République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Ain-Témouchente

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique
Option : Master Équations Différentielles et Modélisation

Présenté par :
Melle. Imane BELGHARBI

THÉORIE DES C_0-SEMI-GROUPES ET APPLICATION

Encadrant :
Mr. Abderrahmane BENIANI
Maitre conférence "B" Ã C.U.B.B.A.T.

Soutenu le 02/06/2019

Devant le jury composé de :

Président :Mr.Khiar Hamid (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :Mr. Benaissa Cherif Amin (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :Mr. Abderrahmane Beniani (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire 2018-2019

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes chères parents,

A mes trés chères sœurs :**Warda**, **Kheira** et **Leila** et mon frère **Ali**.

A toute ma famille.

A tous mes enseignants pour leurs patiences et leurs conseilles,

A tous les amis : **Sabrina**, **Zahira**, **Ainouna**.

A tous les étudiants d'université BELHADJ Bouchaib.

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour

réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à **Monsieur :Beniani Abderrahmane** avoir encadré ce travail et pour les conseils efficaces et les encouragements et encore plus pour tout le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail.

Je remercie sincèrement les membres du jury :

Monsieur : Khiar Hamid, d'avoir accepté la présidence du jury.
Monsieur : Benaissa Cherif Amin, d'avoir accepté la examinateur du jury.
Il est important pour moi de remercier ma famille : mes parents, mon frère et mes soeurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de

Belhadj Bouchaib Ain Témouchent.

Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés.

BELGHARBI Imane

Table des matières

Notations générales **v**

Introduction **vi**

1 Préliminaires **1**

1.1 Les espaces 1

1.2 Les opérateurs 2

1.3 Quelques propriétés spectrales 3

2 Semi-groupe de classe C_0 **5**

2.1 Définitions et propriétés élémentaires 5

2.2 Transformé de Laplace d'un C_0-semi-groupe 17

2.3 Théorème de Hille-Yosida 23

2.3.1 Preuve du théorème (Condition nécessaire) 23

2.3.2 Preuve du théorème (Condition suffisante) 26

2.4 Théorème de Lumer-Phillips 28

2.5 Théorème de Lax-Milgram 30

3 Problème abstrait de Cauchy **31**

3.1 Les différentes types de solutions 31

3.2 Problème homogène à valeur initiale 32

3.3 Problème non homogène à valeur initiale 33

3.4 Équation d'évolution non linéaire 37

3.5 Quelques applications 39

4 Stabilité Exponentielle **41**

4.1 Stabilité pour les semi-groupes 41

4.2 Stabilité exponentielle 43

4.3 Application 46

Conclusion **49**

Bibliographie **50**

Notations générales

- X — Espaces de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$,
- H — Espaces de Hilbert
- $\mathcal{B}(X)$ — Ensemble des opérateurs linéaires bornées définie de X dans X,
- X' — Espace dual de X,
- $\langle , \rangle$ — Produit scalaire dans la dualité X', X,
- H^1, H_0^1, H^2 — Espaces de Sobolev,
- $\mathcal{D}(A)$ — Domaine de l'opérateur A,
- $\rho(A)$ — Ensemble résolvant de l'opérateur A,
- $\sigma(A)$ — Spectre de l'opérateur A,
- $R(., A)$ — Résolvante de l'opérateur A,
- $r(T(t))$ — Rayon spectrale de $T(t)$,
- ∇u — Gradient de u,
- Δu — laplacien de u.

Introduction

La théorie des semi-groupes fortement continus des opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Banach est devenue un outil indispensable dans un grand nombres des études de l'analyse mathématique.

En général, les semi-groupes peuvent être utilisés pour résoudre un grand nombre de problèmes appelés équations d'évolution. L'utilisation de cet outil a connu une langue histoire en commençant par les travaux de Feller, Hille et Yosida.

Un semi-groupe à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs linéaires bornés $T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ vérifiant $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$ et $T(0) = I$.

Cette nomination est d'origine algébrique. En effet, en algèbre abstraite, un semi-groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, ce qui est bien le cas avec la famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ muni de la composition.

Toutes les fonctions complexes continues non nulles vérifiant : $f(t+s) = f(t)f(s), \ \forall \ t, s > 0$ sont de la forme $f(t) = e^{at}$, et le fait que f est complètement déterminée par le nombre $a = f'(0)$ motive l'association d'un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$ au semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ défini par :

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

Dans cette esprit le mémoire est divisé en trois chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à la théorie des semi-groupes des opérateurs linéaires en particulier les C_0-semi-groupes, tel que : théorème de Hille-Yosida et Lumer-Phillips. Cette partie rassemble aussi les définitions et les propriétés que nous utilisons dans ce mémoire.
- Dans le deuxième chapitre nous présentons le problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène, et quelque application

- Dans le troisième chapitre nous présentons quelques définitions et théorèmes du stabilité exponentielle d'un semi-groupe fortement continu, et une application sur la stabilité d'un C_0-semi-groupe.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toute les notions de base utilisées dans notre travaille,à savoir les définitions importantes et les théorème fondamentaux.

1.1 Les espaces

Définition 1.1.1. ***(Espace de Banach)*** *On dit qu'un espace normé $(X, ||.||)$ est de Banach si pour toute suite de Cauchy dans X est converge, cela veut dire que X est complet comme un espace métrique de la distance associée comme norme.*

Remarque 1.1.1. Les espaces $(\mathbb{R}, |.|)$, $(\mathbb{C}, |.|)$ et $(C\ ([a,\ b],\ \mathbb{R}),\ ||.||_\infty)$ sont de Banach.

Définition 1.1.2. ***(Espace de Hilbert)*** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u\rangle^2$.*

Définition 1.1.3. ***(Espace Dual)*** *Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle espace dual de X, et on le note X^*, l'ensemble des formes linéaires sur X.*

Définition 1.1.4. ***(Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$)*** *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ tel\ que\ \forall i \in [1, n], \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Théorème 1.1.1. *$H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel muni de produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.5. ***(Espace de Sobolev** $H_0^1(\Omega)$**)*** *On défini $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit,*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \exists \phi_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telque } \phi_n \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega)\}.$$

Proposition 1.1.1. (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Définition 1.1.6. ***(Formule de Green)*** *Si $u, v \in H^2(\Omega)$, on a la Formule de Green :*

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(x)dx - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial n(x)} := \nabla u(x).n(x),$
$n(x)$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ au point x.

1.2 Les opérateurs

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 1.2.1. ***(Opérateur linéaire)*** *Un opérateur linéaire de E dans F est une application linéaire A définie d'un sous espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ et à valeurs dans F, pour tout $x, y \in \mathcal{D}(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

- $A(x + y) = Ax + Ay$
- $A(\lambda x) = \lambda Ax$

Définition 1.2.2. *On dit que l'opérateur linéaire A est borné s'il existe $M < 0$,pour tout x dans l'espace E qui vérifié :*

$$||Ax||_F < M||x||_E$$

Définition 1.2.3. ***(Opérateur fermé)*** *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit fermé si et si seulement si pour tout suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ telle que :*

$$\begin{cases} x_n & \to x \\ Ax_n & \to y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}(A) \\ Ax = y \end{cases}$$

Définition 1.2.4. ***(Densité)*** *On dit que A est à domaine dense (ou densément défini) si*

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = E.$$

i.e si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ telle que :

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Théorème 1.2.1. ***(Banach -Steinhaus)*** *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que :*

$$\sup_{i\in I} ||T_i x|| < \infty,\ \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} ||T_i|| < \infty.$$

1.3 Quelques propriétés spectrales

Définition 1.3.1. *Soit A un opérateur, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ est inversible.*

Définition 1.3.2. *Soit A un opérateur, le spectre $\sigma(A)$ est le complément de l'ensemble résolvant, i.e.*

$$\sigma(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \ est\ non\ inversible\right\}.$$

Définition 1.3.3. *On appelle résolvante de A l'application*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Proposition 1.3.1. Pour un opérateur borné A sur un espace de Banach X, le spectre $\sigma(A)$ est toujours compact et non vide, d'où son rayon spectral

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

est finie et satisfait $r(A) \leq \|A\|$.

