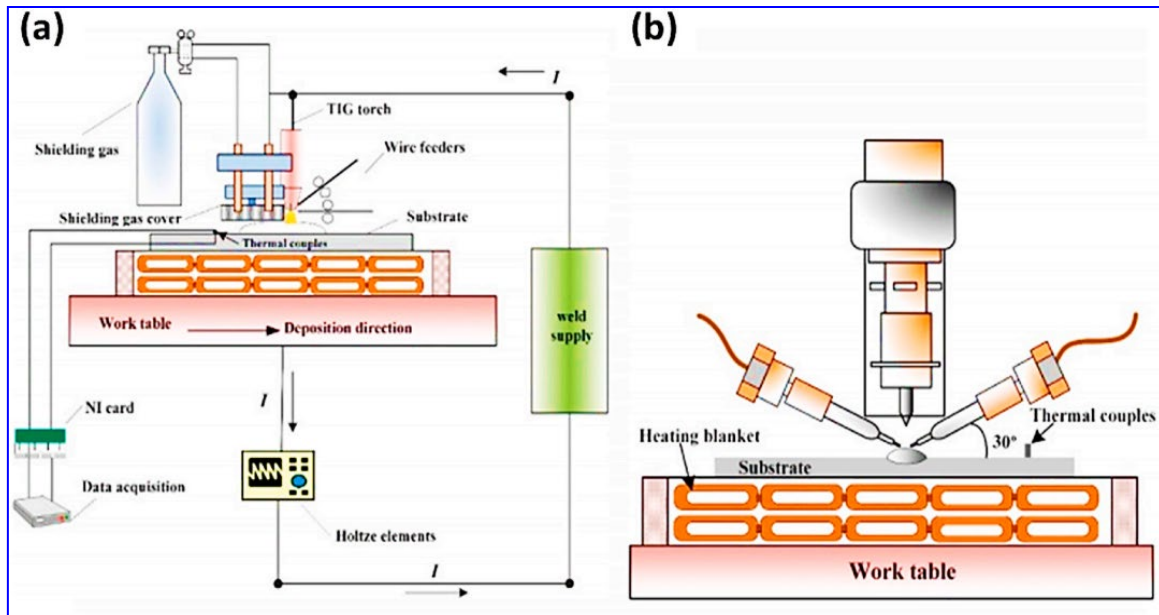


Figure I.17 : Illustration du procédé de fabrication additive fil et arc : (a) Concept du procédé WAAM pour les produits FGM, (b) unités d'alimentation à double fil (Wang, 2018)

I.6.3 Procédés de dépôt :

Les techniques les plus importantes pour créer des revêtements minces en matériaux de propriété fonctionnel à l'échelle microscopique sont les méthodes basées sur le dépôt, telles que le dépôt en phase vapeur, la projection thermique et le dépôt par électrophorèse. Ces techniques peuvent être utilisées pour créer une couche graduée continue ou discontinue avec des propriétés de gradient dans une, deux ou trois directions.

I.6.3.1 Méthodes de dépôt en phase vapeur

L'une des méthodes les plus courantes pour produire une couche fine graduée est la méthode de dépôt en phase vapeur. Les dépôts en phase vapeur sont généralement classés en deux catégories : le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD). Pour créer des films et des revêtements fonctionnellement gradués, la méthode de dépôt chimique en phase vapeur est utilisée. À l'aide d'un système de dépôt sous vide, comme illustré à la Figure I.18.b, cette méthode peut produire des matériaux solides de haute qualité.

Le processus de dépôt physique en phase vapeur PVD est réalisé par la vaporisation du matériau à déposer, et le matériau vaporisé (matériau atomisé) est ensuite transféré sur la surface à revêtir comme montre la Figure I.18.a. Contrairement au CVD, dans le procédé PVD, l'évaporation du matériau source est le concept de base pour déposer des céramiques/métaux sur le substrat. À cause de ses nombreux avantages, tels que la possibilité

de produire des films très minces de haute pureté avec des structures graduées, ce processus est considéré comme l'une des techniques les plus considérables pour produire des matériaux fonctionnellement gradués à faible épaisseur.

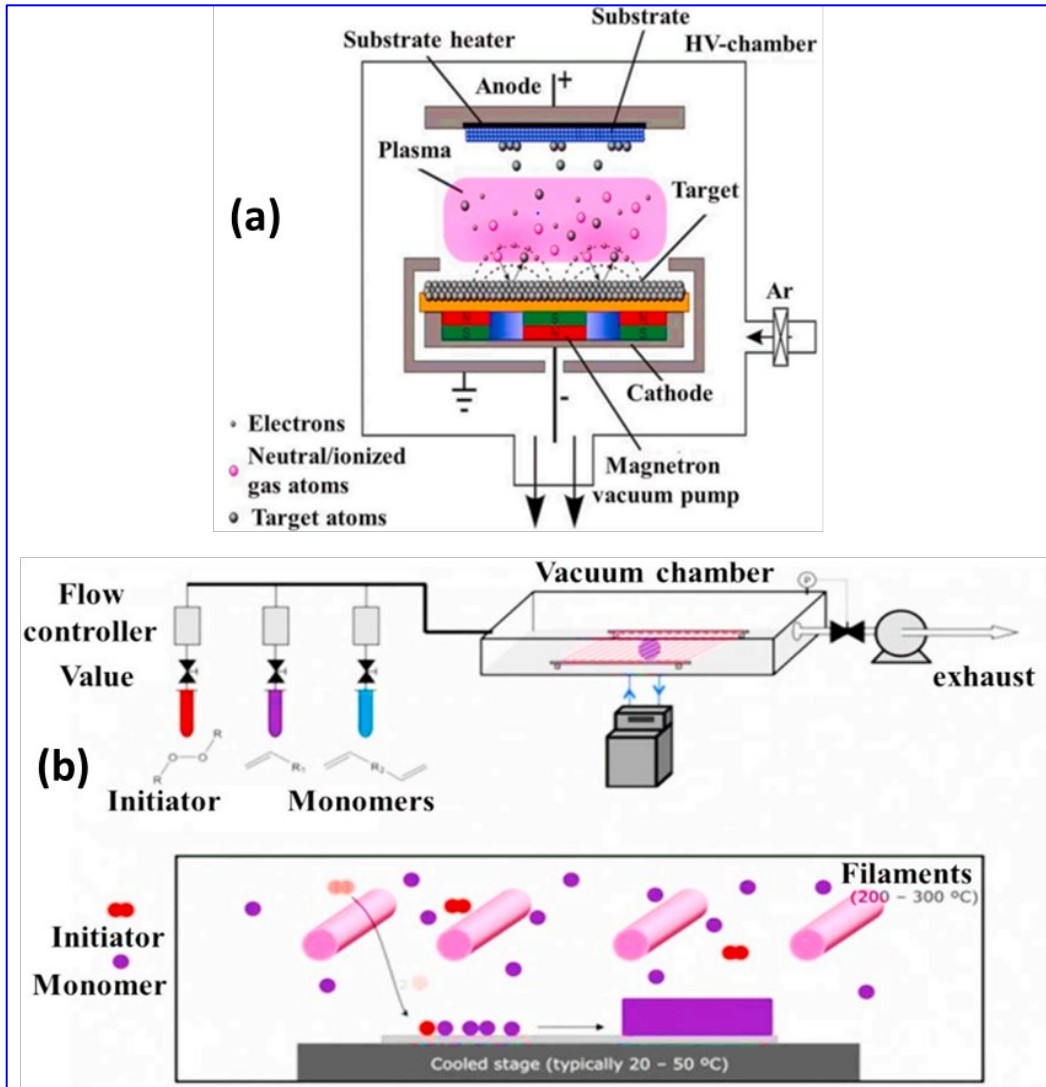


Figure I.18 : (a) : Le processus de dépôt physique en phase vapeur (PVD) (Saleh, 2020), (b) : Diagramme de l'installation pour la synthèse d'un SiC/C FGM par le biais du dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (El-Galy, 2019)

I.6.3.2 Procédé de projection thermique

Les procédés de revêtement utilisés pour déposer des revêtements métalliques ou non métalliques sont appelés procédés de projection thermique (TSP). Une source de chaleur est utilisée dans cette méthode pour chauffer le matériau de revêtement jusqu'à ce qu'il soit fondu ou semi-fondu, puis les gaz sont traités et pulvérisés sur un matériau de base. Ces matériaux fondus ou liquides sont poussés jusqu'à ce qu'ils se solidifient et forment une couche solide, comme illustré à la Figure I.19

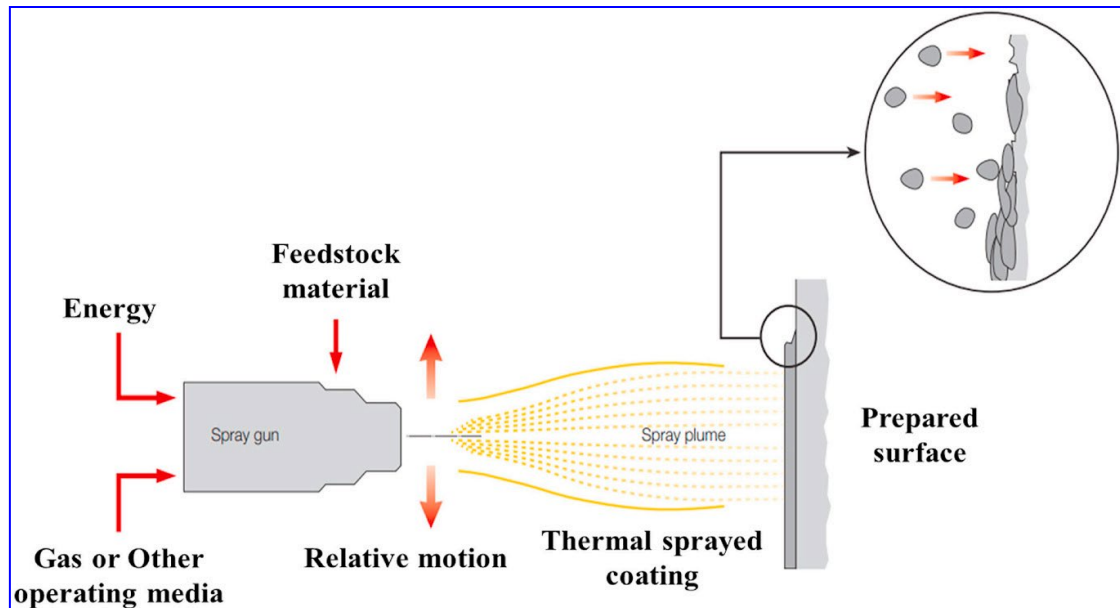


Figure I.19 : Schéma illustratif du processus de pulvérisation thermique (Sulzer, 2013)

I.7. Application des FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués ont une large gamme d'applications dans différents domaines. Les avantages de ces matériaux, tels que la possibilité de combiner des propriétés contradictoires, leur résistance à la rupture et leur réduction des contraintes thermiques, en font des candidats potentiels pour de nombreuses applications. Voici quelques exemples d'applications des FGM : (Houari, 2011).

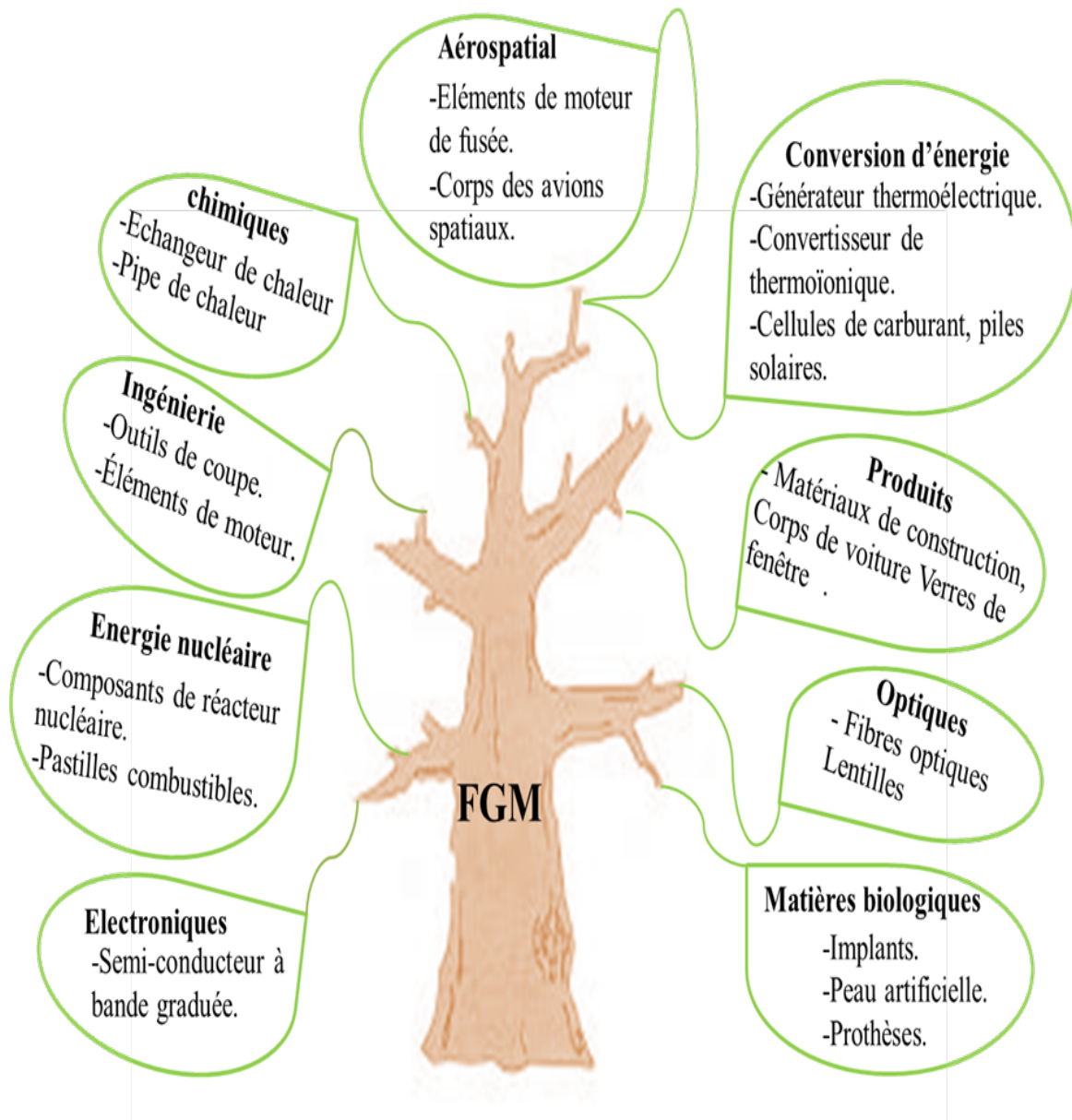


Figure I.20 : Domaines d'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel

I.7.1 Aérospatiale :

Initialement, l'idée principale de développer les FGM a été pour l'industrie aérospatiale pour minimiser les contraintes thermiques entre les surfaces extérieures et intérieures des engins spatiaux. Elles sont maintenant utilisées dans de nombreuses autres applications, telles que les moteurs de fusée, les structures d'engrenage d'engin spatial, les plaques d'échange de chaleur, les structures aérospatiales critiques, les réflecteurs, les panneaux solaires, le boîtier de la caméra, les roues de turbine, les capuchons avant, le bord d'attaque des missiles et des navettes spatiales, comme illustré à la Figure. I.21. De manière générale, l'utilisation des matériaux à fonctionnement gradués dans l'industrie aérospatiale reste augmentée jour par jour en raison de la résistance de haute qualité aux chocs thermiques (Bohidar, 2014).



Figure I.21 : *usage des matériaux fonctionnel en aérospatial* (Saleh, 2020)

I.7.2 Application biomédicale :

Au cours des dernières années, les chercheurs se sont concentrés sur l'utilisation de matériaux à gradient de propriétés dans les applications orthopédiques et les dents artificielles pour améliorer la biocompatibilité, la résistance à l'usure et la dureté. Plusieurs études ont été menées pour améliorer ces propriétés du matériau biocompatible dans le corps humain à l'aide des FGM (Bandyopadhyay, 2009) (Gupta, 2017). Elles sont également utilisées pour créer des prothèses médicales personnalisées qui s'adaptent à la morphologie unique de chaque patient (Figure I.22.a), et pour produire des implants dentaires (Figure I.22.b). (Bakarich, 2017) est fabriqué un ménisque artificiel à l'aide de fibres hydrogels renforcés avec dureté répartie directionnellement et rigidité grâce à un procédé d'impression par extrusion. Un tendon artificiel bio-inspiré a également été développé, composé de tissu conjonctif aux propriétés mécaniques graduées entre le muscle et l'os (Figure I.22.c).

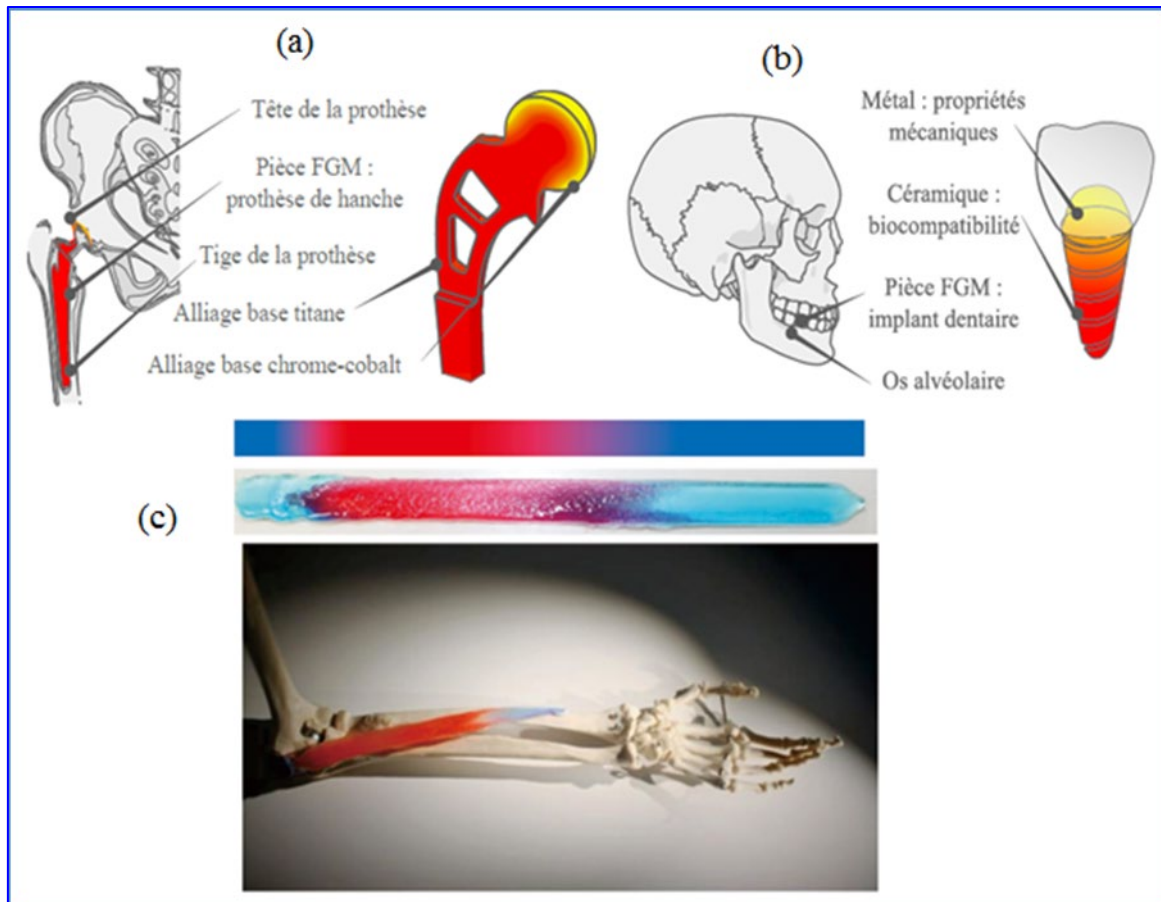


Figure I.22 : usage des matériaux fonctionnel en médecine, (a) Prothèse de hanche (Bandyopadhyay, 2009) (b) Implant dentaire (Watari, 2004) (c) ménisque artificiel (Bakarich, 2017)

I.7.3 Défense :

Dans l'industrie de la défense, les matériaux graduels sont utilisés pour réduire le poids des véhicules et empêcher la propagation des fissures. Ils sont utilisés. Le concept des matériaux graduels est utilisé dans de nombreuses applications militaires, notamment comme matériaux anti-perforation, pour la fabrication de plaques de blindage et de gilets pare-balles, ainsi que pour la fabrication de pièces défensives telles que les tiges de guidage, les galets de précision, les arbres, les tubes, les verrous, les boîtiers d'essieux et les percuteurs. En raison de leurs hautes performances et de leur durabilité dans des conditions difficiles Le principe des matériaux graduels a été utilisé pour créer des armures légères à faible coût et haute résistance aux chocs (Chen, 2007).

I.7.4 Applications énergétiques et électroniques

Les matériaux graduels sont largement utilisés dans les systèmes énergétiques tels que les générateurs d'énergie thermique, les générateurs d'énergie thermique, les générateurs

d'énergie thermique, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, les panneaux solaires et les cellules solaires. Ils sont également utilisés dans les piézoélectriques pour les transducteurs ultrasonores, les batteries, les revêtements de turbine de lame et les électrodes graduées pour la production de piles à combustible à oxyde solide (Müller, 2003) ; (Bharti, 2013).

I.7.5 Industrie automobiles

En raison des coûts élevés de fabrication, les FGM sont généralement utilisés très peu dans l'industrie automobile (Udupa, 2012). En général, les FGM ne sont utilisés que pour des composants essentiels tels que les pistons et les chemises de cylindres du moteur diesel, les chambres de combustion, les freins de course, les arbres de transmission et les volants d'inertie. (Figure I.23).

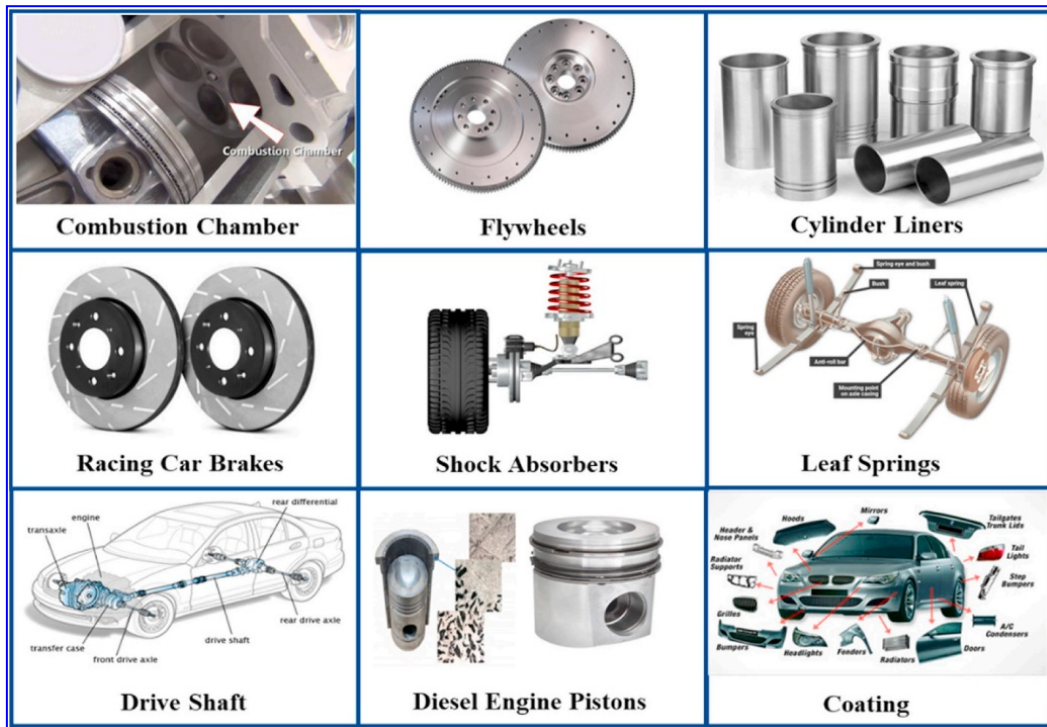


Figure I.23 : usage des matériaux fonctionnel en automobile (Saleh, 2020)

I.7.6 Application dans le domaine du Génie civil et Travaux publics :

Les matériaux composites avec porosités et les matériaux à gradient fonctionnel sont des avancées technologiques prometteuses dans le domaine du génie civil et des travaux publics. Ces matériaux innovants offrent de nouvelles opportunités d'amélioration des performances et de la durabilité des structures civiles et industrielles tout en répondant aux exigences économiques et environnementales de notre époque. Les FGM sont des matériaux hétérogènes avec une variation des propriétés continue et contrôlée à travers leur épaisseur.

En optimisant les performances structurales, cette gradation permet d'adapter le matériau aux besoins spécifiques de l'application. Dans le domaine du génie civil et des travaux publics, les FGM sont utilisés pour améliorer la résistance à la corrosion, la résistance aux températures élevées et la résistance mécanique des structures. Par exemple, ils sont employés dans la construction de ponts, de bâtiments, de tunnels, ainsi que dans les infrastructures de transport et de distribution d'eau. Les matériaux composites avec porosités, quant à eux, présentent des caractéristiques spécifiques qui leur confèrent des propriétés intéressantes pour diverses applications dans la construction civile et industrielle. La présence de porosités dans ces matériaux permet d'obtenir une légèreté et une capacité d'isolation thermique et acoustique supérieure, tout en maintenant des performances mécaniques satisfaisantes. Les matériaux composites poreux sont couramment utilisés dans les panneaux de construction, les revêtements de sol, les éléments de façade et les systèmes de protection contre les vibrations et le bruit. Dans le contexte actuel, où les enjeux environnementaux et la recherche de solutions durables occupent une place prépondérante, l'utilisation des FGM et des matériaux composites avec porosités dans le génie civil et les travaux publics offre de réelles opportunités.

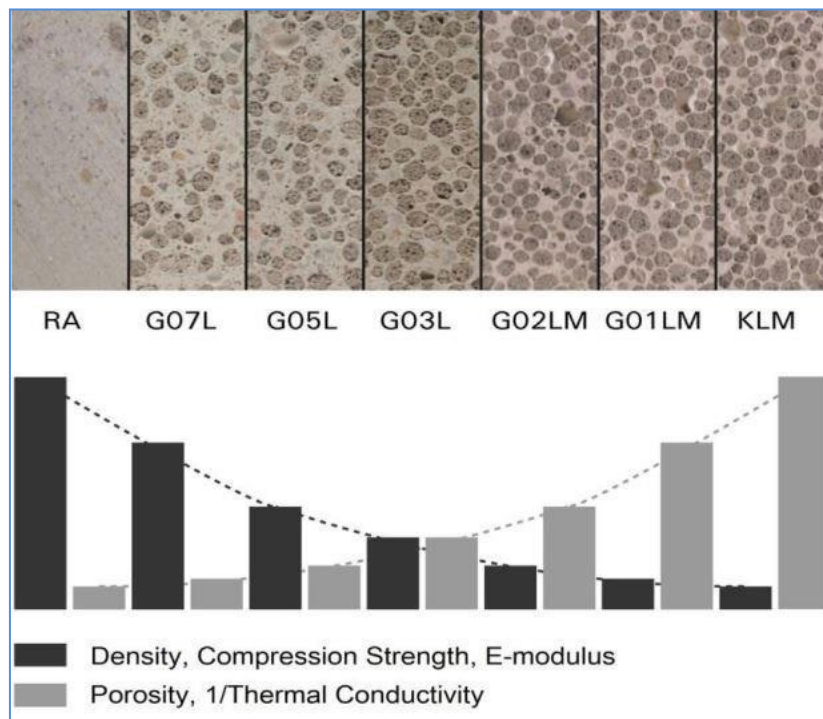


Figure I.24 : Traits du béton durci en réponse à une élévation progressive de la porosité (Herrmann, 2016)

Ces matériaux permettent non seulement d'améliorer les performances et la longévité des structures, mais aussi de réduire leur empreinte écologique en limitant l'utilisation de

ressources naturelles et en diminuant les émissions de gaz à effet de serre liées à la fabrication et au transport des matériaux traditionnels. Finalement, les FGM et les matériaux composites avec porosités offrent un potentiel considérable pour transformer le secteur de la construction civile et industrielle, en répondant aux défis techniques, environnementaux et économiques auxquels nous sommes confrontés aujourd'hui. Leur utilisation dans le génie civil et les travaux publics ouvre la voie à des solutions innovantes et durables pour les infrastructures du futur. (Voir Figure II.24) (Herrmann, 2016).

Les chaussées rigides et souples peuvent également bénéficier des matériaux à gradient de propriétés. Les systèmes de chaussée en béton peuvent tirer parti des principes des FGM en ayant des couches de propriétés de matériaux spécifiques placées dans un emplacement et une épaisseur optimaux pour améliorer la performance structurelle globale par rapport à un placement de matériaux homogènes. Les ruptures de chaussée se produisent avec tout ou une combinaison de problèmes géologiques, géotechniques, de conception, de construction, de chargement et d'entretien. Une des méthodes pour une durabilité des routes consiste à changer la gradation de mélange d'asphalte ou à modifier le bitume ou le mélange avec des additifs pour améliorer significativement les propriétés de bitume de base (Oruç, 2016) ; (Yao, 2018).

Enfin, dans le domaine des tunnels, les segments de béton préfabriqués conventionnels renforcés avec des barres d'acier sont vulnérables à la corrosion, ce qui peut entraîner un écaillage du béton et une perte de capacité structurelle associée. De plus, les tronçons de tunnel sont soumis à des tensions lors des phases de transition, ce qui peut contribuer à l'apparition de fissures et à la diminution de la fiabilité de la maintenance. L'utilisation de matériaux à gradient de propriétés peut aider à atténuer ces problèmes en améliorant la capacité de contrôle de la fissuration et l'amélioration conséquente de la résistance à la corrosion (Ma, 2009). En somme, les matériaux à gradient de propriétés offrent des perspectives intéressantes dans le domaine du génie civil et des travaux publics, en permettant de répondre à des exigences de performance structurelles et thermiques spécifiques, de minimiser le poids propre, d'améliorer la durabilité et la résistance à la corrosion des structures en béton et des chaussées, ainsi que de contrôler la fissuration dans les tunnels.

I.8. Les propriétés matérielles des poutres FGM parfaite :

Les matériaux fonctionnellement gradués sont supérieurs aux matériaux homogènes fabriqués à partir du même matériau que les FGM car ils ont des microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace, ce qui signifie que leurs

propriétés varient de manière continue à travers l'épaisseur. Cette inhomogénéité matérielle peut être mathématiquement idéalisée en considérant la matière comme homogène. Dans la littérature, plusieurs modèles et méthodologies micromécaniques pour obtenir la gradation des propriétés matérielles des FGM ont été proposées par les chercheurs, notamment le modèle de Voigt (Markworth, 1995), le schéma Mori-Tanaka (Mori, 1973) et le modèle auto-cohérent d'Hill (Hill, 1965). Le schéma Mori-Tanaka et le modèle de Voigt sont principalement utilisés par les chercheurs pour modéliser les propriétés des matériaux dans les structures FGM, en raison de sa simplicité de calcul et moins de temps est nécessaire pour calculer. La plupart du temps, le coefficient de Poisson est considéré comme constante qui simplifie encore le calcul.

I.8.1 La loi des mélanges :

Les chercheurs utilisent la loi des mélanges pour calculer les propriétés matérielles des matériaux graduels. Cette méthode utilise les fractions volumiques et les caractéristiques des différents matériaux qui composent le matériau graduel pour déterminer la propriété souhaitée du matériau.

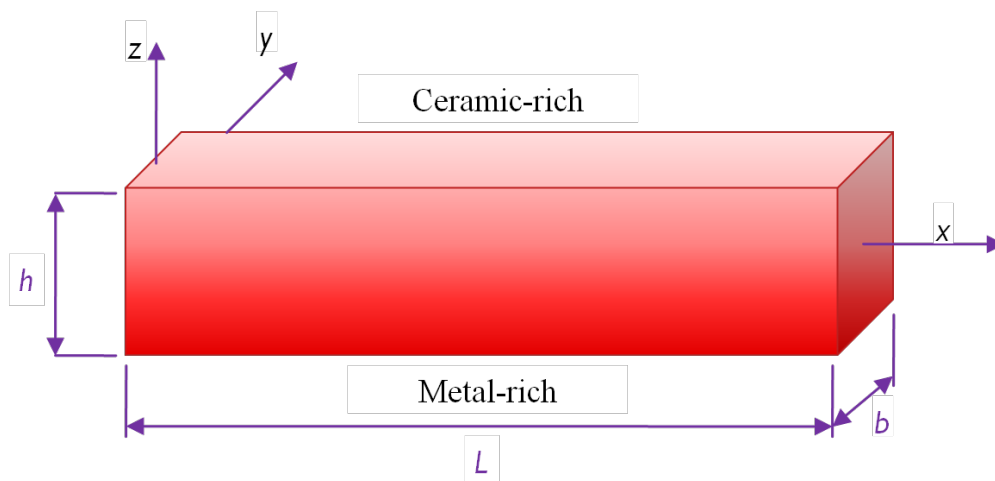


Figure I.25 : Géométrie d'une poutre FGM

Dans le modèle de Voigt (Shen, 2009), les propriétés matérielles (P) des FGM peut être exprimées sous la forme suivant :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (I.1)$$

Avec P_i : sont les propriétés matérielles telles que le module d'élasticité E , la densité ρ , et V_i : désigne la fraction volumique des matériaux constitutifs i , sachant que la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Généralement, les structures FGM sont constituées par deux composants : de la céramique et le métal. Dans ce contexte, la loi de mélange de Voigt se réduit à :

$$\begin{aligned} P &= P_c V_c + P_m V_m \\ V_c + V_m &= 1 \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Les lettres utilisées dans l'indice, c'est-à-dire m et c , se réfèrent respectivement au métal et à la céramique.

1.8.1.1 Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM :

Le modèle le plus cité et le plus utilisé dans la littérature scientifique est la loi de puissance. Selon cette loi, les propriétés du matériau changent dans une direction unique (unidirectionnelle), définie par l'équation suivante :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.4})$$

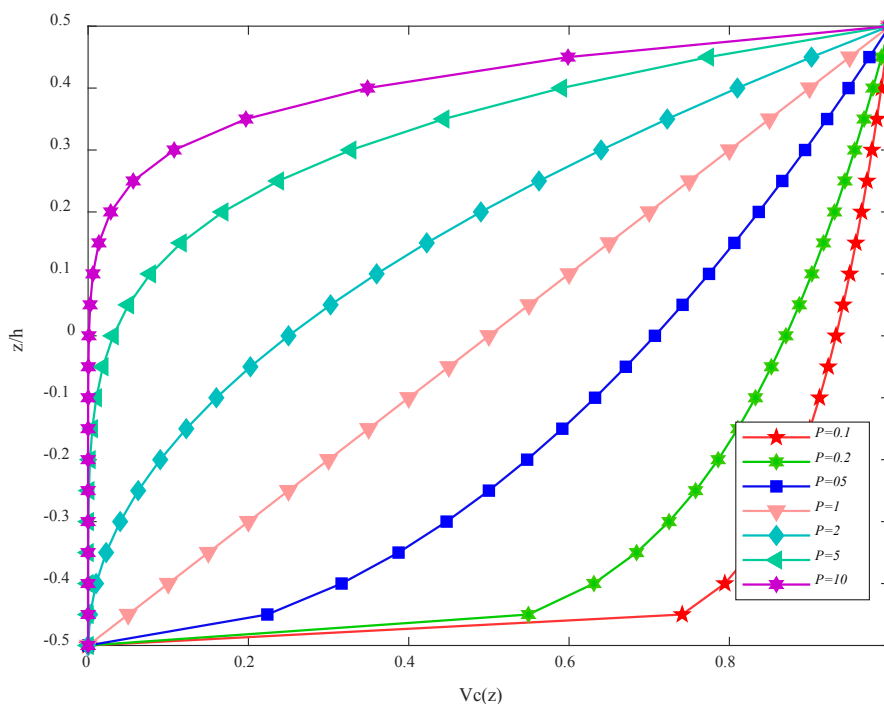


Figure I.26 : Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM

Avec, p est appelé l'indice de la loi de puissance qui indique le niveau d'inhomogénéité matérielle dans les FGM, après la définition de la fraction volumique locale, les propriétés matérielles effectives des FGM sont calculées par la loi suivant (Bao, 1995) :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \cdot V(z) \quad (I.5)$$

Où E_c et E_m sont les modules de Young de la surface supérieure ($z=+h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la poutre FGM, respectivement. La variation du module de Young de la poutre P-FGM à travers l'épaisseur est illustrée sur la Figure I.26. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

1.8.1.2 Propriétés matérielles d'une poutre S-FGM :

Deux fonctions de loi de puissance (P-FGM) sont utilisées pour déterminer ce modèle. Cette loi améliore la répartition des contraintes à chaque interface. Les structures composites à plusieurs couches sont construites à l'aide de ce modèle (Chi, 2003), et cette loi est fournie par :

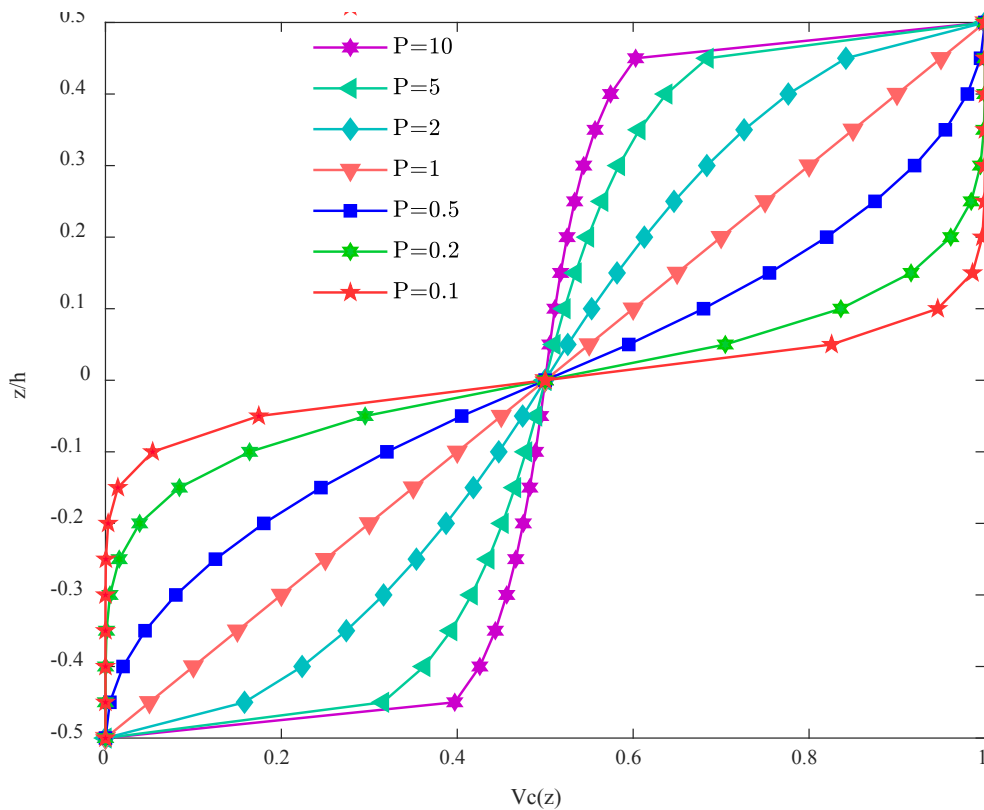


Figure I.27 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6.b})$$

En utilisant cette loi des mélanges, pour calculer le module de Young de la poutre S-FGM, qui peut être exprimé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.7.b})$$

Les distributions du module de Young de la poutre S-FGM dans la direction d'épaisseur est illustré sur la Figure I.27.

