
République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT



Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Équation Différentielle et Modélisation

Présentée par :

M^{elle}. Boumedine KAWTHER

MODÉLISATION DE L'IMPACT DE LA VARIATION DU pH SUR LA DYNAMIQUE DU SYSTÈME PROIES-PRÉDATEURS

Encadrant :

M^{me}. BENZERDJEB SARRA
Maitre de conférence "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenue en 12/06/2019

Devant le jury composé de :

Président : M. HAMMOUDI AHMED (Professeur) C.U.B.B.A.T.

Examinatrice : M^{me}. MAMMAR IMANE (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Encadrant : M^{me}. BENZERDJEB SARRA (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Dédicace

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

*À mes chers parents,
qui m'ont aidé de
près et de loin.*

*À mes chers sœurs
Bouchra Asmaa,
Fatima Zohra.*

À mon frère AlaaDine

*À toutes mes chers amies
qui m'ont toujours aidé,
qui étaient toujours à mes côtés.*

*À ceux et celles qui m'ont
honorés de leurs soutiens
durant ces années d'étude.*

*À toute ma famille, qui porte le nom **Boumedine**.*

M^{elle} Kawther Boumedine.

*"Les deux guerriers les plus puissants sont la patience et le temps.
N'oublie pas que les grandes réalisations prennent du temps
et qu'il n'y a pas de succès du jour au lendemain." – **Léon Tolstoï***

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

*Parvenu au terme de ces travaux, je souhaite exprimer ma reconnaissance, ma plus profonde gratitude et mon indéfectible attachement à mon encadrant **M^{me} BENZERDJEB Sarra**, qui a su guider mon travail avec compétence et merci pour votre gentillesse, votre disponibilité, vos conseils, votre rigueur scientifique et votre aide très précieuse.*

*Mes respectueux remerciements s'adressent aux les membres du jury, **M. HAMMOUDI Ahmed** d'avoir accepté de présider le jury et **M^{me} MAMMAR Imane** pour avoir accepté d'examiner mon travail et contribué aux discussions lors de la soutenance.*

Tout mes sincères remerciements vont également à l'ensemble des enseignants du département de Mathématique qui m'ont aidé à m'améliorer durant mon cursus universitaire.

Je remercie infiniment mes parents que j'aime plus que tout au monde, qui mon encouragé et aidé à arriver à ce stade de mes études. Merci aussi à mon frère et mes sœurs, d'être toujours à mes côtés, par votre amour, par votre soutien.

Je remercie plus largement mes camarades de Master II et mes amis qui m'ont soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

À toutes et à tous, je témoigne ma gratitude sur le soutien dont ils m'ont honorés.

Résumé : Le travail présenté s'inscrit dans le cadre des travaux des mathématiques appliquées. L'objectif est d'étudier l'effet de la variation du pH de l'eau sur la prédation de deux populations, on détermine l'état d'équilibre et les conditions pour lesquelles les deux populations coexistent avec des illustrations numériques.

Mots clé :

population, proie-prédateur, fonction de Holling, pH , stabilité, CO_2 .

Abstract : The work presented is part of the work of applied mathematics. The objective is to study the effect of the variation of the pH of the water on the predation of two populations, one determines the state of equilibrium and the conditions for which the two populations coexist with digital illustrations.

Key words :

population, prey-predator, Holling function, pH , stability, CO_2 .

Table des matières

Notations	VII
Introduction générale	VIII
1 Quelques rappels mathématiques	1
1.1 Introduction	1
1.2 Quelques résultats pour le système différentiel	1
1.3 Stabilité des solutions d'un système différentiel	3
1.3.1 Critère de Routh-Hurwitz	5
1.3.2 Cycle limite	6
1.4 Système conservatif, intégrale première	6
2 Quelques modèles en dynamique de populations	8
2.1 Introduction	8
2.2 Modèles avec une seule population	9
2.2.1 Modèle de Malthus	9
2.2.2 Modèle de Verhulst	10
2.3 Modèles avec deux populations	11
2.3.1 Modèle de Lotka-Volterra	12
2.3.2 La réponse fonctionnelle du prédateur	16
Réponse fonctionnelle de Volterra	16
Réponse fonctionnelle de Holling	16
2.4 Conclusion	18

3	L'impact de la variation du pH sur la dynamique d'un modèle proie-prédateur	19
3.1	Introduction	19
3.2	Présentation du modèle	20
	Modèle mathématique (<i>A</i>)	24
3.3	Bornitude et positivité des solutions	24
3.4	Points d'équilibre du modèle (<i>A</i>)	31
3.5	Analyse de l'équilibre dépendant des paramètres	33
3.6	Analyse de stabilité	39
	3.6.1 Modèle mathématique (<i>B</i>)	40
	Points d'équilibre du modèle (<i>B</i>)	40
	Comportement dynamique du modèle (<i>B</i>)	42
	Stabilité globale	46
	Cycles limites	47
	3.6.2 Modèle mathématique (<i>C</i>)	50
	Bornitude et positivité des solutions du modèle (<i>C</i>)	50
	Points d'équilibre du modèle (<i>C</i>)	54
	Comportement dynamique du modèle (<i>C</i>)	55
3.7	Simulation numérique	58
3.8	Conclusion	60
	Conclusion générale	61
	Bibliographie	62

Table des figures

2.1	La loi de croissance Malthusienne (exponentielle) avec condition initiale $N_0 = 5$.	10
2.2	Portrait de phase du système Lotka-Volterra dont la courbe entoure le point d'équilibre non trivial (N^*, P^*) avec $r = 3$, $a = 1.5$, $c = 2$ et $b = 1$.	15
2.3	Trajectoires des solutions pour $r = 3$, $a = 1.5$, $c = 2$ et $b = 1$ avec une densité initiale $N_0 = 3$ et $P_0 = 1$.	15
2.4	Fonctions réponse de Types I, II et III avec paramètres $A = 1$ et $B = 0.5$.	17
3.1	Variation du taux de croissance par rapport au pH .	21
3.2	Variation du taux de capture par rapport à pH .	22
3.3	Variation du temps de manipulation par rapport au pH .	23
3.4	Variation du taux de mortalité par rapport au pH .	23
3.5	La densité des proies à l'état d'équilibre, selon la variation de d_3 .	35
3.6	La densité des proies à l'état d'équilibre, selon la variation de a_1 .	36
3.7	La densité des proies à l'état d'équilibre, selon la variation de h_1 .	37
3.8	La densité des prédateurs à l'état d'équilibre, selon la variation de d_3 .	38
3.9	La densité des prédateurs à l'état d'équilibre, selon la variation de r_1 .	39
3.10	Trajectoires du modèle mathématique (A) de la stabilité du point d'équilibre intérieur.	58
3.11	Le portrait de phase du modèle mathématique (A) pour $a_1 = 0.4$ de l'existence d'un cycle limite.	59
3.12	Trajectoires du modèle (C) de la stabilité du point d'équilibre intérieur E_{p3} .	59
3.13	Le portrait de phase du modèle mathématique (C) $a_1 = 1.16$ de l'existence d'un cycle limite.	60

Notations

\mathbb{R}	Ensembles des nombres réels.
\mathbb{R}^n	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.
\mathbb{R}^+	Ensembles des nombres réels positifs.
$\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^+)$	Espace des fonction continues, dérivable de $[0, T]$ dans \mathbb{R} .
\in	Appartient.
\subset	Inclus.
$\dot{N} = \frac{dN}{dt}$	La dérivée de la variable N par rapport au temps t .
J	Ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .
tr	La trace d'une matrice.
det	Le déterminant d'une matrice.
$Re(\lambda_i)$	La partie réelle de λ .

Introduction générale

Les environnements écologiques connaissent actuellement des changements, où les organisations sont incapables de s'adapter à ce changement.

L'acidification des océans et des estuaires du monde est l'un des aspects du changement environnemental qui défie actuellement la structure et fonction des écosystèmes.

L'écosystème est un ensemble relativement homogène et stable (en l'absence de perturbations) constitué par une communauté d'êtres vivants (animaux, végétaux, champignons, microbes) appelée biocénose, en relation avec un biotope (facteurs physicochimiques) déterminés par (le climat, la topographie, la nature du sol, l'humidité, etc...).

L'objectif entrepris dans ce mémoire est de voir de près l'importance de pH de l'eau pour la survie des organismes aquatiques.

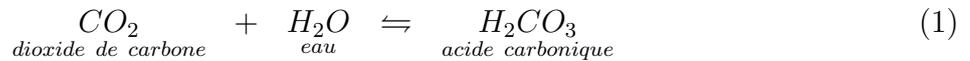
Le pH est un sigle signifiant le potentiel hydrogène et qui représente la mesure de l'acidité ou la basicité d'une solution en chimie, ce terme a été utilisé pour la première fois en 1909 par le chimiste danois Søren Peder Lauritz Sørensen, alors qu'il travaillait sur les ions hydrogènes.

Dans le cas de l'eau le pH varie de 1 à 14 mais pour d'autres solutions le pH n'est pas limité à cette échelle, Les solutions dont le pH est inférieur à 7 sont acides et Celles dont le pH est supérieur à 7 sont basiques [1].

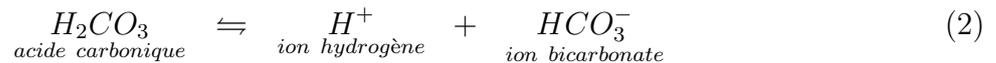
Plusieurs auteurs ont étudié les effets d'un pH sur la croissance et la survie des organismes aquatiques, comme les poissons il est compris entre 6.5 et 8.5 [13], Ghazy et al [10] ont étudié l'augmentation et la diminution des pH sur les taux de croissance et de reproduction de *Daphnia Magna*, ils ont observé que le taux de survie et de croissance diminuaient lorsque le pH diminuait de 4.66 à 4.44 et augmentaient lorsque pH augmentait de 10.13 à 10.55.

La variation du pH des océans est influencée par la concentration de dioxyde de carbone dissous, son augmentation est dû de diverses activités humaines, et d'ailleurs le dioxyde de

carbone CO_2 se dissout dans l'eau, qu'elle soit une eau douce (terrestre) ou salée (océans), en fait il devient plus acide (son pH diminue) est produit de l'acide carbonique (H_2CO_3) telle que [2] :



Cet acide carbonique se dissocie en libérant ses atomes d'hydrogène. Quand son premier atome est libéré, il se forme un ion bicarbonate :



Le pH de l'eau contrôle cette réaction. Si la concentration en H^+ diminue, ce qui correspond à une augmentation de pH , le rééquilibrage de l'équation entraîne une réaction vers la droite et une plus grande quantité d'acide carbonique se dissocie. À l'inverse, une augmentation de la concentration en H^+ (soit une diminution du pH) entraîne une réaction vers la gauche et forme H_2CO_3 au détriment de HCO_3^- .

L'approche mathématique a été depuis longtemps utilisée en l'écologie, le domaine de la science qui s'intéresse à comprendre la densité des effectifs d'individus et à éclaircir la relation entre un organisme vivant et son milieu de vie est la dynamique des populations.

On s'intéresse dans ce travail à la dynamique des populations aux écosystèmes aquatiques, on présente la construction et l'analyse de modèles mathématiques déterministes continus pour gérer les interactions de type prédation, le système proie-prédateur est un système permettant de prévoir l'évolution du nombre des proies et des prédateurs en fonction de temps.

Dans ce mémoire, on montre que le pH de l'eau a une grande influence sur la dynamique des interactions proie-prédateur aquatique, Mathématiquement, il s'agit d'étudier un problème d'équations différentielles ordinaires, l'étude de la stabilité des points d'équilibre dans divers modèles mathématiques, et dans certains cas on va étudier d'autres propriétés comme l'existence et la bornitude des solutions et l'existence des cycles limites.

Présentation du travail

Ce mémoire est constitué de trois chapitres :

- Dans le premier chapitre intitulé : **Quelques rappels mathématiques**, est consacré aux outils mathématiques utilisés dans ce travail, on donne un rappel sur quelques notions fondamentales des équations différentielles ordinaires, le lemme de Gronwall qui sera utilisé dans le bornage du modèle, on présente aussi, la notion de la stabilité.
- Le deuxième chapitre intitulé : **Quelques modèles en dynamique de populations**, on rappelle quelques modèles classiques de la dynamique des populations, modèle de dynamique d'une seule population et modèles avec deux populations sur lesquels on s'est basé pour la construction de modèle.
- Le dernier chapitre intitulé : **L'impact de la variation du pH sur la dynamique d'un modèle proie-prédateur**, on considère un modèle proie-prédateur avec une réponse fonctionnelle de Holling type II basé sur l'effet du pH de l'eau et la concentration du CO_2 . Le modèle est donné par un système de quatre équations différentielles ordinaires qui décrivent les interactions entre les proies, prédateurs. On montre que les solutions du système sont bornées. On étudie l'existence et la positivité des points d'équilibres du système associé. Ensuite, nous analysons la stabilité locale et globale du point d'équilibre positif. On termine le chapitre avec quelques résultats numériques qui illustrent l'étude mathématique.

Quelques rappels mathématiques

Sommaire

1.1	Introduction	1
1.2	Quelques résultats pour le système différentiel	1
1.3	Stabilité des solutions d'un système différentiel	3
1.3.1	Critère de Routh-Hurwitz	5
1.3.2	Cycle limite	6
1.4	Système conservatif, intégrale première	6

1.1 Introduction

Dans ce mémoire, on se restreint au plan réel. On rappelle quelques outils et théorèmes qui seront utiles pour la suite de ce travail, la plupart des notions ont été étudiées, et sont présents dans la plupart des ouvrages par exemple [7],[11] et [3].

1.2 Quelques résultats pour le système différentiel

On note que I un intervalle non vide de \mathbb{R} , on suppose que J un ouvert de \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$, $N = (N_1, \dots, N_n)$ est un élément de \mathbb{R}^n et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Définition 1.2.1 (Équation différentielle) Une équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à une fonction f , le système est comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = f(t, N(t)), & N \in \mathbb{R}^n, t \in I, \\ N(t_0) = N_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

que l'on note :

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = f(t, N(t)), & N \in \mathbb{R}^n, t \in I, \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Où $N(t_0) = N_0$ est la condition initiale à l'instant t_0 et $f(t, N) = (f_1(t, N), \dots, f_n(t, N))$ tel que chaque fonction f_i continue sur $I \times J$, cette fonction f est champ de vecteur.

l'EDO (1.1) est dite autonome si le champ de vecteur f ne dépend pas du temps t , dans le cas contraire l'EDO est dite non-autonome.

Définition 1.2.2 (Solution local) *La solution locale de l'EDO (1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :*

- (i) $\forall t \in I, (t, y(t)) \in I \times J,$
- (ii) $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t)).$

Définition 1.2.3 (Solution périodique) *On suppose ici que $I = \mathbb{R}$, et soit $(I_0; \varphi)$ une solution de (1.1). On dit que $(I_0; \varphi)$ est une solution périodique si $I_0 = \mathbb{R}$ et s'il existe $T > 0$ tel que $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.2.4 (Problème de Cauchy) *Étant donnée un point $(t_0, N_0) \in I \times J$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $N : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ au problème suivant :*

$$\begin{cases} N' = f(t, N(t)), \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Définition 1.2.5 (Localement lipschitzienne) [15] *Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ et (t_0, N_0) . On suppose qu'il existe un voisinage de (t_0, N_0) dans $I \times J$ et une constante $L > 0$ tel que pour tous (t, N_1) et (t, N_2) dans ce voisinage alors :*

$$\|f(t, N_1) - f(t, N_2)\| \leq L\|N_1 - N_2\|.$$

Lemme 1.2.1 (Inégalité de Gronwall) [5] *Soit φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, où I un intervalle de \mathbb{R} , vérifie l'inégalité différentielle :*

$$\frac{d\varphi}{dt} \leq \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t), \quad t > 0,$$

où α et β sont des fonctions continues de I dans \mathbb{R} et $\varphi(t_0) = \varphi_0$ pour un $t_0 \in I$, alors on a

l'inégalité suivante :

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0)e^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t \alpha(\tau)d(\tau)} \beta(\tau)ds.$$

1.3 Stabilité des solutions d'un système différentiel

On Considère l'équation différentielle autonome alors :

$$\dot{N}(t) = f(N(t)), \quad (1.4)$$

où le champ de vecteurs $f : J \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne sur J .