Définition 1.3.4. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur fermé. Alors*

$$S(A) := \sup \{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

est appelée la borne spectrale de A. La borne spectrale $S(A)$ est toujours dominé par la borne de croissance

$$\omega_0 = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} \textit{ il existe } M_\omega \geq 1 \textit{ tel que } \|T(t)\| \geq M_\omega e^{\omega t} \ \forall t \geq 0 \right\}.$$

Définition 1.3.5. *Pour la borne spectrale $S(A)$de générateur A et pour la borne de croissance ω_0 du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, on a*

$$\begin{aligned} -\infty \leq S(A) \leq \omega_0 &= \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \\ &= \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} \log(r(T(t_0))) < \infty. \end{aligned}$$

Pour chaque $t_0 > 0$. En particulier, le rayon spectrale de l'opérateur de semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est donné par

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Chapitre 2

Semi-groupe de classe C_0

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques définitions, des propositions concernant les C_0-semi-groupes et théorèmes fondamentales, le théorème de Hille-Yosida, le théorème de Lumer-Phillips et le théorème de Lax-milgram que nous utilisons dans les chapitres suivants.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1.1. *On appelle C_0-semi-groupe (ou semi- groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{B}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $T(0) = I$ *(ou I est l'opérateur identité de X) ;*
2. $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geqslant 0$ *;*
3. $\forall\ x \in X,\ \mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto T(t)x \in X$ *est continue au point* 0*.*

Remarque 2.1.1. Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit uniformément continu si :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Définition 2.1.2. *L'opérateur linéaire A définit par :*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe dans} \quad X \right\} \tag{2.1}$$

et

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{d^+T(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.2}$$

est appelé le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ et $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de A.

Remarque 2.1.2. Si $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe uniformément continu, alors :

$$\lim_{s\longrightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Exemple 2.1.1. Soit :

$$\mathcal{C} = \{f : ([0,\infty)) \longrightarrow \mathcal{R} \mid f \text{ est uniformément continue et bornée}\}.$$

avec la norme $\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(\alpha)|$, l'espace $\mathcal{C}$ devient un espace de Banach.
Définissons :

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \qquad \forall t \geq 0 \ \text{ et } \ \alpha \in [0,\infty)$$

- $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur X appelé C_0-semi-groupe de translations à droite. Son générateur infinitésimal est donné par :

  $$\mathcal{D}(A) \subset \{f \in \mathcal{C} \mid f' \in \mathcal{C}\}$$

  et

  $$Af = f', \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

- Le C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas uniformément continu sur X puisque A est non borné.

Théorème 2.1.1. [5] *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes :

- **Étape 01 :**

  Montrons d'abord :

  $$\exists\, a > 0,\ \exists\, M \geq 1 \ \text{ tels que } \ \|T\| = \sup_{t\in[0,a]} \|T(t)\| \leq M, \qquad \forall t \in [0,a].$$

En effet :

On raisonne par absurde, supposons :

$$\exists\ a > 0,\ \exists\ M \geq 1,\ \exists\ t \in [0, a] \ \text{ tel que } \ \|T(t)\| > M.$$

En particulier pour :

$$a = \frac{1}{n} \ \text{ et } \ M = n\ (n \in \mathbb{N}^*),\ \text{ il existe } \ t_n \in [0, \frac{1}{n}] \ \text{ tel que } \ \|T(t_n)\| > n.$$

Donc la suite $(T(t_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée pour n assez grand, il vient alors du théorème de Banach-Steinhaus, qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $(T(t_n)x_0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit non bornée, donc $(T(t_n)x_0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge plus, ce qui contredit le fait que : $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall\ x \in X$.
Ainsi $\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, a]$. Comme $T(0) = I$ alors, $M \geq 1$.

- **Etape 02 :**

Soit $M \geq 1$ tels que $\|T(t)\| \leq M, \quad \forall\ 0 \leq t \leq a$.
On pose $\omega = \dfrac{\log M}{a}$.
Soit $\forall\ t \geq 0$ et soient $q \in \mathbb{N}^*$ *et* r tels que $t = qa + r$, avec $0 \leq r < a$.

Par la propriété des semi-groupes on a :

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|T(qa + r)\| \\
&= \left\| T(r)T(a)^q \right\| \\
&\leq \|T(r)\| \|T(a)\|^q \\
&\leq MM^q \\
&\leq MM^{\frac{t}{a} - \frac{r}{a}} \\
&\leq MM^{\frac{t}{a}} \\
&= Me^{\omega t}.
\end{aligned}$$

Définition 2.1.3. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X.*

1. *On dira qu'il est* ***uniformément bornée*** *sur X s'il existe $M \geq 1$ telle que :*

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

2. *On dira qu'il est un C_0-semi-groupe de* ***contraction*** *si :*

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Proposition 2.1.1. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité :

$$T(t)Ax = AT(t)x, \ \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}. \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x, \ \forall t \geq 0$.

Théorème 2.1.2. [5] *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors pour tout $x \in X$, l'application $[0, +\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in X$ est continue sur $[0, +\infty)$.*

Preuve. Pour montrer que $T(.)x$ est continue sur $[0, \infty)$, il suffit de montrer que $T(.)x$ est continue au point t_0, $\forall t_0 \geq 0$ c-à-d :

$$\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)x.$$

En effet :

Cas 01 : Pour $t > t_0$

$$\begin{aligned} \|T(t)x - T(t_0)x\| &= \|T(t - t_0 + t_0)x - T(t_0)x\| \\ &= \|T(t - t_0)T(t_0)x - T(t_0)x\| \\ &\leq \|T(t_0)\| \, \|T(t - t_0)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t_0} \, \|T(t - t_0)x - x\| \underset{t\to t_0^+}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{t\to t_0^+} T(t)x = T(t_0)x.$$

Cas 02 : Pour $t < t_0$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - T(t_0)x\| &= \|T(t)x - T(t_0 - t + t)x\| \\
&= \|T(t)x - T(t_0 - t)T(t)x\| \\
&= \|T(t)(x - T(t_0 - t)x)\| \\
&\leq \|T(t)\| \, \|x - T(t_0 - t)x\| \\
&\leq Me^{\omega t} \, \|x - T(t_0 - t)x\| \underset{t \to t_0^-}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{t \to t_0^-} T(t)x = T(t_0)x$

D'où : $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0^+} T(t)x = \lim\limits_{t \to t_0^-} T(t)x = T(t_0)x$

Alors :

$$\lim_{t \to t_0} T(t)x = T(t_0)x.$$

Lemme 2.1.1. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X. Alors, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \; ds = T(t)x, \quad \forall x \in X, \; t \geq 0.$$

Preuve. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \; ds = T(t)x.$$

Revient à montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \; ds - T(t)x = 0.$$

En effet,

Soit $x \in X$ et $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \; ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x) \; ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| \; ds \\
&\leq \frac{1}{h} \sup_{s \in [t, t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \left(\int_t^{t+h} ds \right) \\
&\leq \frac{1}{h}.h \sup_{s \in [t, t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \\
&= \sup_{s \in [t, t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Par la continuité de l'application $[0, +\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in X$.

Théorème 2.1.3. [5] *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

i. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A), T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *on a :*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \tag{2.3}$$

ii. Pour tout $t \geq 0$ *et tout* $x \in X$, $\int_0^t T(s)x\, ds \in \mathcal{D}(A)$ *et on a :*

$$A\int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x - x \tag{2.4}$$

iii. On a $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si,*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\, ds, \quad t \geq 0 \tag{2.5}$$

iv. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ *on a :*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau \tag{2.6}$$

Preuve. i. Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| &= \left\|\frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| \\
&\leq \|T(t)\| \left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| \\
&\leq Me^{\omega t}\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

D'où :

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \ \forall t \geq 0.$$

Si $t-h>0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}-T(t)Ax\right\| &= \left\|\frac{T(t-h)x-T(t-h+h)x}{-h}-T(t-h+h)Ax\right\| \\
&= \left\|\frac{T(t-h)x-T(t-h)T(h)x}{-h}-T(t-h)T(h)Ax\right\| \\
&\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{x-T(h)x}{-h}-T(h)Ax\right\| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)}\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-T(h)Ax\right\| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)}\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax+Ax-T(h)Ax\right\| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|+\|Ax-T(h)Ax\|\right).
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax,$$

i.e. :

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x=T(t)Ax,\ \forall t\geq 0.$$

Alors l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0,+\infty), \forall x\in\mathcal{D}(A)$.
De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x,\quad \forall t\geq 0.$$

ii. Soient $x\in X$ et $h>0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h)T(s)x\,ds-\frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)x\,ds-\frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds
\end{aligned}$$

On pose $u=h+s$ alors $du=ds$. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} u=h & \text{si } s=0 \\ u=t+h & \text{si } s=t \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)x\ ds &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\ du - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\ ds\\ &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)x\ du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\ du - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\ du\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)x\ du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\ du\end{aligned}$$

Par passage à limite pour $h \longrightarrow 0$ et d'après le lemme 2.1.1, on obtient :

$$A\int_0^t T(s)x\ ds = T(t)x - x,\ \ \forall t \geq 0$$

et :

$$\int_0^t T(s)x\ ds \in \mathcal{D}(A)$$

iii. $\Longrightarrow$) si $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, alors on a :

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y,\ \ \forall s \in [0,t],\ t \geq 0.$$

