
République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT



Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Équations Différentielles et modélisation

Présenté par :
Mr. Youcef BELBACHIR

MODÈLE ÉPIDÉMIOLOGIQUE AVEC L'ÂGE DE LA VACCINATION

Encadrant :
M. Soufiane BENTOUT
Maitre de Conférence "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le *12 juin 2019*.

Devant le jury composé de :

Président : M. Ahmed HAMMOUDI (Professeur) C.U.B.B.A.T.

Examinatrice : Mme.Meriem HELLAL (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Encadrant : M. Soufiane BENTOUT (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Remerciement

Je tiens tout d'abord à exprimer mon gratitude à Dieu le tout Puissant, le Miséricordieux, qui a permit à ce moment d'être fait pour ces humbles servitudes.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon respectueux promoteur **Mr « BENTOUT.S »** Maitre de conférence « B » au département des mathématiques au faculté des sciences au Centre Universitaire de Ain Temouchent , qu'il trouve ici ,l'expression de mon profonde et respectueuse gratitudes pour ces précieux conseils, ses encouragements et la grande bienveillance avec laquelle il a dirigé ce travail. Sa compétence; sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. J'espère ne pas avoir déçue sa confiance.

Mes sincères remerciements vont aussi à **Mr « HAMMOUDI.A »** Professeur au département des mathématiques à la faculté des sciences au Centre Universitaire de Ain Temouchent pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant la présidence de ce jury.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à *M^{me}* « **HELLAL M** » Maitre de conférences « B » au département des mathématiques au Centre Universitaire d'Ain Temouchent pour avoir voulu examiner ce travail.

Je remercie également au fond du mon cœur **Mr Beniani Abd Rahman** pour ces précieux conseils et pour son aide continu.

J'adresse mes chaleureux remerciements à tous les enseignants de département des mathématiques qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.

*« Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent
du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui
nos âmes sont fleuries. »*

MARCEL PROUST

Dédicace

A mes très chers parents,

Honorable, aimable : vous présentez pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi

Vos prières et vos bénédictions m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et ma formation.

en témoignage de mon profond amour. Puisse dieu, le tout puissant, vous préserve et vous accorde santé, longue vie et bonheur.,

A la mémoire de nos défunts : Mes grand-mères BOUKRAA Kheira et DAHMANI Fatma. Mes grand-pères Kouider et Mahlia Ahmed que Dieu ait leurs âmes.

A mes chères sœurs « Amina, Fatima, Kheira Wiam et Newel »

En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous. Acceptez mes vœux de joie, de santé et de prospérité.

*A mes charmantes nièces et mes adorables neveux.
que Dieu vous garde et vous protège.*

A mes chers amis : Mouhamed, Amin, Adel, Abdelatif.

En témoignage de l'amitié qui nous uni et des souvenirs de tous les moments que nous avons passé ensemble.

A toute la promotion de Mathématiques et à tous qui m'ont partagé les moments de la réalisation de ce mémoire.

A mes chers : Mouhamed, Lotfi, Benamer et khadir.

Je vous souhaite une vie pleine du bonheur.

A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce modeste travail

Sommaire

Notations et abréviations	5
Introduction Générale	6
I Préliminaires	9
I.1 Généralités sur les systèmes dynamiques	9
I.2 Le taux de reproduction de base	10
I.3 Notion de stabilité et points d'équilibre	10
I.4 Résultats fondamentaux pour l'invariance et la stabilité globale	13
I.5 Persistance uniforme	16
I.6 La théorie de la stabilité équi-uniforme	18
II Modèle épidémiologique SEIRS	21
II.1 Interprétation du modèle	22
II.2 Analyse du modèle <i>SEIRS</i>	22
II.3 Le taux de reproduction basique	24
II.4 Étude de la stabilité	25
II.4.1 Stabilité du point d'équilibre sans maladie(en anglais : DFE)	25
II.4.2 Stabilité du point d'équilibre endémique	27
II.5 Persistance uniforme	29
II.6 Une nouvelle approche de la stabilité équi-uniforme du point d'équilibre endémique	30
III Un modèle épidémique SIS avec l'âge de la vaccination	35
III.1 Analyse du modèle	37
III.2 Régularité Asymptotique (en anglais : Asymptotic Smoothness)	40
III.3 Étude de la stabilité locale	43
III.4 Persistance uniforme	46
III.5 Étude de la stabilité globale	50
III.6 Simulation numérique et discussion	55

Conclusion

58

bibliographie

61

Notations et abréviations

$\ \cdot \ $	La norme.
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant définie par : $\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \text{ est bijectif} \}$.
\mathcal{D}	L'opérateur dérivé.
$\frac{dx}{dt}$	Dérivé de la variable x par rapport au temps .
\mathcal{I}	L'opérateur identité.
$\mathcal{L}_1^+([a, b])$	L'espace de Lebesgue intégrable à valeur dans (a, b) .
\mathbb{R}_+	L'ensemble des nombres réels positifs $[0, \infty)$.
\det	Le déterminant d' une matrice.
tr	La trace d'une matrice.
V	désigne la fonction de Lyapunov.
EDO	désigne Les Équations Différentielles Ordinaire.
DFE	désigne en anglais : Disease Free Equilibrium.
\mathcal{R}_0	désigne le nombre de reproduction de base.
J	désigne la matrice jacobienne.

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques sont très répandus en modélisation biologique, et en particulier en épidémiologie. Il est donc naturel de penser à utiliser des méthodes classiques et des théories pour étudier de tels systèmes.