Définition 1.3.1 (point d'équilibre) [3] *Un point d'équilibre (encore appelé singulier, point stationnaire, point fixe, point critique) de l'EDO (1.4), que on note N^* vérifiant $f(N^*) = 0$.*

La dynamique à long terme du système (1.4) peut être fournie par l'étude de la stabilité de ses équilibres.

Définition 1.3.2 (stabilité) [7] *Un point fixe N^* est :*

– *Stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que*

$$\|N_0 - N^*\| < \delta \Rightarrow \|N(t) - N^*\| < \epsilon,$$

– *Instable s'il n'est pas stable.*

– *Asymptotiquement stable si $\exists \delta > 0$ tel que*

$$\|N_0 - N^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*.$$

On Considère un système non linéaire et autonome comme suit :

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = f_1(N_1, N_2), \\ \dot{N}_2 = f_2(N_1, N_2). \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour déterminer si le point stationnaire N^* de système (1.5) est stable ou instable, on a la linéarisation du système différentiel non linéaire, elle est obtenue en utilisant le développement de Taylor du premier ordre des deux fonction f_1 et f_2 autour de l'équilibre $N^* = (N_1^*, N_2^*)$ [7].

Définition 1.3.3 (Linéarisation) [7] *Le linéarisé autour de l'équilibre $N^* = (N_1^*, N_2^*)$ du système non linéaire est défini par :*

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*) & \frac{\partial f_1}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*) & \frac{\partial f_2}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*) \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.3.1 (stabilité) [16] *On suppose pour le système (1.5) que $\delta = \det J(N_1^*, N_2^*)$, $\tau = \text{tr} J(N_1^*, N_2^*)$ et $\Delta = \tau^2 - 4\delta$, on a les résultats suivants si $\Delta \geq 0$ ou $\Delta \leq 0$ alors :*

- (a) *Si $\delta < 0$ alors le point d'équilibre N^* est un point-selle (instable).*
- (b) *Si $\delta > 0$ et $\tau > 0$ alors le point d'équilibre N^* est instable.*
- (c) *Si $\delta > 0$ et $\tau < 0$ alors le point d'équilibre N^* est stable.*
- (d) *Si $\delta > 0$ et $\tau = 0$ alors on a un centre.*

Maintenant, on présente les différentes possibilités de la stabilité du point d'équilibre par rapport aux les valeurs propres.

Théorème 1.3.2 (Stabilité) [7] *Soit N^* un point d'équilibre alors :*

- (a) *N^* est asymptotiquement stable si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ pour toutes valeurs propres λ_i de $J(N_1^*, N_2^*)$.*
- (b) *N^* est stable si $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ pour toutes valeurs propres λ_i de $J(N_1^*, N_2^*)$.*
- (c) *N^* est instable si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ pour au moins une valeur propre λ_i de $J(N_1^*, N_2^*)$.*

Théorème 1.3.3 (Lyapounov) [3] *Soit N^* un point d'équilibre associé à (1.5). Soit $J_0 \subset J$, un voisinage de N^* et s'il existe $V : J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant :*

- i) $V(N^*) = 0$.
- ii) $\forall N \in J_0 - \{N^*\}, V(N) > 0$.
- iii) $\forall N \in J_0, \frac{dV}{dN} < 0$.

Alors N^ est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov.*

Pour certaines équations caractéristiques, il n'est pas toujours facile de calculer et de déterminer explicitement le signe des parties réelles des valeurs propres associés. C'est pourquoi nous allons présenter le critère de Routh-Hurwitz qui donne des renseignements sur le signe des parties réelles des racines d'un polynôme à partir de ses coefficients.

1.3.1 Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz [3] donne des conditions nécessaires et suffisantes pour les racines d'un polynôme de degré n .

Soit le système linéaire de dimension n suivant :

$$\dot{N}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j,$$

avec $i \in [1, n]$ où $A = [a_{ij}]$ est une matrice carré de dimension n à coefficients constants. on fait l'hypothèse que $\det A \neq 0$, ce qui implique notamment que l'origine est l'unique équilibre. La matrice A admet n valeurs propres qui sont solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, qui est un polynôme de degré n que on écrit sous la forme suivante :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_0 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

On considère les n déterminants suivants :

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1, \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \\ H_k &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

avec $k \in [1, n]$. Dans la cas de dimension n , tous les a_j avec $j > n$ sont pris égaux à zéro. On a le résultat suivant :

$$\text{L'équilibre est asymptotiquement stable} \Leftrightarrow \forall k \in [1, n], H_k > 0.$$

Il faut donc vérifier que les n déterminants H_k sont strictement positifs. Il s'agit de conditions nécessaires et suffisantes de stabilité asymptotique locale, c'est-à-dire que les valeurs propres de la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre ont toutes une partie réelle négative.

Dans le cas de la dimension deux, l'équation caractéristique est la suivante :

$$\lambda^2 - \text{tr } A \lambda + \det A = 0,$$

On a donc $a_1 = -\text{tr } A$, $a_2 = \det A$ et $a_3 = 0$.

le critère de Routh-Hurwitz sont alors :

$$H_1 = a_1 = -\text{tr } A > 0 \Leftrightarrow \text{tr } A < 0,$$

$$H_2 = a_1 a_2 - a_3 = -\text{tr } A \det A > 0 \Leftrightarrow \det A > 0.$$

1.3.2 Cycle limite

Définition 1.3.4 (Cycle limite) [3] *Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée.*

Définition 1.3.5 (ω -limite) [3] *Soit p_0 un point du domaine de définition du système (1.5).*

On appelle ω -limite de p_0 , l'ensemble suivant :

$$\omega(p_0) = \bigcup_{t \geq 0} \overline{\{(N_1(s, p_0), N_2(s, p_0)), s \geq t\}}.$$

Théorème 1.3.4 (Critère de Dulac) [3] *On suppose que $D \subset \mathbb{R}^2$ est simplement connexe. Si $\frac{\partial f_1}{\partial N_1} + \frac{\partial f_2}{\partial N_2}$ n'est pas identiquement nulle et de signe constant sur D , alors (1.5) il n'existe pas de cycle limite entièrement contenu dans D .*

1.4 Système conservatif, intégrale première

Théorème 1.4.1 (Intégrale première) [3] *Une fonction $H(N_1, N_2)$ est dite intégrale première d'un système dynamique de type (1.5) sur un domaine D du plan si $H(N_1, N_2)$ est constante pour toute solution (N_1, N_2) du système dynamique.*

Le fait que la fonction $H(N_1, N_2)$ soit intégrale première implique qu'elle vérifie la relation

suivante :

$$\begin{aligned}\frac{H(N_1(t), N_2(t))}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial N_1} \dot{N}_1 + \frac{\partial H}{\partial N_2} \dot{N}_2, \\ &= 0.\end{aligned}$$

L'existence d'une intégrale première est très utile car elle permet de trouver les trajectoires qui sont les courbes de niveaux de la fonction H . En effet, afin d'obtenir les équations des trajectoires, il faut éliminer le temps entre les deux équations du système dynamique, ce qui conduit à l'intégration de l'équation suivante :

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{f_1(N_1, N_2)}{f_2(N_1, N_2)}.$$

Définition 1.4.1 (Système conservatif) [3] est Un système dynamique qui admet une intégrale première.

Quelques modèles en dynamique de populations

Sommaire

2.1	Introduction	8
2.2	Modèles avec une seule population	8
2.2.1	Modèle de Malthus	9
2.2.2	Modèle de Verhulst	10
2.3	Modèles avec deux populations	11
2.3.1	Modèle de Lotka-Volterra	12
2.3.2	La réponse fonctionnelle du prédateur	15
2.4	Conclusion	18

2.1 Introduction

LA modélisation est devenue un outil important pour étudier et analyser la dynamique d'une population ou plusieurs populations.

Dans ce chapitre introductif, on définit quelques modèles mathématiques classiques en écologie et plus particulièrement en dynamique des populations qui seront utilisées dans le troisième chapitre.

Les modèles mathématiques présentés sont des modèles continus et déterministes¹ interprétés par des équations différentielles ordinaires tel que :

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t)), \quad (2.1)$$

1. Si toute son évolution et son passé sont univoquement définis par son état présent

où

N : est la densité de la population à l'instant t .

f : est une fonction localement lipschitzienne définie sur \mathbb{R}^n .

Dans la première partie de ce chapitre, on étudie l'évolution d'une seule population isolée et dans la deuxième partie, on représente les modèles classiques qui décrivent l'évolution de deux populations en interaction.

2.2 Modèles avec une seule population

Les modèles présentés dans cette partie se limitent sur l'étude de la croissance d'une population isolée.

2.2.1 Modèle de Malthus

En 1798, Thomas Robert Malthus qui est un économiste anglais a élaboré un modèle qui décrit l'évolution d'une population isolée. Celui-ci est souvent appelé modèle exponentiel, il est donné par [18] :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t), \quad (2.2)$$

où

α : est le taux de natalité de la population.

β : est le taux de mortalité de la population.

N : est la densité de la population à l'instant t .

Le taux de croissance de la population N est défini par r tel que

$$r = \alpha - \beta,$$

Alors l'équation (2.2) devient

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t), \quad (2.3)$$

avec $N(0) = N_0$ est la condition initiale de la population à l'instant $t_0 = 0$.

La solution de l'équation différentielle donnée par (2.3) est

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

Celle ci montre l'existence de 3 cas selon le signe de r (voir figure (2.1)) :

- Si $r > 0$ c'est à dire lorsque le taux de natalité est plus élevé que le taux de mortalité donc la population croît exponentiellement.
- Si $r < 0$ c'est à dire le taux de mortalité est plus élevé que la taux de natalité donc la population va s'éteindre.
- Si $r = 0$ c'est à dire $N(t) = N_0$, elle représente une croissance stationnaire.

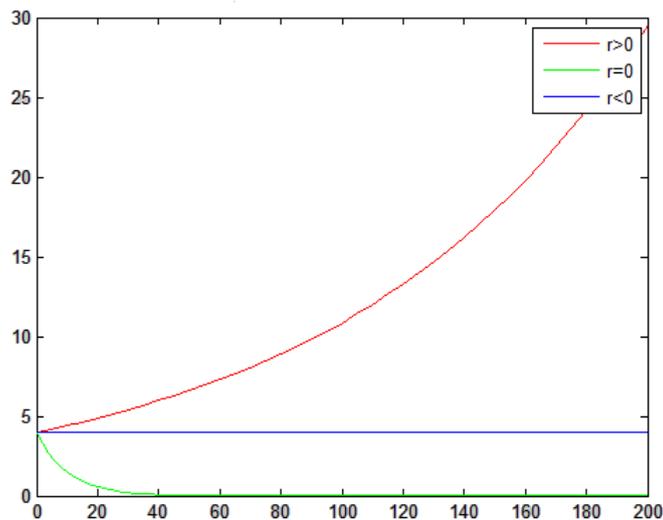


FIGURE 2.1 – La loi de croissance Malthusienne (exponentielle) avec condition initiale $N_0 = 5$.

De ce qui a été analysé, on voit bien que le modèle Malthusien n'est pas réaliste.

2.2.2 Modèle de Verhulst

La croissance Malthusienne est souvent irréaliste, pour cette raison le mathématicien Belge Pierre Verhulst a proposé un nouveau modèle en 1838 appelé le modèle logistique [8].

Il est présenté sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \\ N(t_0) = N_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où

r : est le taux de croissance de la population.

k : est la capacité limite du milieu.

Et dont la solution de l'équation (2.4) est donnée par (la méthode des séparations des variables) :

$$N(t) = \frac{kN_0}{(k - N_0)e^{-rt} + N_0}.$$

De plus, on constate que

- Le modèle admet deux points d'équilibres "point trivial" et " $N^* = k$ ".
- Pour déterminer la stabilité ces points d'équilibres, on considère la fonction $f(N)$ tel que

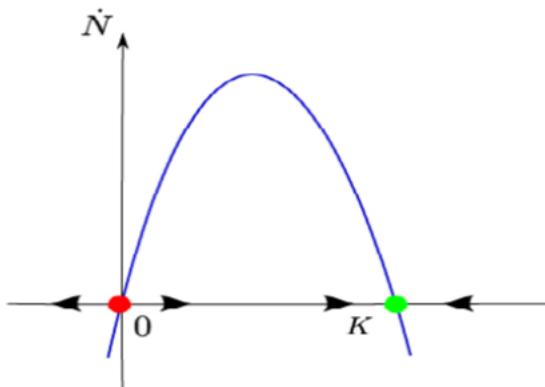
$$f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right),$$

d'après sa dérivée

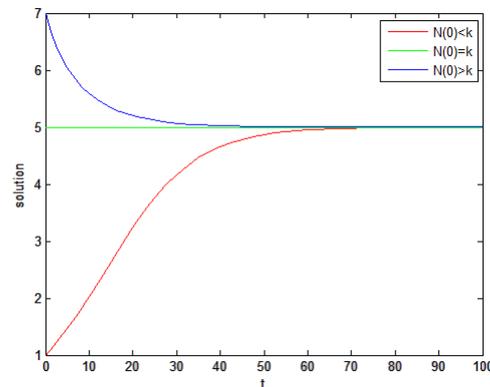
$$f'(N) = \frac{df}{dN} = r - 2r \frac{N}{K}.$$

Il en résulte que

- Si $f'(0) = r$ alors le point trivial est instable.
- Si $f'(k) = -r$ alors le point $N^* = k$ est stable.
- La courbe de la fonction $f(N)$ est une parabole (voir figure 2.2a), elle montre que la population atteint son maximum pour $\frac{k}{2}$.



(a) Le graphe de la fonction logistique.



(b) La loi de croissance logistique avec paramètres $r = 0.1$ et $k = 5$.

- Le modèle de Verhulst est plus réaliste que celui de Malthus vu que les ressources sont exploitées et la population tend vers la capacité limite k pour t assez grand i.e $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = k$. Ce qui es bien expliqué dans la figure (2.2b).

2.3 Modèles avec deux populations

Quand on parle de l'évolution de deux populations, on s'intéresse à décrire les interactions entre elles. Ici on décrit la prédation qui est présentée par les modèles proie-prédateur, soit N

et P respectivement la densité des proies et des prédateurs à l'instant t . Cette relation exprimée généralement par ce modèle :

$$\begin{cases} \dot{N} = f(N) - g(N, P) - \mu_1 N, \\ \dot{P} = eh(N, P) - \mu_2 P. \end{cases} \quad (2.5)$$

où

- $f(N)$: est la croissance des proie en l'absence du prédateur.
- $g(N, P)$: est la réponse fonctionnelle (les proies consommées par les prédateur) par unité de temps.
- e : est le rendement de conversion de la biomasse proie en biomasse prédateur.
- $h(N, P)$: est la réponse numérique du prédateur : taux de croissance du prédateur en fonction de la consommation.
- μ_1 : est la mortalité naturelle des proie.
- μ_2 : est la mortalité naturelle des prédateur.