Par intégration sur $[0,t]$:

$$\begin{aligned}\int_0^t T(s)y\ ds &= \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x\ ds\\ &= T(s)x|_0^t\\ &= T(t)x - T(0)x\\ &= T(t)x - x\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Soient $x, y \in X$ tel que :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\ ds,\ \ \forall t \geq 0.$$

Alors pour $t > 0$, on a :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\ ds,\ \ \forall t \geq 0.$$

d'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\ ds,\ \ \forall t \geq 0.$$

et d'après le lemme 2.1.1 on a :

$$Ax = T(0)y = y,\ \ \forall t \geq 0.$$

Finalement on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.

iv. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned}\int_s^t T(\tau)Ax\ d\tau &= \int_s^t AT(\tau)x\ d\tau \\ &= \int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x\ d\tau \\ &= T(t)x - T(s)x\end{aligned}$$

Théorème 2.1.4. [5] *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur X si, et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur X.*

Preuve. $\Longleftarrow$) Soit A un opérateur linéaire borné sur X. Posons pour tout $t \geq 0$,

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Cette série, ainsi définie, converge en norme et définit un opérateur linéaire borné $T(t)$ pour tout $t \geq 0$.
Montrons que $T(t)$ est un semi-groupe :
Il est claire que $T(0) = I$, et par un calcul simple, on a pour tout $t, s \geq 0$,

$$T(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} = T(t)T(s).$$

Montrer que $T(t)$ est uniformément continu sur X ; par ailleurs, pour tout $t \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}\|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} \\ &= e^{t\|A\|} - 1 \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0,$$

D'autre part, pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{e^{At} - I}{t} - A \right\| \\
&= \left\| \frac{e^{At} - I - tA}{t} \right\| \\
&= \frac{1}{t} \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} \\
&= \frac{1}{t} \left(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\| \right) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A.$$

Ainsi, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X de générateur infinitésimal A.

$\Longrightarrow$) Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X de générateur infinitésimal A.

L'application :

$$\begin{aligned}
T(.) : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{B}(X) \\
t &\longmapsto T(t)
\end{aligned}$$

est continue, donc $\displaystyle\int_0^t T(s)\, ds \in \mathcal{B}(X), \quad \forall t \geq 0.$

D'après le lemme 2.1.1, on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\, ds = T(0) = I.$$

Il existe alors $\rho > 0$ tel que :

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\, ds - I \right\| < 1,$$

ce qui implique que $\displaystyle\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\, ds$ est inversible, et donc $\displaystyle\int_0^\rho T(s)\, ds$ est aussi inversible.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(h) - I}{h} \right) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^\rho T(h)T(s)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(s)\, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\rho T(h+s)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^\rho T(s)\, ds
\end{aligned}$$

On pose $u = h + s$ alors $du = ds$. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} u = h & \text{si } s = 0 \\ u = h + \rho & \text{si } s = \rho \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h}\right)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right) &= \frac{1}{h}\int_h^{h+\rho} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^\rho T(s)\ ds \\ &= \frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\ ds \end{aligned}$$

Donc, puisque $\int_0^\rho T(s)\ ds$ est inversible on a :

$$\frac{T(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(s)\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\ ds\right)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right)^{-1}.$$

Compte tenu du lemme 2.1.1, on obtient :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = (T(\rho) - I)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right)^{-1}.$$

Ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire borné

$$A = (T(\rho) - I)\left(\int_0^\rho T(s)\ ds\right)^{-1}.$$

Corollaire 2.1.1. *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors :*

i. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$,

ii. *A est un opérateur fermé.*

Preuve. i. Soient $x \in X$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$, alors pour :

$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\ ds \in \mathcal{D}(A),\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} x_n &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\ ds \\ &= T(0)x \\ &= x. \end{aligned}$$

Par conséquent : $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

ii. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors par (2.6) du théorème 2.1.3 on a :

$$T(t)x_n - T(s)x_n = \int_s^t T(\tau)Ax_n \, d\tau, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall t, s \geq 0.$$

Pour $s = 0$ on a :

$$T(t)x_n - T(0)x_n = T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\tau)Ax_n \, d\tau, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty} T(t)x_n - x_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(\tau)Ax_n \, d\tau, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors on a :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)y \, d\tau.$$

Pour $t > 0$ on a :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y \, d\tau.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y \, d\tau \Longrightarrow Ax = T(0)y = y.$$

D'où : $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, par suite il résulte que A est un opérateur fermé.

Théorème 2.1.5. *(l'unicité de l'engendrement)[7] Soient deux C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors :*

$$T(t) = S(t), \quad t \geq 0.$$

Preuve. Soient $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$.

On définit l'application :

$$[0, t] \ni s \longmapsto U(s) = T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A)$$

D'après (2.3) du théorème 2.1.3, U est dérivable. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}U(s)x &= -\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0\end{aligned}$$

Par intégration sur $[0,t]$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{ds}U(s)x\,ds = 0 &\Longrightarrow U(t)x - U(0)x = 0 \\ &\Longrightarrow U(t)x = U(0)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\end{aligned}$$

D'où :

$$U(0)x = T(t)x = U(t)x = S(t)x$$

Alors :

$$T(t)x = S(t)x, \quad x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0.$$

puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, on obtient que :

$$T(t) = S(t), \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad t \geq 0.$$

2.2 Transformé de Laplace d'un C_0-semi-groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par :

$$\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} / Re\lambda \geq \omega\}.$$

Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. Nous avons :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

et on voit que :

$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \leq e^{-Re\lambda t}\|T(t)\|\|x\| \leq Me^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Définissons l'application :

$$R(\lambda) : X \longrightarrow X \quad ,$$

Par :

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \;\; dt.$$

Il est clair que $R(\lambda)$ est un opérateur linéaire. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} T(t)x\| dt \\ &\leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \|x\| \ , \quad \forall x \in X, \end{aligned}$$

D'où il résulte que $R(\lambda)$ est un opérateur linéaire borné.

Définition 2.2.1. *L'opérateur :*

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(X)$$

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \;\; dt$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$.

Théorème 2.2.1. *[7] Soit* $T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ *une application fortement continue pour la-quelle il existe* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *tel que :*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Alors l'application :

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(X)$$

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \;\; dt$$

est une pseudo-résolvante si et seulement si on a :

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Preuve. Soit $\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\lambda \neq \mu$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda} &= \frac{1}{\mu-\lambda}R(\lambda) - \frac{1}{\mu-\lambda}R(\mu) \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}R(\lambda)d\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}R(\mu)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\mu r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\mu r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}d\tau e^{-\lambda r}T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)v}dve^{-\lambda r}T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau + \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau - \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau\right)e^{-\lambda r}T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau\ e^{-\lambda r}T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)d\tau dr \\
&= \int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_\tau^\infty e^{-\lambda r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu\tau}\int_\tau^\infty e^{-\lambda(r-\tau)}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+\tau)dtd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}T(t+s)dtds.
\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que

$$R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}T(t)T(s)dtds,$$

et par conséquent :

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda} - R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}[T(t+s)-T(t)T(s)]dtds.$$

D'où on déduit facilement les affirmations de l'énoncé.

Théorème 2.2.2. [7] *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'une famille fortement continue $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ pour laquelle il existe $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et $\forall x \in X$ on a :

$$R(\lambda)x = R(\lambda; A)x.$$

Preuve. Pour montrer que

$$R(\lambda) = R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

On doit montrer que

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = Id_{\mathcal{D}(A)} \quad et \quad (\lambda I - A)R(\lambda) = Id_X.$$

Montrons que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$.

Soit $x \in X$ et $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h)T(t)x\ dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h+t)x\ dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h+t)x\ dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt
\end{aligned}$$

On pose $s = h + t$ alors $ds = dt$. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} s = h & \text{si } t = 0 \\ s = \infty & \text{si } t = \infty \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\ ds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\ ds\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x\ dt.
\end{aligned}$$

Par passage à limite, on obtient :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Il résulte que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ et :

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \Longrightarrow (\lambda I - A)R(\lambda) = Id_X. \tag{2.7}$$

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)Axdt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}AT(t)xdt \\ &= A\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned}$$

En utilisant (2.7), on a :

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - x &\Longrightarrow \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = x \\ &\Longrightarrow R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \\ &\Longrightarrow R(\lambda)(\lambda I - A) = Id_{\mathcal{D}(A)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Alors il s'ensuit de (2.7) et de (2.8) que $R(\lambda) = R(\lambda; A)$

Remarque 2.2.1. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. et A son générateur infinitésimal. Alors nous avons :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

Théorème 2.2.3. *[7] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Compte tenu du théorème 2.2.2 , si $\lambda \in \Lambda_\omega$, on avons $\lambda \in \rho(A)$, et :

$$R(\lambda, A)x = R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad \forall \, x \in X,$$

De plus :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)}.$$

Il est clair que :

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = -\int_0^\infty t e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad , \quad \forall \, x \in X.$$

Et par récurrence on peut montrer que :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad , \quad \forall \, x \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}, \qquad \forall \, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda \in \rho(A).$$

Par suite, on a :

$$(-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où il résulte que :

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda,A)^n x\| &\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty \left\|t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)x\right\|\,dt\\
&\leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|\,dt\\
&\leq \frac{M(n-1)}{(n-1)!(Re\lambda-\omega)}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|\,dt\\
&= \frac{M}{(n-2)!(Re\lambda-\omega)}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|\,dt\\
&\vdots\\
&\leq \frac{M}{0!(Re\lambda-\omega)^{n-1}}\int_0^\infty e^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|\,dt\\
&\leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^{n-1}}.\frac{1}{(Re\lambda-\omega)}\|x\|\\
&= \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n}\|x\|
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n},\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

2.3 Théorème de Hille-Yosida

Dans ce paragraphe, nous présentons l'un des résultats les plus importants concernant les C_0-semi-groupes. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupes.