1.8.1.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Ce modèle est couramment utilisé par les chercheurs pour traiter les problèmes liés à la mécanique de la rupture. Selon cette loi de gradation (Delale, 1983), les propriétés matérielles des FGM sont exprimées dans l'équation suivante :

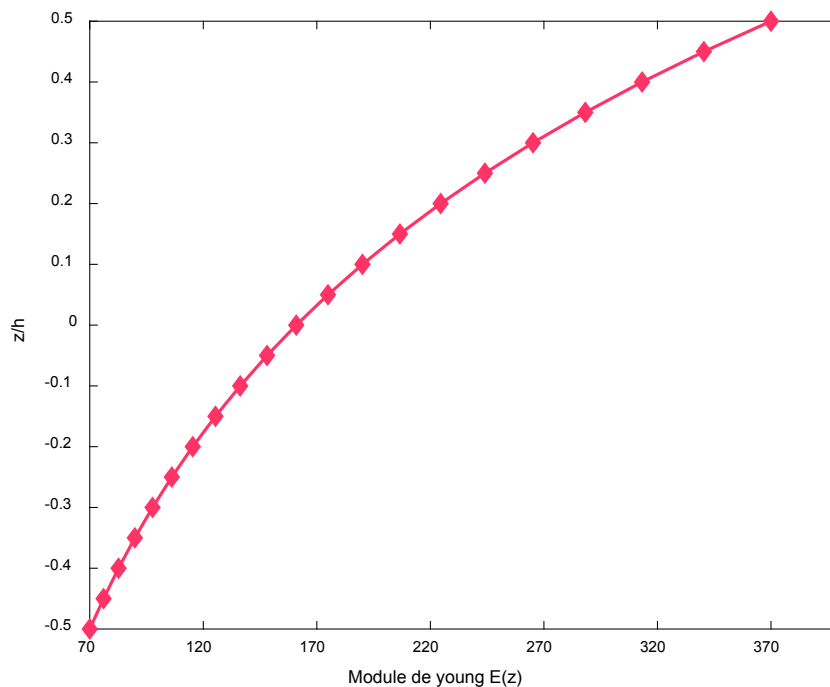


Figure I.28 : Variation de la fraction volumique dans une poutre E-FGM

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.8.a})$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (\text{I.8.b})$$

La distribution du module de Young à travers l'épaisseur selon la loi exponentielle E-FGM est illustrée sur la Figure I.28.

I.9. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM poreuses:

En effet, les propriétés mécaniques des FGM peuvent être considérablement affectées par la porosité, et des études ont été menées pour comprendre le comportement mécanique des éléments structurels avec porosité. Pour imiter le comportement des matériaux à gradient de porosité, des modèles de formulation de la distribution des micro-vides dans les structures fonctionnellement graduées FGP ont été développés. La règle de mélange de Voigt modifiée est couramment utilisée pour modéliser les propriétés des FGM poreuses. Cette règle de mélange prend en compte les propriétés des matériaux constitutifs et leur fraction volumique pour prédire les propriétés des FGM poreuses. En utilisant cette règle de mélange, plusieurs modèles de porosités ont été développés, y compris les porosités symétriques, non symétriques, uniformes, non uniformes et logarithmiques-non uniformes. Les porosités symétriques sont des micro-vides qui sont uniformément répartis dans la structure. Les porosités non symétriques sont des micro-vides qui ne sont pas uniformément répartis dans la structure. Les porosités uniformes sont des micro-vides qui ont une distribution uniforme dans la structure. Les porosités non uniformes sont des micro-vides qui ont une distribution non uniforme dans la structure. Les porosités logarithmiques-non uniformes sont des micro-vides dont la distribution suit une loi logarithmique. En fonction de la distribution de la porosité, la résistance mécanique et les propriétés thermiques des FGM poreuses peuvent varier considérablement. Par conséquent, il est important de comprendre les propriétés des FGM poreuses pour les utiliser efficacement dans les applications du génie civil et des travaux publics. Des études expérimentales et numériques ont été menées pour évaluer les propriétés des FGM poreuses et de nouveaux modèles ont été développés pour améliorer la compréhension de leur comportement mécanique et thermique (Liu, 2018) ; (Xiao, 2019) ; (Xu, 2020).

I.9.1 Poutre FG avec porosité symétriques :

Dans ce modèle, la distribution de la porosité est symétrique par rapport le plan médian de la poutre comme montré sur la Figure I.29 (a) (We, 2020). Les propriétés effectives des matériaux de la poutre FG sont données par :

$$P(z) = P_1 [1 - e_0 \cos(\pi \cdot z)] \quad (\text{I.9})$$

P représente la propriété qui varie suivant l'épaisseur de la poutre Elle peut être le module de young, et la masse volumique, e_0 est le coefficient de la porosité. Comme on peut le voir dans la Figure I.29 (a), les valeurs minimales sont sur le plan médian de la poutre avec le plus grande taille et la plus grande densité de pores internes alors que le maximum des valeurs existe sur les surfaces supérieure et inférieure qui sont égales aux valeurs de poutres homogènes en matériaux purs.

I.9.2 Poutre FG avec porosité non-symétriques :

Dans ce cas, la distribution de la porosité est non symétrique par rapport le plan médian de la poutre et les modules d'élasticité et la masse volumique sont les maximum sur la surface supérieure puis diminuent jusqu'aux valeurs minimales sur la surface inférieure (We, 2020), comme montré sur la Figure I.29 (a), avec les propriétés effectives des matériaux étant données par :

$$P(z) = P_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} z + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{I.10})$$

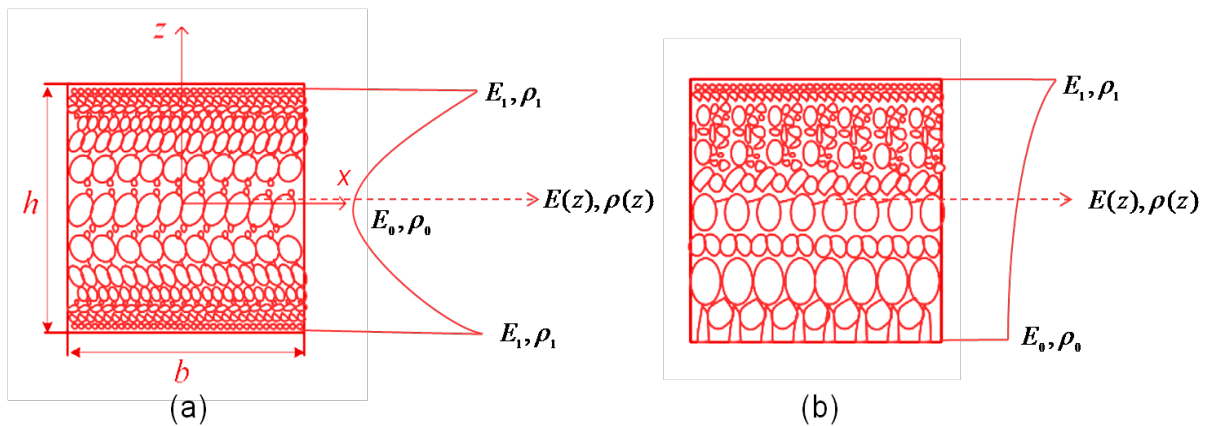


Figure I.29 : Répartition de porosité sur l'épaisseur, (a) porosité symétriques (b) porosité non symétriques

I.9.3 Poutre FG avec porosité uniforme :

Dans ce cas, la distribution de la porosité est supposée être répartir de manière égale dans les phases céramique et métallique (Zahedinejad, 2020), comme le montre la figure I.30

(a). Les propriétés matérielles effectives des matériaux à gradient fonctionnel avec des porosités uniformément réparties peuvent être calculées par la relation suivante :

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) + P_m - \frac{e_0}{2}(P_c + P_m) \quad (\text{I.11})$$

Où P_m et P_c sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement. $V_c(z)$ la fraction volumique du matériau.

I.9.4 Poutre FG avec porosité non uniforme :

Dans ce cas, les porosités sont supposées être réparties de manière inégale et principalement concentrées dans la zone médiane de la section transversale et la quantité de porosités diminue linéairement jusqu'à zéro sur les surfaces supérieures et inférieures (Zahedinejad, 2020). Une démonstration schématique de la distribution inégale des porosités est illustrée à la figure I.30 (b). Les propriétés matérielles effectives sont obtenues par l'équation suivante :

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) + P_m - \frac{e_0}{2}(P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{I.12})$$

I.9.5 Poutre FG avec porosité logarithmiques-non uniformes :

Dans ce modèle (Gupta 2018), une fonction logarithmique est utilisée pour décrire la distribution des porosités. Comme on le voit sur la figure I.30 (c), la concentration de porosités existe dans le plan médian de la coupe transversale. Sur la base de la distribution logarithmique inégale de la porosité, les propriétés effectives des matériaux peuvent être calculées par l'équation suivante :

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) + P_m - \log\left(1 + \frac{e_0}{2}\right)(P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{I.13})$$

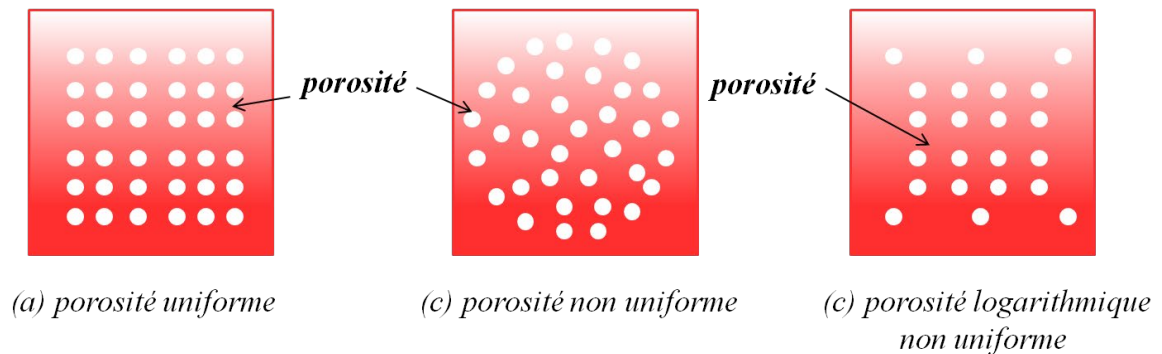


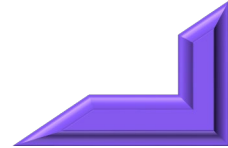
Figure I.30 : Représentation de divers schémas de porosité

I.10. Conclusion :

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une catégorie de matériaux nouvellement créés pour la synthétisation qui offrent un assemblage de caractéristiques fonctionnelles et structurelles diverses, avec une mutation idéale et continue de la structure, de la composition et de la dispersion de la porosité entre ces matériaux. La conception des FGM a commencé il y a de nombreuses années et a connu une évolution significative depuis grâce à l'évolution de la science des matériaux et des techniques de fabrication modernes. Les FGM sont largement utilisés dans le domaine de l'ingénierie civile et des travaux publics, y compris la construction de structures en béton, les revêtements routiers rigides et flexibles, les tunnels et d'autres. Les FGM ont la capacité d'améliorer les performances des structures qu'ils forment, de renforcer la résistance à la corrosion, la durabilité et la résistance aux tensions mécaniques tout en réduisant les coûts et les effets sur l'environnement. Les ingénieurs et les scientifiques impliqués dans la conception et la fabrication de structures avec gradient de caractéristiques doivent examiner les caractéristiques des FGM. Les principes guidant la variation des caractéristiques matérielles des FGM sont des outils essentiels pour la modélisation des caractéristiques des FGM et pour la conception et la fabrication de structures à gradient fonctionnel. L'étude des propriétés des FGM est un sujet de recherche important pour les ingénieurs et les scientifiques qui s'intéressent à la conception et à la fabrication de structures à gradient de propriétés. Les lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des FGM sont des outils importants pour la modélisation des propriétés des FGM et pour la conception et la fabrication des structures à gradient fonctionnel. Les lois des mélanges, l'approche du modèle auto-cohérent d'Hill et la méthode Mori-Tanaka sont les trois lois les plus couramment utilisées pour décrire la variation des propriétés matérielles des FGM. Enfin, la compréhension du comportement mécanique des éléments structurels avec porosité est importante pour les ingénieurs et les scientifiques qui s'intéressent à la conception et à la fabrication de structures FGM. Il existe de nombreux modèles proposés pour représenter la répartition des micro-vacuités dans les structures poreuses FGM et leur réaction mécanique. Le chapitre suivant fournit un aperçu de la littérature existante sur les différentes théories des poutres réagissent aux chargements dévers.



CHAPITRE II



II.1 Introduction :

Dans le domaine du génie civil, mécanique, aéronautique et aérospatiales, diverses structures de type poutre (par exemple, poutres de pont, rails de train, conduites hydrauliques et arbres de rotor, etc.) sont généralement utilisées pour assembler des composants sophistiqués et supporter des charges externes. Cependant, leur comportement est souvent étudié dans le cadre de la mécanique des structures. Diverses méthodes pour étudier le comportement des poutres ont été présentées jusqu'à présent. Sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, bien qu'une méthode basique et précise, est compliquée et difficile à cause de l'analyse tridimensionnelle de la poutre. Pour réduire ces complexités, et en supposant que l'épaisseur des poutres est faible par rapport à d'autres dimensions comme la longueur, des hypothèses appelées théories des poutres sont présentées. Une littérature spécialisée et riche est disponible sur la modélisation des structures en poutre. La théorie la plus simple pour étudier le comportement des poutres est la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli - appelée également dans la littérature la théorie des poutres classique (Atmane, 2010) ; (Shahba, 2011) ; (Sarkar, 2013). Cette théorie suppose que les sections transversales planes d'une poutre restent planes et orthogonales à l'axe central après déformation. De plus, la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur une approche simple par l'ignorance de l'effet de cisaillement transversal, ce qui peut conduire à des résultats inexacts dans certaines situations. Par conséquent, cette théorie est généralement précise pour les poutres minces et moins précise pour les poutres plus épaisses. Afin de réduire l'erreur dans l'analyse des poutres relativement épaisses, une autre théorie connue sous le nom de théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre, plus communément connue sous le nom de théorie des poutres de Timoshenko (Chakraborty, 2003) ; (Sina, 2009) ; (Wei, 2012). Dans cette théorie, l'impact de la déformation par cisaillement sur l'épaisseur est pris en compte, et la tension de cisaillement transversal reste constante à travers l'épaisseur. Néanmoins, l'emploi d'un coefficient de correction du cisaillement transversal s'avère nécessaire pour rectifier la discordance entre la tension réelle et celle prédite par la théorie de Timoshenko. Malgré le fait que la théorie d'Euler-Bernoulli et celle de Timoshenko soient couramment utilisées pour analyser le comportement des poutres en mécanique des structures, ces théories présentent également des limites. Par ailleurs, la théorie d'Euler-Bernoulli et celle de Timoshenko ne prennent pas en considération les effets non conventionnels tels que la torsion de la section transversale, les déformations hors plan et en plan.

Pour résoudre ces problèmes et maximiser la précision, la théorie de déformation de cisaillement avancée est venue (Reddy 1984) ; (Wattanasakulpong, 2011) ; (Trinh, 2016), ces théories sont des modèles mathématiques plus avancés que les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Qui basé sur une variation non linéaire des contraintes et des déformations à travers l'épaisseur, y compris la section transversale de gauchissement correcte dans les arrangements déformés, ce qui permet un meilleur accord entre les modèles structurels et les analyses élastiques tridimensionnelles. Après les travaux pionniers de Reddy (Reddy 1984), plusieurs modèles d'ordre élevé modifiés ont été développés tel que : le modèle hyperbolique de Soldatos (Soldatos, 1992), le modèle sinusoïdale de Touratier (Touratier, 1991), le modèle d'exponentielle de Karama (Karama, 2003) ; Ainsi que le développement unifiée de Carrera (Carrera, 2003). (Simsek, 2010) a été réalisé une étude comparative entre les différentes théories d'ordre élevé, tel que la théorie de déformation de cisaillement parabolique (PSDBT), la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique (HSDBT) la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique (TSDBT), la théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDBT) et la théorie de déformation de cisaillement exponentielle généralisé de Aydogdu (Aydogdu, 2009) (ASDBT). Bien que les théories d'ordre supérieur présentent de nombreux avantages dans l'analyse des poutres, elles tendent à négliger les effets d'étirement à travers l'épaisseur. C'est ce qui est abordé par la théorie quasi-3D. Cette théorie enrichit les précédentes en tenant compte simultanément des effets du cisaillement, de la déformation transversale et de la déformation longitudinale le long de l'épaisseur, sous la forme d'une théorie de poutre de degré supérieur.

II.2 Définition d'une poutre :

Les poutres sont des éléments structuraux qui ont un rapport longueur/hauteur très élevé (par exemple, $L/h > 10$) et sont soumises à des forces à la fois dans le plan et transversales au plan qui ont tendance à se plier autour d'un axe perpendiculaire à leur longueur. Ces éléments sont connus sous le nom d'éléments structuraux et leur étude constitue la mécanique des structures. Les poutres ont une grande variété d'applications pratiques dans de nombreuses structures en génie civil, génie mécanique et aérospatial ainsi qu'en nano-ingénierie. La théorie des poutres est basée sur certaines hypothèses telles que l'hypothèse de Navier, l'hypothèse d'Euler-Bernoulli et l'hypothèse de Timoshenko, qui permettent de modéliser le comportement des poutres sous l'effet de charges externes.

II.3 Les modèles de la théorie des poutres :

Les théories des poutres impliquent essentiellement à la réduction d'un problème tridimensionnel de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Étant donné que la dimension d'épaisseur est beaucoup plus petite que la dimension longitudinale. En général, les théories des poutres sont utilisés les séries de Taylor dans le développement du champ des déplacements qui peut être exprimée comme suit :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) + z\varphi^{(1)}(x, t) + z^2\varphi^{(2)}(x, t) + z^3\varphi^{(3)}(x, t) + z^4\varphi^{(4)}(x, t) + \dots \quad (\text{II.1})$$

De nombreux chercheurs n'aiment pas cette technique à cause de son coût de calcul élevé. Dans ce cas, plusieurs techniques de simplification ont été proposées pour diminuer le nombre des inconnues de déplacement. L'une de ces simplifications consiste à éliminer les derniers termes de la série de Taylor et remplace par une fonction appelée fonction de forme, qui est illustrée dans l'équation suivante :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) - z \frac{dw^0(x, t)}{dx} + f(z)\varphi_x(x, t) \quad (\text{II.2.a})$$

$$w(x, z, t) = w^0(x, t) \quad (\text{II.2.b})$$

Où u le déplacement axial, w le déplacement transversal d'un point matériel situé en (x, z) dans la poutre.

$u^0(x, t)$, $w^0(x, t)$ représentent les inconnues de déplacements; axial et transversal au niveau de l'axe neutre, respectivement.

$\varphi(x, t)$ présente la rotation de la section transversale de la poutre.

$f(z)$: la fonction de forme et $f'(z)$ la fonction qui décrit les distributions non linéaires de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre.

L'analyse du comportement des poutres sous l'effet de charges externes attirent l'attention de la plupart des chercheurs. Dans la littérature ouverte, différentes théories des poutres ont été proposées par les chercheurs pour analyser la réponse des éléments de la poutre en temps réel. Certaines de ces théories sont discutées ci-dessous:

II.3.1 Modèle d'Euler Bernoulli (CBT) :

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EB) - également connue dans la littérature sous le nom de la théorie des poutres classique ou élémentaire, est une théorie des poutres la plus simple utilisée pour étudier le comportement des poutres sous l'effet de charges externes. La théorie d'Euler-Bernoulli s'applique aux poutres élancées et ne doit pas être appliquée aux

poutres épaisses ou profondes. Dans cette théorie, l'hypothèse principale est que les sections transversales planes d'une poutre restent planes et orthogonales à l'axe central de la poutre après déformation (Figure II.1). Elle permet de simplifier les calculs en considérant la poutre comme un objet bidimensionnel. Une autre hypothèse importante de la théorie d'Euler-Bernoulli est que les contraintes et les déformations du cisaillement transversal sont considérées comme nulles. Ces hypothèses peuvent valables pour les poutres très longues et très minces.

Sur la base de cette théorie, le champ de déplacement peut être exprimé comme suit :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) - z \frac{dw^0(x, t)}{dx} \quad (\text{II.3.a})$$

$$w(x, z, t) = w^0(x, t) \quad (\text{II.3.b})$$

Où $u^0(x, t)$, $w^0(x, t)$ représentent les inconnues de déplacements; axial et transversal au niveau de l'axe neutre, respectivement.

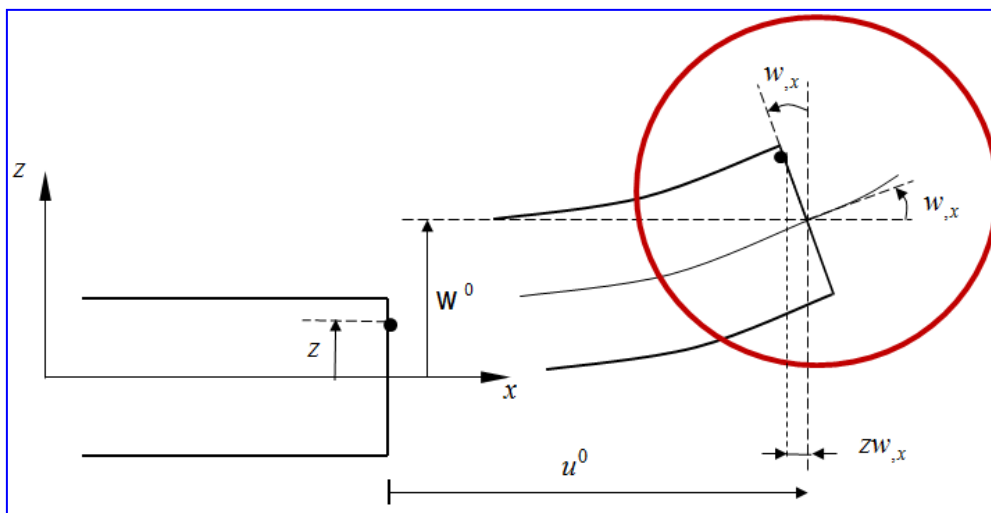


Figure II. 1 : Cinématique d'Euler-Bernoulli

II.3.2 Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) (Timoshenko TBT) :

La théorie de la déformation du premier ordre (FSDT) elle est connue sous le nom la théorie des poutres de Timoshenko (TBT) (Timoshenko, 1921), cette théorie est considérée comme un raffinement de la théorie classique des poutres. Selon cette théorie, l'effet de la déformation de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre est considéré qui sont souvent négligés dans la théorie d'Euler-Bernoulli. Elle suppose que les sections planes perpendiculaires à l'axe central restent planes mais pas nécessairement perpendiculaires à l'axe central lors de la déformation (Figure II.2), qui admet des rotations relatives entre les

sections droites planes et l'axe central de la poutre. Cependant, dans cette théorie, la contrainte de cisaillement transversale est constante dans le sens de l'épaisseur (Figure II.3), alors que les équations d'élasticité montrent que la variation doit être quadratique. Pour tenir compte de l'imprécision dans la prédiction de l'amplitude de la force de cisaillement transversale, un facteur de correction de cisaillement noté k_s a été introduit. Selon Timoshenko, le facteur de correction de cisaillement dépend de la forme de la section transversale, du coefficient de Poisson, des propriétés du matériau, des conditions aux limites, etc. Pour les sections rectangulaires $k_s = 5(1+\nu) / (6+5\nu)$. En général, k_s est égal à $5/6$. Cette théorie est utilisée pour les poutres courtes et épaisses, ce qui signifie que la poutre doit être considérée comme un objet tridimensionnel.

Le champ de déplacement de la théorie FSDT est donné ci-dessous par:

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) - z\phi(x, t) \quad (\text{II.4.a})$$

$$w(x, z, t) = w^0(x, t) \quad (\text{II.4.b})$$

$u^0(x, t)$, $w^0(x, t)$ représentent les inconnues de déplacements ; axial et transversal au niveau de l'axe neutre, respectivement.

$\phi(x, t)$ présente la rotation de la section transversale de la poutre.

Les contraintes inhérentes à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EB) et à la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) dans l'étude du comportement des poutres ont conduit à l'élaboration de théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Ces nouvelles approches ont été développées pour pallier les problèmes rencontrés dans les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

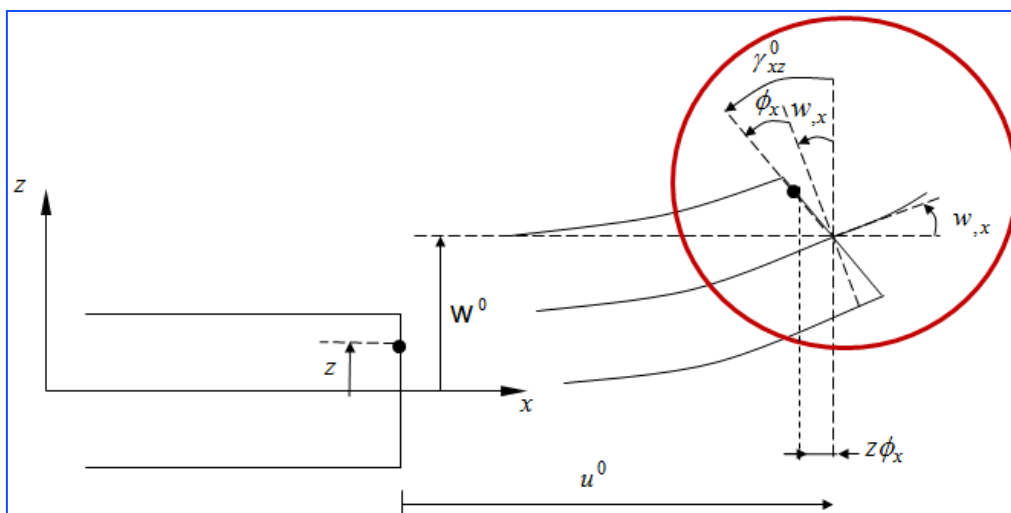


Figure II. 2 : Cinématique de Timoshenko

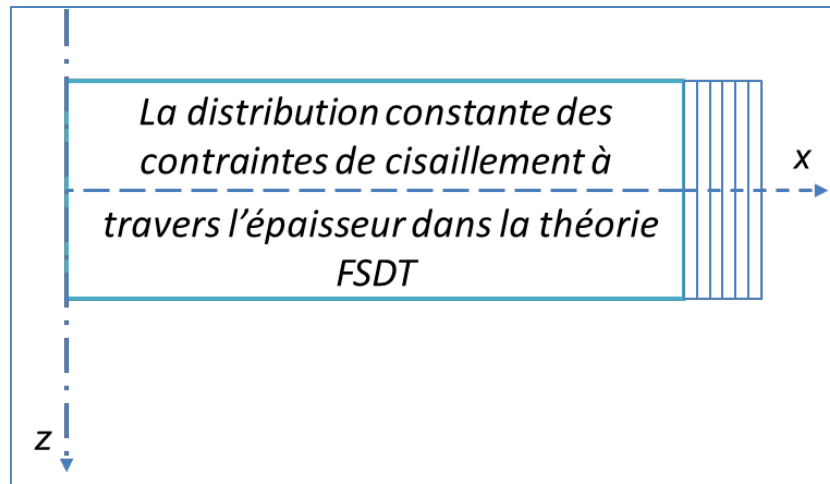


Figure II. 3 : *La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT*

II.3.3 Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Au cours ces dernières années, plusieurs théories de poutres d'ordre élevé (HSDT) ont été développées, qui tiennent en compte d'autres aspects non classiques (Reddy, 1984) ; (Benatta, 2008) ;(Kapuria 2008) ; (Karamanli 2017) ; (Hadji, 2016). À l'opposé de la théorie d'Euler-Bernoulli et de la théorie de Timoshenko qui reposent sur une répartition linéaire des champs à travers l'épaisseur de la poutre, la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur s'appuie sur une distribution non linéaire des champs dans la section. Cette théorie prend en considération l'effet de la déformation de cisaillement transversal. Cette répartition est définie par une fonction désignée sous le nom de fonction de gauchissement. Cette fonction est conçue pour satisfaire les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, permettant ainsi une meilleure correspondance entre les modèles structurels et les analyses élastiques en trois dimensions. Les postulats de base de l'élaboration des théories d'ordre supérieur stipulent que les sections planes perpendiculaires à l'axe central ne demeurent pas nécessairement planes et perpendiculaires à l'axe central lors de la déformation (Figure II.4). Dans cette théorie, l'utilisation du facteur de correction de cisaillement n'est pas requise, contrairement à la théorie de Timoshenko. Cette théorie permet d'atteindre des résultats plus précis pour les poutres épaisses par rapport aux théories d'ordre inférieur, car elle intègre l'effet de la déformation de cisaillement transversal, qui est représenté par une distribution parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre (Figure II.5)..

A partir ces hypothèses, le champ de déplacement de la théorie d'ordre élevé est donné par :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) - z \frac{dw^0(x, t)}{dx} + f(z)\gamma_{xz}^0(x, t) \quad (\text{II.5.a})$$

$$w(x, z, t) = w^0(x, t) \quad (\text{II.5.b})$$

$u^0(x, t)$, $w^0(x, t)$ représentent les inconnues de déplacements; axial et transversal au niveau de l'axe neutre, respectivement.

Et $\gamma_{xz}^0(x, t) = \phi_x(x, t) + \frac{dw^0(x, t)}{dx}$

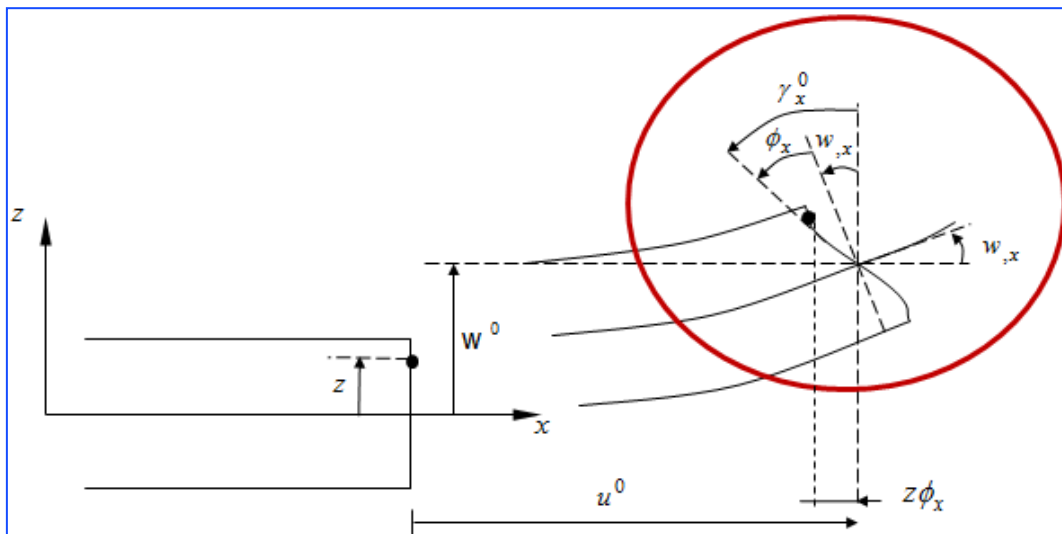


Figure II. 4 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé

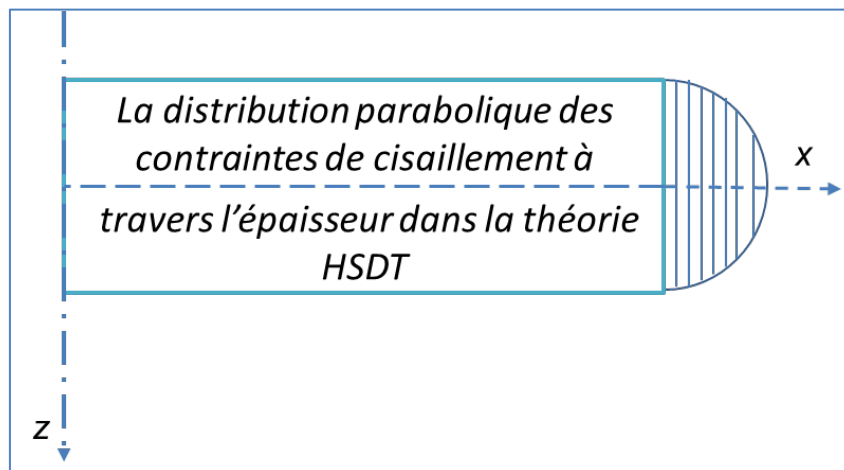


Figure II. 5 : La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT

Plusieurs recherches ont été menées depuis les dernières décennies pour développer des modèles d'ordre élevé, la différence entre ces modèles est incarnée par sa fonction de

forme $f(z)$. Certaines ces fonctions de contrainte de cisaillement polynomiales et non polynomiales sont discutées ci-dessous:

- ✚ Le modelé développé par d'Ambartsumyan (Ambartsumyan, 1958) est donné par :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.6})$$

- ✚ Le modelé développé parabolique par (Reissner, 1975), (Panc, 1975) et (Kaczkowski, 1949) est donné par :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

- ✚ Le modelé parabolique développé par (Levinson, 1980), (Murthy, 1981) et (Reddy, 1984) est donné par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.8})$$

Le modèle de Reddy (Reddy, 1984) présente un champ de déplacement qui est à la fois membranaire et cubique, permettant une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur et respectant les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. Pour cette raison, ce modèle est en bonne concordance avec la contrainte de cisaillement transversale en comparaison avec la solution pour l'élasticité en trois dimensions.

- ✚ Le modelé trigonométrique développé par Touratier (Touratier, 1991) est donné par :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) \quad (\text{II.9})$$

Le modèle de Touratier (Touratier, 1991) se distingue des autres modèles d'ordre supérieur car il ne fait pas appel à une fonction polynomiale. En conséquence, une fonction sinusoïdale trigonométrique est introduite pour imiter la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre. La fonction de cisaillement transversal s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

La contrainte de cisaillement transversal, telle que définie par le modèle (sinus), adopte une forme sinusoïdale à travers l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la

solution exacte dépasse celle du modèle de Reddy (1984). Le modèle développé par Soldatos (Soldatos, 1992) est basé sur une fonction hyperbolique, qui est donné par :

$$f(z) = z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.11})$$

- ✚ Karama et al (Karama, 2003) ont développé un modèle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé basé sur une fonction exponentielle, on utilisant la fonction suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.12})$$

- ✚ Le modèle exponentielle généralisé développé par d'Aydogdu (Aydogdu, 2009) est donné par :

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.13})$$

- ✚ Le modèle développé par d'Ait Atmane (Ait Atmane, 2010) est donné par :

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{h}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{z}{h}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (\text{II.14})$$

- ✚ Le modèle développé par Mantari (Mantari, 2012) est donné par :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{m \pi z}{h} \quad m \geq 0 \quad (\text{II.15})$$

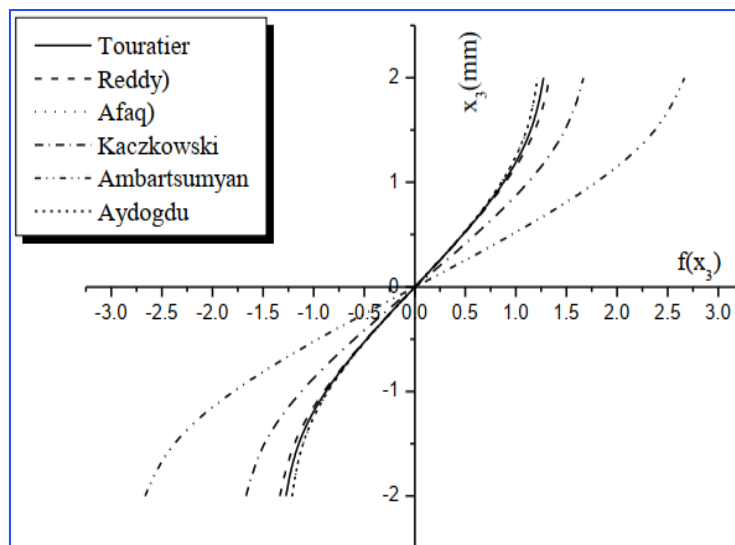


Figure II. 6 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

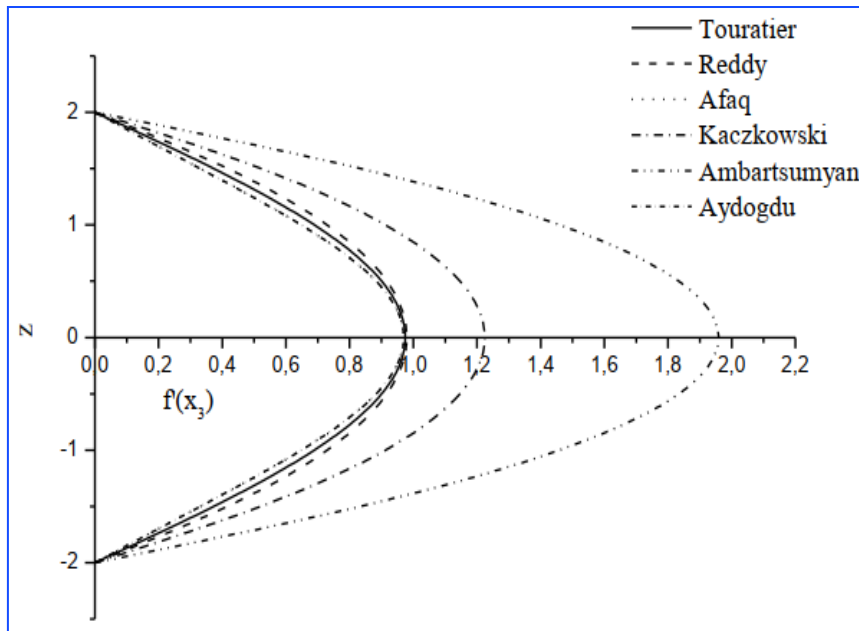


Figure II. 7 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

D'après les figures II.6 et II.7, on remarque que les deux modèles d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un peu éloignées des autres fonctions de forme, elles servent de base pour développer d'autres fonctions plus proches de l'analyse 3D.