2.3.1 Modèle de Lotka-Volterra

Le premier modèle de la prédation a été proposé par Lotka-Volterra en 1926, il est donné par le système suivant [4] :

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = rN - aNP, \\ \dot{P}(t) = -cP + bNP, \end{cases} \quad \text{avec } b = ea. \quad (2.6)$$

où r, a, b, c sont des constantes positives telles que :

- r : le taux de croissance des proies en absence de prédateur.
- b : le taux de conversion des proies N à des prédateurs P .
- c : le taux de mortalité des prédateurs en absence des proies.
- a : le taux de prédation des prédateurs sur les proies.

L'analyse mathématique de ce système permet d'obtenir les résultats suivants :

- En posant $\dot{N} = 0$ et $\dot{P} = 0$, on trouve que les points d'équilibres de (2.6) sont : $(0; 0)$ et le point non trivial $(N^*, P^*) = \left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a}\right)$.
- Le premier point signifie que les deux populations se dirigent vers l'extinction quand le second point (N^*, P^*) exprime la coexistence des deux populations.
- Pour déterminer leur stabilité, on linéarise (2.6) par la matrice jacobienne $J(N, P)$ telle que :

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} r - aP & -aN \\ bP & -c + bN \end{pmatrix}$$

– Pour le point d'équilibre $(0, 0)$, on a :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement que le point $(0, 0)$ est instable car les valeurs propres associées à $J(0, 0)$ sont de signes opposés tel que $\lambda_1 = r$ et $\lambda_2 = -c$.

– Pour le point d'équilibre $\left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a}\right)$, la Jacobienne en ce point est :

$$J(N^*, P^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-ac}{b} \\ \frac{br}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant et la trace sont donnés respectivement par

$$\det J\left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a}\right) = cr,$$

et

$$\text{tr} J\left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a}\right) = 0.$$

alors Le point d'équilibre (N^*, P^*) est un centre pour le système linéaire, mais pour le système non-linéaire (2.6), on considère l'intégrale première suivante (voir le théorème (1.4.1)) :

$$H(N, P) = -c \ln N + bN - r \ln P + aP.$$

- L'intégrale première admet un extremum au point (N^*, P^*) . En effet le développement limité de Taylor au second ordre de la fonction $H(N, P)$ au voisinage de (N^*, P^*) est :

$$H(N, P) = H(N^*, P^*) + \frac{b^2}{2c} (N - N^*)^2 + \frac{a^2}{2r} (P - P^*)^2,$$

On voit que

$$\frac{\partial H}{\partial N}(N^*, P^*) = \frac{\partial H}{\partial P}(N^*, P^*) = \frac{\partial^2 H}{\partial N \partial P}(N^*, P^*) = 0,$$

et que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial N^2}(N^*, P^*) = \frac{b^2}{c}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial P^2}(N^*, P^*) = \frac{a^2}{r}.$$

et dont sa dérivée par rapport au temps est

$$\frac{dH}{dt}(N, P) = 0,$$

C'est à dire

$$H(N, P) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$H(N, P) - H(N^*, P^*) = \frac{b^2}{2c} \left(N - \frac{c}{b} \right)^2 + \frac{a^2}{2r} \left(P - \frac{r}{a} \right)^2,$$

- On peut affirmer que les trajectoires sont fermés autours le point d'équilibre $\left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a} \right)$ alors le centre est bien conservé dans le modèle de Lotka-Volterra (voir figure (2.2)).
- Cependant la fonction V est une fonction de Lyapounov

$$V(N, P) = H(N, P) - H(N^*, P^*),$$

Autrement dit

$$V(N, P) = \frac{b^2}{2c} \left(N - \frac{c}{b} \right)^2 + \frac{a^2}{2r} \left(P - \frac{r}{a} \right)^2,$$

Du fait que

$$V \left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a} \right) = 0.$$

De plus

$$\frac{dV}{dt} \leq 0.$$

$V(N, P)$ est une fonction positive, ce qui conduit à conclure que V est une fonction de Lyapounov d'après le théorème (1.3.3) qui assure la stabilité de l'équilibre $\left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a}\right)$, il a été expliqué dans plusieurs ouvrages ([3],[15]) que le modèle de Lotka-Volterra admet une solution périodique qui est stable autour de l'équilibre $\left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a}\right)$ (voir figure (2.3)).

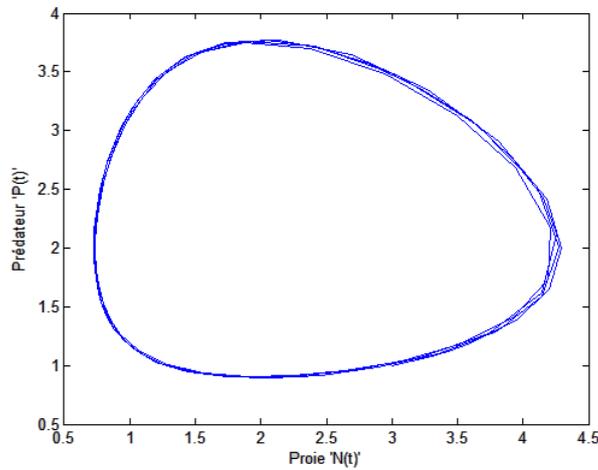


FIGURE 2.2 – Portrait de phase du système Lotka-Volterra dont la courbe entoure le point d'équilibre non trivial (N^*, P^*) avec $r = 3$, $a = 1.5$, $c = 2$ et $b = 1$.

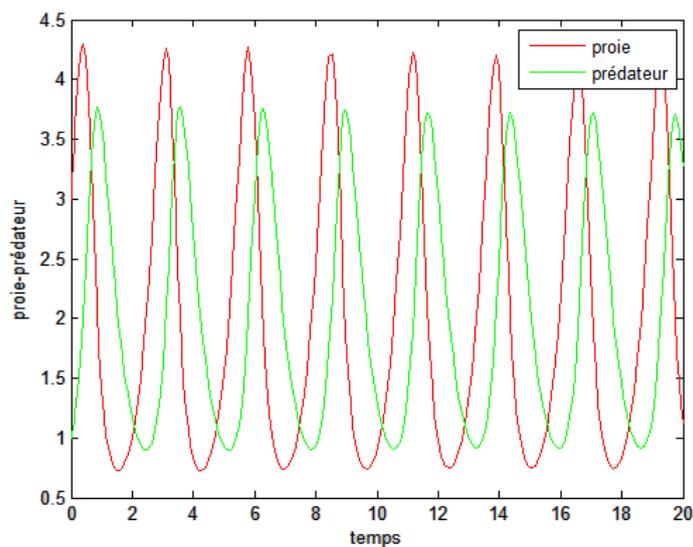


FIGURE 2.3 – Trajectoires des solutions pour $r = 3$, $a = 1.5$, $c = 2$ et $b = 1$ avec une densité initiale $N_0 = 3$ et $P_0 = 1$.

2.3.2 La réponse fonctionnelle du prédateur

L'utilisation de la fonction réponse est important dans l'étude des modèles proie-prédateur, elle représente le nombre des proies consommées par le prédateur par unité de temps (Solomon 1949). Cette relation a été exprimée par de différentes formulations tel que :

Réponse fonctionnelle de Volterra

Cette réponse a été proposée par Volterra en 1926, il s'agit d'une relation linéaire entre le taux de consommation du prédateur et la densité de proie. La forme générale de cette réponse est donnée par :

$$g(N, P) = aN.$$

où a représente le taux de prédation du prédateur sur la proie.

Réponse fonctionnelle de Holling

La réponse fonctionnelle de Holling est la relation entre l'effectif des proies et le taux de prédation pour un seul prédateur.

En 1959, l'entomologiste² a proposé trois types de fonction de holling I, II et III [9].

- **Holling type I** : Holling suppose que le prédateur va consommer tout ce qu'il trouve dans son milieu, autrement dit la population du prédateur peut rechercher aléatoirement ses proies et que le temps de recherche est négligeable et constant quel que soit la densité des proies, la fonction s'écrit :

$$g(N, P) = aN,$$

où a est le taux de prédation du prédateur sur la proie.

Holling type II et III suppose que le temps de la prédation est divisé en deux parties :

- le temps pour capturer la proie.
- le temps pour consommer cette proie.

La fonction de ces types écrit comme suite (pour plus de détail voir [9]) :

$$g(N, P) = \frac{a}{1 + at_H}, \quad \text{avec } a = bN,$$

2. Zoologiste qui s'occupe de l'étude des insectes

où t_H est le temps de manipulation c'est à dire le temps que met le prédateur pour trouver et manipuler sa proie et a est le taux de prédation de prédateur sur proie.

- **Holling type II** : on suppose que dans le milieu d'attaque lorsque la densité des proies est faible, le taux de prédation augmente, ainsi que si le prédateur atteint la saturation, les proies deviennent constantes. Donc g se reformule par cette fonction :

$$g(N, P) = \frac{bN}{1 + bt_H N}, \quad (2.7)$$

Pour simplifier les notations, on prend $A = \frac{1}{t_H}$ et $B = \frac{1}{bt_H}$.

D'où (2.7) devient :

$$g(N, P) = \frac{AN}{B + N},$$

avec A et B sont des constantes positives.

- **Holling type III** : Les proies existent dans l'environnement des prédateurs de façon multiple par rapport à la fonction de type II, dans ce cas le prédateur trouve des difficultés à capturer les proies et dans ce cas g s'écrit :

$$g(N, P) = \frac{AN^2}{B + N^2}$$

Dans le but de voir la différence entre les trois fonctions de Holling, on trace sous matlab la figure suivante :

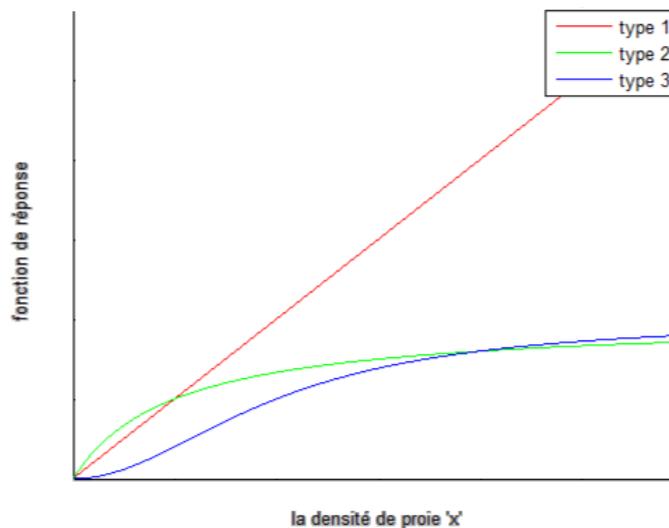


FIGURE 2.4 – Fonctions réponse de Types I, II et III avec paramètres $A = 1$ et $B = 0.5$.

2.4 Conclusion

ON a présenté dans ce chapitre certains modèles de base en dynamique de population qui visse à décrire la prédation et l'évolution d'une population.

Les modèles écologiques ont bien évolué depuis Malthus et continuent d'évoluer dans divers sens grâce au développement des mathématiques.

L'impact de la variation du pH sur la dynamique d'un modèle proie-prédateur

Sommaire

3.1 Introduction	19
3.2 Présentation du modèle	19
3.3 Bornitude et positivité des solutions	24
3.4 Points d'équilibre du modèle (A)	31
3.5 Analyse de l'équilibre dépendant des paramètres	33
3.6 Analyse de stabilité	39
3.6.1 Modèle mathématique (B)	40
3.6.2 Modèle mathématique (C)	50
3.7 Simulation numérique	58
3.8 Conclusion	60

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on expose le travail de Divya Chaturvedi et O.P. Misra qui a été publié dans l'article [6].

Le modèle étudié est un système de quatre équations différentielles non linéaire, continue et déterministe, il présente l'effet du pH et du dioxyde de carbone (CO_2) sur la dynamique de deux populations dont l'interaction est la prédation. Cette interaction suit la réponse fonctionnelle de Holling type II.

On étudie le modèle mathématiquement tout en cherchant les conditions pour lesquelles les deux populations coexistent et ceci sera illustré par des simulations numériques.

3.2 Présentation du modèle

Il est clair que la variation de la concentration du CO_2 dans l'eau agit sur le pH de l'eau, ceci peut influencer négativement la survie des individus dans le milieu aquatique.

Soit C la concentration du CO_2 dans l'eau à l'instant t , sachant que les activités anthropique (la combustion de combustibles fossiles et la déforestation) agissent positivement sur cette concentration. L'équation obtenue est :

$$\frac{dC}{dt} = Q - d_1 C, \quad (3.1)$$

avec

Q : la concentration de CO_2 entrée dans l'eau par unité de temps en raison des activités anthropiques.

d_1 : le taux d'épuisement du CO_2 dans l'eau en raison de phénomènes naturels.

De plus, la concentration du CO_2 qui change au court du temps fait varier le pH de l'eau. Pour cette raison, on note par le pH le niveau d'eau à l'instant t , et la variation du pH est exprimée par l'équation suivante :

$$\frac{dpH}{dt} = pH_0 - \alpha_1(C - C_0) - d_2 pH, \quad (3.2)$$

avec

α_1 : le taux de libération des ions hydrogènes en raison de CO_2 .

C_0 : le niveau du seuil de CO_2 dans l'eau.

d_2 : le taux de diminution du pH dans l'eau en raison d'influences naturelles.

Dans ce milieu, On considère deux populations l'une est la proie et l'autre c'est le prédateur, notée respectivement à l'instant t par : $N(t)$ et $P(t)$.

On obtient le système d'équations suivant :

$$\frac{dN}{dt} = N(r(pH) - bN) - \frac{a(pH)NP}{1 + h(pH)N}, \quad (3.3)$$

$$\frac{dP}{dt} = -d(pH)P + \frac{\alpha a(pH)NP}{1 + h(pH)N}, \quad (3.4)$$

avec

$r(pH)$: le taux de croissance de proie.

$a(pH)$: le taux de capture des prédateurs.

$h(pH)$: le taux de manipulation des prédateurs.

$d(pH)$: le taux de mortalité des prédateurs.

b : le coefficient de compétition interspécifique.

α : le coefficient de conversion, $0 < \alpha < 1$.

Les fonctions $r(pH)$, $d(pH)$, $a(pH)$ et $h(pH)$ dans le modèle mathématique sont supposées comme suite :

- $r(pH)$ représente la croissance des proies, elle est dépendante du pH de l'eau et donnée par :

$$r(pH) = r_0 - \frac{r_1(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)},$$

avec

r_0 : est le taux de croissance intrinsèque de la population.

r_1 : est le taux d'épuisement des proies par une unité de variation de pH de l'eau.

De plus, $r(pH)$ est considéré comme une fonction décroissante dans les deux cas : $pH > pH_0$ ou $pH < pH_0$, c'est ce que montre la figure suivante (3.1).

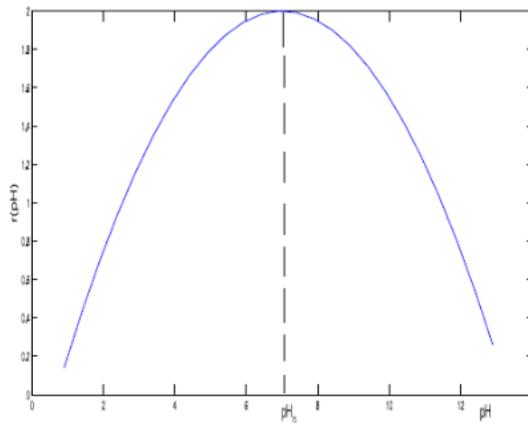


FIGURE 3.1 – Variation du taux de croissance par rapport au pH .