Théorème 2.3.1. *(Hille-Yosida)[1] Un opérateur linéaire (non borné) A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X si et seulement si :*

1. *$\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A un opérateur fermé,*
2. *L'ensemble de A résolvante, $\rho(A)$ contient $\mathbb{R}_*^+$ et pour chaque $\lambda > 0$ on a :*

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

2.3.1 Preuve du théorème (Condition nécessaire)

1. Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe et d'après le corollaire 2.1.1, A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ par conséquent (1) est prouvée.

2. Maintenant, pour $\lambda > 0$, définie $R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt$.
   L'intégrale est bien définie puisque $\|T(t)\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)\| &= \| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt\| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t}T(t)\|dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t}\|\|T(t)\|dt \\
&= -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

   alors $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Il s'ensuit que $R(\lambda) \in \mathcal{B}(X, X)$.

Pour prouver que les conditions (1) et (2) du théorème 2.3.1 sont suffisantes pour que A soit un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction, nous aurons besoins de certains lemmes.

Lemme 2.3.1. *Soit A satisfaisant* (1) *et* (2) *du théorème 2.3.1 et $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ alors :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \;\; \forall x \in X.$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$ alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x &\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax = x \\
&\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|R(\lambda, A)Ax\| \\
&\leq \|R(\lambda, A)\|\|Ax\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \longrightarrow 0 \;\; quand \;\; \lambda \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

Mais $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et $\|\lambda R(\lambda; A)x\| \leq 1$. Donc $\lambda R(\lambda; A)x \longrightarrow x$ quand $\lambda \longrightarrow +\infty$ pour chaque $x \in X$.

Définition 2.3.1. *On définit pour $\lambda > 0$, l'approximation de Yosida de A par :*

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I \tag{2.9}$$

Lemme 2.3.2. *Soit A satisfaisant aux conditions (1) et (2) du théorème 2.3.1, si A_λ est l'approximation de Yosida de A alors :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, alors :

$$A_\lambda x = \lambda A R(\lambda; A)x = \lambda R(\lambda; A)Ax$$

puisque la résolvante et l'opérateur A commutent.

Quand $\lambda \longrightarrow +\infty$ le coté droit de l'égalité précédente converge vers Ax par le lemme 2.3.1.

Ceci complète la preuve.

Lemme 2.3.3. *Soit A satisfaisant aux conditions (1) et (2) du théorème 2.3.1, si A_λ est l'approximation de Yosida de A, alors A_λ générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction e^{tA_λ}. De plus, $\forall x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ on a :*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \ \forall t \geq 0.$$

Preuve. D'après l'équation (2.3), il est claire que A_λ est un opérateur linéaire borné, il est donc le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe e^{tA_λ} d'opérateurs linéaires bornés.

On affirme que :

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1, \ \forall t \geq 0.$$

En effet :

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda} &= e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t - \lambda t Id_X} \\ &= e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} e^{-\lambda t Id_X} \end{aligned}$$

En prenant la norme, on a :

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 t R(\lambda,A)}\| \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t \|R(\lambda,A)\|} \leq 1.$$

Et donc e^{tA_λ} est un C_0-semi-groupe de contraction. il est clair à partir de la définition que e^{tA_λ}, e^{tA_μ} et $A_\lambda,\ A_\mu$ commutent entre eux,

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left[e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\right] x\ ds.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\right] &= tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu} - tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu}e^{tsA_\lambda}\\ &= t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq \int_0^1 \|t(A_\lambda x - A_\mu x)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\|\\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda}\|\|e^{t(1-s)A_\mu}\| ds\\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \int_0^1 ds\\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.\end{aligned}$$

2.3.2 Preuve du théorème (Condition suffisante)

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$ alors :

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| \leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| \leq t\left\|A_\lambda x - Ax\right\| + t\left\|Ax - A_\mu x\right\| \underset{\lambda,\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.10}$$

On affirme que pour tout $x \in X$, on a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x,\ \ \forall t \geq 0 \tag{2.11}$$

En effet :

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, d'après (2.10), et le lemme 2.3.2 on obtient que $\left(e^{tA_\lambda}x\right)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

Comme on a $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, on peut alors écrire :

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_n \in \mathcal{D}(A) \text{ tel que } \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_n + e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n + e^{tA_\mu}x_n - e^{tA_\mu}x\right\| \\
&\leq \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_n\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| + \left\|e^{tA_\mu}x_n - e^{tA_\mu}x\right\| \\
&\leq \left\|e^{tA_\lambda}\right\| \|x_n - x\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| + \left\|e^{tA_\mu}\right\| \|x_n - x\| \\
&\leq 2\|x_n - x\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| \underset{\substack{\lambda,\mu\to\infty \\ n\to\infty}}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

C'est à dire, soit $x \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \lambda, \mu > 0,\ \text{tel que } \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| \leq \varepsilon.$$

Alors, $\left(e^{tA_\lambda}x\right)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy, $\forall x \in X$. D'autre part $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$. Donc,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \ \ \forall x \in X.$$

Alors par le théorème de Banach-Steinhaus on a $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{B}(X)$.

Maintenant, on va vérifier que la limite $T(t)$ est un C_0-semi-groupe de contraction.

1. $T(0)x = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^0 x = x \Longrightarrow T(0) = I$ et puisque $\|T(t)x\| \leq \|T(t)\|\|x\|$, alors $\|T(t)\| \leq 1$.
2. $T(t+s)x = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = T(t)T(s)x.$
3. $t \longmapsto T(t)x$ est continue pour tout $t \geq 0$, car il représente une limite des fonctions continues $t \longmapsto e^{tA_\lambda}x$.

Ainsi $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de contraction de X.

Pour conclure la preuve, on montre que A est un générateur infinitésimal de $T(t)$.

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, puis à l'aide de (2.11) et (2.6) du théorème 2.1.3 on a :

$$\begin{aligned}
T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to+\infty} \left(e^{tA_\lambda}x - x\right) \\
&= \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds
\end{aligned}$$

Alors :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax \, ds. \tag{2.12}$$

Maintenant, soit B le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et soit $x \in \mathcal{D}(A)$. On affirme que,

$$A = B.$$

En effet,

- si $x \in \mathcal{D}(A)$, divisons (2.12) par $t > 0$ et par passage limite on voit que :

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax\, ds = Bx$$

  Donc $x \in \mathcal{D}(B)$. et par conséquent $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $B_{|_{\mathcal{D}(A)}} = A$.

- si $x \in \mathcal{D}(B)$ et $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. On a donc : $(\lambda I - B)\, x \in X$ et $(\lambda I - A)$ est bijective c-à-d : $\exists !\ x' \in \mathcal{D}(A)$ tel que $(\lambda I - A)\, x' = (\lambda I - B)\, x$ puisque : $B_{|_{\mathcal{D}(A)}} = A$ il vient que : $(\lambda I - B)\, x' = (\lambda I - B)\, x \Longrightarrow x' = x$. Donc $x \in \mathcal{D}(A)$ et alors : $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$

Finalement on voit que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et $A = B$. Nous avons montré donc que A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et d'après le théorème de l'unicité de l'engendrement 2.7, il résulte que A est unique.

2.4 Théorème de Lumer-Phillips

Dans ce paragraphe, nous présentons une autre caractérisation concernant les C_0-semi-groupes de contractions. Il s'agit du théorème de Lumer-Phillips.