Durant ces dernières années les méthodes algébriques, et les logiciels de calcul, ont été largement utilisés pour étudier les systèmes issus de la modélisation biologique. Une application classique de telles méthodes consiste en la détection et l'étude de la stabilité des équilibres de ces modèles.

La définition moderne de l'épidémiologie est l'étude de la distribution des états ou des événements liés à la santé dans des populations spécifiques, et l'utilisation de cette connaissance pour le contrôle des problèmes de santé.

Une maladie est dite endémique si elle persiste dans une population. Elle est dite épidémique si elle apparaît pendant une période relativement courte dans une population (moins d'une année). L'épidémiologie s'occupe aussi bien des facteurs comme les agents infectieux, le mode de transmission, la période de latence, la période infectieuse, la susceptibilité, la vaccination et la résistance que des facteurs sociaux, culturels, démographiques, économiques et géographiques liés à cette maladie. La modélisation épidémiologique a pour but essentiel de comprendre et contrôler la propagation d'une maladie infectieuse transmissible.

De nos jours, l'épidémiologie mathématique fait référence à l'étude de la dynamique de la propagation des maladies infectieuses, et les outils utilisés sont ceux de la théorie des systèmes dynamiques. La recherche épidémiologique est par nature la discipline scientifique dont les résultats sont les plus rapidement utilisables pour les décisions de la santé publique.

Voici quelques termes qui seront fréquemment utilisables au cours de ce mémoire

Maladie infectieuse : maladie provoquée par la transmission d'un agent pathogène : virus, bactérie, parasite,...etc

Epidémie : augmentation rapide de l'incidence d'une pathologie. Bien que souvent utilisée dans un contexte de maladies infectieuses.

Seuil épidémique : seuil théorique présent dans les modèles mathématiques au dessus du quel il y aura (ou pourra y avoir) une épidémie.

Vaccination : un procédé consistant à introduire un agent extérieur (le vaccin) dans un organisme vivant afin de créer une réaction immunitaire positive contre une maladie infectieuse.

Dans ce travail nous nous concentrons sur l'étude et l'analyse, par des méthodes de la stabilité locale et globale, des points d'équilibre sans maladie et endémique dans les modèles épidémiologiques structurées en âge **SIS** et **SEIRS**. On va appliquer des critères et des théorèmes classiques de la stabilité du genre *Routh-Hurwitz*, *Chetaev*, *Lyapunov*, *Next Generation Matrix* ...etc

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le **premier chapitre**, on analyse un exemple de modèle épidémiologique **SEIRS**, en introduisant un taux de reproduction basic. On montre la stabilité locale et globale des points d'équilibres sous certaines conditions, en utilisant les outils les plus puissants dans l'étude des systèmes d'équations différentielles. Une attention très particulière sera accordée sur la notion de "la persistance uniforme et la notion de "la nouvelle théorie d'approche de la stabilité équi-uniforme".

Le deuxième chapitre est un étude générale d'un modèle *SIS* structuré en age de la vaccination a . on vas présenter des résultats importants de la régularité asymptotique du semi flot. En analysant les équations caractéristiques correspondantes et on discute de la stabilité locale du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique. Par la théorie de Lyapunov, on vas prouver que l'équilibre endémique est *globalement asymptotiquement stable* si le nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0 > 1$ et que des conditions suffisantes sont obtenues pour *la stabilité asymptotique globale* de l'équilibre sans maladie, et on vas conclure ce chapitre en effectuant des simulations numériques du modèle dont l'objectif d'illustrer la stabilité asymptotique du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique et de confirmer les résultats théoriques qui auront affirmé et prouvé.

Le troisième chapitre (Annexe) est consacré aux résultats préliminaires, des définitions et des théorèmes très importants utilisés dans le mémoire ainsi que des outils mathématiques dont nous aurons besoin.

Des conclusions et des perspectives sont données à la fin de ce mémoire, qui se termine par une bibliographie.

Préliminaires

Les concepts que nous rappelons ici sont classiques et pour la plupart de nature élémentaire pour un mathématicien. Nous les introduisons ici dans le but de rendre plus facile, pour un épidémiologiste, la lecture des autres chapitres. Nous renvoyons aux ouvrages classiques [12],[38],[5] pour plus de détails.

I.1 Généralités sur les systèmes dynamiques

Définition I.1.1 (Équation différentielle).

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à f l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (\text{I.1})$$

où $f(t, x) = (f_1(t; x), \dots, f_n(t; x))$, et chaque fonction f_i est continue sur $I \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction f est appelée champs de vecteurs, l'équation représente un système de n équations différentielles ordinaires. Dans la pratique, l'équation (I.1) exprime la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps t , et x représente l'état du système étudié.

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)), & t \in (0, b), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in \Omega$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème I.1.1 (Cauchy-Lipschitz [7]).

Si f est continue sur Ω et s'il existe une constante $l > 0$ telle que

$$\| f(x_1(t)) - f(x_2(t)) \| \leq l \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega, t > 0,$$

alors le problème (I.1.1) admet une solution globale et elle est unique.