- $a(pH)$ représente Le taux de capture des prédateurs, il est dépendant du pH de l'eau et donné par :

$$a(pH) = a_0 + a_1(pH - pH_0)^2,$$

avec

a_0 : est le taux de capture de pH à pH_0 .

a_1 : est le coefficient de la variation du taux de capture en raison de la variation du pH à pH_0 .

De plus, $a(pH)$ est considéré comme une fonction croissante dans le deux cas : $pH > pH_0$ ou $pH < pH_0$, c'est ce que montre la figure suivante (3.2).

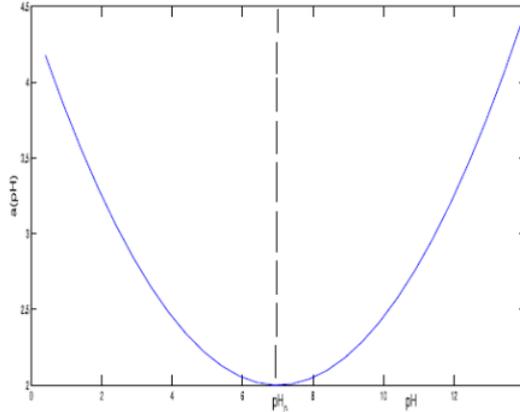


FIGURE 3.2 – Variation du taux de capture par rapport à pH .

– $h(pH)$ représente Le taux de manipulation des prédateurs, il est dépendant du pH de l'eau et donné par :

$$h(pH) = h_0 - h_1(pH - pH_0)^2,$$

avec

h_0 : est le taux de temps de manipulation de pH à pH_0 .

h_1 : est le coefficient de la variation du taux de manipulation en raison de la variation du pH à pH_0 .

De plus, $h(pH)$ est considéré comme une fonction décroissante dans le deux cas : $pH > pH_0$ ou $pH < pH_0$, c'est ce que montre la figure suivante (3.3).

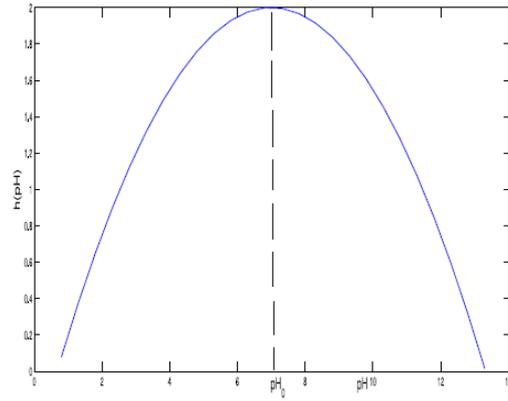


FIGURE 3.3 – Variation du temps de manipulation par rapport au pH

- $d(pH)$ représente Le taux de mortalité des prédateurs, il est dépendant du pH de l'eau et donné par :

$$d(pH) = d_0 + \frac{d_3(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)},$$

avec

d_0 : est le taux de mortalité naturelle des prédateurs.

d_3 : est le coefficient de la variation du taux de mortalité des prédateurs en raison de la variation du niveau de pH de l'eau .

De plus, $d(pH)$ est considéré comme une fonction croissante dans le deux cas : $pH > pH_0$ ou $pH < pH_0$, c'est ce que montre la figure suivante (3.4).

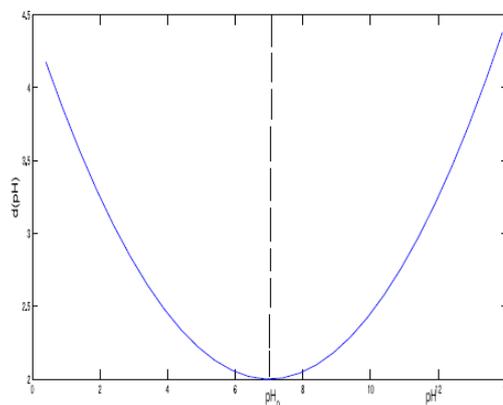


FIGURE 3.4 – Variation du taux de mortalité par rapport au pH

Ce phénomène est traduit par le système (A).

Modèle mathématique (A)

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dC}{dt} &= Q - d_1C, \\ \frac{dpH}{dt} &= pH_0 - \alpha_1(C - C_0) - d_2pH, \\ \frac{dN}{dt} &= N(r(pH) - bN) - \frac{a(pH)NP}{1 + h(pH)N}, \\ \frac{dP}{dt} &= -d(pH)P + \frac{\alpha a(pH)NP}{1 + h(pH)N}. \end{cases}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$C(0) > 0, pH(0) > 0, N(0) > 0, P(0) > 0.$$

3.3 Bornitude et positivité des solutions

Dans cette partie, on utilise des conditions suffisantes pour affirmer la bornitude et la positivité des solutions du système (A).

Pour cela, Soit le domaine Ω_1 définit par

$$\Omega_1 = \left\{ (C, pH, N, P) \in \mathbb{R}_+^4 : C \in (0, C_u], pH \in [pH_l, pH_u], 0 \leq N + \frac{P}{\alpha} \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b\mu} \right\}.$$

Proposition 3.3.1 [6] *Toutes les solutions du modèles de (A) qui sont dans le domaine Ω_1 sont bornées.*

Preuve

D'après l'équation (3.1), on a :

$$\frac{dC}{dt} + d_1C = Q,$$

Ce qui entraine que

$$\frac{dC}{dt} \leq -d_1C + Q,$$

Par l'application du lemme de Gronwall, on trouve :

$$\begin{aligned}
 C(t) &\leq C(0)e^{\int_0^t -d_1 ds} + \int_0^t e^{\int_s^t -d_1 d\tau} Q ds, \\
 &\leq C(0)e^{-d_1 t} + Q \int_0^t e^{-d_1(t-s)} ds, \\
 &\leq C(0)e^{-d_1 t} + Qe^{-d_1 t} \int_0^t e^{d_1 s} ds, \\
 &\leq C(0)e^{-d_1 t} + Qe^{-d_1 t} \left[\frac{e^{d_1 t}}{d_1} \right], \\
 &\leq C(0)e^{-d_1 t} + \frac{Q}{d_1}.
 \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on a :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} C(t) \leq \frac{Q}{d_1} = C_u.$$

L'équation (3.2) donne l'inégalité suivante :

$$\frac{dpH}{dt} \leq pH_0 + \alpha_1 C_0 - d_2 pH,$$

De même l'application de lemme de Gronwall donne :

$$\begin{aligned}
 pH(t) &\leq pH(0)e^{\int_0^t -d_2 ds} + \int_0^t e^{\int_s^t -d_2 d\tau} (pH_0 + \alpha_1 C_0) ds, \\
 &\leq pH(0)e^{-d_2 t} + (pH_0 + \alpha_1 C_0) \int_0^t e^{-d_2(t-s)} ds, \\
 &\leq pH(0)e^{-d_2 t} + (pH_0 + \alpha_1 C_0) e^{-d_2 t} \int_0^t e^{d_2 s} ds, \\
 &\leq pH(0)e^{-d_2 t} + (pH_0 + \alpha_1 C_0) e^{-d_2 t} \left[\frac{e^{d_2 t}}{d_2} \right], \\
 &\leq pH(0)e^{-d_2 t} + \frac{pH_0 + \alpha_1 C_0}{d_2}.
 \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} pH(t) \leq \frac{pH_0 + \alpha_1 C_0}{d_2} = pH_u.$$

De plus

$$\frac{dpH}{dt} \geq pH_0 - \alpha_1 C_u - d_2 pH,$$

En intégrant sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient :

$$\int_0^t \frac{dpH(s)}{-\alpha_1 C_u + pH_0 - d_2 pH(s)} \geq \int_0^t ds,$$

On trouve

$$\ln \left[\frac{-\alpha_1 C_u + pH_0 - d_2 pH(t)}{-\alpha_1 C_u + pH_0 - d_2 pH(0)} \right] \leq -d_2 t,$$

Donc

$$pH(t) \geq \frac{pH_0 - \alpha_1 C_u}{d_2} + \left(pH(0) - \frac{pH_0 - \alpha_1 C_u}{d_2} \right) e^{-d_2 t}.$$

D'où

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} pH(t) \geq \frac{pH_0 - \alpha_1 C_u}{d_2} = pH_l$$

On considère maintenant le système proie-prédateur

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(r(pH) - bN) - \frac{a(pH)NP}{1 + h(pH)N}, \\ \frac{dP}{dt} = -d(pH)P + \frac{\alpha a(pH)NP}{1 + h(pH)N}. \end{cases}$$

Soit la fonction W définie par :

$$W = N + \frac{1}{\alpha} P.$$

En dérivant la fonction W , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\alpha} \frac{dP}{dt}, \\ &= N(r(pH) - bN) - N(r(pH) - bN) - \frac{a(pH)NP}{1 + h(pH)N} - \frac{d(pH)}{\alpha} P + \frac{\alpha a(pH)NP}{\alpha(1 + h(pH)N)}, \\ &= N(r(pH) - bN) - \frac{d(pH)}{\alpha} P. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{cases} r(pH) = r_0 - \frac{r_1(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}, \\ d(pH) = d_0 + \frac{d_3(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}. \end{cases}$$

Alors il en résulte que

$$\frac{dW}{dt} = N\left(r_0 - \frac{r_1(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)} - bN\right) - \frac{d_0 + \frac{d_3(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}}{\alpha} P,$$

Une simple majoration donne :

$$\frac{dW}{dt} \leq N(r_0 - bN) - \frac{d_0}{\alpha} P,$$

Ainsi, pour tout $\mu > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} + \mu W &\leq N(r_0 - bN + \mu) - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq -bN^2 + N(r_0 + \mu) - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq -b \left[N^2 + N \left(\frac{r_0 + \mu}{b} \right) \right] - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq -b \left[\left(N - \left(\frac{r_0 + \mu}{2b} \right) \right)^2 - \left(\frac{r_0 + \mu}{2b} \right)^2 \right] - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu). \end{aligned}$$

Pour $d_0 > \mu$, on a :

$$\frac{dW}{dt} + \mu W \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b},$$

Par conséquent

$$\frac{dW}{dt} \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \mu W.$$

En intégrant sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient :

$$\int_0^t \frac{dW}{\frac{(r_0+\mu)^2}{4b} - \mu W} \leq \int_0^t ds,$$

C'est à dire

$$\ln \left[\frac{\frac{(r_0+\mu)^2}{4b} - \mu W(t)}{\frac{(r_0+\mu)^2}{4b} - \mu W(N(0), P(0))} \right] \geq -\mu t,$$

Ce qui donne

$$-\mu W(t) \geq \left(\frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \mu W(N(0), P(0)) \right) e^{-\mu t} - \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b},$$

Donc

$$W(t) \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b\mu} - \frac{(r_0 + \mu)^2 e^{-\mu t}}{4b\mu} + W(N(0), P(0)) e^{-\mu t}.$$

Par passage à la limite :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b\mu}.$$

Donc que toutes les solutions du système donné par (A) commençant dans \mathbb{R}_+^4 restent dans le domaine Ω_1 .

Théorème 3.3.1 [6] Pour toutes les conditions initiales positive $pH(0), C(0), N(0), P(0)$ le système (A) admet des solutions positives.

Preuve

D'après l'équation (3.1)

$$\frac{dC}{dt} \geq -d_1 C,$$

Par intégration sur $[0, t]$

$$\int_0^t \frac{dC(s)}{C(s)} \geq \int_0^t -d_1 C(s) ds,$$

On obtient

$$\ln C(t) - \ln C(0) \geq \int_0^t -d_1 C(s) ds,$$

Il en résulte que

$$C(t) \geq C(0)e^{\int_0^t -d_1 C(s) ds}.$$

D'après (3.3.1)

$$\frac{dpH}{dt} = -\alpha_1 C_u + pH_0 - d_2 pH,$$

Par intégration sur $[0, t]$

$$\int_0^t \frac{dpH(s)}{-\alpha_1 C_u + pH_0 - d_2 pH(s)} \geq \int_0^t ds,$$

On trouve

$$\ln \left[\frac{-\alpha_1 C_u + pH_0 - d_2 pH(t)}{-\alpha_1 C_u + pH_0 - d_2 pH(0)} \right] \leq -d_2 t,$$

Donc

$$pH(t) \geq \frac{pH_0 - \alpha_1 C_u}{d_2} + \left(pH(0) - \frac{pH_0 - \alpha_1 C_u}{d_2} \right) e^{-d_2 t}.$$

D'après l'équation (3.3)

$$\frac{dN}{dt} = N \left(r(pH) - bN - \frac{a(pH)P}{1 + h(pH)N} \right),$$

Par intégration sur $[0, t]$

$$\int_0^t \frac{dN(s)}{N(s)} = \int_0^t \left(r(pH) - bN(s) - \frac{a(pH)P(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds,$$

On trouve

$$[\ln N(s)]_0^t = \int_0^t \left(r(pH) - bN(s) - \frac{a(pH)P(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds,$$

D'où

$$\ln \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right] = \int_0^t \left(r(pH) - bN(s) - \frac{a(pH)P(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds,$$

Ce qui donne

$$N(t) = N(0) e^{\int_0^t \left(r(pH) - bN(s) - \frac{a(pH)P(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds},$$

Donc

$$N = N(0) e^{\int_0^t \left(r_0 + \frac{r_1(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)} - bN(s) - \frac{(a_0 + a(pH - pH_0)^2)P(s)}{1 + (h_0 - h_1(pH - pH_0)^2)N(s)} \right) ds}.$$

L'équation (3.4) implique

$$\frac{dP}{dt} = P \left(-d(pH) + \frac{\alpha a(pH)N}{1 + h(pH)N} \right),$$

En intégrant sur $[0, t]$, on obtient :

$$\int_0^t \frac{dP(s)}{P(s)} = \int_0^t \left(-d(pH) + \frac{\alpha a(pH)N(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds,$$

On trouve

$$[\ln P(s)]_0^t = \int_0^t \left(-d(pH) + \frac{\alpha a(pH)N(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds,$$

D'où

$$\ln \left[\frac{P(t)}{P(0)} \right] = \int_0^t \left(-d(pH) + \frac{\alpha a(pH)N(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds,$$

Alors

$$P(t) = P(0) e^{\int_0^t \left(-d(pH) + \frac{\alpha a(pH)N(s)}{1 + h(pH)N(s)} \right) ds},$$

Il en résulte que

$$P = P(0) e^{\int_0^t \left(-d_0 - \frac{d_3(pH(s) - pH_0)^2 -}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - ph_0)} + \frac{\alpha(a_0 + a_1(pH(s) - ph_0)^2)N(s)}{1 + (h_0 - h_1(pH - pH_0)^2)N(s)} \right) ds}.$$

3.4 Points d'équilibre du modèle (A)

Les points d'équilibres du système décrit par (A) sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$Q - d_1C = 0, \quad (3.5)$$

$$pH_0 - \alpha_1(C - C_0) - d_2pH = 0, \quad (3.6)$$

$$N(r(pH) - bN) - \frac{a(pH)NP}{1 + h(pH)N} = 0, \quad (3.7)$$

$$-d(pH)P + \frac{\alpha a(pH)NP}{1 + h(pH)N} = 0, \quad (3.8)$$

Théorème 3.4.1 *Si $pH_0d_1 > \alpha_1(Q - C_0d_1)$ Le système donné par (A) admet un point d'équilibre $E_{11}(\hat{C}, \hat{pH}, \hat{N}, \hat{P})$ donné par :*

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \frac{Q}{d_1} \quad \text{et} \quad \hat{pH} = \frac{pH_0 - \alpha_1(\hat{C} - C_0)}{d_2}, \\ \hat{N} &= 0 \quad \text{et} \quad \hat{P} = 0. \end{aligned}$$

Preuve

De l'équation (3.5), on peut avoir que

$$\hat{C} = \frac{Q}{d_1}. \quad (3.9)$$

à partir de l'équation (3.6) , on obtient

$$\hat{pH} = \frac{pH_0 - \alpha_1(\hat{C} - C_0)}{d_2},$$

En utilisant (3.9), il découle

$$p\hat{H} = \frac{d_1 pH_0 - \alpha_1(Q - d_1 C_0)}{d_1 d_2}. \quad (3.10)$$

Cela veut dire que si la condition $pH_0 d_1 > \alpha_1(Q - C_0 d_1)$ est vérifiée alors l'équilibre $p\hat{H}$ existe. Pour l'équation (3.7), L'isocline $\dot{N} = 0$, entraîne que

$$N = 0 \quad \text{ou} \quad P = \frac{(r(pH) - bN)(1 + h(pH)N)}{a(pH)}.$$

Ainsi de même pour (3.8), l'isocline $\dot{P} = 0$ donne

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{d(pH)}{\alpha a(pH) - d(pH)h(pH)}.$$

Si $\hat{N} = 0$ alors $\hat{P} = 0$.