Définition 2.4.1. *Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, et soit X l'espace dual du X^*, posons :*

$$F(x) = \{x^* \in X^*, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Définition 2.4.2. *Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in \mathcal{D}(A) \subset X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que :*

$$Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Théorème 2.4.1. *[9] Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est dissipatif si et seulement si pour tout $\lambda > 0$ on a :*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.13}$$

Proposition 2.4.1. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur dissipatif. Alors :

1. $\lambda I - A$ est injectif pour tout $\lambda > 0$, et on a :

$$\|(\lambda I - A)^{-1} y\| \leq \frac{1}{\lambda} \|y\|, \quad \forall y \in Im(\lambda I - A). \tag{2.14}$$

2. Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ soit surjectif si et seulement si, $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Dans ce cas $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.

3. A est fermé si et seulement $Im(\lambda_0 I - A)$ est fermé pour un certain $\lambda_0 > 0$, et donc $Im(\lambda I - A)$ est fermé pour tout $\lambda > 0$.

Définition 2.4.3. *On appelle opérateur m-dissipatif un opérateur linéaire* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *A est un opérateur dissipatif,*

2. *$\exists\ \lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$.*

Théorème 2.4.2. *(Lumer-Phillips)[1] Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X.*

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X.*

2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction sur X, alors $(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $x^* \in F(x)$ on a $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Preuve. Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X.

1. Supposons que A est dissipatif et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$.
Alors d'après l'assertion (2) de la proposition 2.4.1, $Im(\lambda I - A) = X$, pour $\lambda \in\ ]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\|R(\lambda; A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$. D'après l'assertion (3) de la proposition 2.4.1, il vient que A est fermé. Donc par le théorème de Hille-Yosida, il vient que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction sur X.

2. Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupes de contractions sur $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Alors d'après le théorème de Hille-Yosida on a, $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et donc $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. De plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $x^* \in F(x)$ on a :

$$\begin{aligned}
|\langle x^*, T(t)x\rangle| &\leq \|x^*\|\|T(t)x\| \\
&\leq \|x^*\|\|T(t)\|\|x\| \\
&\leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine alors que $Re\langle x^*, T(t)x - x\rangle \leq Re\langle x^*, T(t)x\rangle - \|x\|^2 \leq 0$.

Il s'ensuit alors que :

$$Re\langle x^*, Ax\rangle = Re\langle x^*, \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}\rangle \leq 0.$$

Ceci étant pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $x^* \in F(x)$.

2.5 Théorème de Lax-Milgram

Définition 2.5.1. *On dit qu'une forme bilinéaire*

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est :

1. ***Continue**, s'il existe une constante C telle que :*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H,$$

2. ***Coercive**, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Théorème 2.5.1. *(Lax-Milgram)[2] Soit H un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue, coercive sur H et $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire, continue.*
Alors, il existe $u \in H$ unique solution du problème

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H,$$

de plus si a est symétrique u définie par :

$$\frac{1}{2}a(u, v) - L(u) = \min_{v\in H}\{\frac{1}{2}(v, v) - L(v)\}.$$

Chapitre 3

Problème abstrait de Cauchy

Dans ce chapitre, nous étudions le problème abstrait de Cauchy homogène et non homogène et quelques application. Premièrement on va donner quelques définitions qui nous avons utilisé dans la suite :

3.1 Les différentes types de solutions

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition 3.1.1. *Une fonction $x : [a,b] \longrightarrow X$ est dite solution **classique** ou C^1 solution du problème (3.1), si x est continue sur $[a,b]$, continûment différentiable sur $(a,b]$ et $x(t) \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \in (a,b]$ et satisfait l'équation $x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad \forall t \in [a,b]$ et $x(0) = x$.*

Définition 3.1.2. *Une fonction $x : [a,b] \longrightarrow X$ est dite solution **forte** ou solution absolument continue du problème (3.1), si x est absolument continue sur $[a,b]$, $x' \in L^1([a,b], X)$, $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ p.p tout $t \in (a,b)$ et satisfait l'équation $x'(t) = Ax(t) + f(t)$, p.p tout $t \in (a,b)$ et $x(0) = x$.*

Définition 3.1.3. *Une fonction $x : [a,b] \longrightarrow X$ est dite **"mild"** solution ou C^0-solution si x est continue sur $[a,b]$, $x(0) = x$ et satisfait l'équation intégrale :*

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

3.2 Problème homogène à valeur initiale

Soit X un espace de Banach et A un opérateur linéaire de $\mathcal{D}(A) \subset X$ dans X.
Étant donné $x \in X$ le problème de Cauchy pour A avec données initiales x consiste à la détermination d'une solution $x(t)$ au problème à valeur initiale

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x \end{cases} \tag{3.2}$$

Où par solution on veut dire une fonction $x(t)$ à valeur dans X tel que $x(t)$ est continue pour $t \geq 0$ continument différentiable et $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et (3.2) est satisfaite.
Notez que quand $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et x est continu à $t = 0$ (3.2) ne peut pas avoir une solution pour $x \notin \mathcal{D}(A)$.

Théorème 3.2.1. *[5] Soit A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction :*

$$x : t \longrightarrow x(t) := T(t)x,$$

est l'unique solution classique du problème (3.2) à valeur initiale x.

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, alors il vient de l'équation (2.3) du théorème 2.1.3 que $x(t) = T(t)x$ est une solution classique du problème (3.2).
Unicité : Soit v une autre solution dans $C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); \mathcal{D}(A))$. Fixons $t > 0$ et posons l'application $z \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); \mathcal{D}(A))$, tel que :

$$z(s) = T(t-s)v(s), \quad s \in [0,t].$$

D'après l'équation (2.3) du théorème 2.1.3 et les propriétés de v, on a pour tous $s \in [0,t]$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds}(s) &= -AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite $z \in C^1([0,t]; X)$ et $z(t) = z(0)$ pour tout $s \in [0,t]$. Ceci implique que :
$v(t) = z(t) = T(t)v(0) = T(t)v$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 3.2.1. *Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe ce qui n'est pas différentiable, alors en général si $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$, alors le problème de valeur initiale (3.2) n'a pas de solution. La fonction $t \longrightarrow T(t)x_0$ est alors appelée "mild solution" du problème à valeur initiale (3.2).*

Définition 3.2.2. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach X.*
Le semi-groupe $T(t)$ est dit différentiables pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$, $t \longrightarrow T(t)x$ est différentiables pour $t > t_0$, $T(t)$ est différentiables s'il est différentiables pour $t > 0$.
Notez que nous avons vu dans le théorème 2.1.3 assertion (i) que si $T(t)$ est un C_0-semi-groupe avec un générateur infinitésimal A et $x \in \mathcal{D}(A)$ alors $T \longrightarrow T(t)x$ est différentiable pour $t \geq 0$.
Si $T(t)$ est de plus différentiable alors pour tout $x \in X$, $t \longrightarrow T(t)x$ est différentiables pour $t > 0$.

3.3 Problème non homogène à valeur initiale

Dans cette section nous étudions le problème non homogène à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

où $f : [0, T[\longrightarrow X$ est continue. Nous supposerons dans cette section que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de sorte que l'équation homogène correspondante, i.e avec $f \equiv 0$, a une solution unique pour chaque valeur initiale $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Définition 3.3.1. *Une fonction $x : [0; T[\longrightarrow X$ est une solution (classique) de (3.3) sur $[0; T[$ si et seulement si :*

1. *$x(t)$ est continu dans $[0; T[$;*
2. *$x(t)$ est continûment différentiables sur $]0; T[$;*
3. *$x(t) \in \mathcal{D}(A)$, pour $t \geq 0$ et (3.3) est satisfaite sur $[0; T[$.*

Proposition 3.3.1. Si $f \in L^1([0, T[; X)$, alors pour tout $x \in X$ le problème à valeur initiale (3.3) admet au plus une solution.
Dans le cas où la solution existe, elle est donnée par :

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.4}$$

Preuve. Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe de générateur infinitésimal A et soit x une solution de (3.3). Alors la fonction $g(s) = T(t-s)x(s)$ est différentiables pour $0 < s < t$ et :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)x'(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)(Ax(s) + f(s)) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)Ax(s) + T(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{dg}{ds}(s) = T(t-s)f(s) \tag{3.5}$$

Si $f \in L^1([0;T];X)$ alors $T(t-s)f(s)$ est intégrable et en intégrant (3.5) de 0 à t on a :

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Donc,

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.6}$$

En particulier si $A \in \mathcal{B}(X,X)$, alors $\forall\ x_0 \in X$, l'équation (3.3) a une solution unique x sur $\mathbb{R}^+$ donnée par :

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds.$$

Définition 3.3.2. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Soit $x \in X$ et $f \in L^1([0;T];X)$. La fonction $x \in C([0;T];X)$ donnée par :*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq a,$$

est la solution "mild" du problème à valeur initiale (3.3) sur $[0;T]$.