I.2 Le taux de reproduction de base**Définition I.2.1 ([30]).**

Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 est le rayon spectral de la matrice de seconde génération (en anglais : Next Generation Matrix) : à savoir

$$\mathcal{R}_0 = \rho(F(-V)^{-1}).$$

L'interprétation suivante est donnée à la matrice $-FV^{-1}$:

Considérons un individu infecté introduit dans un compartiment $k > m$ d'une population sans maladie. L'entrée (i,k) de la matrice $-V^{-1}$ est le temps moyen que l'individu passera dans le compartiment i au cours de sa vie, en supposant que l'on a bloqué la ré-infection. L'entrée (j,i) de la matrice F est la vitesse à laquelle un infecté dans le compartiment i produit des infections dans le compartiment j . Ainsi l'entrée (j,k) de $-FV^{-1}$ est le nombre espéré de nouvelles infections dans le compartiment j produit par un individu infecté introduit originellement dans le compartiment k . Le rayon spectrale de la matrice $-FV^{-1}$ est le nombre de reproduction de base. C'est à dire $\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1})$.

I.3 Notion de stabilité et points d'équilibre

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{I.3}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathbb{C}^1 . Soit x^* un point d'équilibre de l'équation (I.3) i.e. $f(x^*) = 0$.

Définition I.3.1.

L'équilibre x^* de (I.3) est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (I.3) on a

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon.$$

Définition I.3.2.

Un point singulier du champ de vecteurs X est un point x^* où toutes les composantes du champ s'annulent simultanément :

$$f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, n.$$

On dit aussi que x^* est un zéro du champ de vecteurs ou éventuellement une position d'équilibre. Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

Définition I.3.3.

L'équilibre x^* de (I.3) est dit globalement attractif si pour toute condition initiale x_0 du problème (I.3) on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition I.3.4.

L'équilibre x^* de (I.3) est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

Soit $J_f(x^*) := \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$, la matrice jacobienne de f évaluée au point x^* . Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax,$$

où $A = J_f(x^*)$ s'appelle le linéarisé ou l'approximation linéaire du système non linéaire (I.3) en x^* .

L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre x^* de (I.3). Plus précisément on a.

Théorème I.3.1 ([32]).

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative alors l'équilibre x^* du problème (I.3) est stable.
2. S'il existe au moins une valeur propre de la matrice A de partie réelle strictement positive alors x^* est instable.
3. Lorsqu'un équilibre x^* est stable mais pas asymptotiquement stable on dit que la stabilité est neutre, c'est-à-dire les trajectoires qui commencent au voisinage de x^* restent au voisinage de cet équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$.
4. Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de x^* .

Définition I.3.5 (Stabilité Asymptotique).

Le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $r > 0$ tel que : pour toute solution $x(t)$ de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition I.3.6 (Stabilité Uniforme).

Le point x^* est dit uniformément stable, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \|x_0 - x^*\| \leq \eta \implies \|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \epsilon, \forall t > 0.$$

Définition I.3.7 (Stabilité Asymptotique Uniforme).

Le point d'équilibre x^* est dit uniformément asymptotiquement stable, si : x^* est uniformément stable et si :

$$\exists \rho > 0 \quad \|x_0 - x^*\| \leq \rho \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = x^*.$$

I.4 Résultats fondamentaux pour l'invariance et la stabilité globale

Soit $f : U \rightarrow R^n$ un champs de vecteur et soit $\phi(t, x)$ le flot engendré par f . Un sous ensemble ψ de U est dit positivement (resp. négativement) invariant par f si pour tout $x \in \psi$ on a $\phi(t, x) \in \psi$ pour $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$).

Dans le cas où ψ est à la fois positivement et négativement invariant on dit que ψ est invariant par f .

Étant donné que $x \in U$, l'ensemble w_+ noté $w_+(x)$ (resp. l'ensemble w_- noté $w_-(x)$) est l'ensemble des points z tels qu'il existe une suite t_n qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $\phi(t_n, x)$ tend vers z . Les ensembles w limites sont des fermés et invariant par f .

Dans la suite nous serons principalement concernés par l'invariance positive du cône R_+^n par un champ de vecteurs donné $f(x)$.

Définition I.4.1 (Fonction de Lyapunov).

Soit $f : U \rightarrow R^n$ un champs de vecteurs, $\phi(t, x)$ le flot engendré par f et soit ψ un sous ensemble de U positivement invariant par f . Une application $V : \psi \rightarrow R_+^*$ est appelé fonction de Lyapunov pour f dans ψ si pour $x \in \psi$ on a $V(\phi(t', x)) \leq V(\phi(t, x))$ lorsque $t < t'$.

Une fonction de Lyapunov, lorsqu'elle existe, permet de déterminer la stabilité globale d'un équilibre. Elle permet aussi de déterminer la stabilité d'un équilibre lorsque la linéarisation ne permet pas de conclure.

Théorème I.4.1.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs, $\phi(t, x)$ le flot engendré par f et soit ψ un sous-ensemble de U positivement invariant par f . Soit ψ un sous-ensemble fermé de U et supposons que f a une fonction de Lyapunov V dans ψ qui est différentiable dans un ouvert contenant ψ . Soit φ le plus grand ensemble invariant de f contenu dans $\{x \in \psi \mid V'(x) = 0\}$. Alors on a les propriétés suivantes.

1. Pour tout x tel que $\phi(t, x)$ reste positivement dans ψ on a $w_+(x) \subseteq \varphi$.
2. Si φ est un singleton, disons x^* et ψ est compact alors x^* est un équilibre de f et toute solution $\phi(t, x)$ qui reste positivement dans U tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$. En particulier, si ψ est positivement invariant par f alors x^* est globalement asymptotiquement stable dans ψ .

Preuve.