L'approche de la monocouche équivalente peut présenter des défauts lorsqu'il s'agit de structures multicouches aux propriétés diverses, notamment en raison de la discontinuité des contraintes de cisaillement transversal aux interfaces. Ces facteurs peuvent induire des effets de bord sur les contraintes, le délaminage et d'autres problématiques locales. Cependant, dans le cas des matériaux FGM (fonctionnellement gradés), cette approche peut être davantage adaptée, la variation des propriétés s'effectuant de manière continue à travers l'épaisseur. Dans cette situation, l'approche de la monocouche équivalente peut être mise en œuvre pour modéliser fidèlement les propriétés graduelles de ces matériaux. Globalement, le choix de la méthode de modélisation pour les poutres épaisses est déterminé par les propriétés du matériau et les conditions d'utilisation. Il est crucial de considérer les atouts et les faiblesses de chaque approche afin d'obtenir des résultats précis et sûrs dans l'analyse des structures..

II.3.4 Modèle de poutre avancé en cisaillement d'ordre élevé (RHSDT) :

Le modèle de poutre basé sur la théorie raffinée de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT) s'appuie sur la décomposition du déplacement transversal en deux parties, une partie liée à la flexion et une autre au cisaillement. Cette théorie a été initiée pour la première fois par le chercheur Shimpi (Shimpi, 2002), dans le but d'étudier les plaques

isotropes et de réduire le nombre total de variables par rapport aux théories d'ordre supérieur existantes. Contrairement aux autres théories, la RHSDT n'a pas besoin de facteur de correction de cisaillement et fournit une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre. En outre, cette théorie présente plusieurs similarités avec la théorie des poutres classique (CBT). Plusieurs chercheurs ont confirmé la validité de cette théorie. Par exemple, Thai et Vo (Thai, 2012) ont appliqué cette théorie pour étudier la flexion et la vibration libre des poutres FGM base sur plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Nguyen et Nguyen (Nguyen, 2015) ont utilisé cette théorie dans l'analyse statique, dynamique et du flambage des poutres sandwichs en FGM. Ces études ont montré que la RHSDT est une approche efficace et précise pour modéliser les structures en poutre avec des propriétés variées.

Sur la base de cette théorie, le champ de déplacement est écrit comme suit :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) - z \frac{dw_b(x, t)}{dx} + f(z) \frac{dw_s(x, t)}{dx} \quad (\text{II.16.a})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{II.16.b})$$

$u^0(x, t)$: représentent l'inconnues de déplacements axial au niveau de l'axe neutre.

$w_b(x, t)$, $w_s(x, t)$: représentent les inconnues de déplacements transversal; dus à la flexion et au cisaillement, respectivement.

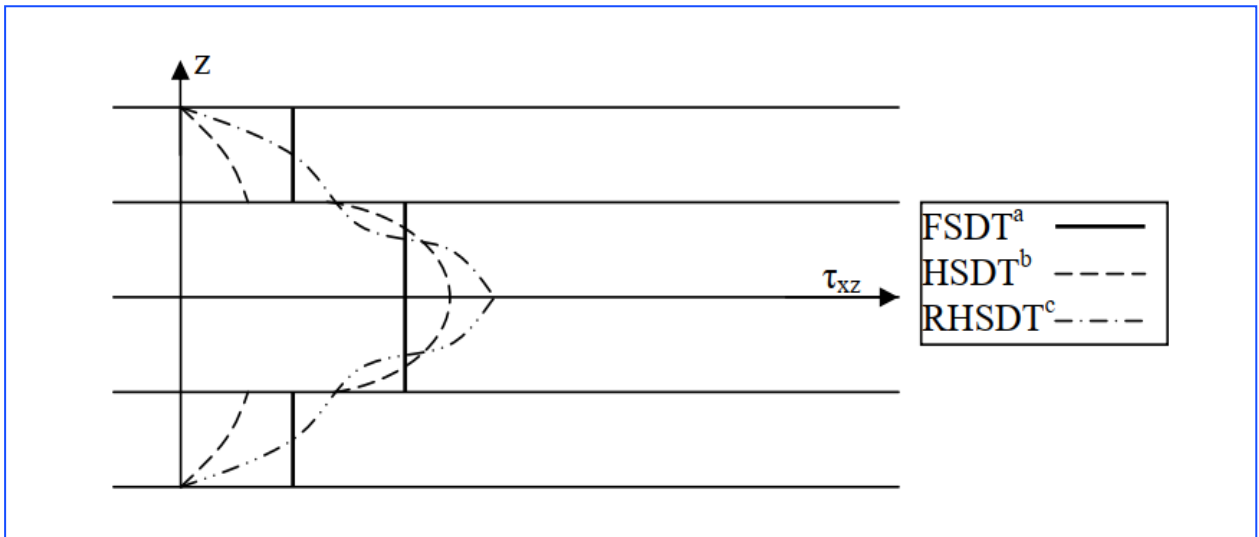


Figure II. 8 : Distribution des contraintes de cisaillement selon trois théories (Tafla, 2007)

a : FSDT (l'effet de cisaillement d'ordre un).

b : HSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé).

c : RHSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé par raffinement).

II.3.5 Modèle la théorie de poutre tridimensionnelle (élasticité 3D) :

Le modèle de la théorie de poutre tridimensionnelle (élasticité 3D) ou le modèle de la solution exacte est un modèle plus avancé qui prend en compte la déformation tridimensionnelle de la poutre. Contrairement aux modèles précédents, ce modèle considère les variations de déplacement dans les trois dimensions de l'espace, et il peut être utilisé pour modéliser des structures plus complexes avec des formes irrégulières. Dans cette théorie, l'hypothèse de section droite plane n'est plus valable, et la poutre est modélisée comme un solide tridimensionnel avec des propriétés élastiques orthotropes. La théorie de poutre tridimensionnelle est utilisée pour des structures où les effets de flexion, torsion et cisaillement ne peuvent pas être négligés, comme les poutres incurvées et les poutres en forme de S. Cette théorie s'avère également bénéfique pour les études de structures plus élaborées, où les modèles de poutre fondés sur les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur ne suffisent pas à représenter les caractéristiques de la structure.

Pour les chercheurs, la disponibilité de la solution d'élasticité exacte est très importante car ces solutions servent toujours des solutions de référence pour la comparaison avec les solutions obtenues en utilisant des théories des poutres approchées. Sankar (Sankar, 2001) a proposé une solution d'élasticité pour les poutres FG simplement appuyées soumises à un chargement transversal sinusoïdal. Cette solution a montré que les concentrations de contraintes sont inférieures à celles d'une poutre homogène lorsque le côté le plus doux de la poutre FG est chargé. En revanche, si le côté le plus dur est chargé, les concentrations de contraintes sont plus importantes. Cette propriété des poutres FG peut être utilisée pour améliorer leur résistance et leur performance en fonction de l'orientation de la charge. Ying et al (Ying, 2008) ont aussi élaboré des solutions précises concernant la flexion et la vibration libre des poutres FG appuyées sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak, se basant sur la théorie 2D de l'élasticité. Ces solutions ont facilité la compréhension des impacts de l'hétérogénéité sur la flexion et la vibration des poutres FG, démontrant que la présence de gradients de propriétés au sein des poutres FG peut influencer de manière significative leur comportement dynamique.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{II.17.a})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{II.17.b})$$

Où $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, ρ : représentent les composantes du vecteur d'accélération et la masse volumique, respectivement.

I.1.1. Modèle de poutre basé sur la théorie Quasi-3D:

Même si les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur ont livré de bons résultats dans l'analyse des poutres relativement épaisses, elles omettent entièrement l'effet d'étirement de l'épaisseur de la poutre (en anglais stretching effect) (Figure II.9), ce qui peut significativement influencer la précision des résultats. Pour pallier à ce problème et optimiser la précision, la théorie de déformation quasi-3D a été introduite. Cette méthode de modélisation des poutres prend en compte les effets de la déformation de cisaillement transversal sans recourir à des calculs coûteux liés à la modélisation en trois dimensions. Cette théorie repose sur une approche multicouche, chaque couche étant modélisée comme une poutre mince. Les couches sont interconnectées par des conditions de continuité adéquates, ce qui permet une représentation précise de la déformation de cisaillement transversal dans la poutre. En effet, dans la théorie quasi-3D, le déplacement transversal est subdivisé en trois composantes distinctes : la flexion, le cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur de la poutre.

La théorie quasi-3D de déformation est donc plus précise que les théories basées sur des modèles monocouches équivalentes, car elle prend en compte les effets de cisaillement transversal, qui peuvent avoir une influence significative sur le comportement global de la poutre épaisse et multicouche. Cette méthode est également plus rapide et moins coûteuse que la modélisation tridimensionnelle complète, tout en restant suffisamment précise pour de nombreuses applications industrielles.

Le champ de déplacement de la théorie quasi-3D FSDT est donné ci-dessous par :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) - z \frac{dw_b(x, t)}{dx} + f(z) \frac{dw_s(x, t)}{dx} \quad (\text{II.17.a})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) + g(z)\varphi_z(x, t) \quad (\text{II.17.b})$$

$u^0(x, t)$: représentent l'inconnues de déplacements axial au niveau de l'axe neutre.

$w_b(x, t)$, $w_s(x, t)$: représentent les inconnues de déplacement transversal ; dus à la flexion et au cisaillement, respectivement.

$\varphi_z(x, t)$: représentent l'inconnues de déplacements supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement.

$g(z)$: est la fonction de cisaillement transverse dus au l'effet d'étirement de l'épaisseur de la poutre, avec : $g(z) = 1 - f'(z)$

Plusieurs travaux ont effectuées sur ce type de théorie tel que Belabed et al (Belabed, 2014) a été développée une théorie de la déformation normale et du cisaillement d'ordre supérieur simple et efficace pour la vibration statique et libre des plaques FG en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Mantari (Mantari, 2014) a mis au point une théorie quasi-3D à quatre variables inconnues, qui intègre à la fois l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal grâce à une fonction hyperbolique. Parallèlement, Bourada et al (Bourada, 2015) ont élaboré une nouvelle théorie trigonométrique du cisaillement et des déformations normales pour les poutres fonctionnellement gradées (FG). Les conclusions de ces recherches ont démontré que la théorie de déformation quasi-3D est une approche efficace pour modéliser les poutres épaisses et multicouches avec un niveau de précision satisfaisant tout en réduisant les temps de calcul en comparaison avec les modèles en trois dimensions.

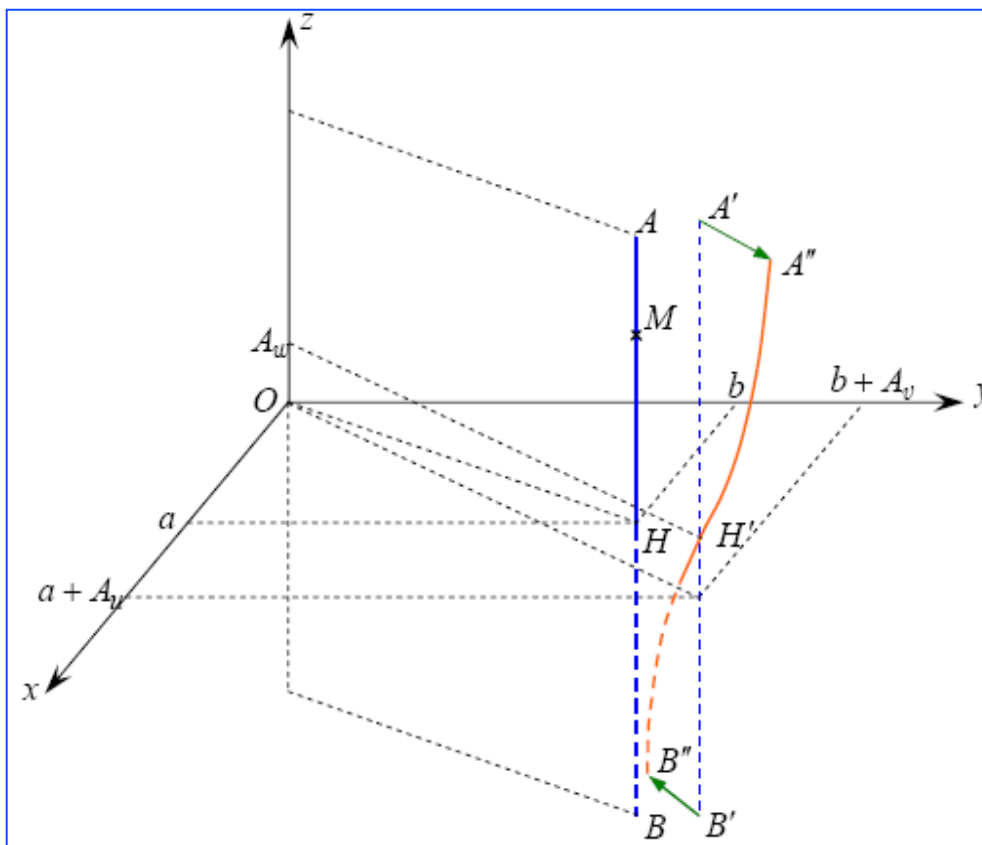


Figure II. 9 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur

II.4 La méthode des éléments finis :

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis (MEF) est l'un des outils numériques les plus utilisés, dans les applications industrielles, y compris les domaines de la construction aéronautique, aérospatiale, automobile, navale et nucléaire, et dans les applications de génie civil. La méthode des éléments finis trouve son origine vers 1950, et ce concept a été introduit pour la première fois en 1956 par Turner (Turner, 1956). Pour que la méthode des éléments finis soit efficace dans les applications industrielles, des codes informatiques doivent être utilisés pour aider à la préparation des données et à l'interprétation des résultats. Ces outils de pré et post-traitement sont généralement intégrés dans des logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO) plus généraux, tels que MATLAB, ABAQUS, et ANSYS.

Dans le MEF, les éléments individuels sont reliés entre eux par une carte topologique, appelée maillage, et une représentation polynomiale locale est utilisée pour les champs au sein de l'élément. La solution obtenue est fonction de la qualité du maillage et l'exigence fondamentale est que le maillage soit conforme à la géométrie. Chaque élément fini est constitué de « points nodaux » (ou simplement de « nœuds »), qui forment des formes simples telles que des barres (dans les problèmes 1D), des triangles et des quadrilatères (dans les problèmes 2D), ainsi que des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes (dans les problèmes 3D) (Figure II.10). Le principal avantage du MEF est qu'il peut gérer des frontières complexes sans trop de difficulté.

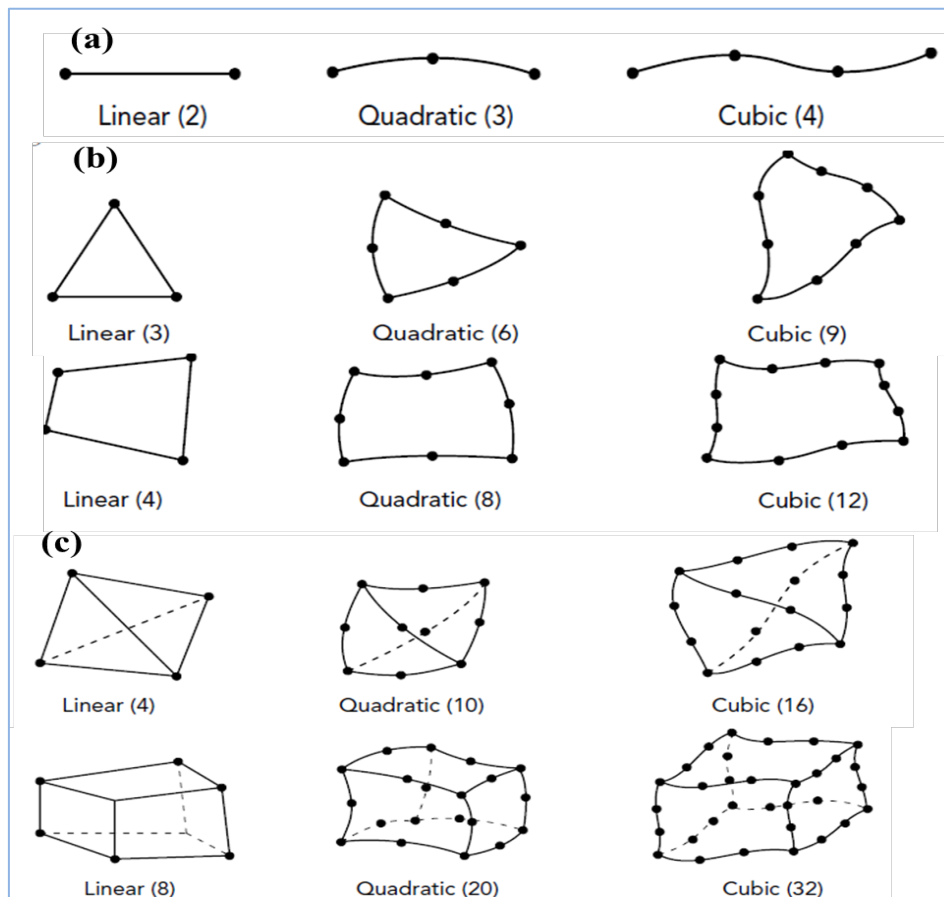


Figure II. 10 : des éléments : (a) unidimensionnel, (b) bidimensionnels et (c) Trois dimensionnels

La méthode des éléments finis (MEF) est basée sur les idées suivantes :

➤ le domaine total Ω peut être représenté comme une collection d'un nombre fini de sous-domaines non superposés mais interconnectés (aux frontières des), appelés éléments finis Ω_e ($e=1,2,\dots, N$) les éléments sont d'une géométrie particulière permettant la construction des fonctions d'approximation (ou d'interpolation).

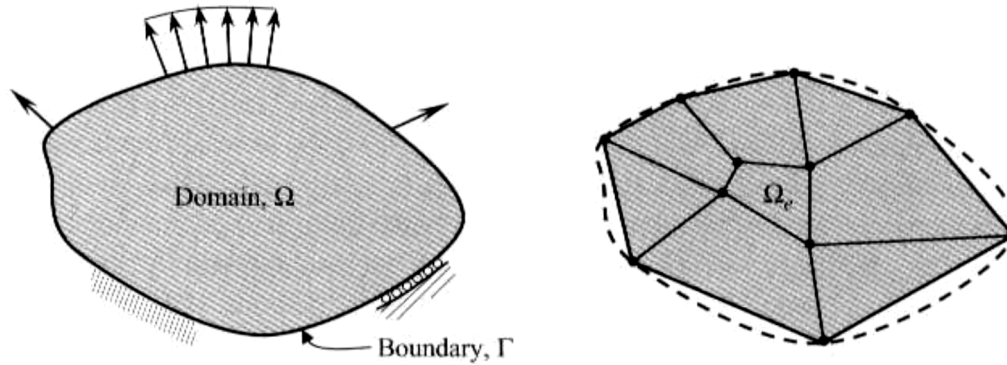


Figure II. 11 : la discrétisation du domaine du problème en petits éléments appelés « éléments finis »

➤ sur chaque élément Ω_e ; le déplacement à l'intérieur de l'élément dépendante u est interpolée à travers un ensemble des points (nœuds) de l'élément comme :

$$u(x, y, z) \cong \sum_{j=1}^n N_j(x, y, z) \cdot u_j \quad (\text{II.18})$$

u_j étant la valeur de u au j ème nœud et N_j sont des fonctions d'approximation (ou d'interpolation) pour les nœuds de l'élément, qui sont prédéfinies pour prendre les formes des variations de déplacement par rapport aux coordonnées. La forme générale s'écrit comme suit :

$$N_j(x, y, z) = \begin{bmatrix} N_1(x, y, z) & N_2(x, y, z) & \dots & N_n(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ \text{pour noed 1} & \text{pour noed 2} & & \text{pour noed n} \end{array} \quad (\text{II.19})$$

Afin de déterminer les n valeurs nodales (généralement) inconnues u_j , l'équation gouvernante est convertie en un ensemble d'équations algébriques $\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e$ (appelé modèle d'éléments finis) en utilisant une méthode d'approximation (par exemple, le principe du travail virtuel, le principe de Hamilton, les équations de Lagrange, etc.) ; les équations d'élément contiennent des variables nodales provenant uniquement de l'élément considéré. Pour faciliter la formulation des équations MEF pour les éléments de formes géométriques compliquées, en utilisant un système de coordonnées local défini pour un élément en référence au système de coordination global généralement défini pour l'ensemble de la structure, appelée la transformation géométrique, comme illustré à la Figure II.12 . La transformation d'un élément de référence en un élément réel est caractérisée par la matrice jacobienne J .

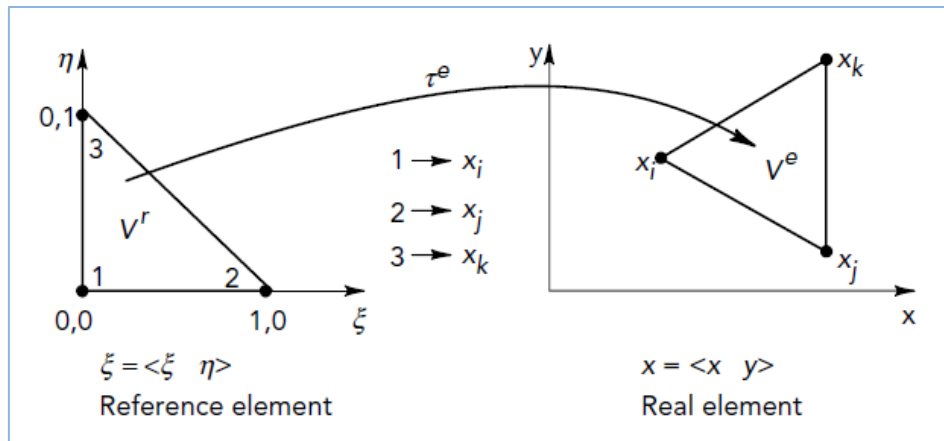


Figure II. 12 : la transformation géométrique d'un élément de référence en un élément réel

➤ les équations d'éléments de tous les éléments sont assemblées (assemblage d'éléments) en utilisant des conditions d'équilibre et de continuité aux interfaces d'éléments pour obtenir un ensemble d'équations algébriques, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}$; qui sont ensuite résolus après application des conditions aux limites aux nœuds de la frontière uniquement. Le processus d'assemblage consiste simplement à additionner les contributions de tous les éléments connectés à un nœud. Il existe de nombreuses méthodes et algorithmes pour résoudre cette équation matricielle, l'un des méthodes le plus utilisées est la méthode dite d'intégration directe.

II.5 Modèles Analytiques des structures en FGM :

La modélisation analytique des poutres en FGM consiste à utiliser des théories analytiques pour décrire le comportement avancé des poutres composites. Ces théories sont basées sur des hypothèses spécifiques sur le comportement des matériaux et des structures, et permettent de décrire les contraintes, les déformations et les vibrations des poutres FGM. Les avantages de la modélisation analytique des poutres en FGM sont la simplicité de la méthode, le temps de calcul relativement court et la possibilité d'obtenir des solutions analytiques exactes dans certains cas. Cependant, cette méthode présente des inconvénients tels que des hypothèses simplificatrices sur le comportement des matériaux, qui peuvent ne pas être précises pour les FGM complexes, ainsi que des limitations pour les structures ayant des géométries complexes ou soumises à des chargements complexes. La modélisation analytique des poutres en FGM trouve une application dans divers domaines tels que l'aérospatiale, l'automobile, la construction navale, la biotechnologie, etc. Des travaux récents ont été réalisés pour améliorer les modèles existants et les adapter aux besoins spécifiques de chaque domaine d'application. Pour illustration, Hadji et al (Hadji, 2016) ont mis en place une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé dans le but d'étudier la stabilité et la vibration libre des poutres fonctionnellement gradées (FG) unidirectionnelles. De leur

côté, Zaoui et al. (Zaoui, 2017) ont formulé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour examiner la vibration libre des poutres faites de matériaux à gradient de propriétés. Malgré ses atouts, la modélisation analytique des poutres FGM présente certaines restrictions. Tout d'abord, les suppositions de simplification nécessaires pour obtenir des solutions analytiques peuvent diminuer la précision des résultats, surtout dans les situations où la structure a des géométries compliquées ou des variations de propriétés non linéaires. En outre, la modélisation analytique ne peut pas inclure les effets de la non-linéarité des matériaux FGM, tels que les modifications de propriétés en fonction de la température ou des contraintes, qui peuvent avoir un impact significatif sur le comportement mécanique.

En outre, les modèles analytiques ne prennent pas en compte les effets de la délamination et du décollement, qui sont des problèmes courants dans les structures multicouches en FGM. Enfin, les modèles analytiques peuvent ne pas être suffisamment précis pour les applications nécessitant une grande précision, comme les systèmes de micromécanique ou les structures à très faible échelle. Cependant, les modèles analytiques restent un outil important pour la modélisation des structures en FGM, en particulier pour les structures de grande échelle et les applications où une précision modérée est suffisante. Les résultats analytiques peuvent également être utilisés comme référence pour valider des modèles numériques plus complexes. Des travaux récents ont ainsi développé des modèles analytiques pour l'analyse de la flexion et la vibration des poutres en FGM, tels que : Koochaki (Koochaki, 2011) sur les poutres FG simplement appuyées, Wang et al (Wang, 2019) sur les micro-poutres FG poreuses, ou ceux d' Meradjah et al. (Meradjah, 2014) sur les poutres FG quasi-3D.

II.6 Modèles éléments finis des structures en FGM :

Sur la limitation apportée par la modélisation analytique, les méthodes numériques, en particulier les éléments finis, sont devenues l'outil principal pour analyser le comportement des structures en FGM. Les modèles numériques permettent une grande flexibilité dans la définition de la géométrie et des propriétés matérielles, ainsi que la prise en compte de conditions aux limites plus complexes. Cependant, la modélisation numérique présente également des inconvénients, tels que la nécessité d'un maillage fin pour une bonne précision des résultats, ce qui peut augmenter considérablement le temps de calcul et les ressources nécessaires. De plus, la qualité du maillage et la convergence des résultats dépendent souvent de l'expérience de l'utilisateur et de la qualité des données d'entrée. Pourtant, les bénéfices de la modélisation numérique l'emportent sur les désavantages, car elle permet une étude plus

exhaustive et précise du comportement des structures FGM, en plus de la capacité de simuler des conditions de charge plus complexes. Beaucoup de recherches récentes ont fait appel à la méthode des éléments finis pour analyser les structures FGM, en employant diverses théories et modèles d'éléments finis. Par exemple, Xia et al. (Xia, 2021) ont mis en œuvre un modèle d'élément fini basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour examiner la flexion des poutres FGM. Karamanli et al. (Karamanli, 2019) ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier la réponse thermique des poutres FGM, en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. De la même manière, Chen et al. (Chen, 2019) ont eu recours aux éléments finis pour examiner la réponse thermique et mécanique des poutres FGM, en se servant de la théorie de Timoshenko. Ces études démontrent la diversité des approches numériques qui peuvent être employées pour analyser les structures FGM, en fonction des objectifs spécifiques de l'étude.

Les modèles éléments finis pour les structures en FGM sont utilisés pour résoudre les problèmes de mécanique des structures impliquant des matériaux fonctionnellement gradés. Ces modèles utilisent la méthode des éléments finis pour discrétiser la géométrie de la structure en un maillage de petits éléments. Les propriétés des matériaux de chaque élément sont déterminées en fonction de leur position dans la structure et de la fonction de gradient du matériau. Les modèles sont capables de résoudre des problèmes complexes impliquant des charges statiques, dynamiques, thermiques et autres. Ils sont également capables de modéliser des phénomènes tels que la rupture, la fissuration et le délaminage. Les modèles sont particulièrement utiles pour l'analyse de structures en FGM soumises à des conditions de chargement complexes et pour l'optimisation de la conception de ces structures. Les modèles FGM-FE nécessitent une connaissance précise des propriétés du matériau en fonction de la position dans la structure. Ces propriétés peuvent être déterminées expérimentalement ou par modélisation numérique. Les modèles sont également sensibles à la qualité du maillage, qui doit être suffisamment fin pour représenter avec précision les variations de propriétés des matériaux dans la structure. En résumé, les modèles éléments finis des structures en FGM sont des outils puissants pour l'analyse et la conception de structures en matériaux fonctionnellement gradés. Ils permettent de résoudre des problèmes complexes impliquant des conditions de chargement complexes et peuvent être utilisés pour optimiser la conception de ces structures. Cependant, ils nécessitent une connaissance précise des propriétés des matériaux et un maillage de qualité pour obtenir des résultats précis.

Pour pallier les contraintes des approches analytiques dans l'analyse des structures FGM, un grand nombre d'études se sont focalisées sur l'élaboration de modèles basés sur la

méthode des éléments finis. Par exemple, Eltahir et al (Eltahir, 2018) ont conçu un élément fini se basant sur la théorie d'Euler-Bernoulli pour étudier la flexion et les vibrations libres de nano-poutres à gradient fonctionnel poreux (FGP). De leur côté, Civalek et Demir (Civalek, 2016) ont analysé la réaction au flambement de micro-tubes en faisant appel à la méthode des éléments finis fondée sur la théorie d'Euler-Bernoulli. Neto et Hoefel (Neto, 2019) ont présenté un modèle d'élément fini non-local pour examiner les vibrations libres de nano-poutres reposant sur une base élastique, en se basant sur la théorie d'Euler-Bernoulli ainsi que celle de Timoshenko. Le modèle a été conçu pour intégrer les effets non-locaux, qui deviennent de plus en plus significatifs au fur et à mesure que la taille de la structure diminue. La Figure II.13 présente un élément de poutre non-local à deux degrés de liberté par nœud, fondé sur les théories EBT, TBT et l'élasticité non-locale d'Eringen.

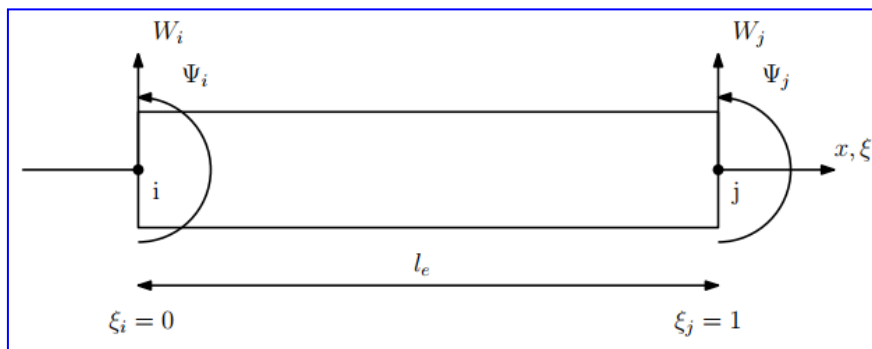


Figure II. 13 : *Un élément de poutre non local à deux degrés de liberté par nœud* (Neto, 2019)

Depuis plusieurs années, la mise au point d'éléments finis basés sur la théorie FSDT a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Par exemple, Chakraborty et al. [19] ont présenté un élément fini de poutre innovant basé sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) pour examiner le comportement thermoélastique des poutres à gradient fonctionnel. De leur côté, Esen et al (Esen, 2018) ont introduit une méthode par éléments finis inédite permettant l'analyse des vibrations transversales et axiales d'une poutre en matériaux à gradient de propriétés (FGM) soumise à une masse en accélération/décélération, reposant également sur la théorie FSDT. Kahya et Turan (Kahya, 2017) ont développé un élément fini de poutre à cinq nœuds et dix degrés de liberté pour l'analyse du comportement de flambage et vibratoire des poutres à gradient fonctionnel FG, en se basant sur la théorie de cisaillement du premier ordre (FSDT) (Figure II.11). Aria et al (Aria, 2019) ont repris le modèle d'élément fini de (Kahya, 2017) pour examiner le comportement thermo-élastique des nano-poutres à gradient fonctionnel poreuses (FGP) reposant sur une fondation élastique à double paramètre, en utilisant la théorie de Timoshenko (TBT) et de l'élasticité non-locale d'Eringen. Aria et Friswell (Aria, 2018) ont exposé un modèle d'éléments finis non local pour étudier le

comportement de flambage et de vibration libre des nano-poutres à gradient fonctionnel (FG), s'appuyant sur la théorie FSDT. L'élément de poutre proposé présente cinq nœuds et dix degrés de liberté. Les chercheurs ont réalisé une étude paramétrique visant à montrer l'influence de certains paramètres (le paramètre non local, l'indice matériel, le rapport épaisseur/longueur et les conditions aux limites) sur les fréquences naturelles fondamentales et les charges critiques de flambage.

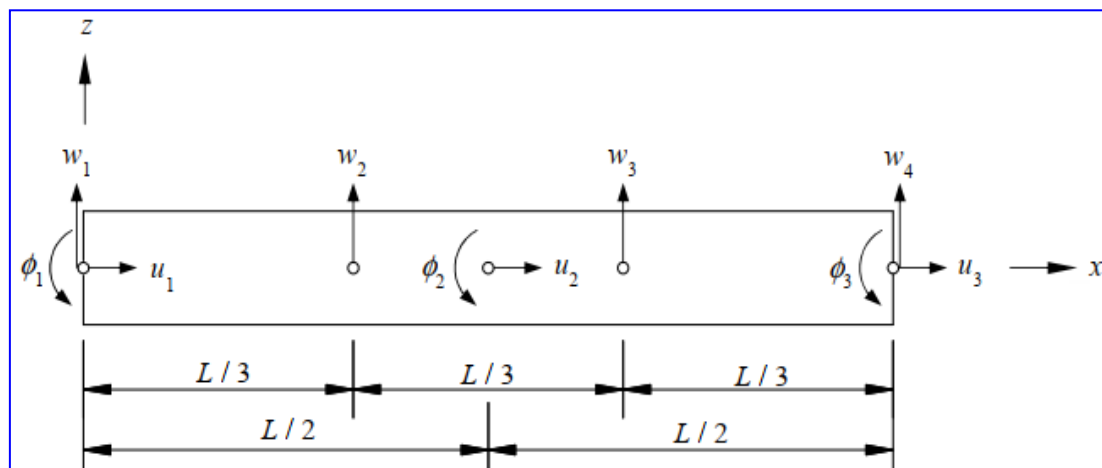


Figure II. 14 : Un élément de poutre à dix degrés de liberté (Kahya, 2017)

Par ailleurs, Ziou et al (Ziou, 2016) ont conçu un modèle d'élément fini ayant trois degrés de liberté par nœud pour l'examen statique des poutres à gradient fonctionnel FG. Ce modèle s'est fondé sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). D'autre part, Oreh et Karkon (Oreh, 2013) ont introduit une formulation innovante d'éléments finis de poutre pour examiner la stabilité et la vibration libre des poutres de Timoshenko (TBT), en optant pour un polynôme cubique pour le champ de déplacement et quadratique pour le champ de rotation. Wu et al (Wu, 2018) ont réalisé une étude des vibrations libres et forcées de structures de type poutre à gradient fonctionnel poreuses (FGP) via la méthode des éléments finis (FEM). Ce modèle repose sur les théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Finalement, Kahya et Turan (Kahya, 2018) ont mis en avant un modèle d'éléments finis fondé sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre pour l'exploration du flambage et de la vibration libre des poutres sandwich en matériaux à gradient de propriétés (FGM), dans lequel les degrés de liberté de l'élément dépendent du nombre de couches (Figure II.12)..