Remarque 3.3.1. La continuité de f, en général, ne suffit pas à assurer l'existence de solution du problème (3.3) pour $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Exemple 3.3.1. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, et soit $y \in X$ telle que $T(t)y \notin \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \geq 0$, soit $f(s) = T(s)y$.
Alors f est continue pour $s \geq 0$. Considérons le problème de valeur initiale :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + T(t)y, & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Proposition 3.3.2. (3.7) n'a pas de solution, même si $x(0) = 0 \in \mathcal{D}(A)$. La solution "mild" de (3.7) est :

$$x(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)yds = \int_0^t T(t)yds = tT(t)y$$

mais $tT(t)y$ est non dérivable pour $t > 0$ puisque $y \notin \mathcal{D}(A)$,et par conséquent ne peut pas être la solution de (3.7).

Théorème 3.3.1. *[5] Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est fonction de classe C^1 alors la solution "mild" devient une solution classique de l'équation (3.3).*

Preuve. La solution "mild solution" est :

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds = T(t)x_0 + v(t).$$

Soit $v \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$; alors

$$v'(t) = Av(t) + f(t), \quad \forall t \geq 0 \quad et \quad v(0) = 0.$$

En effet,

Soit $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds
\end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \tag{3.8}$$

De la continuité de f il est clair que le deuxième terme sur le coté droit de (3.8) à la limite $f(t)$ comme $h \longrightarrow 0$.

Mais nous avons aussi :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds$$

Alors,

$$\begin{aligned} D^+v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds \text{ comme } h \longrightarrow 0^+ \\ &= \int_0^t T(s)f'(t-s)ds \\ &= \int_0^t T(t-s)f'(s)ds \end{aligned}$$

Comme f' est continue alors : $t \longrightarrow \int_0^t T(t-s)f'(s)$ est continue dans $\mathbb{R}^+$.

Finalement,

$$Av(t) = D^+v(t) - f(t), \quad t \geq 0.$$

Lemme 3.3.1. Soit $u : [a,b] \longrightarrow X$.

Supposons que $D^+u(t)$ existe on $[a,b]$ et $t \longrightarrow D^+u(t)$ est continue sur $[a,b]$ alors u est de classe C^1 sur $[a,b]$.

En utilisant ce lemme alors v est de classe C^1 et :

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

La solution "mild" de l'équation (3.3) est :

$$x(t) = v(t) + T(t)x_0.$$

Nous devons montrer que $x \in C^1$.

Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, alors :

$$\frac{d}{dt}T(t)x_0 = AT(t)x_0,$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} x'(t) &= v'(t) + AT(t)x_0 \\ &= Av(t) + f(t) + AT(t)x_0 \\ &= A[v(t) + T(t)x_0] + f(t) \end{aligned}$$

Alors,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0; \tag{3.9}$$

Le coté droit de (3.9) est continu puisque x et f sont continus. Donc $x \in C^1$.

3.4 Équation d'évolution non linéaire

Dans cette section nous étudions le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Où A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X, et $f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ est continue.

Définition 3.4.1. *On dit que x est une solution **(solution classique)** de l'équation (3.10) si et seulement si :*

1. $x \in C(\mathbb{R}^+, X), x(t) \in \mathcal{D}(A), t \geq 0;$
2. *x satisfait à l'équation (3.10).*

Théorème 3.4.1. *[5] Si x est une solution de l'équation (3.10), alors :*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds, \ t \geq 0. \tag{3.11}$$

Preuve. Si x est une solution de l'équation (3.10), alors x est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + g(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mais $g(t) = f(t, x(t))$, alors :

$$y(t) = x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds, \ t \geq 0.$$

Remarque 3.4.1. Si x satisfait (3.11) alors x n'est pas nécessairement une solution de (3.10).

Problème 3.4.1. Est-ce-qu'une solution "mild" de l'équation (3.10) existe ?

Exemple 3.4.1. $A \equiv 0$, l'équation (3.10) devient :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La continuité de f ne suffit pas pour obtenir l'existence de solution "mild".

Théorème 3.4.2. [5] *Supposons que* $f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ *est Lipschitz par rapport à la seconde variable alors pour tout* $x_0 \in X$, *l'équation* (3.10) *a une solution* ***"mild"*** *unique sur* $\mathbb{R}^+$.

Preuve. Soit $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,x(s))ds = (Hx)(t),\ t \geq 0.$
Nous devons montrer que x est une solution "mild" de l'équation (3.10) si et seulement si $Hx = x$.
On définit $C_a := C([0,a],X)$ tel que $H : C_a \longrightarrow C_a$.
Soient $x_1, x_2 \in C_a$:

$$(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s)))ds.$$

Soit $M_a = \sup_{t\in[0,a]} \|T(t)\| \leq Me^{\omega a} < +\infty,\ \omega > 0.$

$$\|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)\| \leq M_a K t \|x_1 - x_2\|$$

K étant la constante de Lipschitz pour f.
On a $H^2 = H \circ H$, alors :

$$\begin{array}{rcl}
\|H^2x_1(t) - H^2x_2(t)\| & \leq & M_a K \displaystyle\int_0^t \|(Hx_1(s)) - (Hx_2(s))\|ds \\
& \leq & M_a K \displaystyle\int_0^t (M_a K s)\|x_1 - x_2\|ds, \quad \forall t \in [0,a] \\
& = & \dfrac{(M_a K)^2}{2!} t^2 \|x_1 - x_2\|, \quad \forall t \in [0,a] \\
\vdots & & \vdots \\
\|H^n x_1(t) - H^n x_2(t)\| & \leq & \dfrac{(M_a K)^n}{n!} a^n \|x_1 - x_2\|, \quad \forall t \in [0,a]
\end{array}$$

Il s'ensuit que $\|H^n x_1(t) - H^n x_2(t)\| \leq \dfrac{(M_a K)^n}{n!} a^n \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in C_a.$
Puisque $\dfrac{(M_a K)^n}{n!} a^n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, donc $\exists\ p \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{(M_a K)^p}{p!} a^p < 1$.
Il en résulte que $H^p = H \circ \cdots \circ H$ est une contraction puis $\exists!\ x \in C_a$ tel que $H^p x = x$.

Proposition 3.4.1. On a $Hx = x$.
En effet,
$H^p(x) = x \Rightarrow H^{p+1}(x) = Hx$, on peut écrire $H^p(H(x)) = H(x)$ il s'ensuit que $H(x)$ est un point fixe de H^p et puisque le point fixe est unique nous obtenons point fixe $H(x) = x$.
Nous conclurons que $H(x) = x$ est une solution "mild" de l'équation (3.10) sur $[0;a]$, cela est vrai pour tous $a > 0$. D'où l'équation (3.10) a une solution "mild" unique sur $\mathbb{R}^+$.

3.5 Quelques applications

Dans ce paragraphe nous donnons quelques applications de la théorie des semi-groupes et l'étude du problème abstrait de Cauchy dans la résolution de quelques équations aux dérivées partielles classiques en physique.

Exemple 3.5.1. (L'équation d'advection)
Considérons l'équation d'advection qui décrit les phénomènes du transport :

$$(EA)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)+\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)=0, \quad t\geq 0, x\in\mathbb{R}. \\ v(x,0)=f(x) \end{cases}$$

On cherche les solutions dans l'espace de Banach $X = L^2(\mathbb{R})$.
Écrivons le problème (EA) sous la forme abstrait en posant $u(t) = v(., t)$:

$$\begin{cases} u'(t)=Au(t), \quad t\geq 0, \\ u(0)=f, \end{cases}$$

Où $A = -\dfrac{d}{dx}$ avec le domaine $\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \setminus u' \in L^2(\mathbb{R})\}$.
Comme A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe défini sur X par

$$(T(t)f)(x) = f(x-t), \ x\in\mathbb{R}, t\geq 0,$$

alors il vient du théorème 3.2.1 que pour tout $f \in \mathcal{D}(A)$, la fonction définie par

$$u(x,t) = (T(t)f)(x) = f(x-t),$$

est l'unique solution de (EA).

Exemple 3.5.2. (L'équation des ondes)
Considérons l'équation des ondes qui décrit les phénomènes de propagation :

$$(EO)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta v=0, \ sur\ \Omega\times[0,T], \\ v=0, \quad sur \quad \partial\Omega\times[0,T], \\ v(x,0)=v_0 \ \ et \ \ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=v_1, \ sur\ \Omega, \end{cases}$$

Où Ω est un sous-ensemble régulier de $\mathbb{R}^n$ et $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), v_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Posons $u = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$, l'équation (EO) s'écrit sous la forme abstraite :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.12}$$

où

$$Au = A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix} \quad et \quad u_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Soit $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Le domaine de A est $\mathcal{D}(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Montrons que A est m-dissipatif sur X lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_X = \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla v_1 dx + \int_\Omega u_2 v_2 dx, \quad \text{où} \quad u = (u_1, u_2) \ et \ v = (v_1, v_2).$$

D'abord A est dissipatif car

$$\langle Au, u\rangle_X = \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla u_1 dx + \int_\Omega \Delta u_1 u_2 dx = 0,$$

Soient $(f, g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, l'équation $u - Au = (f, g)$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = f \cdots (1) \\ u_2 - \Delta u_1 = g \cdots (2) \end{cases}$$

Pour $(1) + (2)$, on obtient l'équation :

$$u_1 - \Delta u_1 = f + g,$$

qui admet une solution unique $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ d'après le théorème de Lax-Milgram.