1. Soit $x \in \psi$ tel que $\phi(t, x)$ reste positivement dans ψ . L'application $V(\phi(t, x))$ est décroissante positive et par suite elle a une limite "c" lorsque t tend vers $+\infty$. Soit $z \in w_+(x)$ et soit t_n une suite telle que $\lim t_n = +\infty$ et $\lim \phi(t_n, x) = z$. Puisque $\phi(t_n, x) \in \psi$ et ψ est fermé on a $z \in \psi$. En plus, on a $\lim V(\phi(t_n, x)) = V(z) = c$ puisque V est continue. Étant donné $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \phi(t, z)$ soit définie, on a $y \in w_+(x)$ selon le fait que $w_+(x)$ est invariant par f . Cela donne $V(y) = V(\phi(t, z)) = c$, et après l'application de l'opérateur ∂_t on obtient $V'(\phi(t, z)) = 0$ et en particulier $V'(z) = 0$. Cela prouve que le sous-ensemble invariant $w_+(x)$ est contenu dans $\{y \in \psi \mid V'(y) = 0\}$, et puisque φ est le plus grand sous-ensemble invariant de $\{y \in \psi \mid V'(y) = 0\}$ on a $w_+(x) \subseteq \varphi$.
2. Supposons que $\varphi = x^*$. Alors x^* est un équilibre de f puisque φ est invariant par f . Maintenant soit $x \in \psi$ tel que $\phi(t, x)$ reste positivement dans ψ et soit une suite (t_n) telle que $\lim t_n = +\infty$. Clairement, toute valeur d'adhérence $\phi(t_n, x) \in w_+(x) \subseteq \varphi = x^*$ et par suite x^* est la seule valeur d'adhérence de $\phi(t_n, x)$. D'un autre côté, puisque ψ est compact la suite $\phi(t_n, x)$ a au moins une valeur d'adhérence. Donc x^* est la seule valeur d'adhérence de $\phi(t_n, x)$ et $\lim \phi(t_n, x) = x^*$. Puisque cela vaut pour toute suite (t_n) telle que $\lim t_n = +\infty$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x^*$.

□

Ce théorème affirme que pour montrer qu'un point d'équilibre x^* est stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov en ce point. Par ailleurs, pour utiliser le théorème original de Lyapunov pour montrer la stabilité asymptotique d'un système donné, nous devons déterminer

une fonction V définie positive dont la dérivée \dot{V} est définie négative. Dans le cas général, ceci n'est pas évident. La condition sur la dérivée \dot{V} peut être allégée en utilisant le principe de LaSalle qui sera énoncé dans le théorème suivant :

Théorème I.4.2 (Principe d'invariance de LaSalle [21],[22]).

Soit Ω un sous-ensemble de R_n ; supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système (II.1) en x^* . Soit $V : \Omega \rightarrow R$ une fonction de classe C^1 pour le système (II.1) en x^* telle que :

1. $\dot{V} \leq 0$ sur Ω ;
2. soient $E = \{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\}$ et L est le plus grand ensemble invariant par X et contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans Ω tend vers l'ensemble L lorsque $t \rightarrow \infty$.

Corollaire I.4.1.

Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble L est réduit au point $x^* \in \Omega$, alors x^* est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (II.1) défini dans Ω .

Théorème I.4.3 (Instabilité de Chetaev [8]).

Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de (I.1.1) et V une fonction définie positive sur un voisinage de x^* . Si $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$ alors 0 est instable.

Soit le système linéaire de dimension n suivant :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

avec $i \in [1, n]$, où $A = [a_{ij}]$ est une matrice carrée de dimension n à coefficients constants.

Nous faisons l'hypothèse que $A \neq 0$, ce qui implique notamment que l'origine est l'unique équilibre. La matrice A admet n valeurs propres qui sont solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, qui est un polynôme de degré n que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Considérons les n déterminants suivants :

$$H_1 = a_1,$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix}$$

avec $k \in [1, n]$. Dans le cas de dimension n , tous les a_j avec $j > n$ sont pris égaux à zéro. Nous avons le résultat suivant :

Proposition I.4.1.

L'équilibre est **asymptotiquement stable** $\iff \forall k \in [1, n], H_k > 0$.

En dimension 3, l'équation caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

et les conditions de stabilité obtenues en appliquant les critères de Routh-Hurwitz sont :

- i) $a_1 > 0$,
- ii) $a_1a_2 - a_3 > 0$,
- iii) $a_3 > 0$.

I.5 Persistance uniforme

Soit F le flot associé au système (II.1) et soit d une métrique. On note par $\partial\mathcal{F}$ la restriction de \mathcal{F} à ∂E où ∂E n'est pas nécessairement positivement invariant et soit N l'ensemble invariant maximal de $\partial\mathcal{F}$ dans ∂E , de plus N est fermé et il existe un recouvrement $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de N où A est un ensemble d'index non vide et $N_\alpha \subset \partial E$, $N \subset \cup_{\alpha \in A} N_\alpha$ et N_α ($\alpha \in A$) sont des ensembles invariants fermés disjoints deux à deux. Nous proposons les hypothèses suivantes :

- i) Tous les $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont des ensembles invariants isolés du flot \mathcal{F} .
- ii) tout sous ensemble compact de E contient de nombreux recouvrements $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Définition I.5.1.

Soit d une distance métrique et π l'application semi flot. Le semi flot F associé au système (II.1) est dit

(i) faiblement persistant si pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0$$

(ii) persistant si pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0$$

(iii) faiblement uniformément persistant s'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \epsilon_0$$

(iv) uniformément persistant s'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \epsilon_0$$

Théorème 1.