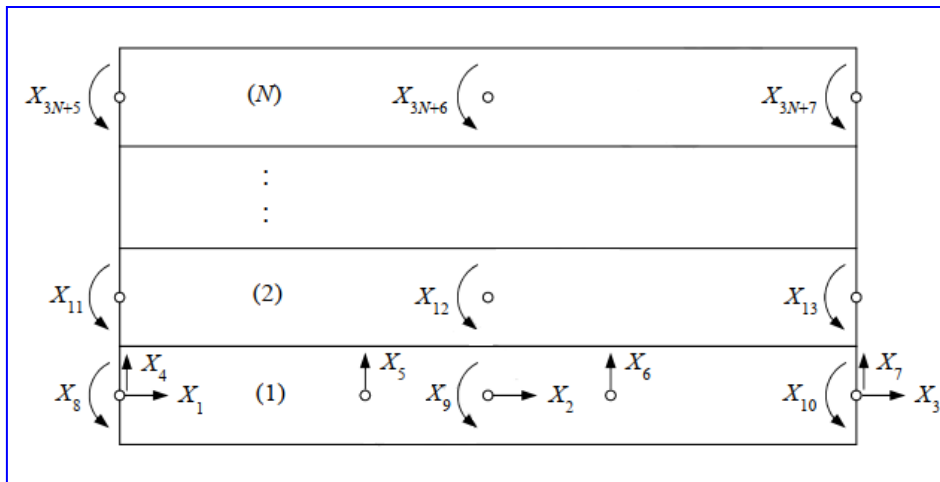


Figure II. 15 : Un élément de poutre multicouche (Kahya, 2018)

Katili et Katili (Katili, 2020) ont introduit un nouvel élément de poutre à deux nœuds doté de 3 degrés de liberté par nœud. Ce modèle s'appuie sur l'approche unifiée et intégrée (UI) de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) pour l'étude de la statique et de la vibration libre des poutres en matériaux à gradient de propriétés (FGM). Cet élément tient compte de la déformation par cisaillement et de l'effet de couplage de la flexion axiale, évite le phénomène de verrouillage en cisaillement tout en offrant une convergence rapide. De leur côté, Tran et al (Tran, 2020) ont opté pour la méthode des éléments finis (FEM) en association avec la théorie non locale pour l'examen de la flexion statique et de la vibration libre des nano-plaques sandwich à gradient fonctionnel (FG) reposant sur une fondation élastique (EF). Leur formulation de l'élément quadrilatère à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud s'appuie sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (Figure II.13). Pour pallier le problème de verrouillage en cisaillement, ils ont employé l'interpolation mixte des composantes tensorielles (MITC4).

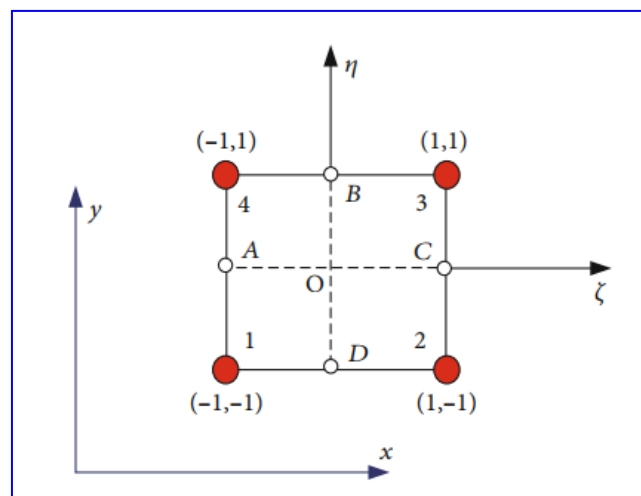


Figure II. 16 : Un élément de plaques à quatre nœuds (Tran, 2020)

Dès les années quatre-vingt, plusieurs chercheurs ont contribué significativement à l'élaboration de nouveaux modèles d'éléments finis, à la fois efficaces et précis, pour décrire des structures multicouches, en s'appuyant sur la théorie HSDT. Merzouki et al (Merzouki, 2020) ont par exemple adopté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à deux variables pour développer un élément fini destiné à l'analyse de la flexion, du flambage et des vibrations libres des nano-poutres. Ils ont proposé un élément de poutre à 3 nœuds avec 18 degrés de liberté. Le modèle du comportement élastique non-local d'Eringen, intégrant le paramètre d'échelle de longueur, permet de rendre compte de l'effet de petite échelle sur la réponse mécanique des nano-poutres. De leur côté, Anirudh et al (Anirudh, 2019) ont développé un élément fini de continuité C1 à 3 nœuds pour étudier les comportements de flexion, de flambage et de vibration des poutres courbes poreuses renforcées de graphène fonctionnellement graduées (Figure II.14). Ce modèle se base sur la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique TSDT. Au terme de leur travail, ils ont réalisé une étude paramétrique pour analyser l'effet de différents paramètres (modèle de distribution de la porosité, coefficient de porosité, rayon de courbure de la poutre courbe, rapport longueur / épaisseur, géométrie des plaquettes, conditions aux limites) sur la flexion statique, les fréquences fondamentales et la charge critique de flambement. Ils ont conclu que ces paramètres influencent significativement le comportement des poutres courbes poreuses renforcées de graphène

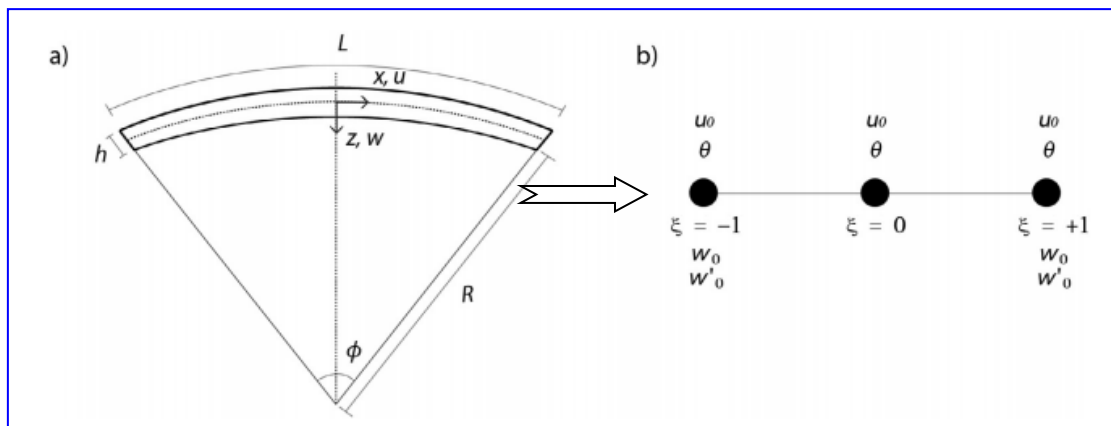


Figure II. 17 : (a) Paramètres géométriques de la poutre courbe ; (b) Élément de poutre avec les degrés de liberté (Anirudh, 2019)

Koutoati et al (Koutoati, 2019) ont mis au point un élément fini de poutre destiné à l'analyse du comportement statique et de la vibration libre des poutres sandwich fonctionnellement graduées FG. Ce modèle est dérivé de la théorie classique des poutres CBT et de la théorie d'ordre supérieur, avec la méthode d'intégration réduite utilisée pour éviter le blocage par cisaillement. De leur côté, Khan et al (Khan, 2016) ont développé un nouvel

élément fini de poutre à deux nœuds doté de quatre degrés de liberté par nœud, pour analyser la réponse statique et les vibrations libres des poutres en matériau à gradation fonctionnelle (FGM). Leur modèle FE est basé sur la théorie efficace du zig-zag d'ordre supérieur (HZZT), avec une interpolation linéaire pour le déplacement axial et une interpolation hermite cubique pour la déflexion. Frikha et al (Frikha, 2016) ont, quant à eux, élaboré un nouvel élément fini mixte de poutre à 2 nœuds et 4 degrés de liberté par nœud, basé sur la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur HSDT de Reddy. La performance de l'élément a été validée par l'analyse statique des éléments en porte-à-faux et simplement appuyés des poutres fonctionnellement graduées FG. Dans une étude plus récente, Garg et al (Garg, 2021) ont proposé un élément fini C0 de poutre à trois nœuds avec huit degrés de liberté par nœud, pour étudier la vibration libre sur dix types différents de poutres sandwich fonctionnellement graduées FG, l'étude se basant sur la théorie du zigzag d'ordre supérieur HOZT. Belarbi et al (Belarbi, 2021a) ont développé un élément fini non local efficace pour étudier le comportement de flexion et de flambage des nano-poutres fonctionnellement graduées (FG). Le nouvel élément de poutre à deux nœuds et huit degrés de liberté (Figure II.15) est formulé sur la base de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et de l'élasticité non locale d'Eringen. La même année, Belarbi et al (Belarbi, 2021b) ont développé un élément fini de poutre à 2 nœuds et 4 ddl/nœud, pour analyser le comportement du flambage des poutres courbes sandwich fonctionnellement graduées FG. Cet élément est formulé sur la base de la théorie de cisaillement raffinée à trois inconnues récemment proposée.

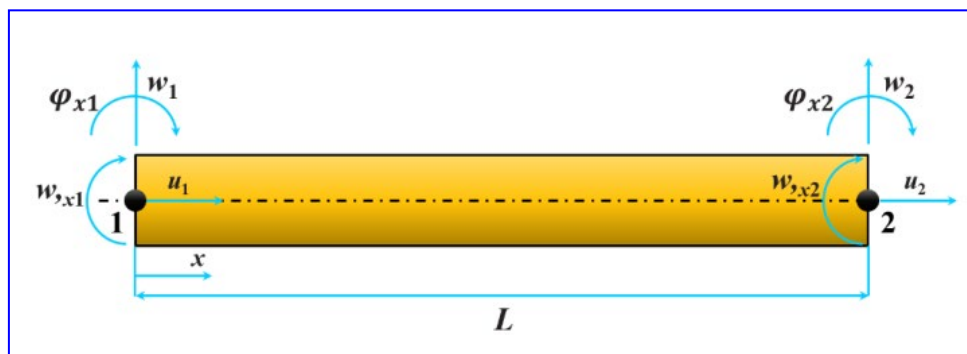


Figure II. 18 : *Présenter un élément de poutre à deux nœuds avec les degrés de liberté correspondants (Belarbi, 2021a)*

Li et al (Li, 2019) ont mis au point un nouveau modèle d'élément fini de poutre basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et la formulation mixte d'élément de poutre pour une analyse statique précise des poutres sandwich fonctionnellement graduées FG. De leur côté, Maliki et al (Maliki, 2019) ont conçu un modèle d'éléments finis à dix degrés de liberté pour explorer la réponse vibratoire des nano-poutres de mousse

métallique poreuse reposant sur une fondation élastique. La formulation de cet élément est basée sur la théorie de déformation de cisaillement raffiné et la théorie d'élasticité non locale, utilisant plusieurs distributions de porosité : uniforme, symétrique et non-symétrique. Xuan et al (Xuan, 2013) ont proposé une formulation d'éléments finis isogéométriques (IGA) de continuité C1 associée à une théorie de déformation du cisaillement de cinquième ordre (FiSDT) pour l'analyse statique, des vibrations libres et du flambage des structures composites en plaques sandwich. Thai et al (Thai, 2014) ont présenté une théorie généralisée de la déformation du cisaillement pour l'analyse statique, de vibration libre et de flambement des plaques isotropes et sandwich en matériau à gradation fonctionnelle (FGM), en utilisant continuité C1 pour les déplacements généralisés. Pradyumna et Bandyopadhyay (Pradyumna, 2008) ont effectué une analyse de vibrations libre des panneaux courbes fonctionnellement gradués à partir d'une formulation d'ordre supérieur. Ils ont formulé un élément fini C0 avec neuf degrés de liberté par nœud pour effectuer l'analyse. Cette formulation prend en compte l'approximation de Sanders pour les coques à double courbure, tenant compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transversal. Vo et al (Vo, 2014) ont élaboré un modèle d'éléments finis de poutre à deux nœuds et cinq degrés de liberté par nœud, basé sur la théorie raffinée de déformation du cisaillement pour étudier l'analyse du flambement et des vibrations des poutres sandwich fonctionnellement graduées FG. Ils ont utilisé une interpolation linéaire pour le déplacement axial et une interpolation Hermite-cubique pour les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal w_b et w_s . Une étude paramétrique a été effectuée pour démontrer l'effet de certains paramètres (le rapport d'épaisseur de chaque couche, l'indice matériel, le rapport épaisseur/longueur et les conditions aux limites) sur les fréquences naturelles fondamentales et les charges critiques de flambement. Finalement, Murillo et al (Murillo, 2020) ont présenté un modèle d'éléments finis spectral/hp à sept paramètres pour déterminer les fréquences naturelles dans les structures de type coque (Figure II.16).

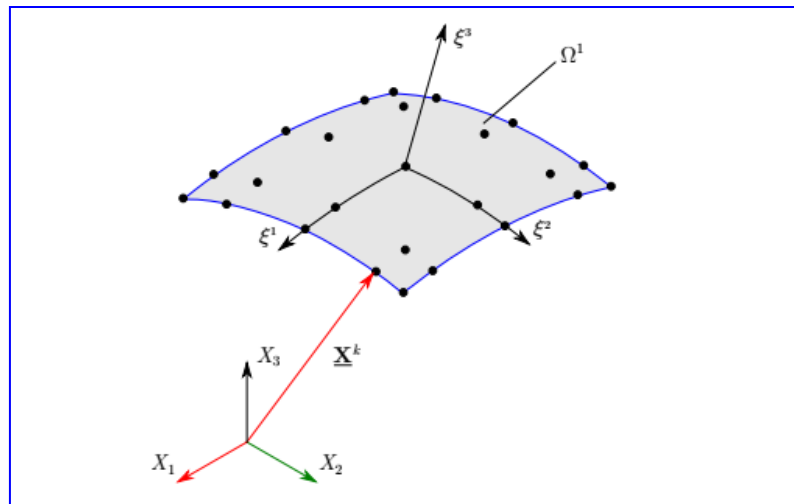


Figure II. 19 : *Discrétisation par éléments finis de la surface moyenne de la coque* (Murillo, 2020)

Plusieurs travaux de recherche ont été menés dans le but de développer des modèles d'éléments finis incorporant des cinématiques qui prennent en compte l'effet d'éirement de l'épaisseur pour l'analyse des poutres FG. Yarasca et al (Yarasca, 2016) ont proposé un nouveau modèle d'élément fini de poutre à 2 nœuds et 7 degrés de liberté par nœud, basé sur la théorie de déformation du cisaillement quasi-3D de type hybride pour l'analyse statique des poutres sandwich fonctionnellement graduées FG. Dans ce modèle, l'interpolation Hermite cubique C1 est utilisée pour les variables de déviation verticale et l'interpolation linéaire C0 est utilisée pour les autres variables axiales. Pour éviter le problème de verrouillage en cisaillement dus aux faibles valeurs d'épaisseur, ils ont employé la technique d'intégration sélective (SI), qui s'est avérée être l'un des remèdes les plus simples pour éviter le blocage par cisaillement. Cette méthode est basée sur une intégration de Gauss réduite des termes de la matrice de rigidité liés au cisaillement. Vo et al (Vo, 2015) ont mis au point un modèle d'élément fini de poutre C1 à deux nœuds avec six degrés de liberté par nœud, basé sur une théorie de déformation du cisaillement quasi-3D pour étudier le comportement vibratoire et le flambage des poutres sandwich FG. Aussi, Nguyen et al (Nguyen, 2019) ont développé un nouvel élément fini de poutre à 2 nœuds et 5 degrés de liberté par nœud, basé sur la théorie des poutres quasi-3D et la formulation mixte pour l'analyse de flexion statique des poutres fonctionnellement graduées FG. Dans ce modèle, seules les fonctions de forme continues C0 sont utilisées pour la formulation d'élément fini de poutre. De plus, cet élément est conçu pour éviter le problème de verrouillage en cisaillement sans avoir besoin d'intégration sélective ou réduite.

Carrera est l'auteur d'une conception unifiée largement reconnue, qui repose sur le concept de déplacement virtuel ou le théorème variationnel mixte de Reissner (RMVT). La conception unifiée de Carrera (CUF) a gagné une large acceptation dans le domaine de l'analyse des poutres et des plaques FG, comme le montrent les publications académiques. Mashat et ses collaborateurs (Mashat, 2013) ont appliqué la conception unifiée de Carrera (CUF) et la méthode des éléments finis dans l'étude des vibrations libres des structures fonctionnellement graduées, y compris les poutres sandwich à âme FG, les poutres laminées, les caissons à parois minces et épaisses et les cylindres sandwich. Ils ont employé l'interpolation linéaire de type Lagrange pour l'interpolation des déplacements généralisés. Filippi et ses collaborateurs (Filippi, 2015) ont mis au point des éléments finis de poutre basés sur diverses théories de déplacement et la conception unifiée unidimensionnelle de Carrera pour mener des analyses statiques des structures fonctionnellement graduées (FG). Dans leur modèle, des éléments à quatre nœuds (B4) ont été utilisés, ce qui a permis d'obtenir une approximation cubique le long de l'axe y pour l'interpolation des déplacements généralisés. D'autres équipes de recherche ont cherché à enrichir et à optimiser les cinématiques des modèles précédents (CLPT, FSDT, etc.), en intégrant des termes capables de fournir une description précise des structures multicouches. Le et ses collaborateurs (Le, 2020) ont conçu un élément fini de poutre amélioré, basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur efficace, pour l'étude des vibrations libres et du flambage des poutres sandwich bidirectionnelles à gradient fonctionnel (BFGSW). Ces poutres comprennent trois couches, un noyau axialement FGM et deux faces de peau FGM bidirectionnelles avec des propriétés de matériau variant à la fois dans le sens de l'épaisseur et de la longueur. Ils ont incorporé quatre fonctions hiérarchiques d'ordre supérieur pour améliorer les interpolations de Lagrange et d'Hermite. Hsu et Deitos (Hsu, 2020) ont recours à l'approche des éléments finis enrichie dans l'analyse dynamique élastique et élastoplastique d'un portique plan exposé à une stimulation aléatoire. L'équation d'équilibre global de forme faible est formulée par la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Les chercheurs ont employé la fonction de forme d'éléments finis enrichie pour améliorer l'élément de poutre. Akbas (Akbas, 2018) a proposé un élément fini plan à douze nœuds, comme illustré dans la figure I1.17. Il a analysé la vibration forcée des poutres-voiles poreuses fonctionnellement graduées sous charge dynamique, en utilisant un modèle plan solide continu. Dans ce modèle d'éléments finis, Akbas a employé la règle de Gauss à cinq points pour le calcul numérique. Akbas et ses collaborateurs (Akbas, 2020) ont élaboré un élément fini plan 2D à 12 nœuds, pour l'étude de la réponse dynamique des poutres épaisses multicouches poreuses fonctionnellement graduées (FGP) qui reposent sur un

support viscoélastique. Ils ont utilisé une combinaison de la formulation numérique par éléments finis et la méthode d'intégration de Newmark pour résoudre de manière incrémentale l'équation du mouvement. Les auteurs ont mené une étude paramétrique, visant à démontrer l'impact de divers paramètres (l'indice matériel, coefficients d'amortissement des supports viscoélastiques, le paramètre de porosité et le modèle de porosité) sur la réponse dynamique de la poutre multicouches FGP.

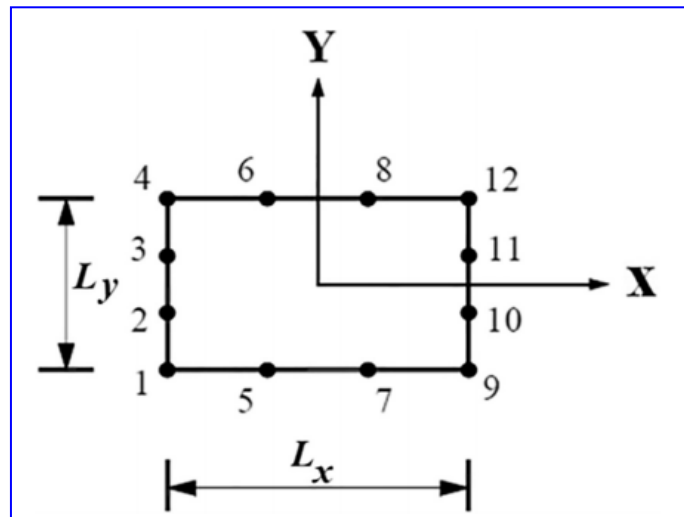


Figure II. 20 : *élément fini plan à douze nœuds* (Akbas, 2018)

Nazargah (Nazargah, 2020) a développé un modèle d'éléments finis 1D pour l'analyse statique d'extension-cisaillement-flexion des poutres courbes à parois minces, en utilisant le concept de section transversale composite en couches équivalente (ELCS) pour remplacer la section transversale de la poutre à paroi mince par une poutre composite en couches équivalente. Ce modèle, est basé sur la théorie Globale-Locale d'ordre supérieur (GLHSDT). Les auteurs ont formulé un élément fini isoparamétrique de poutre courbe à trois nœuds et 13 degrés de liberté (Figure II.18), l'interpolation de Lagrange quadratique est utilisée pour interpoler les déplacements généralisés.

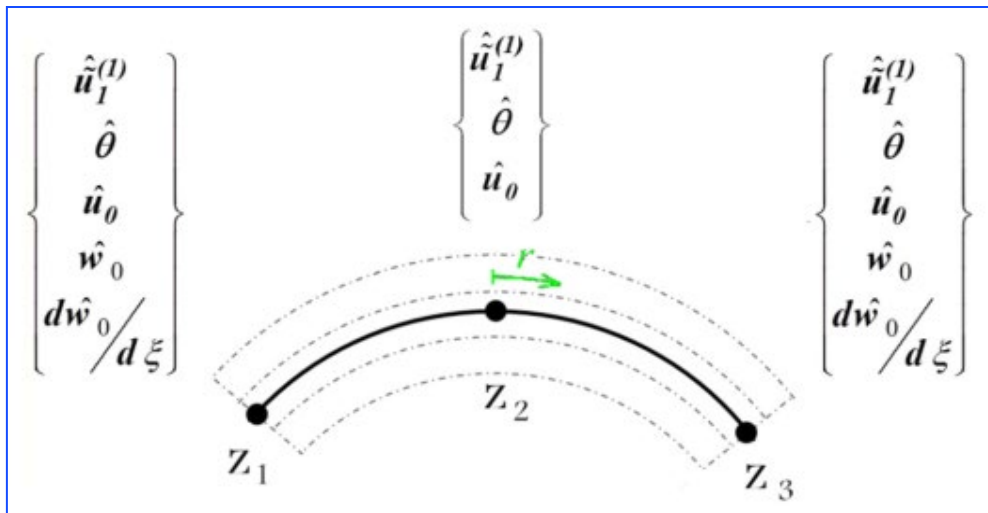


Figure II. 21 : élément isoparamétrique de poutre courbe à trois nœuds (Nazargah, 2020)

Liu et ses collaborateurs (Liu, 2021a) ont introduit une nouvelle technique semi-analytique basée sur la méthode des éléments finis aux limites à l'échelle (SBFEM) pour traiter le problème du flambage des poutres sandwich en matériau à gradient fonctionnel (FGM). Cette élaboration d'élément s'appuie sur la théorie de l'élasticité bidimensionnelle, dans le dessein de mettre en évidence l'influence de divers paramètres (le rapport d'épaisseur de chaque couche, l'indice matériel, le rapport épaisseur/longueur et les conditions aux limites) sur les charges critiques de flambage. Plus tard la même année, (Liu, 2021b) ont étendu le modèle de (Liu, 2021a) aux problèmes des vibrations libres et forcées des poutres sandwich en matériau à gradient fonctionnel (FGM).

II.7 Conclusion :

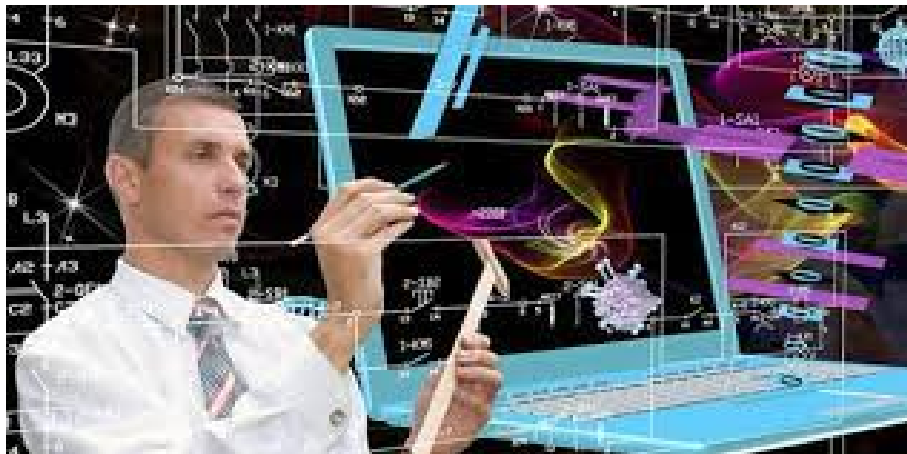
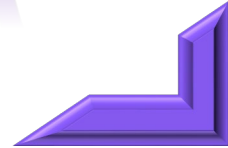
Pour résumer, la simulation des poutres en matériaux à gradient de propriété est un champ de recherche qui ne cesse de progresser. Les diverses théories des poutres exposées, comme la théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur, et la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D, présentent chacune des avantages et des limites en termes de précision et de complexité. La théorie de déformation en cisaillement quasi-3D est particulièrement notable, car elle permet de diminuer le nombre de variables inconnues et d'améliorer l'efficacité du calcul. Les modèles basés sur les éléments finis sont également utiles pour l'étude des structures en FGM, en offrant une prise en compte plus détaillée des effets du gradient de propriété. Les méthodes basées sur la théorie de la couche unique équivalente sont souvent privilégiées dans ce domaine, car elles préviennent les variations abruptes des caractéristiques mécaniques et diminuent ainsi les risques de délaminage. En bref, la simulation des poutres en matériaux à gradient de propriété est un champ d'étude complexe mais continuellement en progression, fournissant de multiples opportunités de recherche et d'innovation.



III

CHAPITRE
CHAPITRE

III



III.1 Introduction :

Ce chapitre a pour but la formulation et l'évaluation d'un élément fini innovant, se basant sur une théorie avancée de la déformation pour explorer l'impact de la distribution de la porosité sur l'analyse des vibrations libres et du flambage des poutres fonctionnellement graduées, qu'elles soient parfaites ou imparfaites. Cette approche diffère des théories classiques de la déformation par cisaillement qui entraînent un nombre d'inconnues plus élevé. Ici, notre théorie nécessite uniquement trois inconnues, offrant ainsi une formulation simplifiée et efficace pour la méthode des éléments finis, avec seulement trois degrés de liberté par nœud. Cette théorie respecte les conditions de contraintes de cisaillement nul sur les faces supérieures et inférieures de la poutre FGP, sans avoir besoin de recourir à des facteurs correctifs de cisaillement. L'élément de poutre à deux nœuds que nous introduisons possède trois degrés de liberté par nœud. Le modèle discret de cet élément assure la continuité entre les éléments grâce aux continuités C_0 et C_1 pour le champ de déplacement et ses premières fonctions dérivées. Les équations dirigeantes sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton pour les poutres FGP, permettant de générer les matrices élémentaires de rigidité, géométrique et de masse. De plus, nous étudions l'effet des distributions de porosité sur les comportements de vibration libre et de flambage d'une poutre FGP poreuse en fonction de divers paramètres. Cet élément est non seulement simple à utiliser, mais il préserve également des aspects physiques clés et est plus approprié pour simuler le comportement mécanique des poutres FGP. Pour finir, les efforts de recherche continuent de se concentrer sur cet élément proposé pour examiner d'autres problèmes de structures FG (Mehar, 2019) ; (Bendaho, 2019) ; (Wang, 2017) ; (Yaylaci, 2020) (Eltaher, 2020) ; (Selmi, 2020).

III.2 Formulation théorique :

III.2.1 Configuration géométrique et concept de la poutre FG :

Considérons une poutre fonctionnellement graduée de longueur L et de section rectangulaire (b la largeur et h l'épaisseur de la poutre) comme illustré dans la figure.III.1. Le système des coordonnées cartésiennes (x , y et z) est établi de sorte qu'à $z = 0$ le plan x , y coïncide avec la surface médiane de la poutre.

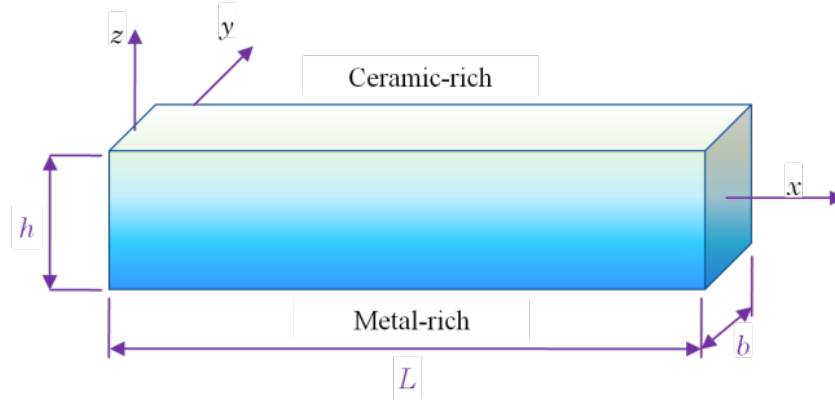


Figure III. 1 : Configuration géométrique d'une poutre en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires

III.2.2 Propriétés matérielles des poutres FGP :

Les propriétés matérielles de la poutre FGP sont supposées varier doucement et progressivement à travers l'épaisseur de la poutre, l'imperfection des pores permet d'inclure la fonction de distribution dans les matériaux constituant la poutre FG, il existe différentes distributions de porosité utilisées pour évaluer les propriétés mécaniques des structures FGP.

Le module de Young $E(z)$, le module de cisaillement $G(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ varient sur l'épaisseur de la poutre en fonction de la porosité non uniforme graduée peuvent être exprimés sous la forme :

La distribution de porosité Type-I,

$$E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.1.a})$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.1.b})$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.1.c})$$

Et la distribution de porosité Type-II,

$$E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{III.2.a})$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{III.2.b})$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{III.2.c})$$

Et,

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (\text{III.3})$$

Où E_1 , G_1 et ρ_1 sont la valeur maximale de module d'Young, le module de cisaillement et la masse volumique de la poutre FGP respectivement. e_0 et e_m présenter les coefficients de porosité du module de Young relatif et la masse volumique de la poutre FGP.

Les autres distributions de porosité comprennent à la fois la fraction volumique des inclusions (céramique et métallique) et le paramètre de porosité. Parmi celles-ci, les propriétés matérielles effectives des poutres FG tenant compte des porosités sont calculées par les modèles suivants :

La distribution de porosité Type-III,

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m - \frac{e_0}{2}(E_c + E_m) \quad (\text{III.4.a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m - \frac{e_0}{2}(\rho_c + \rho_m) \quad (\text{III.4.b})$$

La distribution de porosité Type-IV,

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m - \frac{e_0}{2}(E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{III.5.a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m - \frac{e_0}{2}(\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{III.5.b})$$

La distribution de la loi de puissance est utilisée pour évaluer les propriétés matérielles des poutres FG. Dans cette étude, la fraction volumique peut être indiquée sous la forme (Avcar, 2019) ; (Hadji, 2020) ; (Mehala, 2018) :

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^p \quad (\text{III.6})$$

Ici; p est l'indice de la variation matérielle à travers l'épaisseur ($0 \leq p$), et les indices et représentent respectivement la combinaison de deux matériaux : Céramique et le Métal et le coefficient de Poisson ν été considéré constant pour les deux matériaux pour raison de simplification.

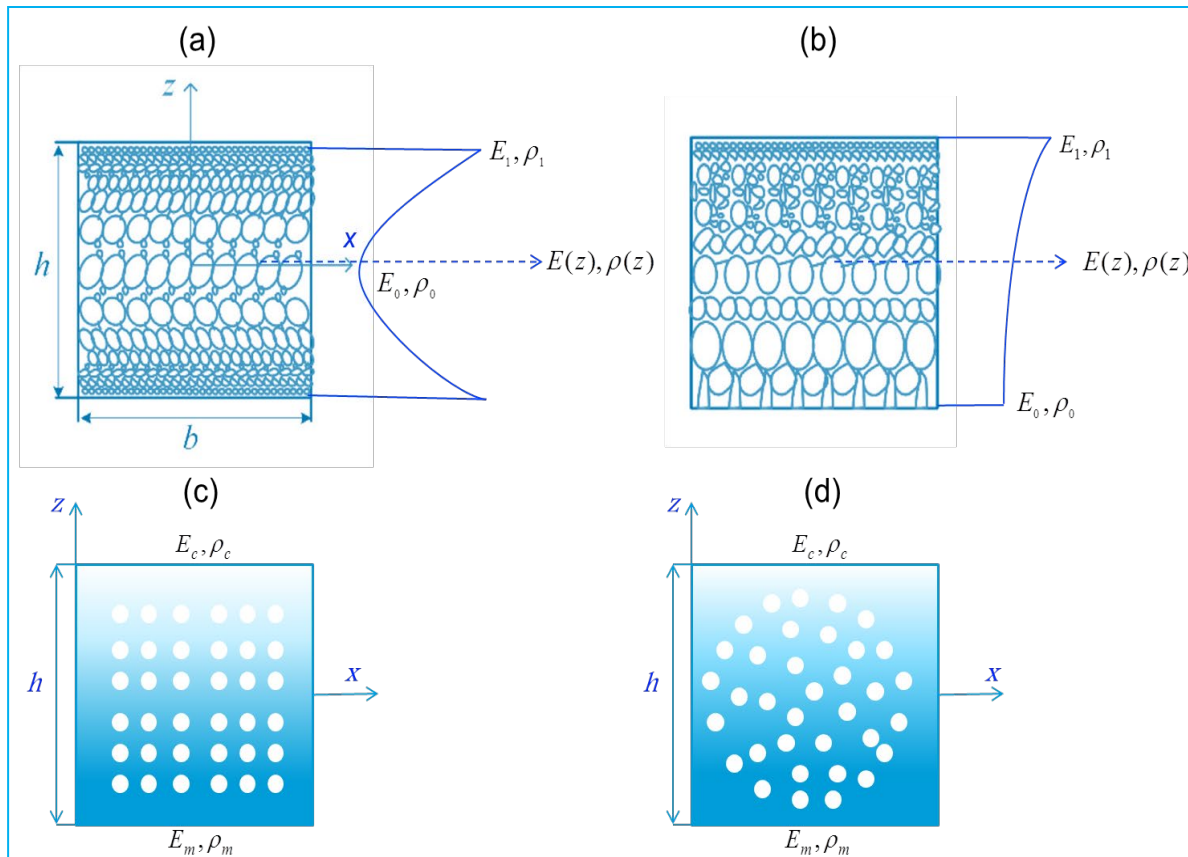


Figure III. 2 : Modèles de distributions de porosité dans les sections transversales de poutre (FGP): (a) Type-I (b) Type-II, (c) Type-III et (d) Type-IV

III.2.3 Théorie des poutres de déformation par cisaillement d'ordre supérieur :

Cette approche théorique considère la variation de déformation de cisaillement par une fonction sinusoïdale à travers l'épaisseur et respecte la condition de nullité de contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans recours au coefficient de correction de cisaillement. Par ailleurs, la précision et la performance devraient être optimisées grâce aux résultats obtenus pour les considérations générales des poutres en FG.