Théorème 3.4.2 Si $pH_0 d_1 > \alpha_1(Q - C_0 d_1)$ et $r(p\tilde{H}) > 0$, le système (A) admet un point d'équilibre $E_{22}(\tilde{C}, p\tilde{H}, \tilde{N}, \tilde{P})$ donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \frac{Q}{d_1} \quad \text{et} \quad p\tilde{H} = \frac{pH_0 - \alpha_1(\tilde{C} - C_0)}{d_2}, \\ \tilde{N} &= \frac{r(p\tilde{H})}{b} \quad \text{et} \quad \tilde{P} = 0. \end{aligned}$$

Preuve

Il est clair que \tilde{C} et $p\tilde{H}$ est une conséquence du théorème précédent, ils sont exprimés par (3.9) et (3.10).

D'après l'équation (3.7)

$$r(pH) - bN - \frac{a(pH)NP}{1 + h(pH)N} = 0 \Rightarrow P = \frac{(r(pH) - bN)(1 + h(pH)N)}{a(pH)},$$

Et pour l'équation (3.8)

$$P \left(-d(pH) + \frac{\alpha a(pH)N}{1 + h(pH)N} \right) = 0 \Rightarrow P = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{d(pH)}{\alpha a(pH) - d(pH)h(pH)}.$$

Si $\tilde{P} = 0$ alors $\tilde{N} = \frac{r(p\tilde{H})}{b}$ avec $r(p\tilde{H}) > 0$.

Maintenant, on note par **(H1)** et **(H2)** les deux hypothèses suivantes :

$$\mathbf{(H1)} \quad \alpha a(pH^{**}) > d(pH^{**})h(pH^{**}).$$

$$\mathbf{(H2)} \quad r(pH^{**}) > bN^{**} \text{ i.e. : } \alpha a(pH^{**})r(pH^{**}) > bd(pH^{**}) + r(pH^{**})d(pH^{**})h(pH^{**}).$$

Théorème 3.4.3 *On Suppose que **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées alors le système (A) admet un point d'équilibre intérieur $E_{33}(C^{**}, pH^{**}, N^{**}, P^{**})$ donné par :*

$$C^{**} = \frac{Q}{d_1} \quad \text{et} \quad pH^{**} = \frac{pH_0 - \alpha_1(C^{**} - C_0)}{d_2},$$

$$N^{**} = \frac{d(pH)}{\alpha a(pH) - d(pH)h(pH)} \quad \text{et} \quad P^{**} = \frac{(r(pH) - bN^{**})(1 + h(pH)N^{**})}{a(pH)}.$$

Preuve

Pour le calcul de C^{**} et pH^{**} est évident, les deux sont donnés par (3.9) et (3.10).

De même L'équation (3.7) donne

$$P^{**} = \frac{(r(pH) - bN^{**})(1 + h(pH)N^{**})}{a(pH)}.$$

Il est claire que $r(pH^{**}) > bN^{**}$ i.e. : $\alpha a(pH^{**})r(pH^{**}) > bd(pH^{**}) + r(pH^{**})d(pH^{**})h(pH^{**})$ alors P atteint son équilibre en P^{**} .

Ainsi, (3.8) permet d'avoir que

$$N^{**} = \frac{d(pH)}{\alpha a(pH) - d(pH)h(pH)}.$$

Sous la condition que $\alpha a(pH^{**}) > d(pH^{**})h(pH^{**})$.

3.5 Analyse de l'équilibre dépendant des paramètres

Dans cette section, on va discuter le comportement du point d'équilibre intérieur E_{33} du modèle mathématique (A) par rapport aux paramètres $Q, d_3, \alpha_1, h_1, r_1, a_1$.

Proposition 3.5.1 *Si Q et α_1 augmentent alors le pH de l'eau diminue.*

Preuve

On a

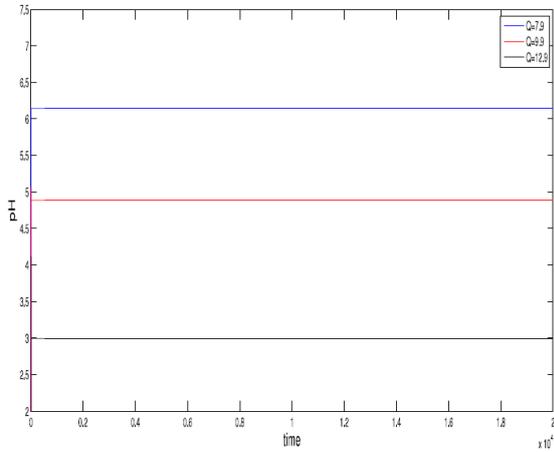
$$pH^{**} = \frac{pH_0 - d_1 - \alpha_1(Q - C_0d_1)}{d_2d_1},$$

En dérivant pH^{**} respectivement par rapport à Q et α_1 , on obtient :

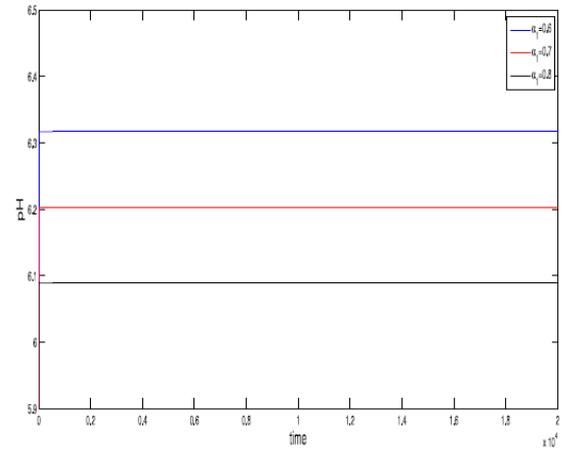
$$\frac{dpH^{**}}{dQ} = -\frac{\alpha_1}{d_2 d_1}. \quad (3.11)$$

$$\frac{dpH^{**}}{d\alpha_1} = -\frac{Q - C_0 d_1}{d_2 d_1}. \quad (3.12)$$

Il est remarquable que $\frac{dpH^{**}}{dQ} < 0$ et $\frac{dpH^{**}}{d\alpha_1} < 0$ avec la concentration C^{**} dépasse le seuil C_0 et par la figure (3.5a) et (3.7), on observe que si Q et α_1 alors le pH diminue.



(a) Niveau d'équilibre du pH pour des valeurs croissantes de Q .



(b) Niveau d'équilibre du pH pour différentes valeurs de α_1 .

Proposition 3.5.2

- Si d_3 augmente alors la densité des proies N augmente.
- Si a_1 et h_1 augmentent alors la densité des proies N diminue.

Preuve

On a

$$N^{**} = \frac{d(pH^{**})}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})}.$$

En dérivant N^{**} respectivement par rapport à d_3 , a_1 et h_1 , on obtient :

Puisque

$$d(pH^{**}) = d_0 + \frac{d_3(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}.$$

Alors

$$N^{**} = \frac{d_0(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0) + d_3(pH^{**} - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))}.$$

On pose

$$S = (pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0),$$

Ce qui implique :

$$N^{**} = \frac{d_0S + d_3(pH^{**} - pH_0)^2}{S(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))}.$$

La dériver de N^{**} par rapport d_3 est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dN^{**}}{dd_3} &= \frac{S(\alpha_1 a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))(pH^{**} - pH_0)^2 + (d_0S + d_3(pH^{**} - pH_0)^2)(h(pH^{**}))(pH^{**} - pH_0)^2}{(S(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})))^2}, \\ &= \frac{(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))(pH^{**} - pH_0)^2 + d(pH^{**})h(pH^{**})(pH^{**} - pH_0)^2}{S(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))^2}, \\ &= \frac{\alpha a(pH^{**})(pH^{**} - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il est remarquable que $\frac{dN^{**}}{dd_3} > 0$ et d'après la figure (3.5), on observe que d_3 augmente alors la densité des proies N augmente.

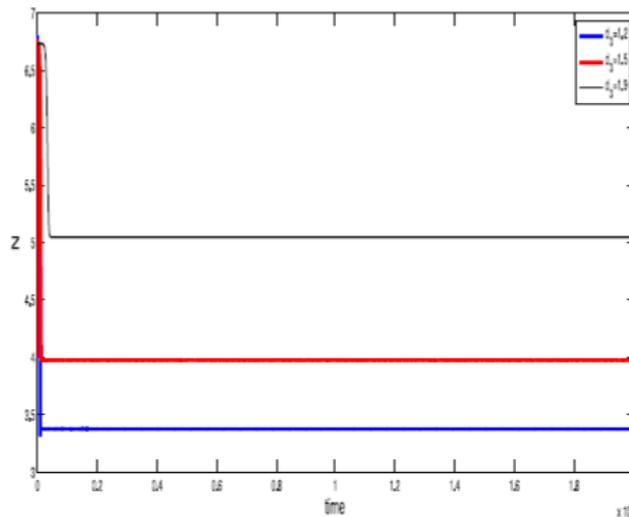


FIGURE 3.5 – La densité des proies à l'état d'équilibre, selon la variation de d_3 .

Par suite, on a

$$a(pH^{**}) = a_0 + a_1(pH^{**} - pH_0).$$

Alors

$$N^{**} = \frac{d(pH^{**})}{\alpha(a_0 + a_1(pH^{**} - pH_0)^2) - d(pH^{**})h(pH^{**})}.$$

La dérivé de N^{**} par rapport à a_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dN^{**}}{da_1} &= - \frac{\alpha d(pH^{**})(pH^{**} - pH_0)^2}{(\alpha(a_0 + a_1(pH^{**} - pH_0)^2) - d(pH^{**})h(pH^{**}))^2}, \\ &= - \frac{\alpha d(pH^{**})(pH^{**} - pH_0)^2}{(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

On remarque que $\frac{dN^{**}}{da_1} < 0$ et par la figure (3.6), on voit que a_1 augmente alors la densité des proies N diminue.

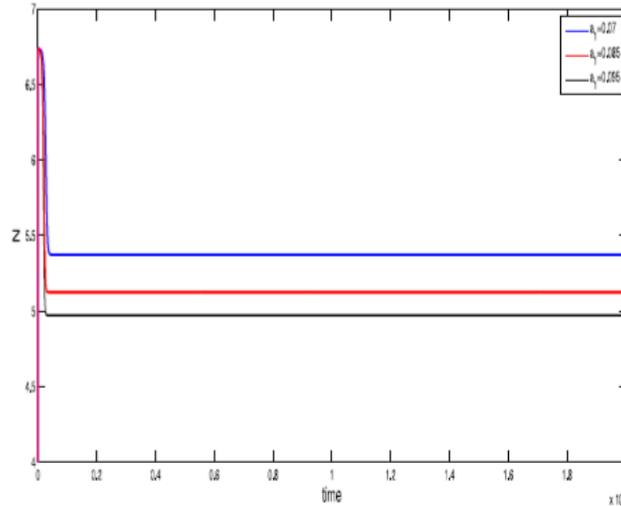


FIGURE 3.6 – La densité des proies à l'état d'équilibre, selon la variation de a_1 .

Ainsi

$$h(pH^{**}) = h_0 - h_1(pH^{**} - pH_0)^2.$$

Le N^{**} devient

$$N^{**} = \frac{d(pH^{**})}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})(h_0 - h_1(pH^{**} - pH_0)^2)}.$$

La dérivé de N^{**} par rapport à h_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dN^{**}}{dh_1} &= - \frac{(d(pH^{**}))^2 (pH^{**} - pH_0)^2}{(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})(h_0 - h_1(pH^{**} - pH_0)^2)^2}, \\ &= - \frac{(d(pH^{**}))^2 (pH^{**} - pH_0)^2}{(\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))^2} < 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

On remarque que $\frac{dN^{**}}{dh_1} < 0$ et par la figure (3.7), on observe que h_1 augmente alors la densité des proies diminue.

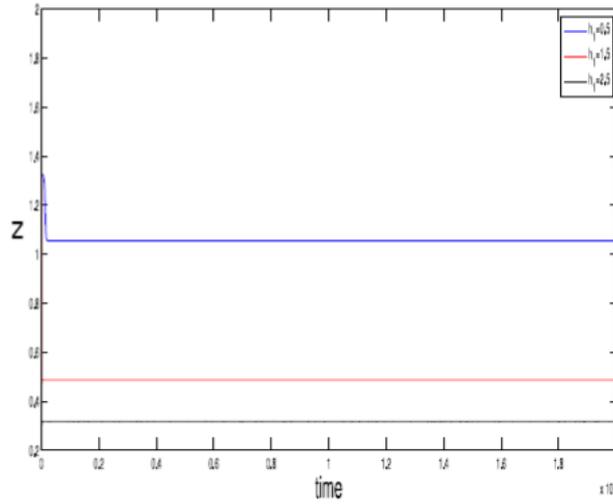


FIGURE 3.7 – La densité des proies à l'état d'équilibre, selon la variation de h_1 .

Proposition 3.5.3 Si d_3 et r_1 augmentent alors la densité des prédateurs P diminue.

Preuve

On a

$$P^{**} = \frac{(r(pH^{**}) - bN^{**})(1 + h(pH^{**})N^{**})}{a(pH^{**})}.$$

En dérivant P^{**} respectivement par rapport à d_3 et r_1 , on obtient :

Puisque

$$d(pH^{**}) = d_0 + \frac{d_3(pH - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dP^{**}}{dd_3} &= \frac{1}{a(pH^{**})} \left(r(pH^{**})h(pH^{**}) \frac{dN^{**}}{dd_3} - b \frac{dN^{**}}{dd_3} - 2bh(pH^{**}) \frac{dN^{**}}{dd_3} \right), \\ &= \frac{1}{a(pH^{**})} \frac{dN^{**}}{dd_3} (r(pH^{**})h(pH^{**}) - b - 2bh(pH^{**})). \end{aligned} \quad (3.16)$$

On remarque que si $(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b) < 0$ alors $\frac{dP^{**}}{dd_3} < 0$ et d'après la figure (3.8) lorsque d_3 augmente alors la densité des prédateurs diminue.

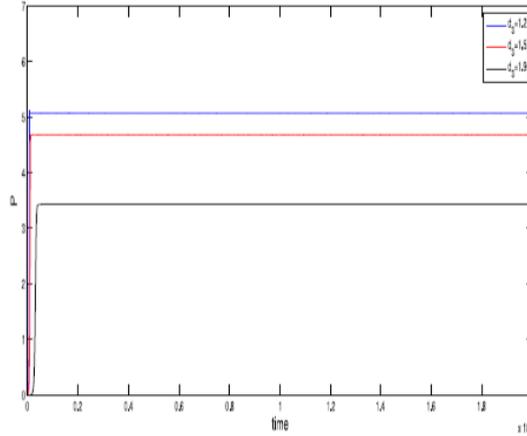


FIGURE 3.8 – La densité des prédateurs à l'état d'équilibre, selon la variation de d_3 .