Soit $E \subset X$ ensemble fermé positivement invariant, et soit \mathcal{F} le flot défini sur E . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que \mathcal{F} est un point dissipatif dans $\mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \mathring{E}$ et (I.5) est satisfaite. Alors, le flot \mathcal{F} est **uniformément persistant** si et seulement si :

$$W^+(N_\alpha) \cap \mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \mathring{E} = \emptyset$$

pour tout $\alpha \in A$, où $W^+(N_\alpha) = \{y \in X, \Lambda^+(y) \subset N_\alpha\}$.

Théorème I.5.1 ([26]).

Supposons que T est asymptotiquement régulière et ρ uniformément persistant, et que T a un attracteur global A . Alors $T : (M_0, d) \rightarrow (M_0, d)$ a un attracteur global A_0 . De plus, pour chaque sous-ensemble B de M_0 , s'il existe $k \geq 0$ tel que $\gamma^+(T^k(B))$ est ρ -fortement borné, alors A_0 attire B pour T .

Définition I.5.2.

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé **fortement dissipatif**, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, X) > c.$$

I.6 La théorie de la stabilité équi-uniforme

La théorie d'approche de la stabilité équi-uniforme a été proposée pour la première fois par Freedman et Waltman (1984) dans le cadre d'étudier la persistance de trois populations de proies-prédateurs en interaction. Pour utiliser cette approche, on a besoin de l'hypothèse qui dit que si une trajectoire contient un équilibre P dans son oméga limite, alors cet ensemble oméga-limite contient également des points d'équilibre stables et instables différent de P . Cette hypothèse a été étendue à un ensemble d'invariants isolés compacts et un flot continu sur un espace métrique localement compact par Butler et Waltman (1986), à un semi-flot continu par Dunbar (1986), et à un espace métrique complet (pas nécessairement localement compact) par Hale et Waltman (1989).

Définition I.6.1 (Espace métrique).

Un espace métrique (X, d) est un ensemble non vide X avec une fonction d qui satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$, pour tous $x, y \in X$.
- (ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, pour tous $x, y, z \in X$.
- (iii) $d(x, x) = 0$, pour tout $x \in X$.
- (iv) $d(x, y) \neq 0$, pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

Définition I.6.2 (trajectoire, trajectoire positive et trajectoire négative).

Soit (X, d) un espace métrique muni d'une distance d . Soit R l'ensemble des nombres réels avec la structure topologique et algébrique usuelle, et soient R^+ , R^- les ensembles de nombres réels non négatifs et non positifs, respectivement. On définit le flot continu $F = (X, R, \pi)$ dans X où $\pi : X \times R \rightarrow X$ est une application continue telle que $\pi(x, 0) = x$ et $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$ pour tout $x \in X$ et $t, s \in R$. Si $M \subset X$ et $K \subset R$, alors $\pi(M, K)$ désigne l'ensemble

$$\{\pi(x, t) : x \in M, t \in K\}$$

Pour tout $M \subset X$, on définit

$$\gamma(M) = \pi(M, R), \quad \gamma^+(M) = \pi(M, R^+), \quad \gamma^-(M) = \pi(M, R^-)$$

Pour $M = \{x\}$, les ensembles correspondants sont notés $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$, $\gamma^-(x)$ et sont respectivement appelés trajectoire, trajectoire positive, et trajectoire négative de x .

Définition I.6.3 (Bassin d'attraction [11]).

Le bassin d'attraction, noté $B(A)$, d'un ensemble $A \subset X$ est l'ensemble des points (ou encore des condition initiales) de l'espace des phases tels que toutes les trajectoires qui en sont issues, convergent asymptotiquement vers A . Autrement dit :

$$B(A) = \{x \in X / \omega(x) \subset A\}.$$

Définition I.6.4 (Attracteur [11]).

Soit (X, N, f) un système dynamique. Une partie A de X est appelée attracteur si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

- i) A est fermée.
- ii) A est positivement invariante.
- iii) A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage U de A tel que U est positivement invariant et :

$$\forall u \in U, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0.$$

Définition I.6.5 (Flot).

La correspondance $\phi_t : x_0 \rightarrow x(t)$ qui associe à une condition initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t , qui correspond à cette donnée initiale, est appelé "le flot" au temps t du champs du vecteur X .

Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temps t qui correspond à la donnée initiale x :

$$(t, x) \rightarrow \phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t).$$

Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de $t \in [-\infty, +\infty]$.

Définition I.6.6 (Semi flot).

On appelle le semi-flot de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ à un instant t , l'application suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi_t(x_0) = f(\Phi_t(x_0)) \\ \Phi_{t_0}(x_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition I.6.7 (L'ensemble Oméga Limite).

soit X un espace métrique et soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue. L'ensemble ω – *Limite* de $x \in X$, noté par $\omega(x, f)$, est l'ensemble des points de l'orbite $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Cela exprimer par

$$\omega(x, f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k > n\}}.$$

Définition I.6.8 (Point absorbant).

On dit qu'un point x d'un ensemble P d'un espace vectoriel réel \mathcal{E} est un **point absorbant** de P si, quel que soit $d \in \mathcal{E}$, il existe un scalaire $\lambda > 0$, tel que $x + \lambda d \in \mathcal{E}$.

Définition I.6.9 (Ensemble absorbant).

Supposons que le système $x'(t) = f(x(t))$ admet des solutions de classe C^1 et que K est un ouvert de \mathbb{R} . Un sous ensemble D de K est dit absorbant si tout sous ensemble borné D_1 de K satisfait $\Phi(t, D_1) \subset D$ pour tout temps t suffisamment grand. De même, D est dit absorbant lorsque pour toute condition initiale x_0 , il existe $T \geq 0$ tel que $\Phi_t(x_0) \in D$ pour tout $t > T$.