III.2.3.1. Cinématique :

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli passe outre l'effet de la déformation par cisaillement, tandis que la théorie des poutres de Timoshenko implique des facteurs de correction du cisaillement. Pour cette raison, de multiples théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur ont été élaborées, entraînant une profusion d'inconnues. Dans cette formulation, nous avons limité le nombre d'inconnues et d'équations directrices associées à trois en faisant appel aux suppositions suivantes :

Les déplacements dans le plan sont comparables à ceux décrits par la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, avec une composante de cisaillement supplémentaire. La

composante de cisaillement est gérée par une variation sinusoïdale à travers la coordonnée d'épaisseur, ce qui génère des déformations et des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la poutre. On peut postuler des conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, éliminant ainsi le besoin de facteurs de correction de cisaillement. S'appuyant sur ces suppositions, le champ de déplacement associé est défini et présenté comme suit :

$$u(x, z, t) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x \quad (\text{III.7.a})$$

$$w(x, z, t) = w_0 \quad (\text{III.7.a})$$

Où u le déplacement axial, w le déplacement transversal d'un point matériel situé en (x, z) dans la poutre. u_0 , w_0 représentent les inconnues de déplacement au niveau de l'axe neutre, l'inconnue φ_x présente la rotation de la section transversale de la poutre. De plus, la fonction $f(z)$ décrit les distributions non linéaires de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre et est choisie en fonction de la fonction sinusoïdale comme :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.8})$$

Les déformations associées non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation (III.7) sont (Reddy, 2004):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (\text{III.9.a})$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \varphi_x \quad (\text{III.9.b})$$

En substituant les équations (III.7) dans l'eqs (III.9) les relations déformation-déplacement suivantes sont obtenues pour la présente théorie des poutres de déformation par cisaillement :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x + f(z) \eta_x \quad (\text{III.10.a})$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (\text{III.10.b})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \eta_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \gamma_{xz}^0 = \varphi_x \quad (\text{III.11})$$

Et,

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.12})$$

III.2.3.1 Relations Constitutives :

Les relations constitutives linéaires d'une poutre FGP peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

où $(\sigma_x$ et $\tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x$ et $\gamma_{xz})$ sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation. Les coefficients de rigidité, C_{ij} , peuvent être exprimés comme :

$$C_{11} = E(z), C_{44} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.14})$$

III.2.3.3 Équations Gouvernantes :

Les équations gouvernantes du mouvement peuvent être obtenues par la forme variationnelle du principe de Hamilton. Ce principe peut être exprimé sous la forme variationnelle comme suit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (U + V)] dt = 0 \quad (\text{III.15})$$

Où δ indique la variation, $(U + V)$ est l'énergie potentielle totale de la poutre; qui présente la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle engendré par la charge de compression appliquée à la poutre, K est l'énergie cinétique. La variation de l'énergie de déformation de la poutre est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta k_x + S_x \delta \eta_x + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0] dA \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Où A est la section et les résultantes de contrainte N_x , M_x , S_x et Q_{xz} sont définies comme suit :

$$(N_x, M_x, S_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f)(\sigma_x) dz, \quad (\text{III.17})$$

Et

$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}) g(z) dz, \quad (\text{III.18})$$

Où $h/2$ et $-h/2$ sont respectivement les coordonnées z supérieure et inférieure de la poutre FGP. En remplaçant les équations (III.10) et (III.13) dans l'équation (III.17), les expressions finales des résultantes de contrainte sont données par :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + B_{11}k_x + B_{11}^s\eta_x \\ M_x &= B_{11}\varepsilon_x^0 + D_{11}k_x + H_{11}^s\eta_x \end{aligned} \quad (\text{III.19.a})$$

$$\begin{aligned} S_x &= B_{11}^s\varepsilon_x^0 + H_{11}^s k_x + D_{11}^s\eta_x \\ Q_{xy} &= A_{44}^s\gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.19.b})$$

Les composantes constitutives de la membrane, de la flexion, du couplage et du cisaillement transversale sont définies par :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, H_{11}^s, D_{11}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(1, z, z^2, f, zf, f^2) dz, \quad (\text{III.20.a})$$

$$A_{44}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44}[g(z)]^2 dz, \quad (\text{III.20.b})$$

La variation de l'énergie potentielle de la charge de compression appliquée peut être donnée par :

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_V \left[P_{0x} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dV \quad (\text{III.21})$$

La variation de l'énergie cinétique du système de masse peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ (I_1 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + I_1 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_2 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \right. \\ &\quad + I_3 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + I_4 (\dot{\phi} \delta \dot{u}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{\phi}) - I_5 \left(\dot{\phi} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{\phi} \right) \\ &\quad \left. + I_6 (\dot{\phi} \delta \dot{\phi}) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$\rho(z)$ est la masse volumique ; le point $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}$ indique la dérivée par rapport le temps t ; et ($I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$) sont des inerties de masse définies par :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.23})$$

En substituant la variation de l'énergie de déformation (Eq. III.16), la variation de l'énergie potentielle de la charge de compression appliquée (Eq. III.21), et la variation de l'énergie cinétique (Eq. III.22) dans la forme variationnelle du principe de Hamilton (Eq. III.15), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left(\int_A \left(\langle \delta \varepsilon_x^0 \rangle A_{11} \{ \varepsilon_x^0 \} + \langle \delta \varepsilon_x^0 \rangle B_{11} \{ k_x \} + \langle \delta \varepsilon_x^0 \rangle B_{11}^s \{ \eta_x \} + \langle \delta k_x \rangle B_{11} \{ \varepsilon_x^0 \} \right. \right. \\
& + \langle \delta k_x \rangle D_{11} \{ k_x \} + \langle \delta k_x \rangle H_{11}^s \{ \eta_x \} + \langle \delta \eta_x \rangle B_{11} \{ \varepsilon_x^0 \} + \langle \delta \eta_x \rangle D_{11} \{ k_x \} \\
& + \langle \delta \eta_x \rangle H_{11}^s \{ \eta_x \} + \langle \delta \gamma_{xz}^0 \rangle A_{44}^s \delta \gamma_{xz}^0 + P_0 \left\langle \frac{\delta \bar{\sigma} w}{\partial x} \right\rangle \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle + (I_1 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + I_1 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \\
& - I_2 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + I_3 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + I_4 (\dot{\varphi} \delta \dot{u}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{\varphi}) \\
& - I_5 \left(\dot{\varphi} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{\varphi} \right) + I_6 (\dot{\varphi} \delta \dot{\varphi}) dA \Big) dt = 0
\end{aligned} \tag{III.24}$$

en intégrant par partie parties les termes de l'expression précédente et en extrayant les termes de déplacement virtuels de δu_0 , δw_0 et $\delta \varphi_x$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_L \left[\langle \delta \varepsilon_x^0 \rangle A_{11} \{ \varepsilon_x^0 \} + \langle \delta \varepsilon_x^0 \rangle B_{11} \{ k_x \} + \langle \delta \varepsilon_x^0 \rangle B_{11}^s \{ \eta_x \} + \langle \delta k_x \rangle B_{11} \{ \varepsilon_x^0 \} \right. \\
& + \langle \delta k_x \rangle D_{11} \{ k_x \} + \langle \delta k_x \rangle H_{11}^s \{ \eta_x \} + \langle \delta \eta_x \rangle B_{11} \{ \varepsilon_x^0 \} + \langle \delta \eta_x \rangle D_{11} \{ k_x \} \\
& + \langle \delta \eta_x \rangle H_{11}^s \{ \eta_x \} + \langle \delta \gamma_{xz}^0 \rangle A_{44}^s \delta \gamma_{xz}^0 + P_0 \left\langle \frac{\delta \bar{\sigma} w}{\partial x} \right\rangle \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle + \langle \delta u_0 \rangle I_1 \langle \ddot{u}_0 \rangle \\
& + \langle \delta w_0 \rangle I_1 \langle \dot{w}_0 \rangle - \langle \delta w_0 \rangle I_2 \left\langle \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right\rangle - \langle \delta u_0 \rangle I_2 \left\langle \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right\rangle + \langle \delta w_0 \rangle I_3 \left\langle \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} \right\rangle \\
& + \langle \delta u_0 \rangle I_4 \langle \ddot{\varphi}_x \rangle + \langle \delta \varphi_x \rangle I_4 \langle \ddot{u}_0 \rangle - \langle \delta w_0 \rangle I_5 \left\langle \frac{\partial \ddot{\varphi}_x}{\partial x} \right\rangle - \langle \delta \varphi_x \rangle I_5 \left\langle \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right\rangle \\
& \left. + \langle \delta \varphi_x \rangle I_6 \langle \ddot{\varphi}_x \rangle \right] dx = 0
\end{aligned} \tag{III.25}$$

III.2.3.4 Formulation par éléments finis :

Dans cette formulation, un élément fini à deux nœuds est développé. Considérons une poutre droite de longueur L et de largeur uniformes b et d'épaisseur h . La transformation isoparamétrique est souvent employée pour dériver les matrices élémentaires. Pour appliquer cette transformation, la géométrie de l'élément et les champs de déplacement de l'élément développé sont interpolés à travers les coordonnées naturelles (Dhatt et al. 2012).

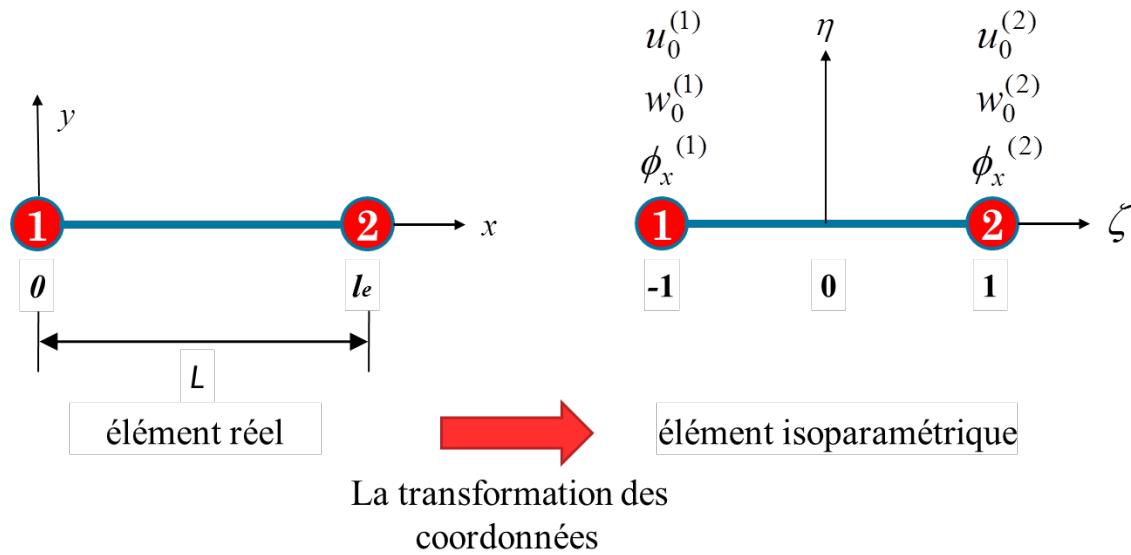


Figure III. 3 : Géométrie et degrés de liberté nodaux pour un élément isoparamétrique à deux nœuds

Pour le présent élément isoparamétrique à deux nœuds, les fonctions de forme N_i et \bar{N}_i sont exprimées comme suit :

$$\{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26.a})$$

$$\{\bar{N}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \\ \bar{N}_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2-3\xi+\xi^2 \\ 1-\xi-\xi^2+\xi^3 \\ 2+3\xi-\xi^2 \\ -1-\xi+\xi^2+\xi^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26.b})$$

Comme discuté précédemment, il est clair que les fonctions mentionnées ci-dessus garantissent les exigences de continuité du champ de déplacement : continuité C^0 pour le déplacement axial u_0 et la rotation ϕ_x , continuité C^1 pour le déplacement transversal w_0 et sa dérivée première.

Après une transformation de coordonnées en utilisant le repère naturel $\xi \in [-1, 1]$,

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) x_i = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \quad (\text{III.27})$$

L'opérateur de transformation jacobien relie les coordonnées naturelles et globales. La dérivée par rapport aux coordonnées globales peut être déterminée comme suit :

$$\frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{L}(x_2 - x_1) = \frac{l_e}{2} = J \Rightarrow J^{-1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1} = \frac{2}{l_e} \quad (\text{III.28})$$

Les variables de déplacement en tout point de l'élément sont interpolées par les fonctions de forme comme suit :

$$\begin{aligned} u_0(\xi) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) u_0^i \\ \varphi_x(\xi) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \varphi_x^i \\ w_0(\xi) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi) w_0^i \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Où;

$$\begin{aligned} \{u_i\} &= \begin{Bmatrix} u_0(\xi) \\ \varphi_x(\xi) \end{Bmatrix} = \sum_1^2 \langle N_1^i(\xi) \quad N_2^i(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} u_0^i \\ \varphi_x^i \end{Bmatrix} \\ \{w_i\} &= \begin{Bmatrix} w_0^i(\xi) \\ w_{0,x}^i(\xi) \end{Bmatrix} = \sum_1^4 \langle \bar{N}_1^i(\xi) \quad \bar{N}_2^i(\xi) \quad \bar{N}_3^i(\xi) \quad \bar{N}_4^i(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} w_0^i \\ w_{0,x}^i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Ainsi, les relations déformation-déplacement généralisées peuvent être données par:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_x^0\} &= [B]_m \{u_0^i\} \\ \{k_x\} &= [B]_f \{w_0^i\} \\ \{\eta_x\} &= [B]_s \{\varphi_x^i\} \\ \{\gamma_{xz}^0\} &= [\bar{B}]_s \{\varphi_x^i\} \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Où $[B]$ présente la matrice de dérivée déformation-déplacement, $[B_m]$, $[B_b]$, $[B_s]$, $[\bar{B}_s]$ et $[B_0]$ sont les matrices d'opérateur de membrane, de flexion, de cisaillement, de cisaillement d'ordre supérieur et la dérivée géométrique données par :

$$\begin{aligned}
[B]_m &= \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[B]_f &= \begin{bmatrix} 0 & -\bar{N}_{1,xx} & -\bar{N}_{2,xx} & 0 & 0 & -\bar{N}_{3,xx} & -\bar{N}_{4,xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[B]_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[\bar{B}]_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \\
[B]_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,x} & \bar{N}_{2,x} & 0 & 0 & \bar{N}_{3,x} & \bar{N}_{4,x} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{III.32}$$

L'introduction des équations (III.32) dans l'équation (III.25), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\langle \delta u_i \rangle & \int_{-1}^1 \left(B_m^T A_{11} B_m + B_m^T B_{11} B_b + B_b^T B_{11} B_m + B_m^T B_{11}^s B_s + B_s^T B_{11} B_m \right. \\
& + B_b^T D_{11} B_b + B_b^T H_{11}^s B_s + B_s^T H_{11} B_b + B_s^T D_{11} B_s + \bar{B}_s^T A_{44}^s \bar{B}_s \\
& + P_0 B_0^T B_0 + N^T I_1 N + \bar{N}^T I_1 \bar{N} - N^T I_2 \bar{N}_{,x} - \bar{N}_{,x}^T I_2 N \\
& + \bar{N}_{,x}^T I_3 \bar{N}_{,x} + N^T I_4 N + N^T I_4 N - N^T I_5 \bar{N}_{,x} - \bar{N}_{,x}^T I_5 N \\
& \left. + N^T I_6 N \right) J d\xi \{u_i\} = 0
\end{aligned} \tag{III.33}$$

Où " T " en exposant désigne la transposée d'un vecteur ou d'une matrice, l'équation (III.33) peuvent être écrite sous la forme:

$$\left([K_g] - P_0 [G_g] - \omega^2 [M_g] \right) \{u_i\} = 0 \tag{III.34}$$

Où $\{u_i\}$ est le vecteur de degré de liberté global de l'élément. $[K_g]$ est la matrice de rigidité globale, $[M_g]$ est la matrice de masse globale, $[G_g]$ est la matrice du géométrique globale. ω et P_0 sont respectivement la fréquence naturelles de la poutre et la charge critique du flambage. Pour l'analyse de la vibration libre de la poutre sans chargement axial, on néglige la matrice $[G_g]$ dans l'équation (III.34), nous avons le problème aux valeurs propres suivant:

$$\left([K_g] - \omega^2 [M_g] \right) \{u_i\} = 0 \tag{III.35}$$

Pour l'analyse du flambage, l'équation (III.34) prend la forme suivante:

$$\left([K]_g - P_0 [G]_g \right) \{u_i\} = 0 \quad (\text{III.36})$$

La forme globale des matrices de rigidité, géométrique et de masse sont obtenus en assemblant les contributions individuelles des éléments à l'aide des matrices élémentaires données comme suit :

$$\begin{aligned} [K]_g = \sum_e & \left([K]_m + [K]_{mb} + [K]_{ms} + [K]_{bm} + [K]_b + [K]_{bs} \right. \\ & \left. + [K]_{sm} + [K]_{sb} + [K]_s + [\bar{K}]_s \right) \end{aligned} \quad (\text{III.37.a})$$

$$[G]_g = \sum_e [K]_0 \quad (\text{III.37.b})$$

$$\begin{aligned} [M]_g = \sum_e & \left([M]_m + [M]_{mb} + [M]_{bm} + [M]_{ms} + [M]_{sm} + [M]_b \right. \\ & \left. + [M]_{bs} + [M]_{sb} + [M]_s + [\bar{M}]_s \right) \end{aligned} \quad (\text{III.37.c})$$

Où les composants de la matrice de rigidité $[K]_g$, de la rigidité géométrique $[G]_g$ et de la matrice de masse $[M]_g$ sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} [K]_m &= \int_{-1}^1 (B_m^T A_{11} B_m) J d\xi ; [K]_{mb} = \int_{-1}^1 (B_m^T B_{11} B_b) J d\xi \\ [K]_{ms} &= \int_{-1}^1 (B_m^T B_{11}^s B_s) J d\xi ; [K]_{bm} = \int_{-1}^1 (B_b^T B_{11} B_m) J d\xi \\ [K]_b &= \int_{-1}^1 (B_b^T D_{11} B_b) J d\xi ; [K]_{bs} = \int_{-1}^1 (B_b^T H_{11}^s B_s) J d\xi \\ [K]_{sm} &= \int_{-1}^1 (B_s^T B_{11}^s B_m) J d\xi ; [K]_{sb} = \int_{-1}^1 (B_s^T H_{11}^s B_b) J d\xi \\ [K]_s &= \int_{-1}^1 (B_s^T D_{11}^s B_s) J d\xi ; [\bar{K}]_s = \int_{-1}^1 (\bar{B}_s^T A_{44}^s \bar{B}_s) J d\xi \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

et,

$$[G] = \int_{-1}^1 (B_0^T B_0) J d\xi \quad (\text{III.39})$$

et,

$$\begin{aligned}
[M]_{m} &= \int_{-1}^1 (N^T I_1 N) J d\xi & ; [\bar{M}]_s &= \int_{-1}^1 (\bar{N}^T I_1 \bar{N}) J d\xi \\
[M]_{mb} &= -\int_{-1}^1 (N^T I_2 \bar{N}_{,x}) J d\xi & ; [M]_{bm} &= -\int_{-1}^1 (\bar{N}_{,x}^T I_2 N) J d\xi \\
[M]_b &= \int_{-1}^1 (\bar{N}_{,x}^T I_3 \bar{N}_{,x}) J d\xi & ; [M]_{ms} &= \int_{-1}^1 (N^T I_4 N) J d\xi \\
[M]_{sm} &= \int_{-1}^1 (N^T I_4 N) J d\xi & ; [M]_{bs} &= -\int_{-1}^1 (\bar{N}_{,x}^T I_5 N) J d\xi \\
[M]_{sb}^1 &= -\int_{-1}^1 (N^T I_5 \bar{N}_{,x}) J d\xi & ; [M]_s &= (N^T I_6 N) J d\xi
\end{aligned} \tag{III.40}$$

La quadrature de Gauss à deux points est utilisée pour évaluer les intégrales dans toutes les matrices de les équations {(III.38), (III.39) et (III.40)}.

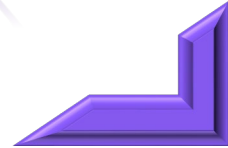
De plus, pour éviter le problème de blocage par cisaillement dus aux faibles valeurs d'épaisseur, de nombreuses techniques sont utilisées. Parmi celles-ci, l'intégration sélective (SI) s'est avérée être l'un des remèdes les plus simples pour éviter le blocage par cisaillement. Cette méthode est basée sur une intégration de Gauss réduite à un point pour calculer les termes de la matrice de rigidité de cisaillement $[\bar{K}]_s$ (la technique d'intégration réduite dans Dhatt et al. 2012).

I.1. Conclusion:

Ce chapitre détaille la formulation théorique d'un nouveau modèle d'éléments finis performant, conçu pour l'analyse du comportement de vibration libre et de flambage des poutres fonctionnellement graduées, parfaites ou imparfaites (FGP). L'élément fini élaboré se base sur une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur, à la fois efficace et simplifiée. Cette théorie prend en compte la variation parabolique de la déformation et de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre, tout en respectant les conditions de contraintes de cisaillement nulles sur les faces supérieures et inférieures de la poutre FGP, sans nécessiter l'utilisation de facteurs de correction du cisaillement. Les équations dirigeantes du mouvement sont extraites en utilisant le principe d'Hamilton, ce qui permet de générer les matrices élémentaires de rigidité, géométriques et de masse. En se référant au système de coordonnées isoparamétriques, ces matrices élémentaires sont calculées en se basant sur la règle de quadrature de Gauss. Pour pallier le phénomène de blocage par cisaillement, nous avons recours à la technique d'intégration réduite pour les termes de la matrice de rigidité de cisaillement. Le prochain chapitre présentera des résultats permettant d'évaluer et de confirmer l'efficacité et la simplicité de la formulation suggérée, par une comparaison avec les résultats existants dans la littérature.



IV CHAPITRE



IV.1. Introduction :

L'intérêt principal de ce chapitre est de présenter l'évaluation et la validation de modèle d'éléments finis développé dans ce travail, ce modèle est basé sur une théorie simple et efficace de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Nous allons élaborer un code de calcul qui permette à déterminer les fréquences naturelles et les charges critiques du flambage des poutres fonctionnellement graduée parfaites et imparfaites.

La bonne performance de l'élément de poutre développé est démontrée en comparant les résultats obtenus avec quelques résultats obtenus avec des solutions de références, déterminés analytiquement, et ceux obtenu par d'autres modèles d'élément finis disponibles dans la littérature. De plus, une étude numérique détaillée est réalisée pour examiner les effets de l'indice de porosité, de l'indice de loi de puissance, les conditions aux limites et du rapport longueur/hauteur sur la réponse de vibration libre et de flambement des poutres fonctionnellement graduée parfaites et imparfaites. La détermination des impacts de ces paramètres sur les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement joue un rôle important dans le processus de fabrication de ces matériaux et leur modélisation mécanique associée dans les structures aérospatiales, nucléaires, civiles et autres.

IV.2. Résultats numériques et discussion :

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour démontrer la précision et la robustesse de l'élément développé dans la prédiction de la réponse de la vibration et de flambage des poutres FGP; les propriétés des matériaux utilisés dans la présente étude sont illustrées dans le tableau IV.1.

Autrement dit, on considère une poutre FG composée d'aluminium (Al) comme métal et d'alumine (Al_2O_3) comme céramique pour laquelle :

Tableau IV. 1 : Propriétés matérielles de la poutre FGP

Propriétés	Métal Aluminium (Al)	Céramique Alumina (Al_2O_3)	
<i>Al-Al₂O₃</i>	E (GPa)	70	380
	ν	0.30	0.30
	ρ (kg/m ³)	2702	3960
<i>mousse d'acier à cellules ouvertes</i>	E_1 (GPa)	200	/
	ν	1/3	/
	ρ_1 (kg/m ³)	7850	/

Pour la comparaison avec les autres solutions, les fréquences propres et les charges critiques de flambement sont données sous la forme normalisée suivante :

$$\bar{\omega} = \omega \left(\frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} ; \quad \bar{P}_{cr} = P_{cr} \frac{12L^2}{E_m h^3} ; \quad (IV.1)$$

$$\hat{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{I_1}{A_{11}}} ; \quad \hat{P}_{cr} = \frac{P_{cr}}{A_{11}} ;$$

Les effets de l'indice de porosité, l'indice de loi de puissance, du rapport longueur/hauteur et des conditions aux limites sur les comportements de flambage et de vibration des poutres FGP sont discutés en détail. Trois conditions aux limites sont considérées (C-C, S-S et C-F) et ces conditions aux limites cinétiques sont données dans le tableau IV.2.

Tableau IV. 2 : Les conditions aux limites considérées dans cette étude

La condition aux limites	$x=0$				$x=L$			
S-S : poutre appuyée – appuyée.	$u_0 = 0$	$w_0 \neq 0$	$w_{0,x} \neq 0$	$\phi_0 \neq 0$	$u_0 = 0$	$w_0 \neq 0$	$w_{0,x} \neq 0$	$\phi_0 \neq 0$
C-C : poutre encastree – encastree.	$u_0 = 0$	$w_0 = 0$	$w_{0,x} = 0$	$\phi_0 = 0$	$u_0 = 0$	$w_0 = 0$	$w_{0,x} = 0$	$\phi_0 = 0$
C-F : poutre encastree – libre.	$u_0 = 0$	$w_0 = 0$	$w_{0,x} = 0$	$\phi_0 = 0$	$u_0 \neq 0$	$w_0 \neq 0$	$w_{0,x} \neq 0$	$\phi_0 \neq 0$

IV.2.1. Analyse des poutres FG parfaites :

IV.2.1.1. Études de la convergence :

Des études de convergence et de validation de l'élément de poutre développé sont d'abord réalisées. Le tableau IV.3 présente les fréquences fondamentales non dimensionnelles et les charges critiques de flambement des poutres FG parfaites avec différentes conditions aux limites et le nombre des éléments pour le rapport longueur/hauteur ($L/h=5$) et l'indice de loi de puissance ($p=1$).

Ce tableau montre que les résultats pour l'élément proposé convergent rapidement lorsque le nombre d'éléments augmente. Dix-huit éléments suffisent pour obtenir une précision raisonnable dans les calculs numériques. De plus, les résultats de présent élément sont en bon accord avec les valeurs numériques rapportées par Vo et al. (Vo, 2014) et Nguyen et al. (Nguyen, 2015).

Tableau IV. 3 : La convergence de la fréquence fondamentale adimensionnelle et les charges critiques de flambement des poutres FG parfaites avec $p=1$ et $L/h=5$

le nombre des éléments	C-C	S-S	C-F
les fréquences fondamentales adimensionnelles			
4	8.0804	3.9785	1.4641
6	7.9936	3.9744	1.4640
8	7.9670	3.9730	1.4638
10	7.9580	3.9723	1.4636
12	7.9545	3.9719	1.4635
14	7.9527	3.9717	1.4635
16	7.9517	3.9715	1.4634
18	7.9509	3.9714	1.4634
Vo et al. 2014	7.9522	3.9716	1.4633
les charges critiques de flambage			
4	80.2694	24.6709	6.5467
6	79.4895	24.6218	6.5403
8	79.4282	24.6050	6.5380
10	79.3971	24.5973	6.5370
12	79.3928	24.5931	6.5365
14	79.3903	24.5906	6.5361
16	79.3729	24.5890	6.5359
18	79.3714	24.5879	6.5358
Nguyen et al. 2015	79.4888	24.5840	6.5352

Pour donner une visualisation plus claire, la convergence des fréquences fondamentales non dimensionnelles et les charges critiques de flambement des poutres FG sont représentées aux Figure IV.1, cette convergence est confirmée pour toutes les conditions aux limites considérées et le nombre des éléments pour le rapport longueur/hauteur ($L/h=5$) et l'indice de loi de puissance ($p=1$). A travers ce problème, nous constatons que, le modèle d'éléments finis formulé a un taux de convergence parfait. De plus, à mesure que le maillage est raffiné et le nombre de degré de liberté augmente, l'erreur de solution diminue à un taux constant. Le diagramme de convergence représente une ligne droite après avoir utilisé quelques nombres d'éléments, ce qui indique que l'erreur de solution diminue proportionnellement à la taille du maillage.

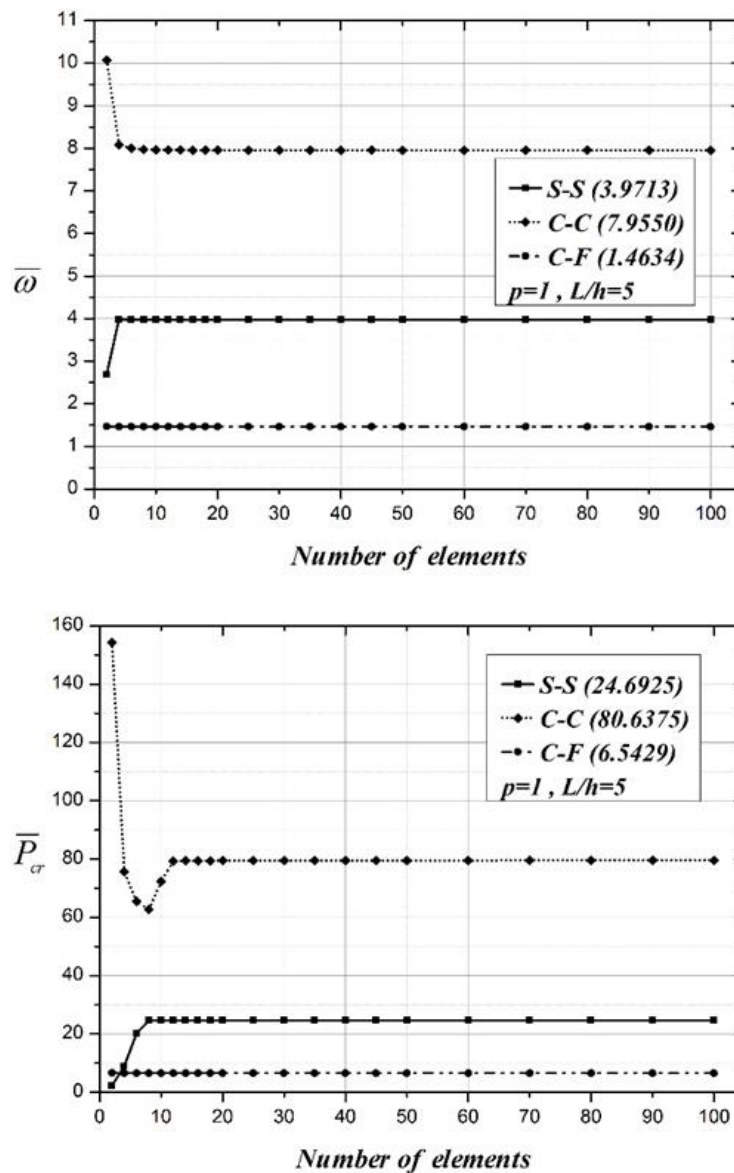


Figure IV. 1 : La convergence de la fréquence fondamentale non dimensionnelle et les charges critiques de flambement des poutres FG parfaites avec $p=1$ et $L/h=5$

IV.2.1.2. Évaluation et validation :

Dans cette section, nous avons testé la précision de l'élément formulé par rapport à des études précédentes disponibles dans la littérature. À cette raison, l'analyse des vibrations libres et du flambage des poutres FG parfaites est étudiée afin de créer un pont à poutre FG avec des cas de porosités traités dans les sections suivantes. Les fréquences fondamentales non dimensionnelles et les charges critiques de flambement obtenues par le présent élément sont étudiées et comparées avec d'autres théories de poutre FG. Dans le tableau IV.4, les fréquences fondamentales non dimensionnelles de poutre FG sont présentées avec diverses valeurs d'indice de matériau p , de rapport élancement (L/h) et étayées par de nombreuses conditions aux limites générales. Les fréquences fondamentales non dimensionnelles calculées actuelles sont comparées à celles d'autres théories des poutres de cisaillement telles que la théorie des poutres de Timoshenko de Simsek (Simsek, 2010), la théorie des poutres de déformation de cisaillement d'ordre supérieur utilisée par Nguyen et al (Nguyen, 2015) et la théorie des poutres raffinés de déformation du cisaillement d'ordre élevé (RHSDT) de Vo et al (Vo, 2014). Une enquête similaire est effectuée pour l'analyse de flambement des poutres FG.

Tableau IV. 4 : La comparaison des fréquences naturelles adimensionnelle $\bar{\omega}$ des poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)

CAL	L/h	Théories	P					
			0	0.5	1	2	5	10
S-S	5	TBT ^(a)	5.1525	4.4075	3.9902	3.6344	3.4312	3.3135
		HSBT ^(b)	5.1528	4.4102	3.9904	3.6264	3.4009	3.2815
		RHSdT ^(c)	5.1528	4.4019	3.9716	3.5979	3.3743	3.2653
		Présent	5.1531	4.4019	3.9713	3.5971	3.3722	3.2644
		Dif. %	0,0058	0,0000	-0,0076	-0,0222	-0,0622	-0,0276
	20	TBT ^(a)	5.4603	4.6514	4.2051	3.8368	3.6509	3.5416
		HSBT ^(b)	5.4603	4.6506	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
		RHSdT ^(c)	5.4603	4.6504	4.2039	3.8349	3.6490	3.5405
		Présent	5.4603	4.6505	4.2037	3.8340	3.6463	3.5377
		Dif. %	0,0000	0,0022	-0,0048	-0,0235	-0,0740	-0,0791
C-C	5	TBT ^(a)	10.0705	8.7467	7.9503	7.1767	6.4935	6.1652
		HSBT ^(b)	10.0726	8.7463	7.9518	7.1776	6.4929	6.1658
		RHSdT ^(c)	10.0678	8.7457	7.9522	7.1801	6.4961	6.1662
		Présent	10.0771	8.7510	7.9550	7.1794	6.4893	6.1669
		Dif. %	0,0924	0,0606	0,0352	-0,0097	-0,1047	0,0114
	20	TBT ^(a)	12.2235	10.4263	9.4314	8.6040	8.1699	7.9128
		HSBT ^(b)	12.2243	10.4269	9.4319	8.5977	8.1446	7.8860
		RHSdT ^(c)	12.2202	10.4238	9.4311	8.6047	8.1698	7.9115
		Présent	12.2225	10.4268	9.4309	8.5966	8.1423	7.8840
		Dif. %	0,0188	0,0288	-0,0021	-0,0941	-0,3366	-0,3476
C-F	5	TBT ^(a)	1.8948	1.6174	1.4630	1.3338	1.2645	1.2240
		HSBT ^(b)	1.8957	1.6182	1.4636	1.3328	1.2594	1.2187
		RHSdT ^(c)	1.8952	1.6180	1.4633	1.3326	1.2592	1.2184
		Présent	1.8954	1.6181	1.4634	1.3326	1.2590	1.2183
		Dif. %	0,0106	0,0062	0,0068	0,0000	-0,0159	-0,0082
	20	TBT ^(a)	1.9496	1.6604	1.5010	1.3697	1.3038	1.2650
		HSBT ^(b)	1.9496	1.6602	1.5011	1.3696	1.3696	1.2646
		RHSdT ^(c)	1.9496	1.6603	1.5011	1.3697	1.3038	1.265
		Présent	1.9496	1.6603	1.5010	1.3696	1.3033	1.2645
		Dif. %	0,0000	0,0000	-0,0067	-0,0073	-0,0383	-0,0395

(a) la théorie des poutres de Timoshenko de Simsek (Simsek, 2010).

(b) la théorie des poutres de déformation de cisaillement d'ordre supérieur de Nguyen et al (Nguyen, 2015).

(c) la théorie des poutres raffinés de déformation du cisaillement d'ordre élevé de Vo et al (Vo, 2014).

$$\text{Dif. \%} = 100 \times (\text{Présent} - \text{RHSdT}^{(c)}) / \text{RHSdT}^{(c)}$$

Tableau IV. 5 : La comparaison des charges critiques des flambages adimensionnels \bar{P}_{cr} des poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)

CA L	L/h	Théories	P					
			0	0.5	1	2	5	10
S-S	5	TBT ^(a)	48.8350	31.9670	24.6870	19.2450	16.0240	14.4270
		HSBT ^(b)	48.8406	32.0013	24.6894	19.1577	15.7355	14.1448
		RHSdT ^(c)	48.8401	32.0094	24.6911	19.1605	15.7400	14.1468
		Présent	48.8474	32.0129	24.6925	19.1571	15.7251	14.1412
		Dif. %	0,0149	0,0109	0,0057	-0,0177	-0,0947	-0,0396
S-S	20	TBT ^(a)	52.3090	33.9960	26.1710	20.4160	17.1920	15.6120
		HSBT ^(b)	52.3083	34.0002	26.1707	20.3909	17.1091	15.5278
		RHSdT ^(c)	52.3082	34.0087	26.1727	20.3936	17.1118	15.5291
		Présent	52.3100	34.0087	26.1716	20.3908	17.1060	15.5266
		Dif. %	0,0034	0,0000	-0,0042	-0,0137	-0,0339	-0,0161
C-C	5	TBT ^(a)	154.3500	103.2200	80.4980	62.6140	50.3840	44.2670
		HSBT ^(b)	154.5610	103.7167	80.5940	61.7666	47.7174	41.7885
		RHSdT ^(c)	154.5500	103.7490	80.6087	61.7925	47.7562	41.8042
		Présent	154.5545	103.8030	80.6375	61.7707	47.6356	41.7705
		Dif. %	0,0029	0,0520	0,0357	-0,0353	-0,2525	-0,0806
C-C	20	TBT ^(a)	195.3400	127.8700	98.7490	76.6538	62.9580	56.5926
		HSBT ^(b)	195.3623	128.0053	98.7885	76.6538	62.9580	56.5926
		RHSdT ^(c)	195.3610	128.0500	98.7868	76.6677	62.9786	56.5971
		Présent	195.3615	128.0513	98.7705	76.6291	62.9007	56.5647
		Dif. %	0,0003	0,0010	-0,0165	-0,0503	-0,1237	-0,0572
C-F	5	TBT ^(a)	13.2130	8.5782	6.6002	5.1495	4.3445	3.9501
		HSBT ^(b)	13.0771	8.5000	6.5427	5.0977	4.2772	3.8820
		RHSdT ^(c)	13.0771	8.5020	6.5428	5.0979	4.2776	3.8821
		Présent	13.0775	8.5022	6.5429	5.0977	4.2765	3.8816
		Dif. %	0,0031	0,0024	0,0015	-0,0039	-0,0257	-0,0129
C-F	20	TBT ^(a)	13.2130	8.5666	6.6570	5.1944	4.3903	3.9969
		HSBT ^(b)	13.3741	8.6694	6.6678	5.2025	4.3974	4.0045
		RHSdT ^(c)	13.3742	8.6714	6.6680	5.2027	4.3976	4.0046
		Présent	13.3138	8.6370	6.6425	5.1812	4.3726	3.9793
		Dif. %	-0,4516	-0,3967	-0,3824	-0,4132	-0,5685	-0,6318

(a) la théorie de Timoshenko de Li et Batra (Li, 2013).

(b) la théorie d'ordre supérieur de Nguyen et al (Nguyen, 2015).

(c) la théorie raffinés d'ordre élevé de Vo et al (Vo, 2014).

Dif. % = 100x(**Présent**-RHSdT^(c)) / RHSdT^(c)

Les charges critiques des flambages adimensionnels des poutres FG parfaites sont présentées dans le tableau IV.5. On voit que les résultats obtenus présentent un bon accord avec ceux donnés en utilisant d'autres théories des poutres pour l'analyse des vibrations libres et du flambement. Comme il convient de le noter, la théorie des poutres de Timoshenko de Li et Batra (Li, 2013), nécessite un facteur de correction de cisaillement approprié pour évaluer exactement la contrainte de cisaillement ; ce facteur dépend de divers paramètres tels que la géométrie, les propriétés des matériaux et les conditions aux limites imposées. Ainsi, plus d'opérations supplémentaires sont nécessaires. Les calculs donnés par Nguyen et al (Nguyen, 2015) sont fondées sur la théorie des poutres de déformation du cisaillement d'ordre supérieur via des solutions analytiques, la sensibilité des solutions données concerne le nombre de termes relatifs aux fonctions admissibles optées et les conditions aux limites utilisées qui sont compliquées dans l'implantation informatique. Les résultats donnés par Vo et al (Vo, 2014) sont dérivés à l'aide de la méthode classique des éléments finis qui est lourde et coûteuse en calculs. Dans cet esprit, l'élément formulé est généralement plus rapide à simuler que ses homologues d'éléments finis en incluant le concept isoparamétrique et les résultats obtenus atteignent la même efficacité et précision.