Puisque

$$r(pH^{**}) = r_0 - \frac{r_1(pH^{**} - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}.$$

Alors, le P^{**} devient

$$P^{**} = \frac{\left(r_0 - \frac{r_1(pH^{**} - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)} - bN^{**} \right) (1 + h(pH^{**})N^{**})}{a(pH^{**})}.$$

la dérivé de P^{**} par rapport à r_1 donne

$$\begin{aligned} \frac{dP^{**}}{dr_1} &= \frac{\left(-\frac{(pH^{**} - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)} \right) (1 + h(pH^{**})N^{**})}{a(pH^{**})}, \\ &= -\frac{(pH^{**} - pH_0)^2 (1 + h(pH^{**})N^{**})}{a(pH^{**})(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

On remarque que $\frac{dP^{**}}{dr_1} < 0$, la figure (3.9) montre que la densité des prédateurs diminue lorsque r_1 croît.

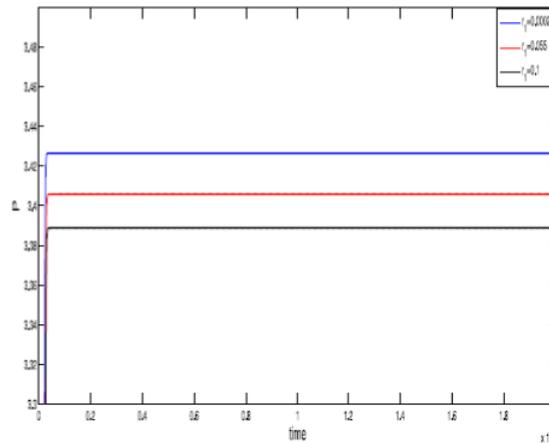


FIGURE 3.9 – La densité des prédateurs à l'état d'équilibre, selon la variation de r_1 .

3.6 Analyse de stabilité

On considère le système :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (3.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(y). \quad (3.19)$$

où f et g sont continues et localement lipschitzienne dans x dans \mathbb{R}^n et les solutions existent pour tout temps positif.

Le système (3.18) est asymptotiquement autonome avec limite d'équation (3.19), si $f(t, x) \rightarrow g(x)$ est à identique $t \rightarrow \infty$ uniformément pour tout x dans \mathbb{R}^n .

Lemme 3.6.1 [17] *On suppose que e un équilibre localement asymptotiquement stable de (3.19) et que ω est l'ensemble-limite d'une solution bornée $x(t)$ de (3.18). Si ω contient un point y_0 tel que la solution de (3.19) avec $y(0) = y_0$ converge vers e si $t \rightarrow \infty$ alors $\omega = \{e\}$ c'est-à-dire $x(t) \rightarrow e$ si $t \rightarrow \infty$.*

Corollaire 3.6.1 [6] *Si les solutions du système (3.18) sont bornées et que l'équilibre e du système limite (3.19) est globalement stable alors toute solution de $x(t)$ du système (3.18) vérifie que $x(t) \rightarrow e$ si $t \rightarrow \infty$.*

Depuis, on a $C^{**} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} C$ et $pH^{**} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} pH$, puis après la résolution de l'équation différentielle pour C et pH , le système (A) est réduit au système autonome équivalent suivant :

Cas 1 Lorsque l'effet du pH est pris en considération le système asymptotiquement autonome équivalent est donné par suivant :

3.6.1 Modèle mathématique (B)

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(r(pH^{**}) - bN) - \frac{a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N}, \\ \frac{dP}{dt} = -d(pH^{**})P + \frac{\alpha a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N}. \end{cases}$$

Poins d'équilibre du modèle (B)

Les points d'équilibre du modèle mathématique (B) sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$N(r(pH^{**}) - bN) - \frac{a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N} = 0, \quad (3.20)$$

$$-d(pH^{**})P + \frac{\alpha a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N} = 0. \quad (3.21)$$

Théorème 3.6.1 Le système (B) admet un point d'équilibre trivial $E_0(\hat{N}, \hat{P})$.

Preuve

Par l'équation (3.20)

$$N = 0 \quad \text{ou} \quad r(pH^{**}) - bN - \frac{a(pH^{**})P}{1 + h(pH^{**})N} = 0.$$

Et par l'équation (3.21)

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad -d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})N}{1 + h(pH^{**})N} = 0.$$

Il en résulte que $\hat{N} = 0$ alors $\hat{P} = 0$.

Théorème 3.6.2 Si $r(pH^{**}) > 0$ alors le système (B) admet un point d'équilibre $E_1(\tilde{N}, \tilde{P})$ donné par :

$$\tilde{N} = \frac{r(pH^{**})}{b} \quad \text{et} \quad \tilde{P} = 0$$

Preuve

Par l'équation (3.20)

$$N = 0 \quad \text{ou} \quad r(pH^{**}) - bN - \frac{a(pH^{**})P}{1 + h(pH^{**})N} = 0.$$

Et par l'équation (3.21)

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad -d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})N}{1 + h(pH^{**})N} = 0.$$

Il en résulte que $\tilde{P} = 0$ alors $\tilde{N} = \frac{r(pH^{**})}{b}$, l'équilibre existe si $r(pH^{**}) > 0$.

Théorème 3.6.3 On suppose que (H1) et (H2) sont vérifiées alors le système (B) admet un point d'équilibre intérieur $E_2(N^*, P^*)$ donné par :

$$N^* = \frac{d(pH^{**})}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})} \quad \text{et} \quad P^* = \frac{(r(pH^{**}) - bN^*)(1 + h(pH^{**})N^*)}{a(pH^{**})}.$$

Preuve

D'après l'équation (3.20)

$$P^* = \frac{(r(pH^{**}) - bN^*)(1 + h(pH^{**})N^*)}{a(pH^{**})}.$$

Le P^* existe si $r(pH^{**}) > bN^*$ i.e : $\alpha a(pH^{**})r(pH^{**}) > bd(pH^{**}) + r(pH^{**})d(pH^{**})h(pH^{**})$.

D'après l'équation (3.21)

$$N^* = \frac{d(pH^{**})}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})}.$$

Le N^* existe si $\alpha a(pH^{**}) > d(pH^{**})$.

Comportement dynamique du modèle (B)

Théorème 3.6.4 [6] *Pour le modèle (B), on a les résultats suivant :*

- i) *Si $r(pH^{**}) < 0$ alors l'origine E_0 est asymptotiquement stable.*
- ii) *Si $r(pH^{**}) = 0$ alors l'origine E_0 est stable.*
- iii) *Si $r(pH^{**}) > 0$ alors l'origine E_0 est instable.*

Preuve

Soit $J(N, P)$ la matrice Jacobienne du système (B)

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} r(pH^{**}) - 2bN - \frac{a(pH^{**})P}{(1 + h(pH^{**})N)^2} & -\frac{a(pH^{**})N}{1 + h(pH^{**})N} \\ \frac{\alpha a(pH^{**})P}{(1 + h(pH^{**})N)^2} & -d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})N}{1 + h(pH^{**})N} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

La matrice Jacobienne donnée par (3.22) au point $E_0(0, 0)$ est

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r(pH^{**}) & 0 \\ 0 & -d(pH^{**}) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres correspondant à la matrice $J(0, 0)$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = r(pH^{**}), \\ \lambda_2 = -d(pH^{**}). \end{cases}$$

Il y'a trois cas :

- i) *Si $r(pH^{**}) > 0$, alors λ_1 est positive et λ_2 est négative, cela veut dire que le point $E_0(0, 0)$ est point selle.*
- ii) *Si $r(pH^{**}) = 0$, alors λ_1 est nulle et λ_2 est négative, cela veut dire que le point $E_0(0, 0)$ est stable.*
- iii) *Si $r(pH^{**}) < 0$, alors λ_1 et λ_2 sont négative, on déduit que le point $E_0(0, 0)$ est asymptotiquement stable.*

Théorème 3.6.5 [6] *Le système (B) admet*

- i) *Si $-d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})} < 0$ alors le point E_1 est asymptotiquement stable.*
- ii) *Si $-d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})} > 0$ alors le point E_1 est instable.*

Preuve

La matrice Jacobienne donnée par (3.22) au point E_1 est

$$J\left(\frac{r(pH^{**})}{b}, 0\right) = \begin{pmatrix} -r(pH^{**}) & -\frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})} \\ 0 & -d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres correspondant à la matrice E_1 sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -r(pH^{**}), \\ \lambda_2 = -d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})}. \end{cases}$$

On a deux cas possibles :

1. Si $-d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})} > 0$ donc λ_1 est négative et λ_2 est positive, on déduit que le point d'équilibre E_1 est instable.
2. Si $-d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})} < 0$ alors λ_1 et λ_2 sont négatives donc le point d'équilibre E_1 est asymptotiquement stable.

Théorème 3.6.6 [6] Si $b(\alpha a(pH^{**}) + d(pH^{**})h(pH^{**})) > r(pH^{**})h(pH^{**})$

$(\alpha a(pH^{**}) - h(pH^{**})d(pH^{**}))$ alors le point d'équilibre E_2 du modèle mathématique (B) est toujours asymptotiquement stable.

Preuve

La matrice Jacobienne donnée par (3.22) au point $E_2(N^*, P^*)$ est

$$J(N^*, P^*) = \begin{pmatrix} r(pH^{**}) - 2bN^* - \frac{a(pH^{**})P^*}{(1 + h(pH^{**})N^*)^2} & -\frac{a(pH^{**})N^*}{1 + h(pH^{**})N^*} \\ \frac{\alpha a(pH^{**})P^*}{(1 + h(pH^{**})N^*)^2} & -d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})N^*}{1 + h(pH^{**})N^*} \end{pmatrix}.$$

D'après le système (3.20)-(3.21) alors

$$\begin{cases} (r(pH^{**}) - bN^*) - \frac{a(pH^{**})P^*}{1 + h(pH^{**})N^*} = 0, \\ -d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})r(pH^{**})}{b + h(pH^{**})r(pH^{**})} = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Donc

$$J(N^*, P^*) = \begin{pmatrix} -bN^* - \frac{a(pH^{**})h(pH^{**})N^*P^*}{(1+h(pH^{**})N^*)^2} & -\frac{a(pH^{**})N^*}{1+h(pH^{**})N^*} \\ \frac{\alpha a(pH^{**})P^*}{(1+h(pH^{**})N^*)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule l'équation caractéristique de $J(N^*, P^*)$:

$$\det(J(N^*, P^*) - \lambda I) = 0,$$

Ce qui implique

$$\lambda^2 - \lambda \left(-bN^* + \frac{h(pH^{**})a(pH^{**})N^*P^*}{(1+h(pH^{**})N^*)^2} \right) + \frac{\alpha a^2(pH^{**})P^*N^*}{(1+h(pH^{**})N^*)^3} = 0.$$

Par le système (3.23) on obtient :

$$r(pH^{**}) - bN^* = \frac{a(pH^{**})P^*}{1+h(pH^{**})N^*}.$$

Il en résulte que

$$\lambda^2 + \lambda \left(bN^* - \frac{h(pH^{**})(r(pH^{**}) - bN^*)N^*}{1+h(pH^{**})N^*} \right) + \frac{\alpha a^2(pH^{**})P^*N^*}{(1+h(pH^{**})N^*)^3} = 0, \quad (3.24)$$

L'équation caractéristique (3.24) sous la forme suivante :

$$\lambda^2 - \text{tr } J(N^*, P^*)\lambda + \det J(N^*, P^*) = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} a_1 = -\text{tr } J(N^*, P^*) = bN^* - \frac{h(pH^{**})(r(pH^{**}) - bN^*)N^*}{1+h(pH^{**})N^*}, \\ a_2 = \det J(N^*, P^*) = \frac{\alpha a^2(pH^{**})P^*N^*}{(1+h(pH^{**})N^*)^3}, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

Les critères de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = a_1 = -\text{tr } J(N^*, P^*).$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 = a_1 a_2 = -\text{tr } J(N^*, P^*) \det(N^*, P^*).$$

Alors

$$H_1 = -\text{tr } J(N^*, P^*) > 0 \quad \text{si } bN^* > \frac{h(pH^{**})(r(pH^{**}) - bN^*)N^*}{1 + h(pH^{**})N^*}.$$

Puisque

$$N^* = \frac{d(pH^{**})}{\alpha a(p(H^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))}.$$

Alors

$$b > \frac{h(pH^{**})(r(pH^{**}) - bN^*)}{1 + h(pH^{**})N^*},$$

Ce qui implique

$$b \left(1 + \frac{2h(pH^{**})d(pH^{**})}{\alpha a(p(H^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**}))} \right) > h(pH^{**})r(pH^{**}),$$

Il en résulte que

$$b(\alpha a(p(H^{**}) + h(pH^{**})d(pH^{**})) > h(pH^{**})r(pH^{**})(\alpha a(p(H^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})).$$

Donc

$$H_1 = -\text{tr } J(N^*, P^*) > 0 \quad \text{si } b(\alpha a(p(H^{**}) + h(pH^{**})d(pH^{**})) > h(pH^{**})r(pH^{**})(\alpha a(p(H^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})).$$

$$H_2 = -\text{tr } J(N^*, P^*) \det J(N^*, P^*) > 0 \quad \text{car } -\text{tr } J(N^*, P^*) > 0 \quad \text{et } \det J(N^*, P^*) > 0.$$

Puisque $H_1 > 0$ et $H_2 > 0$ alors le point d'équilibre E_2 est asymptotiquement stable.

Stabilité globale

Théorème 3.6.7 [6] Si $h(pH^{**}) < \frac{b}{r(pH^{**})}$ alors E_2 est globalement asymptotiquement stable.

Preuve

On considère la fonction suivante :

$$\Gamma(N, P) = \frac{1 + h(pH^{**})N}{NP}.$$

D'après le système (B) alors on note :

$$\begin{aligned} h_3(N, P) &= N(r(pH^{**}) - bN) - \frac{a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N}, \\ h_4(N, P) &= -d(pH^{**})P + \frac{\alpha a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N}. \end{aligned}$$

Puisque $\Gamma(N, P) > 0$ car on suppose que $h(pH^{**})$ dans le quadrant positif du plan (N, P) .

Ensuite

$$\begin{aligned} \Delta(N, P) &= \frac{\partial}{\partial N}(h_3\Gamma) + \frac{\partial}{\partial P}(h_4\Gamma), \\ &= \frac{\partial}{\partial N} \left[\left(N(r(pH^{**}) - bN) - \frac{a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N} \right) \left(\frac{1 + h(pH^{**})N}{NP} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial P} \left[\left(-d(pH^{**})P + \frac{\alpha a(pH^{**})NP}{1 + h(pH^{**})N} \right) \left(\frac{1 + h(pH^{**})N}{NP} \right) \right], \\ &= \frac{\partial}{\partial N} \left[\frac{r(pH^{**}) + r(pH^{**})h(pH^{**})N - bN - bh(pH^{**})N^2}{P} - a \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial P} \left[-\frac{d}{N} - d(pH^{**})h(pH^{**}) + \alpha a(pH^{**}) \right], \\ &= \frac{(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)}{P} - \frac{2h(pH^{**})bN}{P}. \end{aligned}$$

Depuis, $\Delta(N, P) < 0$ si $h(pH^{**}) < \frac{b}{r(pH^{**})}$ alors $\Delta(N, P)$ de signe constant et aussi il n'est pas identiquement nulle dans le quadrant positive du plan (N, P) .