Par conséquent $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est unique. Donc $Im(I - A) = X$ et A est m-dissipatif.

Par le théorème de Lumer-Phillips il vient que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et par suite (3.12) admet une solution unique donnée par :

$$u(t, x) = (T(t)u_0)(x).$$

Chapitre 4

Stabilité Exponentielle

Dans ce chapitre on a définit les différents type de stabilité : uniforme, exponentielle, uniformément exponentielle, nous avons encore cité deux théorèmes équivalents et démontrer leurs équivalence et un parmi eux .

4.1 Stabilité pour les semi-groupes

Définition 4.1.1. *Le semi-groupe $T(t) = e^{At}$ est dit être exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $M \geq 1$ telle que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 4.1.2. *Un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit :*

1. ***uniformément exponentiellement stable** s'il existe $\varepsilon > 0$ telle que :*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} e^{\varepsilon t}\|T(t)\| = 0.$$

2. ***uniformément stable** si :*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|T(t)\| = 0.$$

3. ***fortement stable** si :*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|T(t)x\| = 0 \quad \forall x \in X.$$

4. ***faiblement stable** si :*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \langle T(t)x, x'\rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad et \quad x' \in X'.$$

Proposition 4.1.1. Pour un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable.
2. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément stable.
3. Il existe $\varepsilon > 0$ telle que $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} e^{\varepsilon t}\|T(t)x\| = 0 \quad \forall x \in X$.

Preuve. Il est clair que, (1) implique (2) et (3).
(2) $\Longrightarrow$ (1) D'après la définition

$$e^{\omega_0 t} = r(T(t)) \leq \|T(t)\|, \quad \forall t \geq 0,$$

car $\omega_0 = \inf_{t\geq 0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|$. Alors

$$\omega_0 \geq \frac{1}{t} \log \|T(t)\|; \quad \forall t \geq 0,$$

donc

$$e^{\omega_0 t} \leq \|T(t)\|; \quad \forall t \geq 0,$$

donc(2) entraine que $\omega_0 < 0$

$$\omega_0 := \inf \left\{\omega \in \mathbb{R}, \lim_{t\longrightarrow 0} e^{-\omega t}\|T(t)\| = 0\right\},$$

donc $\exists\omega$ tel que $\omega_0 < \omega < 0$, tel que $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} e^{-\omega t}\|T(t)\| = 0$. On choisit $\varepsilon = -\omega$ alors :

$$\lim_{t\longrightarrow 0} e^{\varepsilon t}\|T(t)\| = 0.$$

On obtient alors (1).
(3) $\Longrightarrow$ (1) Si (3) est vérifiée, alors $e^{\varepsilon t}(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement donc uniformément, bornée, alors $\exists\beta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\|e^{\varepsilon t}T(t)\| \leq \beta &\Longrightarrow e^{\varepsilon t}\|T(t)\| \leq \beta \\ &\Longrightarrow e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\|T(t)\| \leq \beta e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\end{aligned}$$

qui implique $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\|T(t)\| = 0$. Donc (1).

Proposition 4.1.2. Pour un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\omega_0 < 0$, i.e, $\{T(t)\}$ est uniformément exponentiellement stable.
2. $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \|T(t)\| = 0$.
3. $\|T(t_0)\| < 1$ pour certain $t_0 > 0$.
4. $r(T(t_1)) < 1$ pour certain $t_1 > 0$.

4.2 Stabilité exponentielle

dans cette section on va démontrer l'équivalence entre les deux théorèmes suivants, mais avant on va lancer un théorème qui nous utilisons dans cette démonstration.

Théorème 4.2.1. *Soit X un espace de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur tel que $\|T\| < 1$ alors $I - T$ est inversible et l'inverse est donnée par*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Théorème 4.2.2. *Soit $T(t) = e^{At}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors $T(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si :*

$$\sup\{Re(\lambda); \lambda \in \rho(A)\} < 0, \tag{4.1}$$

et

$$\sup_{Re(\lambda)\geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty. \tag{4.2}$$

Théorème 4.2.3. *Soit $T(t) = e^{At}$ un C_0-semi-groupe de contraction sur un espace de Hilbert. Alors $T(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si :*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta\ ,\ \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}, \tag{4.3}$$

et

$$\overline{\lim_{|\beta|\longrightarrow\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty \tag{4.4}$$

Dans la suite, on donne la preuve de l'équivalence de ces deux théorèmes à condition que $T(t) = e^{At}$ est un C_0-semi-groupe de contraction sur un espace de Hilbert.

Preuve. D'abord, nous provons que (4.1)-(4.2) implique (4.3) et (4.4).

Supposons que $\sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, si $Re\lambda \geq 0$ on a $\lambda \notin \sigma(A)$ par suite $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, donc (4.1) entraine (4.3).

Si $\sup\limits_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$, alors :

$$\|(ikI - A)^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty, \quad \forall k \geq |\beta|$$

donc :

$$\sup_{k \geq |\beta|} \|(ikI - A)^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$$

ce qui implique que

$$\inf_{|\beta|} \left(\sup_{k \geq |\beta|} \|(ikI - A)^{-1}\| \right) < \infty$$

on a :

$$\overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$$

alors (4.2) entraine (4.4).

Ensuite, nous prouvons que (4.3)-(4.4) implique (4.1) et (4.2) à condition que $\|T(t)\| \leq 1$.

On a l'ensemble résolvante $\rho(A)$ contient le demi-plan ouvert droit, i.e $\{\lambda : Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$, et $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{Re\lambda}$.

Ceci implique que pour tout $\delta_0 < 0$ donné, quand $Re\lambda > |\delta_0|$, nous avons :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda} < \frac{1}{|\delta_0|},$$

alors :

$$\sup_{Re\lambda \geq |\delta_0|} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \frac{1}{|\delta_0|} \tag{4.5}$$

Deuxièmement, nous montrons qu'il existe $\sigma_0 < 0$ avec $|\sigma_0|$ étant suffisamment petite telle que :

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda, \quad Re\lambda \leq \sigma_0\}.$$

En effet soit $\lambda = u + iv$,

$$\lambda I - A = uI + ivI - A = [u(ivI - A)^{-1} + I](ivI - A).$$

D'après (4.3) $ivI - A$ est inversible et pour $|u|$ est suffisamment petit, par le théorème 4.2.1 $u(ivI - A)^{-1} + I$ est inversible.

Ainsi (4.3) implique $\sigma(A) \subseteq \{\lambda, \quad Re\lambda \leq \sigma_0 < 0\}$ avec $|\sigma_0|$ suffisamment petit, par conséquent :

$$\sigma_0(A) = \sup\{Re\lambda, \quad \lambda \in \sigma(A) \leq \sigma_0 < 0\},$$

et pour $Re\lambda \leq |\delta_0| \leq |\sigma_0|$, $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 2M$ car d'après (4.4) :

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} \|(ivI - A)^{-1}\| \leq M,$$

et on choisit $|u| \leq \dfrac{1}{2M}$ d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \|(ivI - A)^{-1}[u(ivI - A)^{-1} + I]^{-1}\| \\ &\leq \|(ivI - A)^{-1}\|\|[u(ivI - A)^{-1} + I]^{-1}\|\end{aligned}$$

alors,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M\|[u(ivI - A)^{-1} + I]^{-1}\| \tag{4.6}$$

et $|u| \leq \dfrac{1}{2M} \leq \dfrac{1}{2\|(ivI - A)^{-1}\|}$, alors :

$$\|u(ivI - A)^{-1}\| \leq |u|\|(ivI - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{2M}M < 1.$$

Donc par le théorème 4.2.1 $u(ivI - A)^{-1} + I$ est inversible et l'inverse est donnée par :

$$[u(ivI - A)^{-1} + I]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[u(ivI - A)^{-1}]^n.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|[u(ivI - A)^{-1} + I]^{-1}\| &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}[u(ivI - A)^{-1}]^n\right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\|[u(ivI - A)^{-1}]^n\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\|[u(ivI - A)^{-1}]\|^n \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \|u(ivI - A)^{-1}\|^n}{1 - \|u(ivI - A)^{-1}\|}\end{aligned}$$

comme $\|u(ivI - A)^{-1})\| < 1$, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \|u(ivI - A)^{-1}\|^n}{1 - \|u(ivI - A)^{-1})\|} = \frac{1}{1 - \|u(ivI - A)^{-1}\|}$$

donc :

$$\|[u(ivI - A)^{-1} + I]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u(ivI - A)^{-1}\|}$$

comme $\|(ivI - A)^{-1})\| \leq M$ et $|u| < \dfrac{1}{2M}$

on a :

$$\|[u(ivI - A)^{-1} + I]^{-1}\| \leq 2 \tag{4.7}$$

d'après l'équation (4.6) et (4.7), on obtient :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 2M.$$

En combinant ceci avec (4.5) on obtient (4.2).