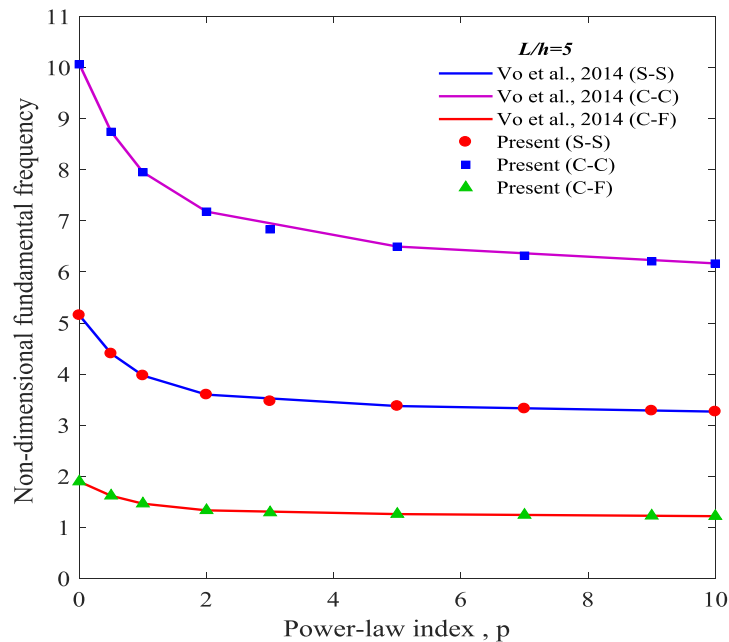


Figure IV. 2 : Évolution de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matérielle p pour ($L/h=5$)

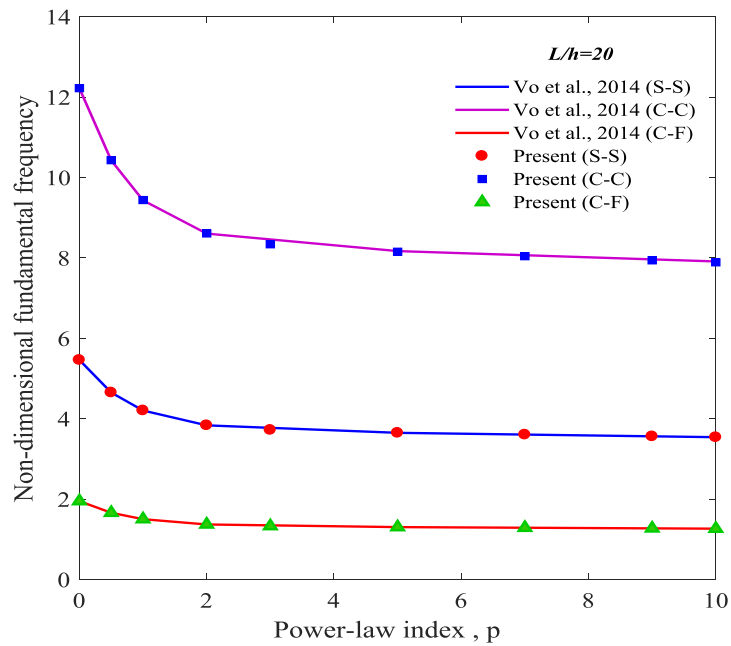


Figure IV. 3 : Evolution de la fréquence fondamentale adimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour ($L/h=20$)

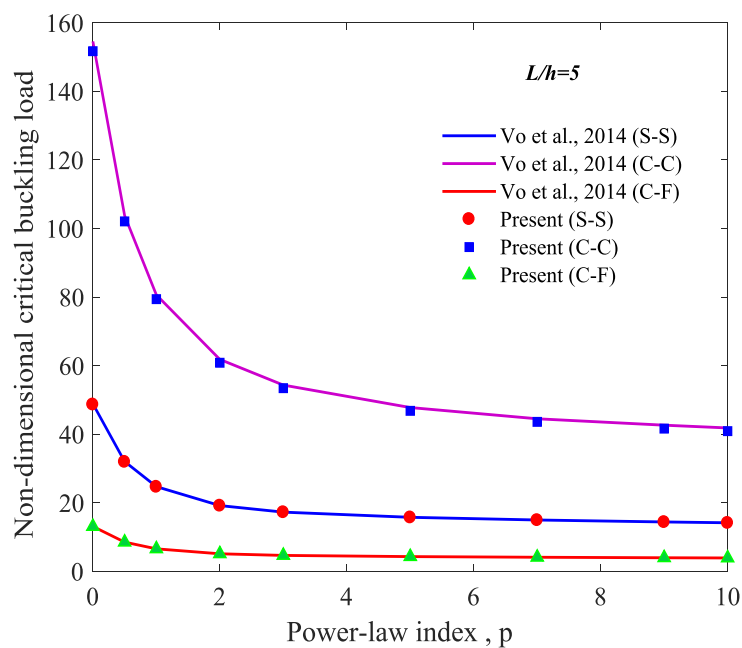


Figure IV. 4 : Variation de la charges critiques des flambages adimensionnels \bar{P}_{cr} des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p ($L/h=5$)

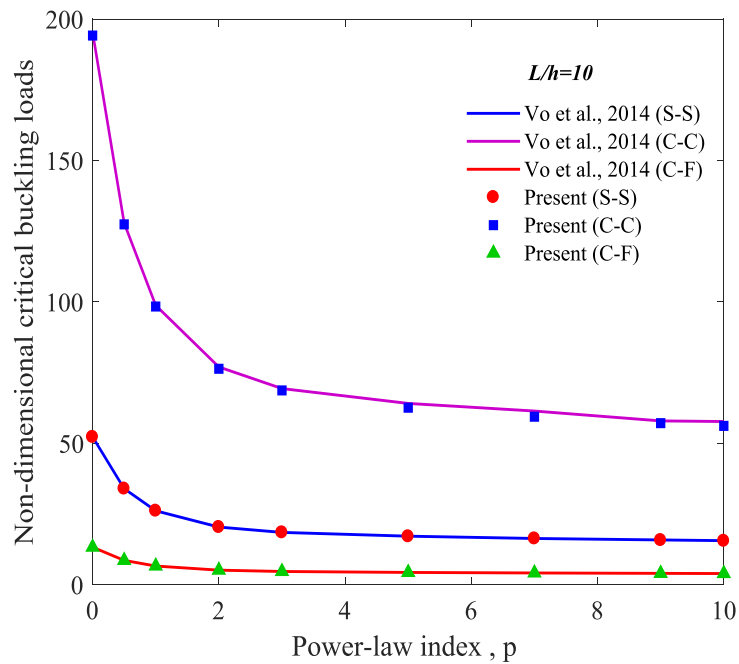


Figure IV. 5 : Variation de la charges critiques des flambages adimensionnels \bar{P}_{cr} des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec diverses conditions d'appuis et le paramètre de puissance matérielp ($L/h=10$)

Les effets de l'indice de loi de puissance sur la fréquence fondamentale et la charge critique de flambement sont également affichés aux Figure IV.2-IV.5, respectivement. Dans ces figures, une comparaison avec l'élément fini basée sur la théorie des poutres de Reddy-Bickford donnée par Vo et al (Vo, 2014). Comme on peut le voir, les fréquences fondamentales et les charges de flambement calculées par le présent élément concordent bien avec les solutions de référence pour toutes les poutres considérées. En fait, ces figures peuvent être considérées comme la représentation visuelle des tableaux IV.4 et IV.5. Comme On peut également voir que lorsque la valeur p de l'indice de loi de puissance augmente, c'est-à-dire que la poutre devient plus métallique, les fréquences fondamentales et les charges critiques de flambement diminuent d'abord, puis se rapprochent d'une valeur constante.

Dans le tableau IV.6, une comparaison des trois premières fréquences propres non dimensionnelles des poutres FG parfaites pour différentes valeurs de le paramètre de puissance matérielp et le rapport élancement (L/h) est réalisée. Les résultats obtenus à partir du présent modèle sont comparés à d'autres résultats tels que la théorie RHSDT de Thai et Vo (Thai, 2012), la théorie ESDT de Sayyad et Ghugal (Sayyad, 2018), la théorie HSBT de Nguyen et al (Nguyan, 2015) et la théorie 2D-HSBT de Hebbar et al (Hebbar, 2020). On peut voir qu'il y a un bon accord entre les résultats du modèle d'éléments finis proposé et ceux d'autres chercheurs de la littérature.

Tableau IV. 6 : La comparaison des trois premières fréquences propres non dimensionnelles des poutres FG parfaites avec diverses valeurs de le paramètre de puissance matérielp et le rapport élancement (L/h)

L/h	mode	Théories	P					
			0	0,5	1	2	5	10
	1	RHSdT ^(a)	5.1527	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
		ESBT ^(b)	5.15423	/	3.99140	3.62671	3.40000	3.28135
		2D-HSBT ^(c)	5,1527	/	3,9904	3,6264	3,4014	3,2816
		HSBT ^(d)	5.1528	4.4102	3.9904	3.6264	3.4009	3.2815
		Présent	5.1522	4.4015	3.9714	3.5978	3.3740	3.2650
5	2	RHSdT ^(a)	17.8812	15.4588	14.0100	12.6405	11.5431	11.0240
		ESBT ^(b)	17.8996	/	14.0224	12.6466	11.5281	11.0264
		2D-HSBT ^(c)	17,881	/	14,01	12,64	11,544	11,024
		HSBT ^(d)	17.8817	15.4571	14.0103	12.6404	11.5406	11.0231
		Présent	17.8581	15.6320	14.4141	12.8646	11.8628	11.1744
	3	RHSdT ^(a)	34.2097	29.8382	27.0979	24.3152	21.7158	20.5561
		ESBT ^(b)	33.3835	/	27.2496	24.6889	21.3661	20.5815
		2D-HSBT ^(c)	34,209	/	27,098	24,316	21,72	20,556
		HSBT ^(d)	34.2143	29.8367	27.1014	24.3168	21.7112	20,5561
		Présent	34.0518	29.7116	26.9955	24.2256	21.5975	20.4280
	1	RHSdT ^(a)	5,4603	4.6511	4,205	3,8361	3,6485	3,539
		ESBT ^(b)	5.46043	/	4.20513	3.83614	3.64830	3.53895
		2D-HSBT ^(c)	5,4603	/	4,205	3,8361	3,6485	3,5389
		HSBT ^(d)	5.4603	4.6506	4.2051	3.8361	3.6485	3.539
		Présent	5.4603	4.6509	4.2045	3.8352	3.6474	3.5383
20	2	RHSdT ^(a)	21.5732	18.3962	16.6344	15.1619	14.3746	13.9263
		ESBT ^(b)	21.5738	/	16.6342	15.1620	14.3670	13.9147
		2D-HSBT ^(c)	21,573	/	16,643	15,161	14,374	13,926
		HSBT ^(d)	21.5732	18.3942	16.6344	15.1618	14.3742	13.9261
		Présent	21.5706	18.3900	16.6230	15.1431	14.3528	13.9117
	3	RHSdT ^(a)	47.5930	40.6526	36.7679	33.4689	31.5780	30.5369
		ESBT ^(b)	47.5913	/	36.8705	33.6304	31.5655	30.5349
		2D-HSBT ^(c)	47.593	/	36.768	33.469	31.579	30.095
		HSBT ^(d)	47.5999	40.6543	36,7736	33,4735	31.5804	30.5400
		Présent	47.5648	40.5698	36.6243	33.2455	31.2874	30.3076

(a) la théorie raffinée d'ordre élevé de Thai et Vo (Thai, 2012).

(b) la théorie de déformation du cisaillement exponentiel de Sayyad et Ghugal (Sayyad,2018).

(c) la théorie 2D d'ordre supérieur de Hebbar et al (Hebbar, 2020).

(d) la théorie d'ordre supérieur de Nguyen et al (Nguyen, 2015).

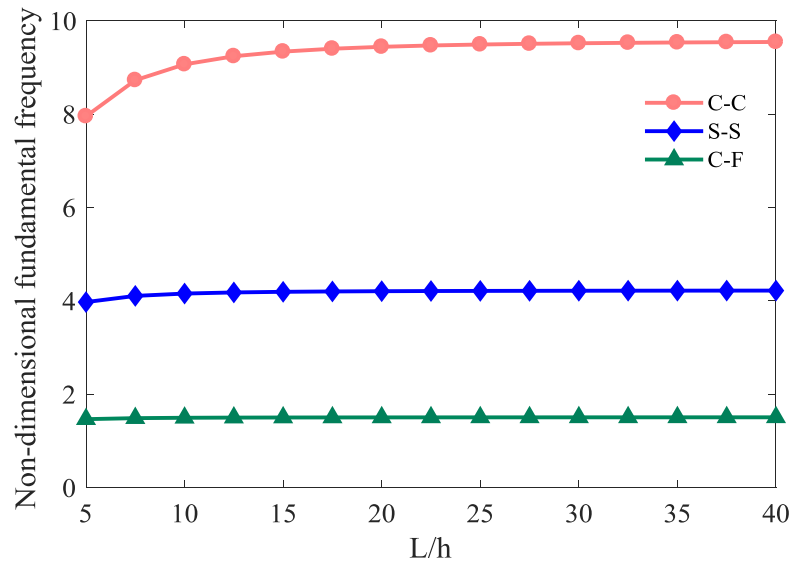


Figure IV. 6 : Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres FG parfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour ($p=1$)

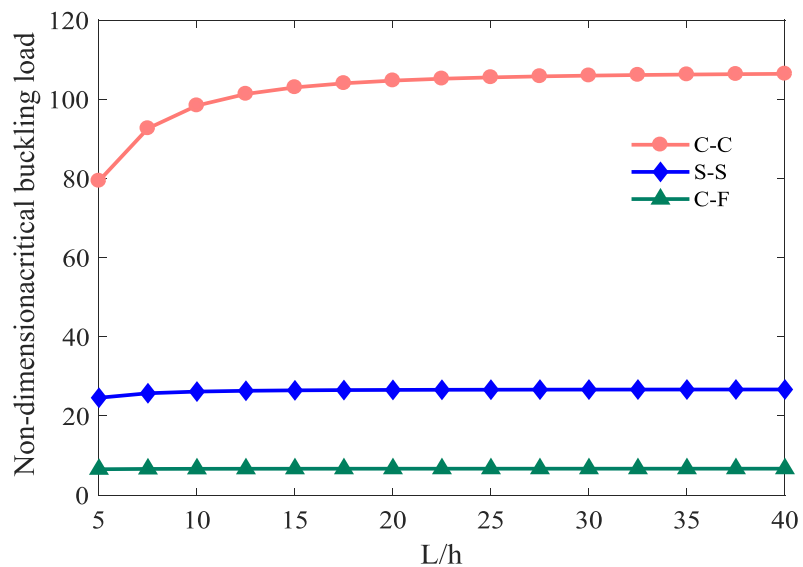


Figure IV. 7 : Variation de la charge critique des flambages adimensionnels \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 parfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour ($p=1$)

La variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles et les charges critiques de flambement des poutres FG parfaites avec le rapport élancement (L/h) pour différentes conditions aux limites et $p=1$ sont données par les figure IV.6 et IV.7,

respectivement. On peut voir que les fréquences fondamentales non dimensionnelles et la charge critique de flambage va augmenter légèrement avec l'augmentation du rapport longueur/hauteur (L/h). Les courbes deviennent approximativement constantes pour $L/h > 10$ en cas des poutres S-S et C-F, et $L/h > 20$ pour les poutres C-C. Ce résultat est d'accord avec le Littérature. Les poutres C-C plus sensibles au chargement et la diminution de l'épaisseur (h), c.-à-d. les poutres minces par rapport aux autres.

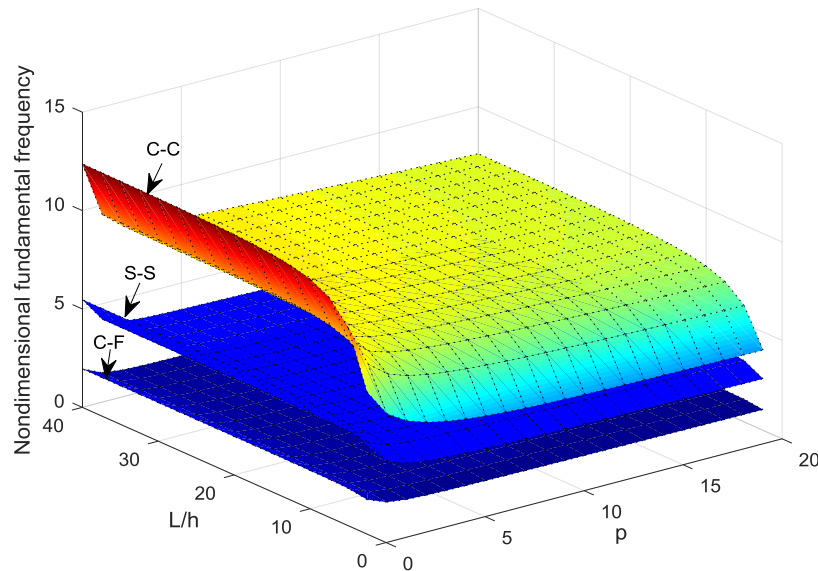


Figure IV. 8 : Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres FG Al_2O_3 parfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)

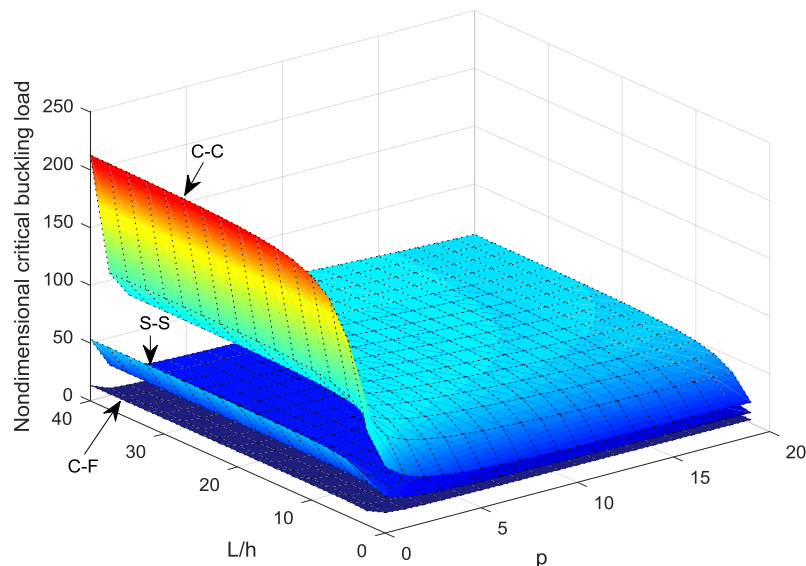


Figure IV. 9 : Variation des charges critiques des flambages adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 parfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le rapport élancement (L/h)

Les figures IV.8 et IV.9, respectivement montre la variation de la fréquence fondamentale et de la charge critique de flambement par rapport à l'indice de loi de puissance et au rapport élancement des poutres FG parfaites. Trois courbes sont observées pour trois conditions aux limites, la plus haute correspond au cas C-C et la plus basse au cas C-F. On peut voir que les résultats diminuent avec une augmentation de l'indice de loi de puissance p et augmentent avec l'augmentation de l'élancement (L/h).

D'après ces résultats, le modèle d'élément finis proposé est en bon accord avec les solutions de référence. Ce résultat valide l'efficacité, la simplicité et la précision de notre élément dans le calcul des fréquences fondamentales non dimensionnelles et des charges critiques de flambement des poutres FG parfaites.

IV.2.2. Analyse des poutres FG imparfaites :

Dans cette partie, plusieurs études numériques sont réalisées sur les charges critiques de flambement et les fréquences fondamentales non dimensionnelles des poutres FG imparfaites comme suit :

IV.2.2.1. Analyse vibratoire :

L'analyse vibratoire des poutres FG imparfaites sont présentés avec des nombreuses distributions de porosités. Le tableau IV.7 présente une étude comparative des résultats obtenus avec ceux rapportés par Chen et al (Chen, 2016).

Tableau IV. 7 : La comparaison des fréquences fondamentale non dimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0 = 0.50$

CAL	L/h	La distribution de porosité I			La distribution de porosité II		
		Chen <i>et al.</i> 2016	ANSYS	Présent	Chen <i>et al.</i> 2016	ANSYS	Présent
S-S	10	0.2798	0.2778	0.2791	0.2599	0.2549	0.2548
	20	0.1422	0.1419	0.1421	0.1318	0.1296	0.1292
	50	0.0571	0.0571	0.0571	0.0529	0.0521	0.0519
C-C	10	0.5944	0.6101	0.5897	0.5475	0.5600	0.5476
	20	0.3166	0.3176	0.3158	0.2888	0.2941	0.2887
	50	0.1291	0.1289	0.1291	0.1174	0.1183	0.1174
C-F	10	0.1008	0.1007	0.1007	0.0917	0.0920	0.0917
	20	0.0508	0.0508	0.0508	0.0462	0.0463	0.0462
	50	0.0204	0.0204	0.0204	0.0185	0.0186	0.0185

Un examen plus approfondi du tableau IV.7 confirme la validité et la précision des résultats obtenus. De plus, il faut noter que les résultats donnés par Chen et al (Chen, 2016) sont dérivés à l'aide des solutions de Ritz de la théorie des poutres de Timoshenko qui inclut un facteur de correction de cisaillement, et les résultats ANSYS sont obtenus à l'aide de l'élément à quatre nœuds SHELL181. L'effet des modèles de porosité et le rapport élancement (L/h) ont un impact significatif sur les calculées des fréquences fondamentales non dimensionnelles; car elle diminue avec l'augmentation de l'élancement (L/h), c.-à-d. dans les cas des poutres minces, cette observation émerge clairement dans la condition de limite encastree-encastree. Comme prévu, le modèle de porosité pourrait être attribué pour réduire les matrices de rigidité et de masse résultantes et la distribution de porosité de type II est plus concernée.

Dans le tableau IV.8, l'influence du rapport longueur sur l'épaisseur (L/h) et du paramètre de porosité sur les six premières fréquences naturelles adimensionnelles est étudiée pour les poutres FG imparfaites, cet exemple présente un test supplémentaire pour garantir la précision des résultats obtenus, il est clair que l'effet de la longueur sur l'épaisseur est plus remarquable que le paramètre de porosité et les fréquences fondamentales adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du paramètre de porosité et diminue avec l'augmentation du rapport longueur sur l'épaisseur (L/h), cette observation est validée pour les six premières fréquences naturelles adimensionnelles obtenues.

Ensuite, la comparaison des cinq premières fréquences naturelles adimensionnelles des poutres encastree-encastree FG imparfaits par rapport aux autres théories sont illustrée dans le tableau IV.9. Encore une fois, les résultats obtenus offrent un accord étroit avec ceux donnés en utilisant les théories des poutres de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli. Il convient de noter que ces théories des poutres augmentent légèrement les fréquences des poutres épaisses ; cela peut s'expliquer par la présence d'un effet de déformation par cisaillement. D'autre part, cet effet doit être traité avec des informations plus détaillées telles que le facteur de correction de cisaillement approprié et le phénomène de blocage de cisaillement, l'élément développé démontre que le même effet est visualisé efficacement en utilisant une formulation d'éléments finis avancée qui est exempte les problèmes numériques.

Tableau IV. 8 : La comparaison des six premières fréquences propres adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres encastree-libre FG imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h) et du paramètre de porosité e_0

Type de porosité	L/h	e_0	Théories	Mode					
				1	2	3	4	5	6
Type I	10	0.20	TBT ^(a)	0.1003	0.5966	1.5193	1.5549	2.7936	4.2217
			Présent	0.1003	0.5962	1.5193	1.5536	2.7920	4.2164
		0.50	TBT ^(a)	0.1008	0.5963	1.4379	1.5439	2.7555	4.1400
			Présent	0.1007	0.5929	1.4379	1.5278	2.7151	4.0614
		0.80	TBT ^(a)	0.1050	0.6149	1.3668	1.5746	2.7800	4.1005
			Présent	0.1046	0.6012	1.3668	1.5110	2.6232	3.8506
	20	0.20	TBT ^(a)	0.0505	0.3121	0.8555	1.5193	1.6282	2.6066
			Présent	0.0505	0.3120	0.8549	1.5193	1.6264	2.5950
		0.50	TBT ^(a)	0.0508	0.3134	0.8572	1.4379	1.6266	2.5950
			Présent	0.0508	0.3129	0.8539	1.4379	1.6159	2.5634
		0.80	TBT ^(a)	0.0530	0.3260	0.8879	1.3668	1.6761	2.6583
			Présent	0.0529	0.3238	0.8748	1.3668	1.6351	2.5600
50	0.20	TBT ^(a)	0.0202	0.1265	0.3530	0.6882	1.1360	1.5193	
		Présent	0.0202	0.1265	0.3530	0.6880	1.1296	1.5193	
	0.50	TBT ^(a)	0.0204	0.1273	0.3550	0.6916	1.1406	1.4379	
		Présent	0.0204	0.1272	0.3547	0.6906	1.1324	1.4379	
	0.80	TBT ^(a)	0.0212	0.1327	0.3699	0.7200	1.1857	1.3668	
		Présent	0.0212	0.1326	0.3689	0.7164	1.1708	1.3668	
Type II	10	0.20	TBT ^(a)	0.0977	0.5825	1.5187	1.5229	2.7424	4.1544
			Présent	0.0977	0.5828	1.5189	1.5252	2.7512	4.1693
		0.50	TBT ^(a)	0.0917	0.5471	1.4283	1.4403	2.5791	3.9080
			Présent	0.0917	0.5471	1.4288	1.4404	2.5825	3.9126
		0.80	TBT ^(a)	0.0808	0.4841	1.2730	1.3680	2.3122	3.5232
			Présent	0.0807	0.4838	1.2715	1.3679	2.3093	3.5151
	20	0.20	TBT ^(a)	0.0492	0.3041	0.8344	1.5193	1.5900	2.5491
			Présent	0.0492	0.3041	0.8346	1.5193	1.5905	2.5428
		0.50	TBT ^(a)	0.0462	0.2856	0.7836	1.4377	1.4938	2.3953
			Présent	0.0462	0.2855	0.7835	1.4377	1.4933	2.3870
		0.80	TBT ^(a)	0.0406	0.2516	0.6919	1.3213	1.3681	2.1277
			Présent	0.0406	0.2515	0.6914	1.3198	1.3680	2.1174
50	0.20	TBT ^(a)	0.0197	0.1232	0.3439	0.6705	1.1072	1.5193	
		Présent	0.0197	0.1232	0.3439	0.6705	1.1014	1.5193	
	0.50	TBT ^(a)	0.0185	0.1157	0.3229	0.6296	1.0396	1.4379	
		Présent	0.0185	0.1157	0.3228	0.6295	1.0340	1.4379	
	0.80	TBT ^(a)	0.0163	0.1018	0.2842	0.5544	0.9163	1.3656	
		Présent	0.0163	0.1018	0.2841	0.5543	0.9110	1.3510	

(a) la théorie des poutres de Timoshenko de Chen et al (Chen, 2016).

Tableau IV. 9 : La comparaison des cinq premières fréquences propres adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG encastrée–encastrée imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.50$

Type de porosité	L/h	Théories	Mode				
			1	2	3	4	5
Porosité de type I	5	EBT ^(a)	6.3393	14.3794	16.5216	28.7624	30.0004
		TBT ^(b)	5.0185	11.2724	14.3794	18.6110	26.4276
		FSDT ^(c)	5.0184	11.2715	14.3789	18.6071	26.4166
		Présent	4.9467	11.1247	14.3794	18.4461	26.2926
	20	EBT ^(a)	6.4716	17.7708	34.6311	56.7868	57.5187
		TBT ^(b)	6.3476	17.0542	32.3755	51.5447	57.5178
		FSDT ^(c)	6.3476	17.0537	32.3734	51.5379	57.5154
		Présent	6.3326	16.9736	32.1384	51.0291	57.5178
	50	EBT ^(a)	6.4792	17.8492	34.9578	57.7105	86.0649
		TBT ^(b)	6.4588	17.7265	34.5502	56.6999	83.9717
		FSDT ^(c)	6.4588	17.7262	34.5490	56.6964	83.9634
		Présent	6.4561	17.7102	34.4967	56.5683	83.7011
Porosité de type II	5	EBT ^(a)	5.7687	14.3658	15.1039	27.4569	28.8300
		TBT ^(b)	4.7216	10.7878	14.3780	17.9640	25.6576
		FSDT ^(c)	4.7215	10.7869	14.3732	17.9603	25.6471
		Présent	4.7445	10.9278	14.3734	18.3320	26.3433
	20	EBT ^(a)	5.8807	16.1529	31.4917	51.6680	57.5170
		TBT ^(b)	5.7872	15.6088	29.7656	47.6214	57.5161
		FSDT ^(c)	5.7872	15.6083	29.7636	47.6149	57.5138
		Présent	5.7864	15.6060	29.7604	47.6151	57.5160
	50	EBT ^(a)	5.8872	16.2191	31.7679	52.4504	78.2314
		TBT ^(b)	5.8718	16.1267	31.4604	51.6863	76.6454
		FSDT ^(c)	5.8718	16.1263	31.4590	51.6826	76.6366
		Présent	5.8716	16.1253	31.4559	51.6750	76.6209

(a) la théorie d'Euler-Bernoulli de Wu et al (Wu, 2018).

(b) la théorie des poutres de Timoshenko de Wu et al (Wu, 2018).

(c) la théorie des poutres du premier ordre de Noori et al (Noori, 2021).

Tableau IV. 10 : La comparaison des fréquences propres adimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres encastrée–encastrée FG Al_2O_3 imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h), le paramètre de puissance matérielp et du paramètre de porosité e_0

Type de porosité	e_0	p	Théories	L/h				
				5	10	15	20	50
/	0	0.2	Quasi-3D ^(a)	9.510418	10.902077	11.23021	11.34994	11.47832
			Présent	9.470002	10.893399	11.24874	11.38326	11.53551
		1	Quasi-3D ^(a)	8.058737	9.157737	9.412606	9.504972	9.603410
			Présent	7.955046	9.057966	9.328770	9.430800	9.545959
		5	Quasi-3D ^(a)	6.550907	7.730205	8.011787	8.115440	8.230252
			Présent	6.489312	7.695104	8.017731	8.142493	8.285674
Porosité de type III	0.2	0.2	Quasi-3D ^(a)	9.699950	11.065078	11.38771	11.50642	11.63606
			Présent	9.663921	11.102034	11.46011	11.59556	11.74878
		1	Quasi-3D ^(a)	7.738870	8.680612	8.896207	8.974618	9.059443
			Présent	7.634211	8.607706	8.842584	8.930633	9.029711
		5	Quasi-3D ^(a)	5.274587	6.169857	6.401280	6.489091	6.587350
			Présent	5.238701	6.127511	6.361369	6.451452	6.554576
Porosité de type VI	0.2	0.2	Quasi-3D ^(a)	9.722932	11.175035	11.52102	11.64795	11.78501
			Présent	9.649402	11.162933	11.54535	11.69065	11.85548
		1	Quasi-3D ^(a)	8.098449	9.232496	9.499400	9.596846	9.701639
			Présent	7.974245	9.129961	9.417318	9.526001	9.648962
		5	Quasi-3D ^(a)	6.113225	7.380488	7.667772	7.773786	7.891232
			Présent	6.091594	7.413306	7.787405	7.934963	8.106414

(a) la théorie des poutres quasi-3D de Fazzolari (Fazzolari, 2018).

Pour vérifier l'effet de la porosité sur l'analyse des vibrations libres des poutres FGP, deux autres modèles de distribution de la porosité sont considérés. Les fréquences naturelles adimensionnelles sont calculées et comparées à celles données par Fazzolari (Fazzolari, 2018) pour divers valeurs du rapport élancement (L/h), l'indice de matériau p et le coefficient de porosité (e_0), les résultats obtenus sont présentés pour les conditions aux limites des poutres encastrée–encastrée et encastrée-libres dans les tableaux IV.10 et IV.11 respectivement. Les fréquences propres adimensionnelles obtenues sont en bon accord avec les solutions de référence, il doit être noté que les calculs comparés à marquer une légère différence dans les cas des poutres épaisses encastrée–encastrée. Ce peut être attribuable à l'effet de déformation

normale dans les poutres avec forte épaisseur. De plus, il convient de noter que les fréquences naturelles adimensionnelles explorées par Fazzolari (Fazzolari, 2018) sont dérivées en utilisant des théories des poutres quasi-3D de cinématique hiérarchique raffinée et des solutions de Ritz qui génèrent un nombre encore plus élevé d'inconnues. Contrairement aux distributions de porosité utilisées mentionnées ci-dessus, les distributions de porosité de type III et IV contribuent à augmenter les fréquences adimensionnelles lorsque la poutre FG devient une phase riche en céramique et diminuent lorsque la poutre FG tend à se transformer en entièrement métallique pour le même paramètre de porosité. Il est clairement indiqué que le paramètre de porosité produit une amplitude élevée des fréquences adimensionnelles par rapport à celles de poutres parfaites ; cette incohérence peut être due à la réduction des propriétés des matériaux dans les poutres FG imparfaites.

Tableau IV. 11 : La comparaison des fréquences propres adimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres encastrée– libre FG Al_2O_3 imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h), le paramètre de puissance matérielp et du paramètre de porosité e_0

Type de porosité	e_0	p	Théories	L/h				
				5	10	15	20	50
/	0	0.2	Quasi-3D ^(a)	1.764354	1.795134	1.800197	1.801716	1.802894
			Présent	1.766027	1.804055	1.811487	1.814122	1.816990
		1	Quasi-3D ^(a)	1.477720	1.502145	1.506082	1.507242	1.508116
			Présent	1.463376	1.493174	1.498986	1.501046	1.503288
		5	Quasi-3D ^(a)	1.260205	1.286396	1.290818	1.292230	1.293647
			Présent	1.258958	1.293921	1.300856	1.303324	1.306016
Porosité de type III	0.2	0.2	Quasi-3D ^(a)	1.788152	1.820249	1.825900	1.827737	1.829459
			Présent	1.799126	1.837484	1.844977	1.847633	1.850524
		1	Quasi-3D ^(a)	1.395065	1.417595	1.421474	1.422714	1.423856
			Présent	1.386211	1.412687	1.417838	1.419662	1.421647
		5	Quasi-3D ^(a)	1.003448	1.028710	1.033336	1.034873	1.036384
			Présent	0.996532	1.023469	1.028815	1.030718	1.032794
Porosité de type VI	0.2	0.2	Quasi-3D ^(a)	1.809381	1.842829	1.848496	1.850252	1.851722
			Présent	1.812583	1.853621	1.861662	1.864514	1.867620
		1	Quasi-3D ^(a)	1.490613	1.517196	1.521649	1.523015	1.524150
			Présent	1.477017	1.508818	1.515039	1.517245	1.519646
		5	Quasi-3D ^(a)	1.205732	1.100163	1.237786	1.239359	1.240955
			Présent	1.223388	1.264299	1.272518	1.275452	1.278658

(a) la théorie des poutres quasi-3D de Fazzolari (Fazzolari, 2018).

Les effets du rapport d'épaisseur (L/h) sur les fréquences fondamentales naturelles adimensionnelles des poutres FGP Al_2O_3 avec diverses conditions aux limites ont été représentés dans les figures IV.10 et IV.11. Les figures IV.12 et IV.13 sont illustrées la variation des fréquences fondamentales naturelles adimensionnelles en fonction de l'indice de puissance p de poutres FGP Al_2O_3 avec diverses conditions aux limites. Comme le montre les figures IV.10 et IV.11, les fréquences fondamentales adimensionnelles augmentent lorsque le rapport d'épaisseur (L/h) a également augmenté. L'effet de la composition des matériaux est également un paramètre significatif ; le matériau de céramique est considéré comme un matériau plus rigide que le matériau de métallique et par conséquent les fréquences adimensionnelles fournissent une amplitude plus élevée dans les poutres FGP à riche en céramique. Pour le même coefficient de porosité et la même condition aux limites, il est également marqué que la marge de différence entre les fréquences adimensionnelles obtenues pour les deux distributions de porosité utilisées augmente légèrement avec l'augmentation du rapport d'épaisseur dans les poutres FGP à riche en céramique et que cette marge a augmenté lorsque les poutres FGP sont en phase riche en métaux. Il a été démontré de manière concluante que la porosité fournit un impact plus important lorsque la poutre à devenir plus métallique. Pour des preuves supplémentaires, cette observation est clairement affichée dans les figures IV.12 et IV.13.

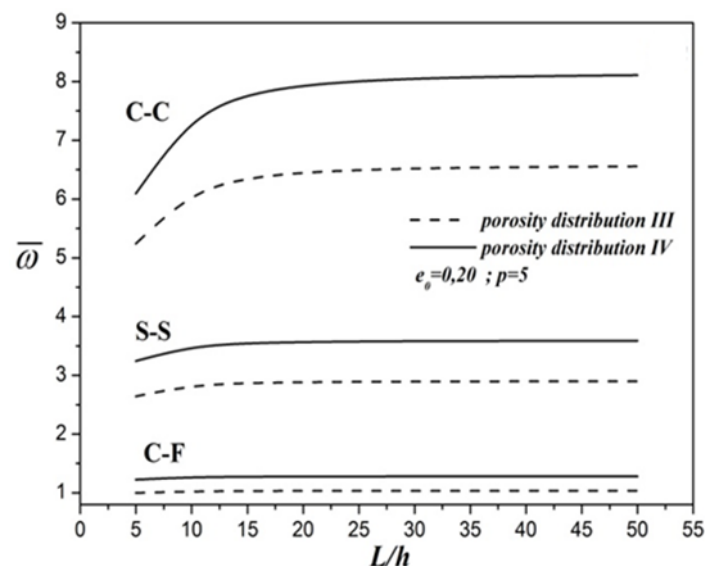


Figure IV. 10 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.20$ et $p=5$

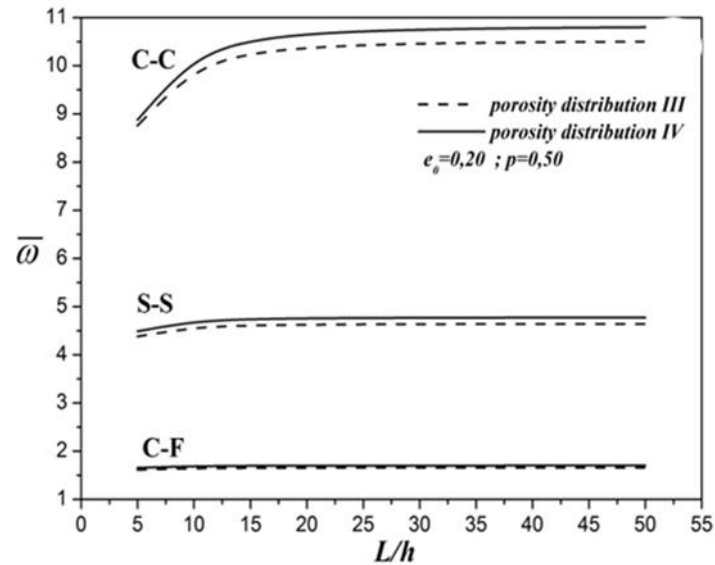


Figure IV. 11 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0=0.20$ et $p=0.50$

L'effet du paramètre de porosité et du rapport d'épaisseur sont illustrées dans les figures IV.14 et IV.15. Pour les distributions de porosité de type I et de type II. Comme on le remarque, le rapport d'épaisseur (L/h) contribue à augmenter les fréquences adimensionnelles dans les poutres FGP épaisse par rapport aux poutres minces. Le paramètre de porosité est un facteur non trivial ; ce paramètre montre les diminutions significatives dans les fréquences adimensionnelles de la distribution de porosité Type-I lorsque le paramètre de porosité augmente et ce résultat est contraire à celui de la distribution de porosité Type II. Il semble possible que cette incohérence soit due à la réduction des propriétés du matériau dans les matrices résultantes de rigidité et de masse, ce qui implique un appauvrissement marqué de l'inertie de la poutre FGP par rapport à la rigidité de la poutre FGP.