Par conséquence, d'après le critère de Dulac n'admet pas aucun cycle limite dans le quadrant positif du plan (N, P) alors E_3 est globalement asymptotiquement stable.

Cycles limites

Dans les deux dimensions, il est bien connu qu'il ne peut pas y avoir de cycle limite dans les modèles de systèmes de compétitifs ou coopératifs.

De plus, il est connu pour les systèmes proie-prédateur que l'existence et la stabilité d'un cycle limite est liée à l'existence et à la stabilité d'un équilibre positif.

On suppose qu'un tel équilibre positif existe sinon la population des prédateurs tend vers à l'extinction.

Si les cycles limites n'existent pas dans ce cas l'équilibre est globalement asymptotiquement stable et si l'équilibre positif existe et instable alors il doit exister au moins un cycle limite.

Maintenant, dans cette section on va prouver que le système (B) admet un cycle limite stable unique lorsque E_2 devient localement instable.

On considère le système (B) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = Ng(N) - P\phi(N), & N(0) > 0, \\ \frac{dP}{dt} = P[-d(pH^{**}) + \psi(N)], & P(0) > 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

où

$$g(N) = r(pH^{**}) - bN, \quad \phi(N) = \frac{a(pH^{**})N}{1 + h(pH^{**})} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\alpha a(pH^{**})N}{1 + h(pH^{**})}.$$

Pour prouver l'unicité de cycle limite de système (3.25) on a le théorème suivant :

Théorème 3.6.8 [12] *on suppose dans le système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - yp(x), & x(0) > 0, \\ \frac{dy}{dt} = y[-\gamma + q(x)], & y(0) > 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Les conditions suivantes est :

$$\frac{dx}{dt} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0,$$

où $0 \leq x < x^*$ et $x^* < x \leq k$ alors le système (3.26) a exactement un cycle limite globalement asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble $\{(x, y) | x > 0, y > 0\} \setminus \{E^*(x^*, y^*)\}$.

Ce théorème est démontré dans [12] .

On peut facilement prouver le théorème suivant à l'aide du théorème (3.6.8).

Théorème 3.6.9 [6] *On suppose*

$$\frac{1}{(pH^{**} - pH_0)^2} \left(\frac{d(pH^{**})h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)}{\alpha(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)} - a_0 \right) \leq a_1,$$

ou

$$d_3 \leq \frac{\alpha a(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}{h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)(pH^{**} - pH_0)^2} - \frac{d_0(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}{(pH^{**} - pH_0)^2}.$$

Alors le modèle mathématique (B) a exactement un cycle limite globalement asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble $\{(N, P) | N > 0, P > 0\} \setminus \{E_2(N^*, P^*)\}$.

Preuve

D'après théorème (3.6.8)

$$\frac{d}{dN} \left(\frac{Ng'(N) + g(N) - Ng(N)\frac{\phi'(N)}{\phi(N)}}{-d(pH^{**}) + \psi(N)} \right) \leq 0, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} (3.27) \quad &\Rightarrow \frac{d}{dN} \left(\frac{-bN + r(pH^{**}) - bN - (N(r(pH^{**}) - bN)) \left(\frac{1}{N(1+h(pH^{**})N)} \right)}{-d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})N}{1+h(pH^{**})N}} \right) \leq 0, \\ &\Rightarrow \frac{d}{dN} \left(\frac{-2bN + r(pH^{**}) - \frac{r(pH^{**})-bN}{1+h(pH^{**})N}}{-d(pH^{**}) + \frac{\alpha a(pH^{**})N}{1+h(pH^{**})N}} \right) \leq 0, \\ &\Rightarrow \frac{d}{dN} \left(\frac{-bN - 2bN^2h(pH^{**}) + r(pH^{**})h(pH^{**})N}{-d(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})N + \alpha a(pH^{**})N} \right) \leq 0, \\ &\Rightarrow \frac{d}{dN} \left(-bh(pH^{**})N \left[\frac{2N + \frac{1}{h(pH^{**})} - \frac{r(pH^{**})}{b}}{-d(pH^{**}) + N(-d(pH^{**})h(pH^{**}) + \alpha a(pH^{**}))} \right] \right) \leq 0, \\ &\Rightarrow \frac{d}{dN} \left(\frac{bh(pH^{**})N}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})} \left[\frac{2N + \frac{1}{h(pH^{**})} - \frac{r(pH^{**})}{b}}{\frac{-d(pH^{**})}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})} + N}} \right] \right) \geq 0. \end{aligned}$$

où $\lambda = \frac{d(pH^{**})}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})}$, il est équivalent à prouver

$$\frac{d}{dN} \left(\frac{N \left(2N + \frac{1}{h(pH^{**})} - \frac{r(pH^{**})}{b} \right)}{N - \lambda} \right) \geq 0. \quad (3.28)$$

On dérive la formule (3.28) par rapport a N ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{2N^2 - 4N\lambda + \frac{r(pH^{**})\lambda}{b} - \frac{\lambda}{h(pH^{**})}}{(N - \lambda)^2} &= \frac{2}{(N - \lambda)^2} \left((N^2 + -2N\lambda + \lambda \left(\frac{r(pH^{**})}{b} - \frac{1}{h(pH^{**})} \right)) \right), \\ &= N^2 + -2N\lambda + \lambda \left(\frac{r(pH^{**})}{b} - \frac{1}{h(pH^{**})} \right) + \lambda^2 - \lambda^2, \\ &= (N - \lambda^2) + \lambda \left(\frac{r(pH^{**})}{b} - \frac{1}{h(pH^{**})} \right) - \lambda^2 \geq 0. \end{aligned}$$

On a $(N - \lambda^2) \geq 0$, il faut montrer que

$$\lambda \left(\frac{r(pH^{**})}{b} - \frac{1}{h(pH^{**})} \right) - \lambda^2 \geq 0,$$

Ce qui implique

$$\frac{\frac{r(pH^{**})}{b} - \frac{1}{h(pH^{**})}}{2} \geq \lambda.$$

On remplace le paramètre λ par sa formule et on obtient :

$$\frac{r(pH^{**})h(pH^{**}) - b}{h(pH^{**})b} \geq \frac{2d(pH^{**})}{\alpha a(pH^{**}) - d(pH^{**})h(pH^{**})}, \quad (3.29)$$

Ce qui devient :

$$, a(pH^{**}) \geq \frac{d(pH^{**})h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)}{\alpha(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)}$$

Puisque

$$a(pH^{**}) = a_0 + a_1(pH^{**} - pH_0)^2.$$

Alors

$$a_0 + a_1(pH^{**} - pH_0)^2 \geq \frac{d(pH^{**})h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)}{\alpha(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)},$$

Il en résulte que

$$a_1 \geq \frac{1}{(pH^{**} - pH_0)^2} \left(\frac{d(pH^{**})h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)}{\alpha(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)} - a_0 \right).$$

D'après la formule (3.29) alors

$$\frac{\alpha a(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)}{h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)} \geq d(pH^{**}),$$

Puisque

$$d(pH^{**}) = d_0 + \frac{d_3(pH^{**} - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}.$$

Alors

$$\frac{\alpha a(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)}{h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)} - d_0 \geq \frac{d_3(pH^{**} - pH_0)^2}{(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)},$$

Il en résulte que

$$d_3 \leq \frac{\alpha a(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) - b)(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}{h(pH^{**})(r(pH^{**})h(pH^{**}) + b)(pH^{**} - pH_0)^2} - \frac{d_0(pH_0 - pH_{min})(pH_{max} - pH_0)}{(pH^{**} - pH_0)^2}.$$

Cas 2 Lorsque l'effet du pH n'est pas en pris en considération le modèle mathématique (B) se réduit au modèle suivant :

3.6.2 Modèle mathématique (C)

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(r_0 - bN) - \frac{a_0NP}{1 + h_0N}, \\ \frac{dP}{dt} = -d_0P + \frac{\alpha a_0NP}{1 + h_0N}. \end{cases}$$

Bornitude et positivité des solutions du modèle (C)

On va discuter la bornitude et la positivité des solutions du système (C).

Pour cela, Soit le domaine Ω_2 définit par

$$\Omega_2 = \left\{ (N, P) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq N + \frac{P}{\alpha} \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b\mu} \right\}.$$

Proposition 3.6.1 [6] Toutes le solutions du modèle mathématique (C) qui sont dans le domaine Ω_2 sont bornées.

Preuve

Soit le système suivant :

$$\frac{dN}{dt} = N(r_0 - bN) - \frac{a_0NP}{1 + h_0N}, \quad (3.30)$$

$$\frac{dP}{dt} = -d_0P + \frac{\alpha a_0NP}{1 + h_0N}. \quad (3.31)$$

Soit la fonction v définie par :

$$v = N + \frac{1}{\alpha}P.$$

Par la dérivation, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\alpha} \frac{dP}{dt}, \\ &= N(r_0 - bN) - N(r_0 - bN) - \frac{a_0NP}{1 + h_0N} - \frac{d_0}{\alpha}P + \frac{\alpha a_0NP}{\alpha(1 + h_0N)}, \\ &= N(r_0 - bN) - \frac{d_0}{\alpha}P. \end{aligned}$$

Alors, il en résulte

$$\frac{dv}{dt} = N(r_0 - bN) - \frac{d_0}{\alpha}P.$$

Ainsi, pour tout $\mu > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \mu v &\leq N(r_0 - bN + \mu) - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq -bN^2 + N(r_0 + \mu) - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq -b \left[N^2 + N \left(\frac{r_0 + \mu}{b} \right) \right] - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq -b \left[\left(N - \left(\frac{r_0 + \mu}{2b} \right) \right)^2 - \left(\frac{r_0 + \mu}{2b} \right)^2 \right] - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu), \\ &\leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \frac{P}{\alpha}(d_0 - \mu). \end{aligned}$$

Pour $d_0 > \mu$, on a :

$$\frac{dv}{dt} + \mu v \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b}.$$

Par conséquent

$$\frac{dv}{dt} \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \mu v.$$

Par intégration sur $[0, t]$:

$$\int_0^t \frac{dv}{\frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \mu v} \leq \int_0^t ds,$$

On trouve

$$\ln \left[\frac{\frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \mu v(t)}{\frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \mu v(N(0), P(0))} \right] \geq -\mu t,$$

Ce qui donne

$$-\mu v(t) \geq \left(\frac{(r_0 + \mu)^2}{4b} - \mu v(N(0), P(0)) \right) e^{-\mu t} - \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b},$$

Donc

$$v(t) \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b\mu} - \frac{(r_0 + \mu)^2 e^{-\mu t}}{4b\mu} + v(N(0), P(0)) e^{-\mu t},$$

Par passage à la limite :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \frac{(r_0 + \mu)^2}{4b\mu}.$$

On a donc que toutes les solutions du système (C) commençant dans \mathbb{R}_+^2 restent dans le domaine Ω_2 .

Théorème 3.6.10 Pour toutes conditions initiales positive $N(0)$ et $P(0)$, le système (C) admet des solutions positives.

Preuve

D'après l'équation (3.30)

$$\frac{dN}{dt} = N \left(r_0 - bN - \frac{a_0 P}{1 + h_0 N} \right).$$

Par intégration sur $[0, t]$

$$\int_0^t \frac{dN(s)}{N(s)} = \int_0^t \left(r_0 - bN(s) - \frac{a_0 P(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds,$$

On trouve

$$[\ln N(s)]_0^t = \int_0^t \left(r_0 - bN(s) - \frac{a_0 P(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds,$$

D'où

$$\ln \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right] = \int_0^t \left(r_0 - bN(s) - \frac{a_0 P(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds,$$

Ce qui donne

$$N(t) = N(0) e^{\int_0^t \left(r_0 - bN(s) - \frac{a_0 P(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds}.$$

D'après l'équation (3.31)

$$\frac{dP}{dt} = P \left(-d_0 + \frac{\alpha a_0 N}{1 + h_0 N} \right).$$

Par intégration sur $[0, t]$

$$\int_0^t \frac{dP(s)}{P(s)} = \int_0^t \left(-d_0 + \frac{\alpha a_0 N(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds,$$

On trouve

$$[\ln P(s)]_0^t = \int_0^t \left(-d_0 + \frac{\alpha a_0 N(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds,$$

D'où

$$\ln \left[\frac{P(t)}{P(0)} \right] = \int_0^t \left(-d_0 + \frac{\alpha a_0 N(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds$$

, Ce qui donne

$$P(t) = P(0) e^{\int_0^t \left(-d_0 + \frac{\alpha a_0 N(s)}{1 + h_0 N(s)} \right) ds}.$$

Poins d'équilibre du modèle (C)

Les points d'équilibre du modèle mathématique (C) sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$N(r_0 - bN) - \frac{a_0 NP}{1 + h_0 N} = 0, \quad (3.32)$$

$$-d_0 P + \frac{\alpha a_0 NP}{1 + h_0 N} = 0. \quad (3.33)$$

Théorème 3.6.11 *Le système (C) admet un point d'équilibre trivial $E_{p1}(N^\circ, P^\circ)$.*

Preuve

Par l'équation (3.32), on obtient

$$N = 0 \quad \text{ou} \quad P = \frac{(r_0 - bN)(1 + h_0 N)}{a_0}.$$

Et d'après l'équation (3.33)

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0}.$$

Pour $N^\circ = 0$ on trouve que $P^\circ = 0$.

Théorème 3.6.12 *Si $r_0 > 0$ Le système (C) admet un point d'équilibre $E_{p2}(N^*, P^*)$ donné par :*

$$N^* = \frac{r_0}{b} \quad \text{et} \quad P^* = 0.$$

Preuve

Par l'équation (3.32), on obtient

$$N = 0 \quad \text{ou} \quad P = \frac{(r_0 - bN)(1 + h_0 N)}{a_0}.$$

Et d'après l'équation (3.33)

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0}.$$

Il en découle que $P^* = 0$ alors $N^* = \frac{r_0}{b}$ avec $r_0 > 0$.

On note par **(H1)** et **(H2)** les deux hypothèses suivantes :

(H1) $\alpha a_0 > d_0 h_0$.

(H2) $r_0 > b\bar{N}$ i.e : $\alpha r_0 a_0 > b d_0 + r_0 d_0$.

Théorème 3.6.13 *On Suppose que **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées alors le système (C) admet un point d'équilibre intérieur $E_{p3}(\bar{N}, \bar{P})$ donné par :*

$$\bar{N} = \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0} \quad \text{et} \quad \bar{P} = \frac{(r_0 - b\bar{N})(1 + h_0\bar{N})}{d_0}.$$

Preuve

Par l'équation (3.32), il est évident que

$$r_0 - bN - \frac{a_0 NP}{1 + h_0 N} = 0 \implies \bar{P} = \frac{(r_0 - b\bar{N})(1 + h_0\bar{N})}{d_0}.$$

Et d'après l'équation (3.33)

$$-d_0 + \frac{\alpha a_0 NP}{1 + h_0 N} = 0 \implies \bar{N} = \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0}.$$

Il en résulte que la population des proies et des prédateurs est en coexistence si $\alpha a_0 > d_0 h_0$ et $r_0 > b\bar{N}$ i.e : $\alpha r_0 a_0 > b d_0 + r_0 d_0$.