4.3 Application

Dans cette section nous allons étudié le système de Petrovsky-Petrovsky suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \phi(x)\left(\Delta^2 u - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \mu(t-s)\Delta^2 u(s)ds\right) + \alpha v = 0 & dans \ \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} + \phi(x)\Delta^2 v + \alpha u = 0 & dans \ \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ (u_0, v_0) \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n), \quad (u_1, v_1) \in L^2_g(\mathbb{R}^n), & \end{cases}$$

Où $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ et $L^2_g(\mathbb{R}^n)$ deux espaces défini par :

$\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^{2n/(n-4)}(\mathbb{R}^n) : \Delta_x f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ et $L^2_g(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert séparable tel que : $(f, h)_{L^2_g(\mathbb{R}^n)} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} gfhdx.$

Où $\phi(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$, $(\phi(x))^{-1} = g(x)$ tel que la fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$,

$g(x) \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ avec $\gamma \in (0, 1)$ et $g \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous utilisons le théorème 4.2.3 pour prouver n'est pas exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe une suite de valeurs μ_m telle que :

$$(\|(i\mu_m I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}) \longrightarrow \infty$$

cela équivalent à prouver qu'il existe une suite de données $F_m \in \mathcal{H}$ et une suite de nombres réels $\mu_m \in \mathbb{R}$ avec $\|F_m\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ tels que :

$$(\|(i\mu_m I - A)^{-1} F_m\|_{\mathcal{H}}) \longrightarrow \infty$$

Le problème de valeur propre :

$$\phi(x)\Delta^2 u = \mu u, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Possède un système complet de solutions propres $\{w_j, \mu_j\}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \phi(x)\Delta^2 w_j = \mu_j w_j, \quad j = 1, \cdots, w_j \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n), \\ 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots, \quad \mu_j \longrightarrow +\infty \textit{ quand } j \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

Théorème 4.3.1. *Supposons que le terme de mémoire est de la forme $g(s) = e^{-\mu s}, s \in \mathbb{R}^+$, avec $\mu > 1$. Le semi-groupe $T(t)$ sur $\mathcal{H}$ n'est pas exponentiellement stable.*

Preuve. Nous allons trouver une suite de fonction liées $F_m = (f_{1,m}, f_{2,m}, f_{3,m}, f_{4,m}, f_{5,m}) \in \mathcal{H}$ pour laquelle les solutions correspondantes des équations de résolution ne sont pas liées, cela prouvera que l'opérateur de résolution n'est pas lié de manière uniforme.
Considérons l'équation :

$$i\mu U_m - AU_m = F_m.$$

L'équation se lit :

$$\begin{cases} i\mu u - \varphi = f_1, \\ i\mu\varphi + \mu_0\phi(x)\Delta^2 u + \alpha v + \int_0^\infty g(s)\Delta^2\eta(x,s)ds = f_2, \\ i\mu v - \psi = f_3, \\ i\mu\psi + \phi(x)\Delta^2 v + \alpha u = f_4, \\ i\mu\eta - \varphi + \eta_s = f_5 \end{cases} \tag{4.8}$$

Considérons que $f_1m = f_3m = f_5m = 0$ et $f_2m = f_4m = w_m$ pour obtenir $\varphi = i\mu u$ et $\psi = i\mu v$. Alors, le système (4.8) devient :

$$\begin{cases} -\mu^2 u + \mu_0\phi(x)\Delta^2 u + \alpha v + \int_0^\infty g(s)\Delta^2\eta(x,s)ds = w_m, \\ -\mu^2 v + \phi(x)\Delta^2 v + \alpha u = w_m, \\ i\mu\eta - i\mu u + \eta_s = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

On cherche des solutions de la forme :

$$u = aw_m, \qquad v = bw_m, \qquad \varphi = cw_m, \qquad \psi = dw_m, \qquad \eta(x,s) = \gamma(s)w_m$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $\gamma(s)$ dépend μ et sera déterminé explicitement dans ce qui suit.

A partir de (4.9) on obtient a et b satisfont :

$$\begin{cases} -\mu^2 a + \mu_0 a\mu_m + \alpha b + \mu_m \displaystyle\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds = 1, \\ -\mu^2 b + \mu_m b + \alpha a = 1, \\ \gamma_s + i\mu\gamma - i\mu a = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

En résolvant (4.10) nous obtenons :

$$\gamma(s) = a - ae^{-i\mu s}. \tag{4.11}$$

Ensuite, à partir de (4.11) nous avons :

$$\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds = a(1-\mu_0) - a\int_0^\infty g(s)e^{-i\mu s}ds. \tag{4.12}$$

Maintenant, en choisissant $\mu = \sqrt{\mu_m}$, en utilisant les deux premiers équations de (4.10) on obtient :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\alpha}, \\ b &= \frac{\mu_m(1-\mu_0)}{\alpha^2} - \frac{\mu_m}{\alpha}\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds + \frac{1}{\alpha}, \\ c &= i\frac{\sqrt{\mu_m}}{\alpha}, \\ d &= i\sqrt{\mu_m}\left(\frac{\mu_m(1-\mu_0)}{\alpha^2} - \frac{\mu_m}{\alpha}\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds + \frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Comme

$$\varphi = cw_m = i\frac{\sqrt{\mu_m}}{\alpha},$$

on obtient

$$\|\varphi\|^2_{L^2_g} = \frac{\mu_m}{\alpha}.$$

Par conséquent nous obtenons :

$$\lim_{m\to\infty}\|U_m\|^2_{\mathcal{H}} \geq \lim_{m\to\infty}\|\varphi\|^2_{L^2_g} = \lim_{m\to\infty}\frac{\mu_m}{\alpha} = +\infty,$$

qui complète la preuve.

Conclusion

Ce travail est une étude des outils mathématiques intervenant dans la théorie des semi-groupes et ses applications dans le cadre des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles et sa stabilité exponentielle.
Ce qui a consiste d'abord, à étudier les notions fondamentales de la théorie, et d'obtenir ainsi des résultats généraux très utile dans différents domaines. Comme application, on traite en détails le problème abstrait de Cauchy et quelques équations d'évolution qui sont au fond de l'un des domaines les plus fertiles de la recherche mathématique actuelle, en donnant quelques applications illustratives à quelques équations aux dérivées partielles classiques en suite en présentant la stabilité exponentielle des C_0-semi-groupes.

Bibliographie

[1] A.Pazy. Semigroups of linear operator and applications to patial differential equations springer verlag, new york, berlin. 1983.

[2] H.Brezis. Analyse fonctionnel masson. 1987.

[3] J.Baillon. Générateurs et semi-groupes dans les espaces de banack uniformément lisses, université new york. *journal of functional analysis 29,199-213(1978)*, 1978.

[4] J.Raymond. Equation d'évolution, université paul sabatier.

[5] K.Ezzinbi. Lecture notes in functional analysis and evolution equation, african university of science and technology. 2010.

[6] L.D.LEMLE. La formule de lie-trotter pour les semi-groupes fortement continus, université claude bernard lyon 1. 2001.

[7] L.D.Lemle. Semi-groupes intégres d'opérateur, l'unicité des pre-generateurs et applications université blaise pascal, aubiére, france faculté d'ingénierie, université politehnica, hunedora, roumanie. 2007.

[8] P.N.Burq. Problème d'évolution, université paris sud.

[9] S.LUBKIN. c_0-semigroups and applications, elsevier science b.v, university of rochester new york, u.s.a. 2003.

Résumé

Dans ce mémoire on s'est intéressé à la théorie bien connue de C_0-semi-groupes et son application aux équations différentielles abstraites, et on a présenté une nouvelle méthode pour prouver la stabilité exponentielle d'un C_0-semi-groupes de contraction.
Mots clés : C_0-semi-groupe, générateur infinitésimal, théorème de Hille-Yosida, théorème de Lumer-Phillips, stabilité exponentielle.

Abstract

This paper concerned with C_0-semigroups theory and its application to abstract differential equation, and we are present a new method to prove the stability exponential of a C_0-semigroups of contractions.
Key word : C_0-semigroups, infinitesimal generator, Hille-Yosida, Lumer-Phillips, stability exponential.