Définition I.6.10 (Point dissipatif).

Soit $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu. Φ est appelé un point **dissipatif** s'il existe un sous ensemble B de X qui attire tout les points dans X .

Définition I.6.11.

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé **fortement dissipatif**, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, X) > c.$$

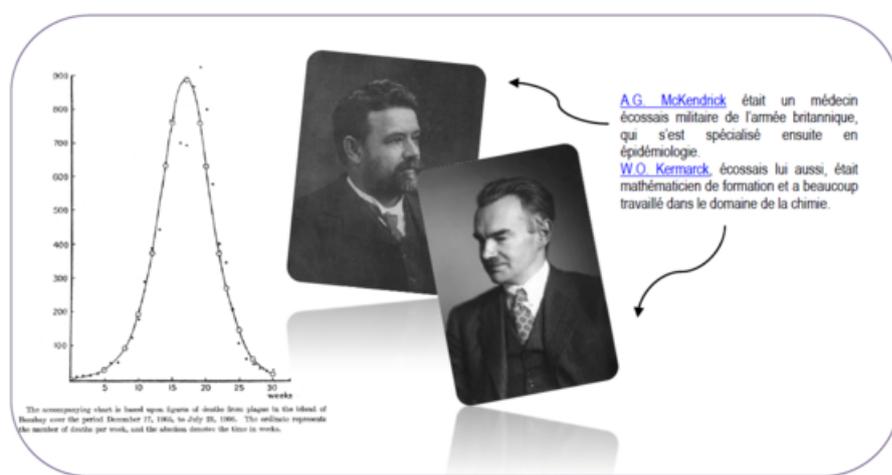
Définition I.6.12 (Compact).

Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ une application, $M \subset X$. L'application ϕ est compact sur M , si pour toute suite convergente (t_n) dans \mathbb{R}^+ quand $t \rightarrow \infty$, $\Phi(t_i, x_i)$ admet une sous suite convergente.

Chapitre II

Modèle épidémiologique SEIRS

Différents modèles mathématiques existent dans la littérature et le choix du modèle dépend de la maladie étudiée. Parmi les modèles les plus connus, le **SEIR** (Susceptibles-**E**xposés-**I**nfectieux-**R**établis), qui est une extension du modèle **SIR** (Susceptibles-**I**nfectés-**R**établis) présenté pour la première fois par *KERMACK* et *MACKENDRICK* à Cambridge en 1927 pour expliquer l'évolution de l'épidémie de peste à Bombay en 1905-1906.



Ce chapitre présente un modèle¹ **SEIR** avec incidence bilinéaire qui consiste à introduire un compartiment d'individus latents lorsque la période d'infectiosité ne peut être négligée. Cela traduit par le système d'équations différentielle :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \mu + \gamma R - \mu S - \beta IS, \\ \dot{E}(t) = \beta IS - (\mu + \sigma)E, \\ \dot{I}(t) = \sigma E - (\nu + \mu)I, \\ \dot{R}(t) = \nu I - (\mu + \gamma)R. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec les conditions initiales suivantes : $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$.

1. Qu'est ce qu'un modèle ?

Pour étudier une situation réelle, on commence par extraire de la situation ses caractéristiques principales : on a créé un modèle. On substitue ainsi au monde réel le monde « idéal » des mathématiques. Ensuite on utilise des techniques connues pour analyser, étudier le modèle. Les conclusions obtenues sont ensuite retraduites dans le langage du monde réel. Par définition un modèle est faux, puisqu'il est incomplet et imparfait. Par confrontation à l'expérience et au réel les modèles peuvent être affinés.

II.1 Interprétation du modèle

Dans notre système, nous considérons une population N divisée en classes des individus susceptibles, les infectés non infectieux, les infectieux et les rétablis. On suppose que les nouveaux individus que ce soient ceux qui viennent d'autres groupes ou les nouveaux nés, sont susceptibles, qu'il n'y a pas de vaccination que ce soit des personnes qui sont déjà établies dans les groupes ou celles qui les intègrent. En ce qui concerne la mortalité, on suppose qu'elle est identique pour les susceptibles, les infectés non infectieux et les guéris, tandis que, pour les infectieux hormis le taux de mortalité naturelle, nous avons une mortalité induite par la maladie. Nous considérons aussi le nombre des nouveaux cas de la maladie βIS (l'incidence bilinéaire). Le schéma de contamination est donc le suivant : un individu susceptible, après avoir été contaminé, devient infecté, et entre dans une période de latence jusqu'à ce qu'il soit capable de transmettre la maladie. Une fois guéri, il redevient susceptible.

Les paramètres β , μ , σ , γ , ν sont des quantités positives telles que :

β : représente le taux de transmission de la maladie.

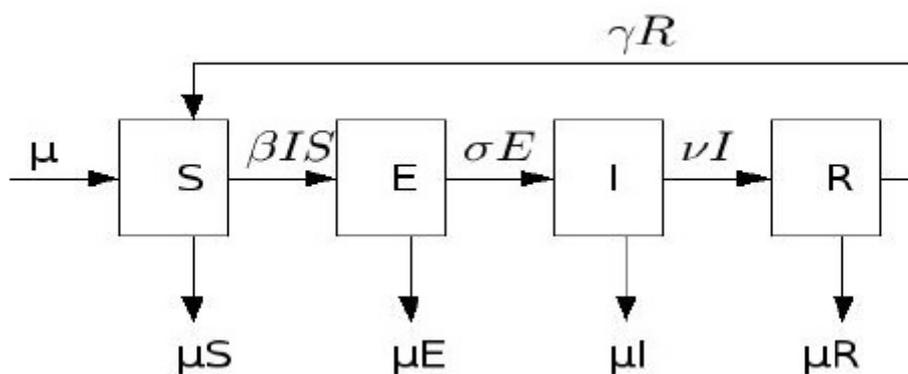
μ : représente le taux de mortalité qui est supposé égal au taux de natalité .