Comportement dynamique du modèle (C)

Théorème 3.6.14 [6] *Si $\alpha a_0 b > h_0(r_0 \alpha a_0 - r_0 d_0 h_0 - b d_0)$ Le point d'équilibre E_{p3} du modèle (C) est localement asymptotiquement stable.*

Preuve

Soit $J(N, P)$ la matrice Jacobienne du système (C)

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} r_0 - 2Nb - \frac{a_0 P}{(1 + h_0 N)^2} & -\frac{a_0 N}{1 + h_0 N} \\ \frac{\alpha a_0 (1 + h_0 N) P - \alpha a_0 h_0 NP}{(1 + h_0 N)^2} & -d_0 + \frac{\alpha a_0 N}{1 + h_0 N} \end{pmatrix}.$$

La Jacobienne qui est calculée au point E_{p_3} est :

$$J(\bar{N}, \bar{P}) = \begin{pmatrix} r_0 - 2b\bar{N} - \frac{a_0\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^2} & -\frac{a_0\bar{N}}{1+h_0\bar{N}} \\ \frac{\alpha a_0\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^2} & -d_0 + \frac{\alpha a_0\bar{N}}{1+h_0\bar{N}} \end{pmatrix}.$$

D'après système (3.32)-(3.33) alors :

$$\begin{cases} r_0 - b\bar{N} - \frac{a_0\bar{P}}{1+h_0\bar{N}} = 0, \\ -d_0 + \frac{\alpha a_0\bar{N}}{1+h_0\bar{N}} = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique

$$J(\bar{N}, \bar{P}) = \begin{pmatrix} \frac{a_0h_0\bar{N}\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^2} - b\bar{N} & -\frac{a_0\bar{N}}{1+h_0\bar{N}} \\ \frac{\alpha a_0\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule l'équation caractéristique de $J(\bar{N}, \bar{P})$:

$$\det (J(\bar{N}, \bar{P})) = 0.$$

Ce qui implique

$$\lambda^2 - \lambda \left(-b\bar{N} + \frac{a_0h_0\bar{N}\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^2} \right) + \frac{\alpha a_0^2\bar{N}\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^3} = 0,$$

Puisque

$$\bar{N} = \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0} \quad \text{alors} \quad d_0 = \frac{\alpha a_0\bar{N}}{1+h_0\bar{N}}.$$

Il en résulte que

$$\lambda^2 + \lambda \left(b\bar{N} - \frac{a_0h_0\bar{N}\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^2} \right) + \frac{d_0 a_0\bar{P}}{(1+h_0\bar{N})^2} = 0. \quad (3.34)$$

L'équation caractéristique (3.34) sous la forme suivante :

$$\lambda^2 - \text{tr} J(\bar{N}, \bar{P}) + \det J(\bar{N}, \bar{P}) = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} a_1 = -tr J(\bar{N}, \bar{P}) = b\bar{N} - \frac{a_0 h_0 \bar{N} \bar{P}}{(1 + h_0 \bar{N})^2}, \\ a_2 = det J(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{d_0 a_0 \bar{P}}{(1 + h_0 \bar{N})^2}, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

Les critères de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = a_1 = -tr J(\bar{N}, \bar{P}),$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 = a_1 a_2 = -tr J(\bar{N}, \bar{P}) det J(\bar{N}, \bar{P}).$$

Alors

$$H_1 = -tr J(\bar{N}, \bar{P}) > 0 \quad \text{si } b\bar{N} > \frac{a_0 h_0 \bar{N} \bar{P}}{(1 + h_0 \bar{N})^2},$$

Puisque

$$\bar{N} = \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0} \quad \text{et} \quad \bar{P} = \frac{(r_0 - b\bar{N})(1 + h_0 \bar{N})}{a_0}.$$

Alors

$$b\bar{N} > \frac{a_0 h_0 \bar{N} \bar{P}}{(1 + h_0 \bar{N})^2},$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{bd_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0} &> \frac{a_0 h_0 d_0 (r_0 - b\bar{N})(1 + h_0 \bar{N})}{a_0 (\alpha a_0 - d_0 h_0) (1 + h_0 \bar{N})^2}, \\ &> \frac{h_0 d_0 (r_0 - b\bar{N})}{(\alpha a_0 - d_0 h_0) (1 + h_0 \bar{N})}, \\ b &> \frac{(\alpha a_0 - d_0 h_0) h_0 d_0 (r_0 - b\bar{N})}{d_0}, \\ &> \frac{h_0 (r_0 - b \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0})}{1 + \frac{d_0}{\alpha a_0 - d_0 h_0}}, \end{aligned}$$

$$b > \frac{h_0(\alpha r_0 a_0 - r_0 d_0 h_0 - b d_0)}{\alpha a_0},$$

$$\alpha b a_0 > h_0(\alpha r_0 a_0 - r_0 d_0 h_0 - b d_0).$$

Donc

$$H_1 = -\operatorname{tr} J(\bar{N}, \bar{P}) > 0 \quad \text{si } \alpha b a_0 > h_0(\alpha r_0 a_0 - r_0 d_0 h_0 - b d_0),$$

$$H_2 = -\operatorname{tr} J(\bar{N}, \bar{P}) \det J(\bar{N}, \bar{P}) > 0 \quad \text{car } -\operatorname{tr} J(\bar{N}, \bar{P}) > 0 \text{ et } \det J(\bar{N}, \bar{P}) > 0.$$

Puisque $H_1 > 0$ et $H_2 > 0$ alors le point d'équilibre E_{p3} est asymptotiquement stable .

3.7 Simulation numérique

Dans cette section, la simulation numérique est réalisée pour étayer les résultats analytiques du système (A) .

Le modèle mathématique (A) admet un point d'équilibre intérieur $E_{33}(C^{**}, pH^{**}, N^{**}, P^{**})$ alors en considérant l'ensemble des valeurs paramétriques suivantes :

$$\begin{aligned} Q &= 7.9, \quad d_1 = 1.190, \quad pH_0 = 7.0, \quad \alpha_1 = 0.750, \quad C_0 = 5.50, \quad d_2 = 1.0, \quad r_0 = 3.30, \\ r_1 &= 0.005, \quad pH_{min} = 5, \quad pH_{max} = 11, \quad b = 0.490, \quad a_0 = 1.0, \quad a_1 = 0.09, \quad h_0 = 1.10 \\ h_1 &= 0.58, \quad d_0 = 0.46, \quad d_3 = 1.9, \quad \alpha = 0.52 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Et les valeurs d'équilibre sont $E_{33} = (6.6387, 6.1460, 5.0477, 3.4247)$ alors le résultat est illustré par la simulation dans la figure (3.10)

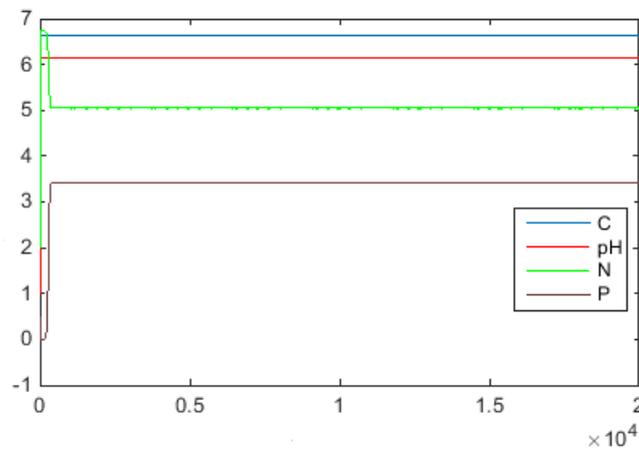


FIGURE 3.10 – Trajectoires du modèle mathématique (A) de la stabilité du point d'équilibre intérieur.

En considérant $a_1 = 0.4$ et en gardant les mêmes valeurs que celles mentionnées en (3.35) alors le résultat est illustré par la simulation dans la figure (3.11)

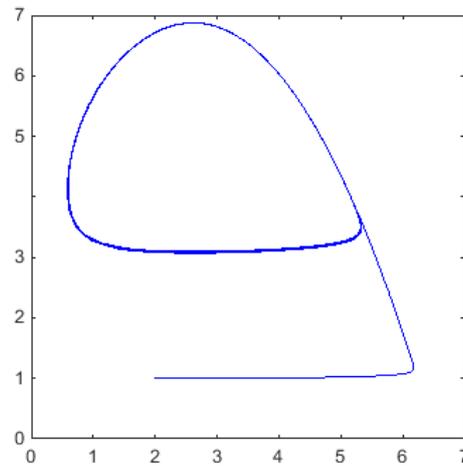


FIGURE 3.11 – Le portrait de phase du modèle mathématique (A) pour $a_1 = 0.4$ de l'existence d'un cycle limite.

Le modèle mathématique (C) admet un point d'équilibre intérieur $E_{p_3}(\bar{N}, \bar{P})$ alors en considérant l'ensemble des valeurs paramétriques suivantes :

$$r_0 = 3.20, \quad b = 0.490, \quad a_0 = 1.0, \quad h_0 = 1.10, \quad d_0 = 0.46, \quad \alpha = 0.588. \quad (3.36)$$

Et les valeurs de l'équilibre E_{p_3} sont (5.6095, 3.2356) alors le résultat est illustré par la simulation dans la figure (3.12) .

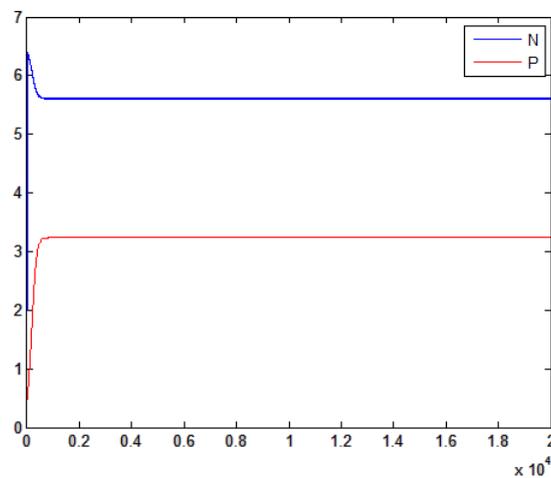


FIGURE 3.12 – Trajectoires du modèle (C) de la stabilité du point d'équilibre intérieur E_{p_3} .

En considérant $a_0 = 1.16$ et gardant les mêmes valeurs que celles mentionnées en (3.36) alors le résultat est illustré par la simulation dans la figure (3.13) .

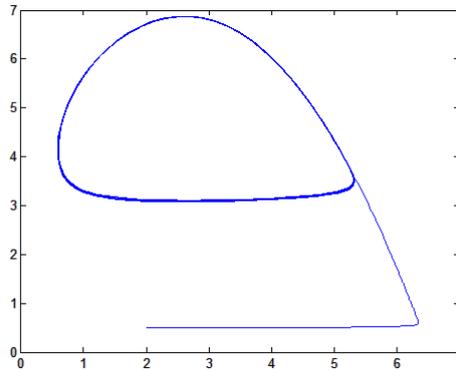


FIGURE 3.13 – Le portrait de phase du modèle mathématique (C) $a_1 = 1.16$ de l'existence d'un cycle limite.

Remarque 3.7.1 À partir de la simulation numérique, on constate que le comportement dynamique du modèle (A) et du modèle (C) est le même et les points d'équilibre intérieur des deux modèles sont asymptotiquement stables. Cependant, il est noté à partir du point d'équilibre intérieur du modèle (A), la densité d'équilibre de la proie diminue et son équilibre.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié l'effet de la variation du pH causée par l'augmentation de la concentration de CO_2 dans l'eau, sur la dynamique proie-prédateur avec une réponse fonctionnelle de Holling type II ,d'après l'analyse de stabilité du point d'équilibre trivial du modèle (B), il est noté que les proies et les prédateurs vont disparaître, et à partir de l'analyse de stabilité de l'équilibre intérieur de (B), la coexistence des proies et des prédateurs est assurée si le taux de croissance dépasse un certain seuil, il a été prouvé que cet équilibre est localement asymptotiquement stable.

Par l'étude du système autonome (C), il est montré que l'équilibre intérieur est asymptotiquement stable, selon la condition donnée dans le théorème (3.6.13).

De ce fait, on conclut que le taux de croissance des proies diminue à cause de la diminution du pH donc en même temps la densité des prédateurs diminue cela veut dire que les deux populations peuvent avoir tendance à s'éteindre. Ainsi, la densité de population des proies diminue en raison de l'augmentation du taux de capture et du taux de manipulation par prédateur.

Conclusion générale

IL a été observé dans quelques études de terrain et dans certaines expériences de laboratoire que le pH de l'eau varie selon une augmentation de la concentration du dioxyde de carbone. Les organismes aquatiques ont un pH optimal pour la croissance et la survie, son Acidité a un effet sur les organismes et peut réduire leur taille, leur capacité de reproduction, leur viabilité et leur taux de mortalité.

Dans ce travail, on a étudié la dynamique d'un modèle mathématique qui prend en compte la concentration du CO_2 dissout dans l'eau a cause des phénomènes naturels, la variation du pH et l'effet de la prédation sur la proie.

Le modèle est décrit par un système d'EDO. Ainsi, la dynamique du système a été révélée par des approches analytiques et des simulations numériques approfondies. Dans cette étude, on a prouvé qu'un cycle limite stable se produit exactement dans ce système, lorsque l'équilibre positif. Cette preuve on permet également de conclure que la stabilité asymptotique locale du positif l'équilibre implique sa stabilité asymptotique globale. On a étudié les solutions du modèles présenté et montrer qu'elles présentent le comportement typique d'un modèles proie-prédateur comme l'extinction et la survie des deux populations. Donc il faut certainement étudier et mieux comprendre les mécanismes fondamentaux d'un modèle proie-prédateur- ce qui a permis à déterminer des conditions pour lesquelles la population atteint son stade d'équilibre. Ce phénomène devrait devenir un sujet de recherche future.

Bibliographie

- [1] https://www.actu-environnement.com/ae/dictionnaire_environnement/definition/ph.php4.
- [2] <http://www2.ggl.ulaval.ca/personnel/bourque/s3/captage.CO2.html>.
- [3] AUGER, P., LETT, C., AND POGGIALE, J.-C. *Modélisation mathématique en écologie-2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2010.
- [4] BACAËR, N. *A short history of mathematical population dynamics*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [5] BENZONI-GAVAGE, S. *Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2010.
- [6] CHATURVEDI, D., AND MISRA, O. Modeling impact of varying ph due to carbondioxide on the dynamics of prey–predator species system. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 46 (2019), 374–402.
- [7] DANG-VU, H., AND DELCARTE, C. *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*. Ellipses, 2000.
- [8] DELMAS, B. Pierre-françois verhulst et la loi logistique de la population. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, 167 (2004).
- [9] DENNY, M. Buzz holling and the functional response. *The Bulletin of the Ecological Society of America* 95, 3 (2014), 200–203.
- [10] GHAZY, M., HABASHY, M. M., AND MOHAMMADY, E. Y. Effects of ph on survival, growth and reproduction rates of the crustacean, daphnia magna. *Aust J Basic Appl Sci* 5, 11 (2011), 1–10.

- [11] JEAN-PIERRE, D. *Analyse numérique et équations différentielles*. 1991.
- [12] KUANG, Y., AND FREEDMAN, H. Uniqueness of limit cycles in gause-type models of predator-prey systems. *Mathematical Biosciences* 88, 1 (1988), 67–84.
- [13] LIFE, F. A. Ph requirements of freshwater aquatic life.
- [14] MAGAL, C. Bulletin de l'apmep. num. 459. p. 437-448. mathématiques en dynamique des populations.
- [15] MURRAY, J. *Mathematical Biology :I. An Introduction, Third Edition*, vol. 17. Springer.
- [16] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] THIEME, H. R. Convergence results and a poincaré-bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations. *Journal of mathematical biology* 30, 7 (1992), 755–763.
- [18] VERON, J. Les mathématiques de la population, de lambert à lotka. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, 159 (2002).