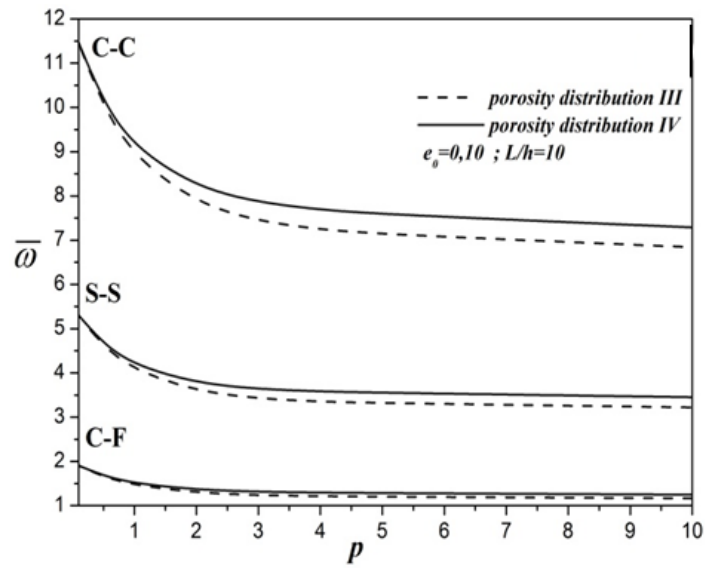


Figure IV. 12 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $e_0=0.10$ et $L/h=10$

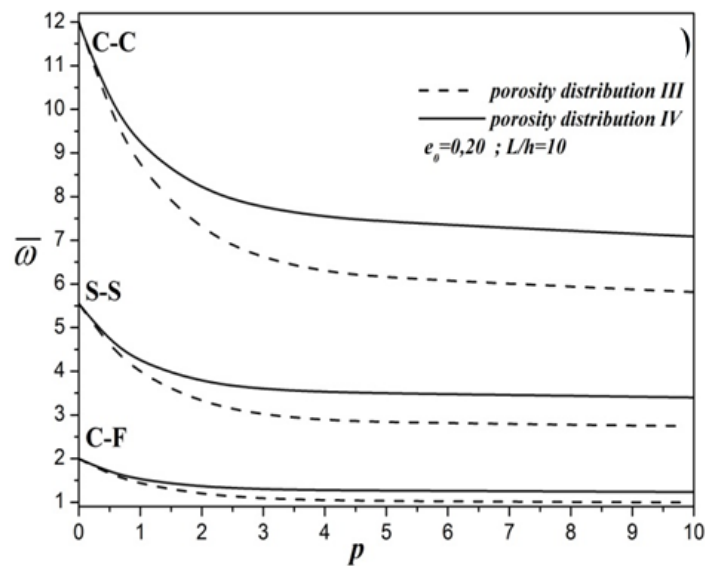


Figure IV. 13 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnels $\bar{\omega}$ des Poutres FG imparfaites Al_2O_3 avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matériel p pour $e_0=0.20$ et $L/h=10$

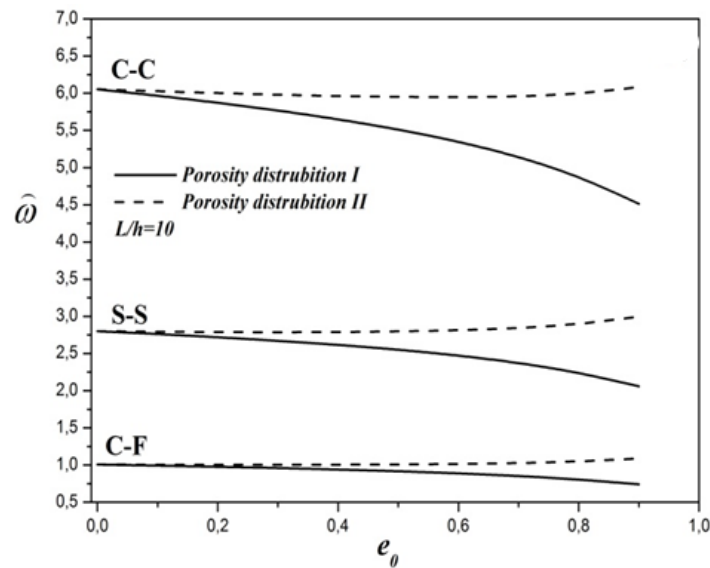


Figure IV. 14 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de porosité e_0 pour $L/h=10$

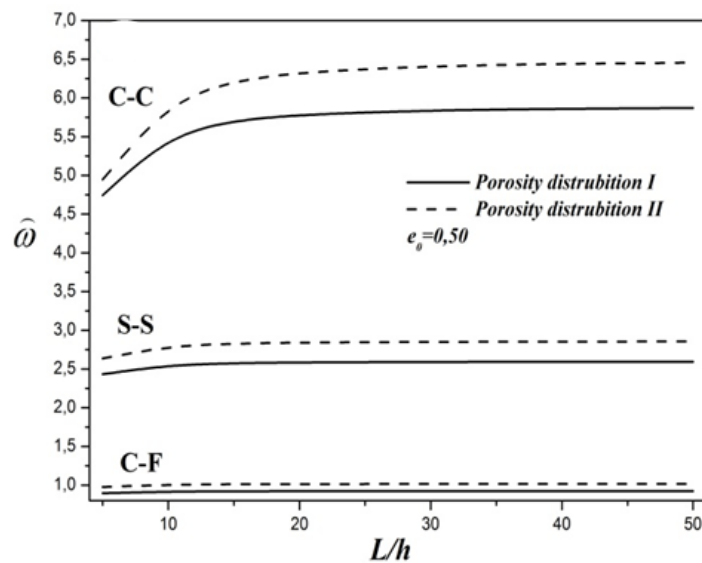


Figure IV. 15 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0=0,50$

IV.2.2.2. Analyse de flambement :

Dans cette section, les charges critiques de flambement adimensionnelles des poutres imparfaites en aluminium-alumine FG avec des distributions de porosité de type III et de type IV sont examinées et comparées à celles obtenues par Fazzolari (Fazzolari, 2018) pour diverses valeurs du rapport élancement, indice de matériau p et le coefficient de porosité. Les résultats numériques sont présentés dans le tableau IV.12. Il est évident que les résultats

obtenus sont en bon accord avec ceux donnés par Fazzolari (Fazzolari, 2018). Comme mentionné ci-dessus, les résultats comparés sont fondés sur la théorie des poutres quasi-3D de cinématique hiérarchique raffinée utilisant l'approximation de Ritz qui a une limite sur le nombre de termes de fonctions admissibles pour éviter l'instabilité numérique contrairement à la méthode des éléments finis.

Le nombre d'inconnues générées rend la méthode de Ritz instable en raison d'erreurs d'arrondi. Encore une fois, cet exemple démontre l'efficacité et la précision de l'élément développé dans l'analyse du flambage des poutres FG imparfaites. Comme observé aussi, les poutres FGP riches en métaux sont plus sensibles au flambement que les poutres FGP riches en céramique et le coefficient de porosité contribue à diminuer les charges critiques du flambage.

Les figures IV.16 et IV.17. Illustrées l'effet du rapport élancement sur les charges critiques du flambage adimensionnelles avec diverses conditions aux limites. Il est clair que la porosité contribue à réduire la matrice résultante de rigidité et cela conduit à diminuer les charges critiques du flambage adimensionnelles pour toutes les conditions aux limites utilisées. La différence entre les charges du flambage obtenues en utilisant les deux distributions de porosité est plus significative avec une valeur importante du paramètre de porosité et cette différence augmente lorsque les poutres FGP deviennent plus minces. Il est prouvé que les conditions aux limites jouent un rôle crucial dans la prédiction des charges critiques du flambage, les valeurs les plus élevées des charges critiques du flambage adimensionnelles sont observées dans les poutres FGP encastree-encastree et les amplitudes inférieures pour les poutres FGP encastree-libres. Comme prévu, les poutres FG riches en métaux sont plus susceptibles de flamber que les poutres FG riches en céramique, ce qui est clairement présenté sur les figures IV.18 et IV.19. Pour mettre en évidence le rôle de la porosité et du rapport d'épaisseur, les charges de flambement adimensionnelles sont présentées pour les poutres FG imparfaites avec diverses conditions aux limites sur les figures IV.20 et IV.21. Un examen plus approfondi des figures montre que le rapport d'épaisseur élimine la marge entre les charges de flambement critiques adimensionnelles obtenues par les deux distributions de porosité utilisées et les charges de flambement critiques adimensionnelles diminuent lorsque le paramètre de porosité augmente.

Tableau IV. 12 : La comparaison des charges critiques de flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres encastrée– encastrée FG Al_2O_3 imparfaites avec diverses valeurs du rapport élancement (L/h), le paramètre de puissance matérielp et du paramètre de porosité e_0

Type de porosité	e_0	p	Théories	L/h					
				10	20	40	60	80	100
/	0	0.5	Quasi-3D ^(a)	10.39395	11.24028	11.47092	11.51374	11.52869	11.53559
			Présent	10.62364	11.32299	11.51272	11.54856	11.56116	11.56700
		1	Quasi-3D ^(a)	8.060210	8.711658	8.889274	8.922276	8.933803	8.939133
			Présent	8.195891	8.714282	8.854492	8.880962	8.890265	8.894577
		5	Quasi-3D ^(a)	5.053081	5.567317	5.711452	5.739002	5.748738	5.753266
			Présent	5.209947	5.692777	5.828080	5.853858	5.862935	5.867146
	0.1	0.5	Quasi-3D ^(a)	9.367377	10.11671	10.32198	10.36031	10.37371	10.37991
			Présent	9.597628	10.21757	10.21757	10.41721	10.42836	10.43353
		1	Quasi-3D ^(a)	6.943418	7.488209	7.637307	7.665153	7.674896	7.679404
			Présent	7.075855	7.503988	7.619406	7.641177	7.648828	7.652376
		5	Quasi-3D ^(a)	3.881263	4.321306	4.448823	4.473115	4.481662	4.485627
			Présent	3.962531	4.323427	4.424388	4.443615	4.450141	4.453525
Porosité de type III	0.5	Quasi-3D ^(a)	8.330615	8.983116	9.162496	9.196134	9.207915	9.213369	
		Présent	8.558145	9.097673	9.097673	9.271083	9.280759	9.285246	
	1	Quasi-3D ^(a)	5.787381	6.223798	6.343400	6.365822	6.373678	6.377314	
		Présent	5.913237	6.248399	6.338340	6.355286	6.361238	6.363998	
	5	Quasi-3D ^(a)	2.468453	2.743841	2.824293	2.839707	2.845140	2.847663	
		Présent	2.547066	2.755594	2.813318	2.824280	2.828137	2.829927	
Porosité de type VI	0.1	0.5	Quasi-3D ^(a)	10.10384	10.93760	11.16569	11.20812	11.22294	11.22979
			Présent	10.32414	11.02178	11.21144	11.24729	11.25989	11.26574
		1	Quasi-3D ^(a)	7.725177	8.360591	8.534645	8.567062	8.578391	8.583631
			Présent	7.854629	8.364556	8.502759	8.528864	8.538039	8.542293
		5	Quasi-3D ^(a)	4.571055	5.048363	5.182247	5.207807	5.216830	5.221023
			Présent	4.778540	5.264372	5.401985	5.428277	5.437540	5.441839
	0.2	0.5	Quasi-3D ^(a)	9.810828	10.63261	10.85830	10.90038	10.91509	10.92189
			Présent	10.02045	10.71701	10.90682	10.94272	10.95534	10.96119
		1	Quasi-3D ^(a)	7.381259	8.000770	8.171313	8.203155	8.214290	8.219442
			Présent	7.503984	8.005131	8.141264	8.166993	8.176038	8.180230
		5	Quasi-3D ^(a)	4.083984	4.528771	4.653653	4.677474	4.685878	4.689782
			Présent	4.305361	4.797350	4.938805	4.965937	4.975505	4.979947

(a) la théorie des poutres quasi-3D de Fazzolari (Fazzolari, 2018).

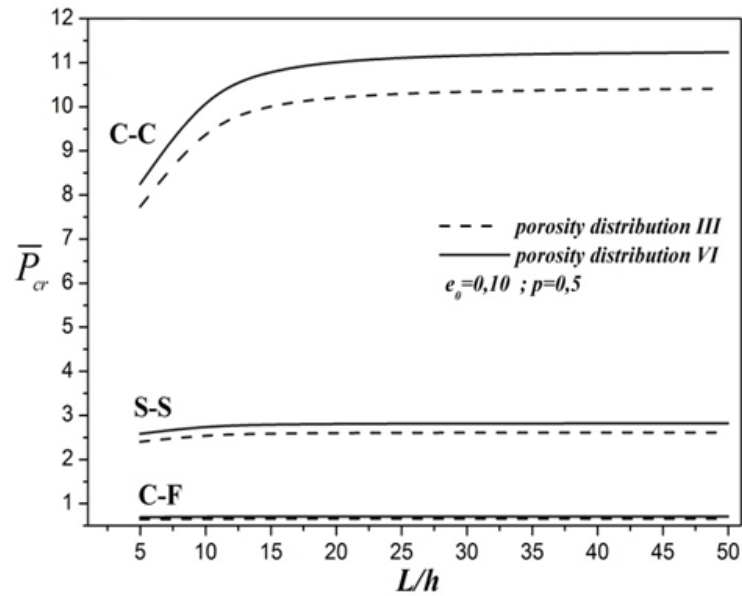


Figure IV. 16 : Variation de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0 = 0.10$ et $p = 0.5$

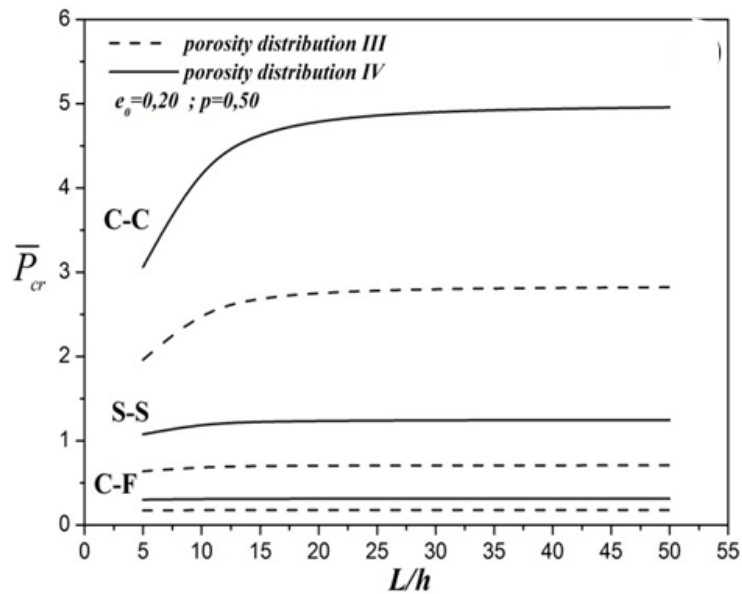


Figure IV. 17 : Variation de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0 = 0.20$ et $p = 0.5$

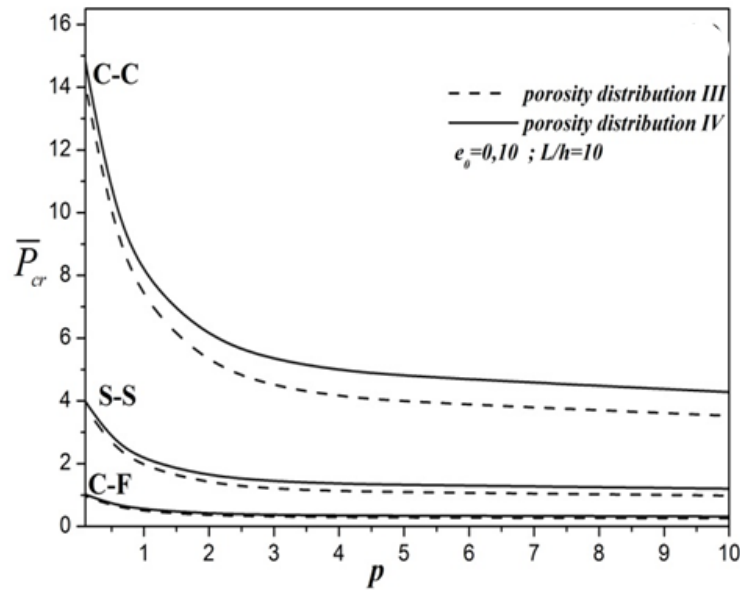


Figure IV. 18 : Variation de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matérielp pour $e_0 = 0.10$ et $L/h = 10$

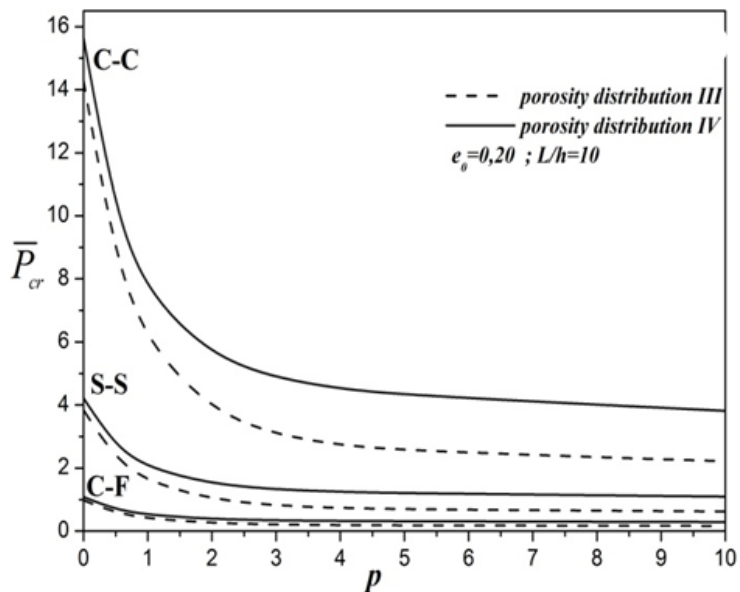


Figure IV. 19 : Variation de la charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de puissance matérielp pour $e_0 = 0.20$ et $L/h = 10$

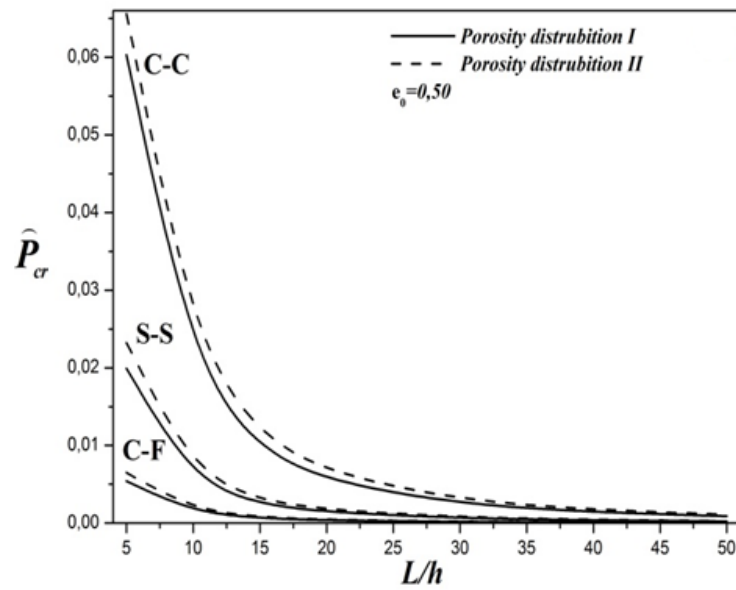


Figure IV. 20 : Variation de la charges critiques du flambage adimensionnelles \hat{P}_{cr} des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le rapport élancement (L/h) pour $e_0 = 0.50$

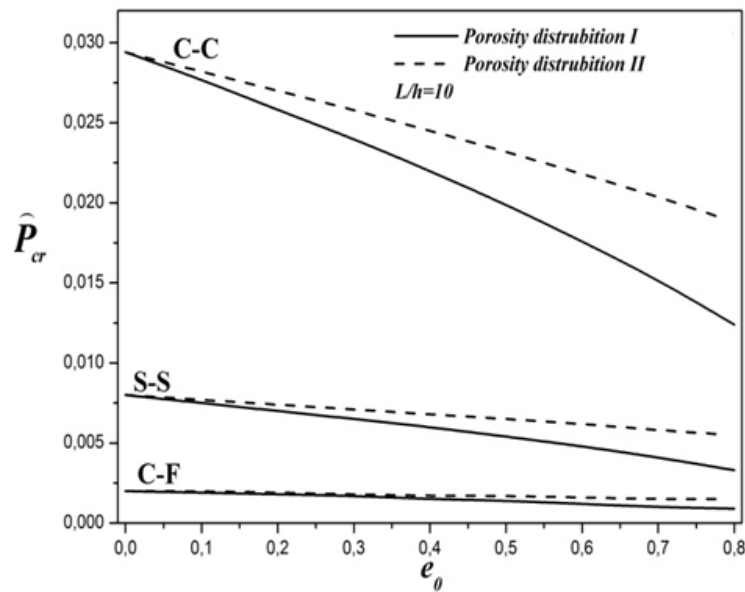


Figure IV. 21 : Variation de la charges critiques du flambage adimensionnelles \hat{P}_{cr} des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et paramètre de porosité e_0 pour $L/h = 10$

IV.2.2.3. Etude paramétrique :

Afin d'évaluer l'effet de la porosité sur l'analyse des vibrations libres et du flambage des poutres FG imparfaites, diverses distributions de porosité sont considérées. Les tableaux IV.13 et IV.14 présentent les résultats de référence pour les trois premières fréquences naturelles adimensionnelles des poutres FG imparfaits avec diverses conditions aux limites, les distributions de matériaux à travers l'épaisseur et le paramètre de porosité. Comme on l'observe, le paramètre de porosité contribue à augmenter les fréquences adimensionnelles dans les poutres FGP riche en céramique sauf pour le premier mode de distribution de porosité de type III et ce paramètre montre les diminutions significatives des fréquences adimensionnelles dans les poutres FGP riche en métal. Les tableaux IV.15 et IV.16 présentent les trois premières charges critiques de flambement adimensionnelles des poutres FG imparfaites avec diverses conditions aux limites et le paramètres de porosité. Ce paramètre a un rôle important dans la prédiction des réponses du flambage, les valeurs les plus élevées sont observées dans le matériau riche en céramique et les amplitudes inférieures dans les poutres riches en métal, cette différence a augmenté pour les modes de flambement plus élevés. Comme prévu, les poutres FG avec quantité de métal sont plus disposées au flambement que les poutres riches en céramique et l'augmentation du paramètre de porosité contribue à diminuer les charges de flambement critiques adimensionnelles.

Tableau IV. 13 : les résultats de référence pour les trois premières fréquences propres adimensionnelles $\hat{\omega}$ des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de porosité e_0 ($L/h=5$)

CLA	e_0	Type de porosité I			Type de porosité II		
		1	2	3	1	2	3
CC	0.20	5.0523	11.6373	15.1934	5.1167	11.7081	15.1940
	0.40	4.8587	11.1862	14.6507	5.0075	11.3382	14.6539
	0.60	4.6131	10.6388	14.0994	4.8798	10.8842	14.1099
	0.80	4.2613	9.9156	13.6402	4.7176	10.2833	13.6688
S-S	0.20	2.5949	7.5883	8.9825	2.6539	7.5968	9.1105
	0.40	2.4949	7.2824	8.6604	2.6398	7.3267	8.9469
	0.60	2.3576	6.9118	8.2773	2.6386	7.0547	8.7653
	0.80	2.1392	6.4007	7.8080	2.6687	6.8342	8.5498
C-F	0.20	0.9555	5.1482	7.5970	0.9791	5.2314	7.5968
	0.40	0.9194	4.9502	7.3281	0.9775	5.1484	7.3267
	0.60	0.8700	4.6918	7.0586	0.9828	5.0612	7.0547
	0.80	0.7912	4.3078	6.8422	1.0055	4.9690	6.8342

Tableau IV. 14 : les résultats de référence pour les trois premières fréquences propres adimensionnelles $\bar{\omega}$ des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matérielp et le paramètre de porosité e_0 ($L/h=5$)

CAL	e_0	p	Type de porosité III			Type de porosité VI		
			1	2	3	1	2	3
CC	0.20	0.5	8.7558	20.4822	27.6714	8.8736	20.5906	27.4421
		1	7.6341	17.9668	25.2530	7.9742	18.5358	25.2746
		5	5.2385	11.9203	17.5024	6.0915	13.5450	18.8242
	0.30	0.5	8.7461	20.5065	27.9558	8.9395	20.6847	27.5491
		1	7.3333	17.3732	25.2123	7.9765	18.4859	25.2589
		5	3.2178	7.6908	13.1476	5.7616	12.6524	18.1348
	0.40	0.5	8.7176	20.5049	28.3209	9.0087	20.7799	27.6677
		1	6.8088	16.3099	25.1428	7.9716	18.4139	25.2387
		5	3.4186	6.9485	10.3563	5.2557	11.3522	17.1426
S-S	0.20	0.5	4.3802	13.4501	15.7363	4.4872	13.4455	15.8848
		1	3.7579	11.6599	14.1080	3.9977	12.0089	14.5011
		5	2.6403	7.5808	9.9979	3.2421	8.8424	11.2582
	0.30	0.5	4.3576	13.4774	15.7892	4.5344	13.4837	16.0130
		1	3.5660	11.2195	13.8393	4.0085	11.9531	14.5328
		5	1.4574	4.4137	6.9252	3.1279	8.4313	10.7454
	0.40	0.5	4.3196	13.4835	15.8503	4.5850	13.5258	16.1485
		1	3.2473	10.4093	13.3923	4.0166	11.8866	14.5560
		5	3.9229	4.3029	6.4586	2.9492	7.8721	9.9349
C-F	0.20	0.5	1.6103	8.8279	13.8674	1.6525	8.9743	13.7486
		1	1.3862	7.6337	12.7159	1.4770	8.0247	12.7114
		5	0.9965	5.2412	9.0697	1.2234	6.2417	9.6172
	0.30	0.5	1.6021	8.8039	14.0163	1.6717	9.0457	13.8051
		1	1.3166	7.2937	12.7211	1.4834	8.0275	12.7143
		5	0.5559	3.0579	7.3406	1.1904	5.9362	9.3561
	0.40	0.5	1.5883	8.7563	14.2075	1.6924	9.1209	13.8679
		1	1.2006	6.7150	12.7219	1.4891	8.0227	12.7174
		5	0.8271	2.9610	5.6679	1.1372	5.4712	9.0168

Tableau IV. 15 : les résultats de référence pour les trois premières des charges critiques du flambage adimensionnelles \bar{P}_{cr} des Poutres FG Al_2O_3 imparfaites avec différentes conditions d'appuis, le paramètre de puissance matériel p et le paramètre de porosité e_0 ($L/h=5$)

CAL	e_0	p	Type de porosité III			Type de porosité VI		
			1	2	3	1	2	3
CC	0.20	0.5	6.9239	10.8028	15.8334	7.9624	12.2115	17.6562
		1	4.8734	7.7499	11.5440	6.0087	9.2869	13.5154
		5	1.9597	2.9257	4.1510	3.0622	4.2883	5.8054
CC	0.30	0.5	6.1036	9.5793	14.1106	7.6716	11.7009	16.8453
		1	3.9284	6.3586	9.6180	5.6862	8.7413	12.6678
		5	0.6292	1.0963	1.7791	2.5733	3.5023	4.6529
CC	0.40	0.5	5.2636	8.3249	12.3400	7.3747	11.1800	16.0201
		1	2.8955	4.8267	7.4948	5.3533	8.1808	11.8013
		5	0.6318	0.6488	0.6655	2.0032	2.6179	3.3911
S-S	0.20	0.5	2.1395	6.9242	11.8495	2.5051	7.9624	13.3862
		1	1.4783	4.8735	8.5029	1.8759	6.0087	10.1812
		5	0.6367	1.9597	3.2034	1.0763	3.0622	4.6837
S-S	0.30	0.5	1.8752	6.1036	10.5066	2.4280	7.6716	12.8245
		1	1.1719	3.9284	6.9775	1.7855	5.6862	9.5815
		5	0.1763	0.6292	1.2039	0.9429	2.5733	3.8187
S-S	0.40	0.5	1.6046	5.2637	9.1338	2.3495	7.3747	12.2514
		1	0.8410	2.8954	5.2991	1.6919	5.3533	8.9655
		5	0.6107	0.6320	0.6493	0.7853	2.0032	2.8453
C-F	0.20	0.5	0.5686	4.3821	9.4723	0.6698	5.0872	10.7912
		1	0.3905	3.0540	6.7337	0.5003	3.8234	8.1766
		5	0.1722	1.2730	2.6157	0.2998	2.0699	3.9427
C-F	0.30	0.5	0.4974	3.8510	8.3752	0.6505	4.9167	10.3661
		1	0.3079	2.4398	5.4779	0.4771	3.6291	7.7152
		5	0.0455	0.3776	0.9105	0.2672	1.7751	3.2573
C-F	0.40	0.5	0.4245	3.3073	7.2529	0.6309	4.7427	9.9317
		1	0.2192	1.7724	4.0992	0.4531	3.4282	7.2399
		5	0.6086	0.6258	0.6792	0.2294	1.4267	2.4726

Tableau IV. 16 : les résultats de référence pour les trois premières des charges critiques du flambage adimensionnelles \hat{P}_{cr} des Poutres FG imparfaites avec différentes conditions d'appuis et le paramètre de porosité e_0 ($L/h=5$)

CLA	e_0	Type de porosité I			Type de porosité II		
		1	2	3	1	2	3
CC	0.20	5.0523	11.6373	15.1934	5.1167	11.7081	15.1940
	0.40	4.8587	11.1862	14.6507	5.0075	11.3382	14.6539
	0.60	4.6131	10.6388	14.0994	4.8798	10.8842	14.1099
	0.80	4.2613	9.9156	13.6402	4.7176	10.2833	13.6688
S-S	0.20	2.5949	7.5883	8.9825	2.6539	7.5968	9.1105
	0.40	2.4949	7.2824	8.6604	2.6398	7.3267	8.9469
	0.60	2.3576	6.9118	8.2773	2.6386	7.0547	8.7653
	0.80	2.1392	6.4007	7.8080	2.6687	6.8342	8.5498
C-F	0.20	0.9555	5.1482	7.5970	0.9791	5.2314	7.5968
	0.40	0.9194	4.9502	7.3281	0.9775	5.1484	7.3267
	0.60	0.8700	4.6918	7.0586	0.9828	5.0612	7.0547
	0.80	0.7912	4.3078	6.8422	1.0055	4.9690	6.8342

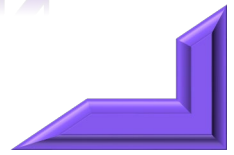
IV.3. Conclusion:

A travers ce chapitre, nous menons une exploration numérique de l'influence de diverses répartitions de porosité sur l'analyse des vibrations libres et du flambage des poutres FGP. La fiabilité et l'efficacité des éléments finis à deux nœuds formulés sont affirmées pour diverses répartitions de porosité, conditions aux limites et arrangements de matériaux. Se basant sur la théorie des poutres à déformation de cisaillement d'ordre supérieur, les continuités C0 et C1 sont mobilisées pour obtenir les matrices de rigidité, géométrique et de masse à partir du principe de Hamilton. L'élément actuel se limite à trois degrés de liberté par nœud, ce qui le rend plus maniable que les autres alternatives disponibles dans la littérature scientifique. Le phénomène de verrouillage par cisaillement est contourné en recourant à la technique d'intégration réduite sans nécessiter de facteur de correction de cisaillement.

La précision et la robustesse du modèle d'éléments finis développé sont confirmées par la comparaison des résultats obtenus avec différentes solutions analytiques et celles prédites par des modèles d'éléments finis avancés dans la littérature. La comparaison a révélé que la précision résultante et la rapidité de convergence du modèle d'éléments finis suggéré sont exceptionnelles. De plus, les impacts du paramètre de porosité, de l'indice de la loi de puissance, du ratio d'élanement et les conditions aux limites sur les charges critiques de flambage et les fréquences naturelles sont tous examinés et documentés. Les résultats indiquent que ces paramètres ont une influence significative sur la charge critique de flambage et les fréquences naturelles des poutres FG parfaites et imparfaites. En définitive, on peut déduire que le modèle proposé est non seulement précis et efficace, mais aussi simple pour prédire le comportement de vibration libre et de flambage des poutres FG parfaites et imparfaites, donc ces découvertes sont pertinentes et d'intérêt vital dans le domaine de la modélisation des structures FGP..



CONCLUSIONS ET RECOMMENDATION



I.1. Introduction et problématique:

L'analyse théorique et numérique des structures en poutre est un domaine intéressant de la recherche sur la modélisation des solides et des structures. Avec l'essor rapide de l'emploi des matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) dans divers secteurs industriels, il devient impératif de disposer d'une théorie appropriée pour examiner les poutres en FGM avec une grande précision, en tenant compte des diverses configurations géométriques et matérielles, ainsi que des normes techniques pour diverses applications en ingénierie. Notre travail de doctorat portait sur l'étude du comportement au flambage et vibration libre des poutres épaisses en FGMs avec ou sans porosités. L'objectif principal de cette recherche était de développer un nouveau modèle en éléments finis basé sur la théorie des déformations de cisaillement des poutres d'ordre supérieur. Par ailleurs, nous avons cherché à étudier l'impact des paramètres matériels liés à la distribution de la porosité à travers l'épaisseur en intégrant divers modèles de distribution pour examiner le comportement au flambage et vibration libre des poutres en FGMs, afin d'identifier les résultats les plus significatifs. L'évaluation et la validation de notre élément fini type poutre élaborée dans notre thèse, à travers plusieurs études de cas, dont la majorité provient de la littérature existante, ont été concluantes.

I.2. Remarques et conclusions :

A travers les différentes conclusions de l'étude numérique de l'effet de diverses porosités sur l'analyse au flambage et vibration libre des poutres en FGM a été réalisée. L'exactitude et l'efficacité de l'élément fini à deux nœuds formulé ont été démontrées pour diverses distributions de porosité, conditions aux limites et configurations matérielles. Basé sur la théorie des poutres de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, les continuités C^0 et C^1 ont été utilisées pour déduire les matrices de rigidité, de géométrie et de masse à partir du principe de Hamilton. L'élément fini présenté n'a que trois degrés de liberté par nœud, ce qui le rend plus facile à utiliser que les modèles alternatifs disponibles dans la littérature scientifique. Le phénomène de verrouillage numérique est évité en utilisant la technique d'intégration réduite, sans nécessiter de facteur de correction de cisaillement. Les résultats actuels ont révélé l'émergence de plusieurs conclusions utiles :

- ✚ Le modèle en éléments finis élaboré représente avec précision l'influence de la répartition de la porosité sur les vibrations libres et le flambage, en s'appliquant une théorie de poutre d'ordre supérieur efficace, ne nécessitant que trois variables inconnues. Cette approche prend en considération la déformation de cisaillement, un aspect fréquemment négligé ou sous-évalué par les modèles de poutres classiques.

Ainsi, cela nous permet d'analyser les structures complexes en tenant en compte la l'effet de la porosité.

- ✚ l'élément présent est simple, facile la mise en œuvre numérique et informatique, et libre du verrouillage numérique.
- ✚ Contrairement aux autres procédures numériques, l'élément formulé est plus stable lors la prédiction des matrices de rigidité, de géométrie et de masse et offre une orientation pour développer d'autres modèles en éléments finis pour dévers structures.
- ✚ Cette étude adopte quatre types de répartition de la porosité pour analyser les vibrations libres et la réponse au flambage des poutres en FGMs. Les distributions complexes de porosité deviennent de plus en plus courantes dans les applications d'ingénierie, et les chercheurs essaient de faire de cela un acte majeur. Cette recherche aide à concevoir des structures plus efficaces et robustes en révélant leur comportement.
- ✚ L'effet de porosité présente un effet variable sur les fréquences obtenues, en fonction des distributions de porosité utilisées. Dans l'analyse au flambage, la porosité montre une tendance claire à la diminution des charges critiques.
- ✚ En outre, l'indice matériel est plus important que le paramètre de porosité pour prédire les charges critiques.
- ✚ La limite du paramètre de porosité doit être définie expérimentalement pour établir le choix optimal pour les problèmes des structures en FGM imparfaites.
- ✚ L'approche utilisée est précise et efficace, et elle évalue une grande variété des structures avec des distributions de porosité complexes. Cela dépasse les méthodes qui ignorent la déformation de cisaillement.