σ : représente le taux de passage d'exposés aux infectieux .

γ : représente le taux de perte de l'immunité à cause de la maladie .

ν : représente le taux de perte d'infectiosité .

βIS : représente l'incidence (le taux de nouvelles infections).



II.2 Analyse du modèle $SEIRS$

L'analyse des modèles classiques SIS , SIR , SEI et $SEIRS$ est connue depuis 1976 [14] [15]. La raison en est que l'étude de la stabilité de ces modèles se réduit aux systèmes plans, et donc

les méthodes de plan des phases peuvent être utilisées : le théorème de Poincaré-Bendixon. Les orbites périodiques peuvent être exhibées en utilisant le critère de Dulac ou le critère de Busenberg et Van Den Driessche [31].

Théorème 2.

Le système décrit par (II.1) admet une solution unique.

Preuve.

Le fait que les fonctions du système (II.1) sont de classe C^1 , donc elles sont localement lipschitziennes sur \mathcal{R}_+^4 , d'après le théorème de **Cauchy-Lipschitz** (I.1.1) on en déduit l'existence et l'unicité de la solution du problème associé au système (II.1). \square

Dans la suite, le système (II.1) sera analysé avec des conditions initiales positives :

$$S(0), E(0), I(0), R(0) > 0.$$

Proposition 1.

L'ensemble Ω défini par : $\Omega = \{t \in \mathbb{R}_+, (S(t), E(t), I(t), R(t)) > 0 \text{ tel que } S + E + I + R = 1\}$ est positivement invariant.

Preuve.

La population totale N se divise en quatre classes d'individus cités précédemment, cela traduit par

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t).$$

Nous dérivons N par rapport à t , puis nous remplaçons les équations du système (II.1), nous obtenons

$$\dot{N}(t) = \mu - \mu N(t),$$

par un simple calcul, on trouve

$$N(t) = N(0) \exp(-\mu t) + (1 - \exp(-\mu t)),$$

par conséquent, $\forall N(0) \in \Omega, N(t) \leq 1$, ce qui montre que l'ensemble Ω est positivement invariant. \square

II.3 Le taux de reproduction basique

On peut interpréter le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 [33] comme le nombre moyen de nouveaux cas d'infection causé par un individu infecté (au court de la période où il est infectieux et donc contaminant), dans une population² entièrement considérée comme susceptible [29],[34]. Depuis son introduction le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 s'est imposé comme un concept-clef en épidémiologie.

La méthode de *Next Generation* I.2.1 définit le taux de reproduction de base par :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}).$$

Soit

$$F = \begin{pmatrix} \beta IS \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -V = \begin{pmatrix} (\mu + \sigma)E \\ -\sigma E + (\nu + \mu)I \end{pmatrix},$$

et soient \tilde{F} et \tilde{V} les dérivés de F et V respectivement ,

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \beta I & \beta S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -\tilde{V} = \begin{pmatrix} \mu + \sigma & 0 \\ -\sigma & \nu + \mu \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\det(-\tilde{V}) = (\mu + \sigma)(\nu + \mu) \neq 0$, donc la matrice $-\tilde{V}$ est inversible d'inverse donné par :

$$(-\tilde{V})^{-1} = \frac{1}{(\mu + \sigma)(\nu + \mu)} \begin{pmatrix} \nu + \mu & 0 \\ \sigma & \mu + \sigma \end{pmatrix},$$

Ainsi, on trouve la matrice dite "Next Generation Matrix" (en anglais),

$$\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\sigma}{(\mu + \sigma)(\nu + \mu)} & \frac{\beta}{\nu + \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de reproduction de base du modèle (II.1) est donné par :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\sigma}{(\mu + \sigma)(\nu + \mu)}.$$

En réalité :

Si $\mathcal{R}_0 > 1$: alors en moyenne, un individu infecté engendre plus d'individus infectés (ie la maladie va se persister dans la population).

A l'opposé si $\mathcal{R}_0 < 1$: un individu infecté engendre en moyenne moins d'individus infectés, ce qui signifie que la maladie va disparaître dans la population à terme.

2. Qu'est ce qu'une population ?

Une population est le nombre d'individus d'un même groupe ou d'une même espèce qui vivent simultanément dans une zone géographique donnée et qui ont la capacité de se reproduire. En sociologie, la population se réfère aux groupes d'êtres humains.

II.4 Étude de la stabilité

La recherche des points d'équilibres de système (II.1) se traduit par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \mu + \gamma R - \mu S - \beta IS = 0, \\ \beta IS - (\mu + \sigma)E = 0, \\ \sigma E - (\nu + \mu)I = 0, \\ \nu I - (\mu + \gamma)R = 0. \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Il est évident que le système (II.2) admet à la frontière du domaine, un seul point d'équilibre trivial, noté par $E_0(1, 0, 0, 0)$. Celui-ci exprime qu'au bord de la zone étudiée, la densité des exposés, des infectés et des rétablis est nulle. A l'intérieur du domaine, nous avons une densité de (S^*, E^*, I^*, R^*) qui est non nulle.