Finalement, cette étude doctorale peut établir un axe très important pour futures recherches, y compris divers comportements mécaniques de poutres en FGM avec ou sans porosités.

I.3. Recommandations pour des travaux futurs :

Au cours de notre recherche doctorale, nous avons acquis une connaissance approfondie du domaine de l'élaboration théorique et numérique des structures en FGMs. Nous estimons que cette expérience est cruciale pour les avancées futures dans le secteur des matériaux à gradient de propriétés, avec ou sans porosité. Dans cette perspective, les

démarches à entreprendre pour poursuivre et optimiser le travail effectué peuvent être résumées de la manière suivante :

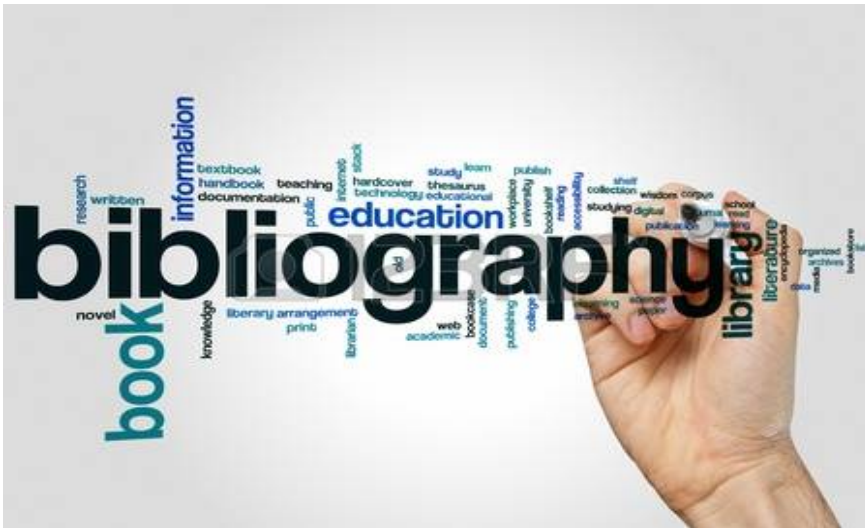
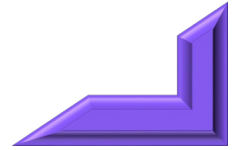
- ✚ Nous proposons d'étendre cette étude à la formulation en l'approche de collocation de Chebyshev ou d'autres procédures (la méthode de Ritz, la méthode différentielle quadratique, la méthode de transformation différentielle...etc.), pour élaborer une comparions plus détail entre ces méthode numériques basée sur l'étude des divers paramètres (Wattanasakulpong, 2018) ; (Jena, 2020) ; (Derikvand, 2021).
- ✚ Nous pouvons utiliser les résultats obtenus dans cette étude comme référence pour la comparaison avec d'autres solutions numériques ou analytiques pour les cas des poutres épaisses en FGMs avec ou sans porosités.
- ✚ L'utilisation de ce modèle pour l'analyse statique et dynamique (vibration libre) des poutres fonctionnement graduée bi-directionnel 2D-FG avec porosités, les propriétés matérielles variant longitudinalement (suivant l'axe x) et verticalement (suivant l'axe z).
- ✚ L'intégration du présent élément à étudier la réponse vibratoire et flambage des poutres sandwichs en FGM avec ou sans porosités reposant sur des appuis élastiques.
- ✚ Développement d'un nouveau modèle d'élément fini de type plaque/coque, basé sur cette théorie pour effectue les analyses de flexion, de vibration libre et de flambement.
- ✚ Effectuer une analyse non linéaire de vibration et de flambage (Non-linéarité géométrique ou/et matérielle) sur d'autres cas-tests dans le cas des poutres en FGMs avec porosités.
- ✚ Étudier d'autres cas d'analyse mécanique, thermique et le couplage thermomécanique des poutres en FGM avec porosités.
- ✚ Adaptation ce modèle à étudier les problèmes des nano-poutres en FGM.

Pour conclure, nous dédions notre humble étude intitulée « *étude du comportement en flambage et vibration libre des poutres en FGM à l'aide d'éléments finis* » à l'avancement de la recherche scientifique dans le secteur des matériaux à gradient de caractéristiques



REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUE



A

- (Akbas, 2018) Akbaş, Ş.D., (2018), Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams, *Compos. Struct.*, 186 ; 293-302. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.013>.
- (Al Rjoub, 2017) Al Rjoub, Y.S. and Hamad, A.G. (2017), “Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method”, *KSCE J Civ Eng.*, 21 ; 792–806.
- (Ambartsumyan, 1958) Ambartsumian S.A., (1958), On the theory of bending plates, *Izv. Otd.Tekh.Nauk AN SSSR*, 5, 69–77.
- (Amin, 2016) S. Amin, H. Panchal, (2016) “A review on thermal spray coating processes”, *Int. J. Curr. Trends Eng. Res. Sci.*, 2 (4) ; 556–563.
- (Anirudh, 2019) Anirudh, B., Ganapathi, M., Anant, C., Polit, O., (2019), A comprehensive analysis of porous graphene-reinforced curved beams by finite element approach using higher-order structural theory: Bending, vibration and buckling, *Compos. Struct.*, 222 110899. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.110899>.
- (Aria, 2018) Ariaa, A.I., Friswelle, M.I., (2018), A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams, *Composites Part B*, 166:233–46. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.11.071>.
- (Aria, 2019) Ariaa, A.I., Rabczuk, T., Friswelle, M.I., (2019), A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams, *European Journal of Mechanics / A Solids*, 77 : 103-767. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.04.002>.
- (Atmane, 2010) Atmane H.A., Tounsi A., Meftah S.A., Belhadj H.A., (2010), Free vibration behaviour of exponential functionally graded beams with varying cross-section,” *J. Vib. Control*, vol. 17, no. 2, pp. 311–318. DOI:10.1177/1077546310370691.
- (Avcar, 2019) Avcar, M., (2019), Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams, *Steel Compos. Struct.*, 30(6) ; 603–615. <https://doi.org/10.12989/SCS.2019.30.6.603>.
- (Aydogdu, 2009) Aydogdu M., (2009), A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, 89(1): 94-101. DOI:10.1016/j.compstruct.2008.07.008.

B

- (Bakarich, 2017) Bakarich S. E., Gorkin R., Gately R., Naficy S., (2017), *Addit. Manuf*, M. in het Panhuis, G. M. Spinks, 14, 24.
- (Belabed, 2021) Belabed, Z., Selim, M. M., Slimani, O., Taibi, N., Tounsi, A., Hussain, M. (2021). “An efficient higher order shear deformation theory for free vibration analysis of

- functionally graded shells.”, *Steel Compos. Struct.*, 40(2), 307–321. <https://doi.org/10.12989/SCS.2021.40.2.307>.
- (Belarbi, 2021a) Belarbi, M.O., Houari, M.S.A., Daikh, A.A., Garg, A., Merzouki, T., Chalak, H.D., Hirane, H., (2021), Nonlocal finite element model for the bending and buckling analysis of functionally graded nanobeams using a novel shear deformation theory, *Compos Struct.*, 264 ; 113712. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113712>.
- (Belarbi, 2021b) Belarbi, M.O., Garg, A., Houari, M.S.A., Hirane, H., Tounsi, A., Chalak, H.D., (2021), A three-unknown refined shear beam element model for buckling analysis of functionally graded curved sandwich beams, *Engineering with Computers*, <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01452-1>.
- (Benatta, 2008) Benatta M.A., Mechab I., Tounsi A., Bedia E.A.A., (2008), Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects, *Comput. Mater.Sci.*, 44(2) : 765–773. DOI:10.1016/j.commatsci.2008.05.020.
- (Bendaho, 2019) Bendaho, B., Belabed, Z., Bourada, M., Benatta, M.A., Bourada, F., Tounsi, A., (2019), Assessment of new 2D and quasi-3D nonlocal theories for free vibration analysis of size-dependent functionally graded (FG) nanoplates, *Adv. Nano Res.*, 7(4) ; 279-294. <https://doi.org/10.12989/anr.2019.7.4.277>.
- (Bever, 1972) M.B. Bever, P.F. Duwez, (1972) Gradients in Composite Materials. *Mater. Sci. Eng.* 10, 1–8. [http://doi.org/10.1016/0025-5416\(72\)90059-6](http://doi.org/10.1016/0025-5416(72)90059-6).
- (Bharti, 2013) Bharti I, Gupta N, Gupta KM. (2013), Novel applications of functionally graded nano,optoelectronic and thermoelectric materials. *Int J Mater Mech Manuf*;1: 221–4. <https://doi.org/10.7763/IJMMM.2013.V1.47>.
- (Bourada, 2015) Bourada M., Kaci A., Houari M.S.A., Tounsi A., (2015), A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams, *Steel Compos. Struct.*, 18(2) :409-423. DOI:10.12989/scs.2015.18.2.409.

C

- (Carrera, 2003) Carrera E., (2003), Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(3):216–296.
- (Chakraborty, 2003) Chakraborty, A., Gopalakrishnan S., Reddy J.N. (2003), A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences* 45(3): 519-539. DOI:10.1016/S0020-7403(03)00058-4.
- (Chakraborty, 2003) Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., Reddy, J.N., (2003), A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int J Mech Sci*; 45:519-539. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4).

(Chen, 2007) Chen WW, Rajendran AM, Song B, Nie X. (2007), Dynamic fracture of ceramics in armor applications. *J Am Ceram Soc*;90:1005–18. <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2007.01515.x>.

(Chen, 2016) Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S., (2016), Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams, *Int. J. Mech. Sci.*, 108-109 ; 14-22. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.025>.

D

(Delale, 1983) Delale, F. & Erdogan, F., 1983. The crack problem for a non homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50(3), pp. 609-614.

(Derikvand, 2021) Derikvand, M., Farhatnia, F. and Hodges, D.H. (2021), “Functionally graded thick sandwich beams with porous core: Buckling analysis via differential transform method”, *Mech. Base. Des. Struct. Mach.*, 1-28.

(Dhatt, 2012) Dhatt, G., Lefrancois, E., Touzot, G., (2012). *Finite Element Method*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc. <https://doi.org/10.1002/9781118569764>.

E

(Ebrahimi, 2018) Eltaher, M.A., Fouda, N., El-midany, T., Sadoun, A.M. (2018), “Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 40(3). <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1065-0>.

(Eltaher, 2018) Eltaher, M.A., Fouda, N., El-midany, T., Sadoun, A.M., (2018), Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 40(3). <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1065-0>.

(Eltaher, 2020) Eltaher, M.A., Mohamed, S.A., (2020), Buckling and stability analysis of sandwich beams subjected to varying axial loads, *Steel Compos. Struct.*, 34(2) ; 241–260. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.34.2.241>.

(Esen, 2018) Esen, I., Koç, M.A., Çay, Y., (2018), Finite element formulation and analysis of a functionally graded Timoshenko beam subjected to an accelerating mass including inertial effects of the mass, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 15(10) ; e119. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78255102>.

F

(Fazzolari, 2018) Fazzolari, F.A., (2018), Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous FG sandwich beams resting on elastic foundations, *Compos. Part B: Eng.*, 136 ; 254-271. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.10.022>.

(Filippi, 2015) Filippi, M., Carrera, E., Zenkour, A.M., (2015), Static analyses of FGM beams by various theories and finite elements, *Compos. Part B-Eng.*, 72 ; 1–9. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.12.004>.

(Frikha, 2016) Frikha, A., Hajlaoui, A., Wali, M., Dammak, F., (2016), A new higher order C^0 mixed beam element for FGM beams analysis, *Composites Part B Engineering.*, 106 : 181–189. doi: 10.1016/j.compositesb.2016.09.024.

G

(Gardan, 2016) J. Gardan, (2016) “Additive manufacturing technologies: state of the art and trends”, *Int J Prod Res.*, 54 (10) ; 3118-32.

(Garg, 2021) Garg, A., Chalak, H.D., Belarbi, M.O., Chakrabarti, A., Houari, M.S.A., (2021), Finite Element-based Free Vibration Analysis of Power-Law, Exponential and Sigmoidal Functionally Graded Sandwich Beams, *J. Inst. Eng. India Ser. C.* <https://doi.org/10.1007/s40032-021-00740-5>.

(Gupta, 2017) B. Gupta, (2017) “Few studies on biomedical applications of functionally graded material”, *Int. J. Eng. Technol. Sci. Res.*, 4 (3) ; 39–43.

H

(Hadji, 2016) Hadji, L., Khelifa, Z., Bedia, E.A.A., (2016), A new higher order shear deformation model for functionally graded beams, *KSCE J. Civil Eng.*, 20(5) ; 1835–1841. <https://doi.org/10.1007/s12205-015-0252-0>.

(Hadji, 2016) Hadji, L., Daouadji, T.H., Meziane, M.A.A., Tlidji, Y. and Bedia, E.A.A. (2016), “Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, 57(2), 315–325. doi:10.12989/sem.2016.57.2.315.

(Hadji, 2020) Hadji, L., (2020), Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model, *Smart Struct. Syst.*, 26(2) ; 253-262. <https://doi.org/10.12989/sss.2020.26.2.253>.

(Hebbar, 2020) Hebbar, N., Hebbar, I., Ouinas, D., Bourada, M., (2020), Numerical modeling of bending, buckling, and vibration of functionally graded beams by using a higher-order shear deformation theory, *Frattura ed Integrità Strutturale.*, 52 ; 230-246. Doi: 10.3221/IGF-ESIS.52.18.

(Hill, 1965) Hill, R. (1965), "A self-consistent mechanics of composite materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 (4),213-222.

(Houari, 2011) M.S.A Houari. (2011), “Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances”, Thèse de Doctorat, Université Djillali Liabès De Sidi Bel Abbès.

(Hsu, 2020) Hsu, Y.S., Deitos, I.A., (2020), Enriched finite element modeling in the dynamic analysis of plane frame subject to random loads, *J Mechanical Engineering Science*. <https://doi.org/10.1177/0954406220916487>.

(Huang, 2016) Huang, Y., Zhang, M. and Rong, H. (2016), “Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory”, *Acta Mech. Solida Sinica.*, 29(2), 200–207. doi:10.1016/S0894-9166(16)30108-2.

J

(Jabbari, 2016) M. Jabbari, R. Bulatova, A.I.Y.Y. Tok, C.R.H.H. Bahl, E. Mitsoulis, J.H. Hattel, (2016) “Ceramic tape casting: A review of current methods and trends with emphasis on rheological behaviour and flow analysis”, *Mater. Sci. Eng. B*, 212 ; 39–61.

(Jena, 2020) Jena, S.K., Chakraverty, S. and Malikan, M. (2020), “Application of shifted Chebyshev polynomial-based Rayleigh–Ritz method and Navier’s technique for vibration analysis of a functionally graded porous beam embedded in Kerr foundation”, *Eng. Comput.*, <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01018-7>.

(Jha, 2013) D.K. Jha, Tarun Kant, R.K. Singh. (2013), "A critical review of recent research on functionally graded plates", *Compos Struct.*96, 833–849.

(Jin, 1996) Jin, Z. H. & Batra, R. C., (1996), Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. *Journal of Thermal Stresses*, 19(4), pp. 317–339.

K

(Kahya, 2017) Kahya, V., Turan, M., (2017), Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Composites Part B Engineering*, 109 :108-15. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039>.

(Kahya, 2018) Kahya, V., Turan, M., (2018), Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element, *Composites Part B Engineering*, 146 : 198–212. doi:10.1016/j.compositesb.2018.04.011.

(Kapuria 2008) Kapuria S., Bhattacharyya M., Kumar A.N., (2008), Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation, *Compos. Struct.*, 82(3); 390–402. DOI:10.1016/j.compstruct.2007.01.019.

(Karamanli 2017) Karamanli A., (2017), Elastostatic analysis of two-directional functionally graded beams using various beam theories and symmetric smoothed particle hydrodynamics method, *Compos. Struct.*, 160. 653–669. DOI:10.1016/j.compstruct.2016.10.065.

(Karamanli, 2017) Karamanli, A. (2017), “Elastostatic analysis of two-directional functionally graded beams using various beam theories and symmetric smoothed particle

hydrodynamics method”, *Compos. Struct.*, 160, 653–669.
doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.065.

(Katili, 2020) Katili, A.M., Katili, I., (2020), A simplified UI element using third-order Hermitian displacement field for static and free vibration analysis of FGM beam, *Composite Structures*, 250 : 112565. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112565>.

(Khan, 2016) Khan, A.A., Alam, M.N., Wajid M., (2016), Finite element modelling for static and free vibration response of functionally graded beam, *Latin American journal of solids and structures*, 13(4): 690-714. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78252159>.

(Koizumi, 1997) Koizumi, M. (1997), "FGM activities in Japan". *Composites*; 28 (1-2),1– 4.

(Kokini, 1990) K. Kokini, Y. Takeuchi, (1990), "Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads". In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM' 90*, Sendai, Japan; 31-36.

(Koochaki, 2011) Koochaki, G.R., (2011), Free vibration analysis of functionally graded beams, *World Acad. Sci. Eng. Technol.*, 74(2) ; 514–517.

(koutoati, 2019) Koutoati, K., Mohri, F., Daya, E.M., (2019), Finite element approach of axial bending coupling on static and vibration behaviors of functionally graded material sandwich beams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1685144>.

(Kruszewski, 1949) Kruszewski E.T., (1949), Effect of transverse shear and rotatory inertia on the natural frequency of a uniform beam, *NACA Tech. Note 1909*, Langley, USA. 1–15.

L

(Le, 2020) Le, C.I., Le, N.A.T., Nguyen, D.K., (2020), Free vibration and buckling of bidirectional functionally graded sandwich beams using an enriched third-order shear deformation beam element, *Composite Structures.*, 113309.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113309>.

(Lee, 2017) Lee, J.W., Lee, J.Y. (2017), “Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression”, *Int J Mech Sci.*, 122,1–17.

(Levinson, 1980) Levinson M., (1980), An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mech. Res. Commun.*, 7(6) : 343–350. DOI:10.1016/0093-6413(80)90049-X.

(Li, 2013) Li, S.R., Batra, R.C., (2013), Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler–Bernoulli beams, *Compos. Struct.*, 95 ; 5-9.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.027>.

- (Li, 2017) Li W, Zhang J, Zhang X, Liou F. (2017), Effect of optimizing particle size on directed energy deposition of Functionally Graded Material with blown Pre-Mixed MultiPowder. *Manuf Lett*,13 ; 39–43. <https://doi.org/10.1016/j.mfglet.2017.07.001>.
- (Li, 2019) Li X, Hao Y, Jean H, Wang P, Lu W, Cagirici M. (2019), Heterogeneously tempered martensitic high strength steel by selective laser melting and its micro-lattice : processing, microstructure, superior performance and mechanisms. *Mater Des*;178:107881. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107881>.
- (Li, 2019) Li, W.X., Ma, H.T., Gao, W., (2019), A higher-order shear deformable mixed beam element model for accurate analysis of functionally graded sandwich beams, *Compos Struct.*, 221 ; 110830. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.002>.
- (Liu, 2018) Liu, T., Guessasma, S., Zhu, J., Zhang, W. and Belhabib, S. (2018), “Functionally graded materials from topology optimisation and stereolithography”, *Euro. Polym. J.*, 108 ; 199-211. <https://doi.org/10.1016/j.eurpolymj.2018.08.038>.
- (Liu, 2019) Liu, Y., Su, S., Huang, H. and Liang, Y. (2019), “Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane”, *Compos. Part B: Eng.*, 168, 236-242. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.063>.
- (Liu, 2021a) Liu, J., He, B., Ye, W., Yang, F., (2021), High performance model for buckling of functionally graded sandwich beams using a new semi-analytical method, *Composite Structures.*, 262 ; 113614. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113614>.
- (Liu, 2021b) Liu, J., Hao, C., Zhou, Y., Ye, W., (2021), Dynamic analysis of functionally graded sandwich beams using a semi-analytic method named scaled boundary finite element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements.*, 130 ; 161-175. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.05.010>.

M

- (Ma, 2009) Ma B, Zou D, Xu L. (2009), Manufacturing technique and performance of functionally graded concrete segment in shield tunnel. *Front. Archit. Civ. Eng. China*, 3(1): 101– 104. DOI 10.1007/s11709-009-0011-8.
- (Mahmoud, 2017) Mahmoud, D., & Elbestawi, M. (2017), Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants : A review., *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2) ; 13. <https://doi.org/10.3390/jmmp1020013>.
- (Mantari, 2012) Mantari J.L., Oktem A.S., Soares C.G., (2012), A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates, *Compos. Part B-Eng.*, 43(3) : 1489–1499. DOI:10.1016/j.compositesb.2011.07.017.
- (Markworth, 1995) Markworth, Alan. J. Saunders, James. H. (1995), "A model of structure optimization for a functionally graded material". *Materials Letters*, 22 (1–2), 103-107.

- (Martinaa, 2012) F. Martinaa, J. Mehnenb, S.W. Williamsa, P. Colegrovea, F. Wang, (2012) “Investigation of the benefits of plasma deposition for the additive layer manufacture of Ti6Al4V”, *J. Mater. Processing Technol.*, 212 ; 1377–1386.
- (Mashat, 2014) Mashat, D.S., Carrera, E., Zenkour, A.M., Al Khateeb, S.A., Filippi, M., (2014), Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements, *Compos. Part B-Eng.*, 59 ; 269–278. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.12.008>.
- (Mehala, 2018) Mehala, T., Belabed, Z., Tounsi, A., Beg, O.A., (2018), Investigation of influence of homogenization models on stability and dynamic of FGM plates on elastic foundations, *Geomech. Eng., Int. J.*, 16(3) ; 257-271. <http://dx.doi.org/10.12989/gae.2018.16.3.257>.
- (Meradjah, 2014) Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., (2015), A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams, *Steel Compos. Struct.*, 18(3) ; 793–809. DOI:10.12989/scs.2015.18.3.793.
- (Merzouki, 2020) Merzouki, T., Houari, M.S.A., Haboussi, M., Bessaim, A., Ganapathi, M., (2020), Nonlocal strain gradient finite element analysis of nanobeams using two-variable trigonometric shear deformation theory, *Engineering with Computers*. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01156-y>.
- (Miyamoto, 1999) Miyamoto Y. (1999), *Functionally graded materials: design, processing and applications*. Dordrecht/London/Boston: Kluwer Academic. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>.
- (Mohanty, 2012) Mohanty, S.C., Dash, R.R. and Rout, T. (2012), “Static and dynamic stability analysis of a functionally graded Timoshenko beam”, *Int. J. Struct. Stab. Dy.*, 12(4), 1–33. doi:10.1142/S0219455412500253.
- (Mori, 1973) Mori, T. Tanaka, K. (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions". *Acta Metallurgica*, 21 (5), 571-574.
- (Müller, 2003) Müller E, Drasar C, Schilz J, Kaysser WA. (2003), Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Mater Sci Eng, A*;362:17–39. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1).
- (Muller, 2013) Muller P, Mognol P, Hascoet JY. (2013), Modeling and control of a direct laser powder deposition process for Functionally Graded Materials (FGM) parts manufacturing. *J Mater Process Technol*;213:685–92. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2012.11.020>.
- (Murillo, 2020) Murillo, M.G. Rivera, C.V., Reddy, J.N., (2020), Linear Vibration Analysis of Shells Using a Seven-Parameter Spectral/hp Finite Element Model, *Appl. Sci.*, 10 ; 5102. doi:10.3390/app10155102.
- (Murthy 1981) Murthy M., (1981), An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates,” *NASA Technical Paper 1903*, 1–36.

N

- (Nazargah, 2020) Lezgy-Nazargah, M., (2020), A finite element model for static analysis of curved thin-walled beams based on the concept of equivalent layered composite cross section, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1804649>.
- (Nejad, 2018) Nejad, M.Z., Hadi, A., Omidvari, A. Rastgoo, A., (2018), “Bending analysis of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams using integral form of Eringen's non-local elasticity theory”, *Struct Eng Mech.*, 67(4), 417–25.
- (Neto, 2019) Neto, A.P.S., Hoefel, S.S., (2019), Nonlocal finite element analysis for free vibration of elastically supported nanobeams, *CILAMCE 2019 Proceedings of the XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC. Natal/RN, Brazil, November 11-14, 2019*.
- (Nguyen, 2015) Nguyen T.K., Nguyen B.D., (2015), “A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams,” *J. Sandw. Struct.Mater.*, vol. 17, no.6, pp. 1–19. DOI:10.1177/1099636215589237.
- (Nguyen, 2015) Nguyen, T. K., Truong-Phong Nguyen, T., Vo, T.P., Thai, H.T., (2015), Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory, *Compos. Part B: Eng.*, 76 ; 273-285. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.02.032>.
- (Nguyen, 2019) Nguyen, H.N., Hong, T.T., Vinh, P.V., Thom, D.V., (2019), An Efficient Beam Element Based on Quasi-3D Theory for Static Bending Analysis of Functionally Graded Beams, *Materials.*, 12(13) ; 2198. doi:10.3390/ma12132198.
- (Niino, 1987) M. Niino, T.Hirai, R.Watanabe, The functionally gradient materials, *J.Jpn. Soc. Compos. Mater.* 13 (1987)257–264.
- (Noori, 2021) Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel, B. (2021), Dynamic Analysis of Functionally Graded Porous Beams Using Complementary Functions Method in the Laplace Domain, *Compos. Struct.*, 256 ; 113094. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113094>.

O

- (Oreh, 2013) Oreh, A.M., Karkon, M., (2013), Finite Element Formulation for Stability and Free Vibration Analysis of Timoshenko Beam, *Advances in Acoustics and Vibration*, 841215. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/841215>.
- (Oruç, 2016) Ş. Oruç, B. Yılmaz, (2016), Improvement in performance properties of asphalt using a novel boron-containing additive. *Construction and Building Materials*, 123; 207–213.

P

- (Panc, 1975) Panc V., (1975), Theories of Elastic Plates. Prague, Czech Republic: Academia.
- (Popovich, 2016) Popovich, V. A., Borisov, E. V., Popovich, A. A., Sufiiarov, V. Sh., Masaylo, D. V., & Alzina, L. (2016). Functionally graded Inconel 718 processed by additive manufacturing: Crystallographic texture, anisotropy of microstructure and mechanical properties. *Materials & Design*, 114, 441-449. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.10.075>.
- (Pradhan, 2015) Pradhan, K.K. and Chakraverty, S. (2015), “Generalized power-law exponent based shear deformation theory for free vibration of functionally graded beams”, *Appl. Math. Comput.*, 268, 1240–1258.
- (Pradyumna, 2008) Pradyumna, S., Bandyopadhyay, J.N., (2008), Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation, *Journal of Sound and Vibration.*, 318 ; 176–192. doi:10.1016/j.jsv.2008.03.056.
- (Punera, 2019) Punera, D. and Kant, T. (2019), “A critical review of stress and vibration analyses of functionally graded shell structures”, *Compos. Struct.*, 210 787-809. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.084>.

R

- (Reddy, 1984) Reddy, J. N. (1984), A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of applied mechanics*, 51(4): 745-752. DOI:10.1115/1.3167719.
- (Reddy, 2004) Reddy, J.N. (2004), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, (2nd Ed.), CRC Press.
- (Reissner, 1975) Reissner E., (1975), On transverse bending of plates including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Struct.*, 25(5) :495–502.

S

- (Sankar, 2001) Sankar B.V., (2021), An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Technol.*, 61(5) : 689–696. DOI:10.1016/S0266-3538(01)00007-0.
- (Sarkar, 2013) Sarkar K., Ganguli R., (2013), “Closed-form solutions for non-uniform Euler–Bernoulli free–free beams,” *J. Sound Vib.*, 332(23) ; 6078–6092. DOI:10.1016/j.jsv.2013.06.008.
- (Sarkar, 2013) Sarkar, K., Ganguli, R. (2013), “Closed-form solutions for non-uniform Euler–Bernoulli free–free beams”, *J. Sound Vib.*, 332(23), 6078–6092. doi:10.1016/j.jsv.2013.06.008.
- (Sayyad, 2018) Sayyad, A.S., Ghugal, Y.M., (2018), Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams, *Asian Journal of Civil Engineering*. <https://doi.org/10.1007/s42107-018-0046-z>.

- (Shahba, 2011) Shahba A., Attarnejad R., Hajilar S., (2011), “Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Euler–Bernoulli beams,” *Shock Vib.*, 18(5) ; 683–696. DOI:10.1155/2011/591716.
- (Shanmugavel, 2012) P.Shanmugavel, G.B.Bhaskar, M.Chandra sekaran, P.S.Mani, S.P.Srinivasan, (2012) An overview of fracture analysis in functionally graded materials, *Eur. J. Sci. Res.*68(3) 412–439.
- (Shen, 2009) Shen, H. S. (2009), "Functionally Graded Materials – Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- (Shimpi, 2002) Shimpi R. P., (2002), Refined plate theory and its variants, *AIAA Journal*, 40(1) : 137– 146. DOI:10.2514/2.1622.
- (Simsek, 2010) Simsek, M. (2010), Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories, *Nuclear Engineering and Design.*, 240, 697–705. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>
- (Sina, 2008) Sina, S. A., Navazi, H. M., & Haddadpour, H. (2009) An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Materials & Design*, 30(3): 741-747. DOI:10.1016/j.matdes.2008.05.015.
- (Sireesha, 2018) Sireesha M, Lee J, Sandeep A, Kiran K, Babu VJ, Kee BT, et al. (2018), “A review on additive manufacturing and its way into the oil and gas industry”. *R Soc Chem*;8:22460–8. <https://doi.org/10.1039/c8ra03194k>.
- (Soldatos, 1992) Soldatos K.P., (1992), A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94(3-4): 195-220. DOI:10.1007/BF01176650.
- (Su, 2020) C. Su, Y. Hu, Q. Song, Y. Ye, L. Gao, P. Li, T. Ye, (2020) “Initiated chemical vapor deposition of graded polymer coatings enabling antibacterial, antifouling, and biocompatible surfaces”, *ACS Appl. Mater. Interf.*, 12 (16) ; 18978–18986.
- (Sulzer, 2013) Metco Sulzer. (2013), An introduction to thermal spray. p. 1–24. https://www.upc.edu/sct/es/documents_equipment/d_324_id-804-2.pdf.
- (Surya, 2018) Surya MS, Prasanthi G. (2018), Tribological behaviour of aluminum silicon carbide functionally graded material. *Tribol Ind*;40:247–53. <https://doi.org/10.24874/ti.2018.40.02.08>.

T

- (Taeprasartsit, 2015) Taeprasartsit, S. (2015), “Nonlinear free vibration of thin functionally graded beams using the finite element method”, *J. Vib. Control.*, 21(1), 29–46. doi:10.1177/1077546313484506.

- (Thai, 2012) Thai H.T., Vo T.P., (2012), “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories”, *International Journal of Mechanical Sciences.*, 62 ; 57–66. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014>.
- (Thai, 2012) Thai, H.T., Vo, T.P., (2012), Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences.*, 62 ; 57–66. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014>.
- (Thai, 2014) Thai, C.H., Kulasegaram, S., Tran, L.V., Nguyen, X.H., (2014), Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach, *Comput. Struct.*, 141 ; 94–112. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.04.003>.
- (Timoshenko, 1921) Timoshenko S.P., (1921), On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philos. Mag.*, 41(245) : 742–746. DOI:10.1080/14786442108636264.
- (Touratier, 1991) Touratier, M. (1991), An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8): 901-916. DOI:10.1016/0020-7225(91)90165-Y.
- (Tran, 2020) Tran, V.K., Tran, T.T., Phung, M.V., Pham, Q.H., Thoi, T.N., (2020), Finite Element Formulation and Nonlocal Theory for the Static and Free Vibration Analysis of the Sandwich Functionally Graded Nanoplates Resting on Elastic Foundation, *Journal of Nanomaterials*, 8786373. <https://doi.org/10.1155/2020/8786373>.
- (Trinh, 2016) Trinh L.C., Vo T.P., Thai H.T., Nguyen T.K., (2016), An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads, *Compos. Part B-Eng.*, 100 : 152–163. DOI:10.1016/j.compositesb.2016.06.067.
- (Trinh, 2016) Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T. and Nguyen, T.K. (2016), “An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads”, *Compos. Part B-Eng.*, 100, 152–163. doi:10.1016/j.compositesb.2016.06.067.
- (Tripathy, 2017) A. Tripathy, S.K. Sarangi, R. Panda, (2017) “Fabrication of functionally graded composite material using powder metallurgy route: An overview”, *Int. J. Mech. Prod. Eng. Res. Dev.*, 7 (6) ; 135–145.
- (Turner, 1956) Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J., (1956), Stiffness and deflection analysis of complex structures, *Journal of Aeronautical Science*, 23 ; 805–823.

U

- (Udupa, 2012) G. Udupa, Rao.S. Shrikantha, K.V. Gangadharan (2012), Future applications of carbon nanotube reinforced functionally graded composite materials. *IEEE-International Conf Adv Eng Sci Manag (ICAESM)*;399–404.

V

(Vo, 2014) Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Maheri, A., Lee, J, (2014), Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Engineering Structures.*, 64 ; 12–22. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.029>.

(Vo, 2015) Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F., Lee, J., (2015), A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams, *Compos. Struct.*, 119 ; 1–12. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.08.006>.

W

(Wang, 2017) Wang, Y.Q., Zu, J.W., (2017), Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment, *Aerosp. Sci. Technol.*, 69 ; 550-562. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.07.023>.

(Wang, 2019) Wang Y.Q, Zhao, H.L, Yang, T.H., Zu J.W., (2019), Thermo-hygro-mechanical bending and vibration of functionally graded material microbeams with microporosity defect, *J Therm Stresses.*, 42(7); 815–34. <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1587325>.

(Watanabe, 2005) Y. Watanabe, S. Oike, (2005) “Formation mechanism of graded composition in Al-Al₂Cu functionally graded materials fabricated by a centrifugal in situ method”, *Acta Mater.*, 53 (6) ; 1631–1641.

(Wattanasakulpong, 2018) Wattanasakulpong, N., Chaikittiratana, A. and Pornpeerakeat, S. (2018), “Chebyshev collocation approach for vibration analysis of functionally graded porous beams based on third-order shear deformation theory”, *Acta Mech. Sin.*, 34(6), 1124-1135. <https://doi.org/10.1007/s10409-018-0770-3>.

(We, 2020) Wu, H., Yang J., Kitipornchai S., (2020), “Mechanical Analysis of Functionally Graded Porous Structures: A Review”, *Int. J. Struc. Stab. Dyn.*, 20(13), 2041015. <https://doi.org/10.1142/s0219455420410151>.

(Wei, 2012) Wei, D., Liu, Y., & Xiang, Z. (2012). An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 331(7), 1686-1700. DOI:10.1016/j.jsv.2011.11.020.

(Wu, 2018) Wu, D., Liu, A., Huang, Y., Huang, Y., Pi, Y., Gao, W., (2018), Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis, *Eng. Struct*, 165 : 287-301. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.023>.

(Wu, 2018) Wu, D., Liu, A., Huang, Y., Huang, Y., Pi, Y., Gao, W., (2018), Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis, *Eng. Struct.*, 165 ; 287-301. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.023>.

X

- (Xiao, 2018) Xiao, W.S., Gao, Y. and Zhu, H. (2018), “Buckling and post-buckling of magneto-electro-thermo-elastic functionally graded porous nanobeams”, *Microsyst. Technol.*, 25 (6); 2451-2470. <https://doi.org/10.1007/s00542-018-4145-2>.
- (Xu, 2020) Xu, Z., Zhang, Z., Wang, J., Chen, X. and Huang, Q. (2020), “Acoustic analysis of functionally graded porous graphene reinforced nanocomposite plates based on a simple quasi-3D HSDT”, *Thin-Walled Struct.*, 157 ; 107151. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107151>.
- (Xuan, 2013) Nguyen-Xuan, H., Thai, C.H., Nguyen-Thoi, T., (2013), Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a new higher order shear deformation theory, *Composites: Part B*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.044>.

Y

- (Yao, 2018) Yao, Z., (2018), Integrated utilization of recycled crumb rubber and polyethylene for enhancing the performance of modified bitumen. *Construction and Building Materials*, 170, 217–224.
- (Yarasca, 2016) Yarasca, J., Mantari, J.L., Arciniega, R.A., (2016), Hermite-Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams, *Compos Struct.*, 140 ; 567-81. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.015>.
- (Yaylaci, 2020) Yaylaci, M., Avcar, M., (2020), Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes, *Comput. Concr.*, 26(2) ; 107–114. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.2.107>.
- (Ying, 2008) Ying J., Lu C.F., Chen W.Q., (2008), Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations, *Compos. Struct.*, 84(3) : 209–219. DOI:10.1016/j.compstruct.2007.07.004.
- (Yoshihisa, 2004) Yoshihisa, U., (2004), Proprieties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications, 39-51-B, Vol. 39-B.

Z

- (Zahedinejad, 2020) Zahedinejad, P., Zhang, C., Zhang H., Ju, S. (2020), “A Comprehensive Review on Vibration Analysis of Functionally Graded Beams”, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 20(04), 2030002. <https://doi.org/10.1142/s0219455420300025>.
- (Zaoui, 2017) Zaoui, F. Z., Hanifi, L., Younsi, A., Meradjah, M., Tounsi, A., Ouinas, D. (2017), Free vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear deformation theory. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 4(1) ; 7-12. <https://doi.org/10.18280/mmep.040102>.
- (Zhang, 2019) Zhang, C., Chen, F., Huang, Z., Jia, M., Chen, G., Ye, Y., Lin, Y., Liu, W., Chen, B., Shen, Q., Zhang, L., & Lavernia, E. J. (2019). Additive manufacturing of

functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A*, 764, 138209. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209>.

(Ziou, 2016) Ziou, H., Guenfoud, H., Guenfoud, M., (2016), Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method, *Int. J. Structural Engineering*, 7(3) : 239-261.

Mise en œuvre du programme de calcul :

Le programme développé ici, est écrit sous langage de programmation MatLab pour l'analyse des poutres en FGMs avec ou sans porosités,