Si $\mathcal{R}_0 \geq 1$, alors le système (II.2) admet un unique point d'équilibre positif $E_1(S^*, E^*, I^*, R^*)$

avec

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\mu + \nu)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta}, \\ E^* &= \frac{(\mu + \nu)(\mu + \gamma)[\sigma\beta - (\mu + \nu)(\mu + \sigma)]}{(\mu^2 + \mu\nu + \sigma\mu + \sigma\nu + \mu\gamma + \gamma\nu + \sigma\gamma)\sigma\beta}, \\ I^* &= \frac{(\mu + \gamma)[\sigma\beta - (\mu + \nu)(\mu + \sigma)]}{(\mu^2 + \mu\nu + \sigma\mu + \sigma\nu + \mu\gamma + \gamma\nu + \sigma\gamma)\beta}, \\ R^* &= \frac{\nu[\sigma\beta - (\mu + \nu)(\mu + \sigma)]}{(\mu^2 + \mu\nu + \sigma\mu + \sigma\nu + \mu\gamma + \gamma\nu + \sigma\gamma)\beta}. \end{aligned}$$

II.4.1 Stabilité du point d'équilibre sans maladie(en anglais : DFE)

Théorème 3.

L'équilibre sans maladie du système (II.1) donné par $(1, 0, 0, 0)$ est localement stable lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$ et il est instable lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$.

Preuve.

La démonstration du théorème (3) se fait par la linéarisation. En effet, la matrice jacobienne associée au système (II.1) prend la forme

$$J = \begin{pmatrix} -\mu - \beta I & 0 & -\beta S & \gamma \\ \beta I & -\mu - \sigma & \beta S & 0 \\ 0 & \sigma & -\mu - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu & -\mu - \gamma \end{pmatrix}.$$

Au point $E_0 = (1, 0, 0, 0)$ la matrice jacobienne est

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & -\mu - \sigma & \beta & 0 \\ 0 & \sigma & -\mu - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu & -\mu - \gamma \end{pmatrix}.$$

La trace et le déterminant de cette matrice sont donnés par

$$\begin{aligned} \text{tra } J_{E_0} &= - (4\mu + \sigma + \nu + \gamma) < 0 \\ \det J_{E_0} &= \mu(\mu + \gamma) [(\mu + \sigma)(\mu + \nu) - \sigma\beta]. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{R}_0 < 1$, dans ce cas $\det J_{E_0} > 0$ et par suite E_0 est *stable*. Sinon E_0 est *instable*. \square

Proposition 2.

Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, le DFE est globalement asymptotiquement stable dans le cadran positif Ω .

Preuve.

Pour montrer la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante : $V = E + \frac{\sigma + \mu}{\sigma} I$.

En dérivant le long des trajectoires de (II.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{E} + \frac{\sigma + \mu}{\sigma} \dot{I} \\ &= \beta IS - (\sigma + \mu) E + \left(\frac{\sigma + \mu}{\sigma} \right) (\sigma E - (\nu + \mu) I) \\ &= \beta IS - \frac{(\sigma + \mu)(\nu + \mu)}{\sigma} I \\ &= \beta IS - \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} I \\ &= \beta I \left(S - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

De plus $\dot{V} = 0$ si $I = 0$ ou $S^* = S$ et $\mathbf{R}_0 = 1$. Donc le plus grand ensemble invariant contenu dans cet ensemble est $L = \{(S, I) \in \Omega / \dot{V}(S, I) = 0\}$ qui est réduit au DFE. Puisque nous sommes dans un compact positivement invariant, par le principe d'invariance de LaSalle [23],[2], le DFE est *globalement asymptotiquement stable* dans Ω .

Dans le cas contraire où $\mathbf{R}_0 > 1$, une conclusion directe du théorème de Chetaev I.4.3, donne l'instabilité du DFE. \square

Remarque 1.

Contrairement aux théorèmes de Lyapunov, le principe d'invariance de LaSalle ne requiert pas que la fonction V soit définie positive. Si le plus grand ensemble invariant L contenu dans l'ensemble Ω des points où V' est nulle, est réduit au point d'équilibre, ie, si $L = \{E_0\}$, le principe d'invariance de LaSalle permet de conclure que l'équilibre est attractif. Mais l'inconvénient du principe de LaSalle, est qu'il prouve seulement l'attractivité du point d'équilibre. Il est bien connu que dans les cas non-linéaires, l'attractivité n'implique pas la stabilité. Mais quand la fonction V n'est pas définie positive, la stabilité de Lyapunov peut être prouvée. C'est pourquoi le principe de LaSalle est souvent maladroitement cité. Des conditions additionnelles permettent, avec le principe de LaSalle, de vérifier la stabilité asymptotique. Pour obtenir la stabilité du principe de LaSalle, un travail supplémentaire est nécessaire. Le résultat le plus complet, dans le but de l'utilisation du principe de LaSalle pour prouver la stabilité asymptotique, a été obtenue par LaSalle lui même [20],[21].

II.4.2 Stabilité du point d'équilibre endémique

Théorème 4.

Lorsque $\mathbf{R}_0 > 1$, le point d'équilibre endémique (S^, E^*, I^*, R^*) pour le système (II.1) est localement asymptotiquement stable.*

Preuve.

En utilisant le critère de Routh Hurwitz [11] qui donne des conditions semi algébriques nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice carrée à coefficients réels soit stable.

Comme $S + E + I + R = 1$, on peut réduire le système (II.1) à un système tridimensionnel :

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu + \gamma R - \mu S - \beta IS, \\ \dot{E} = \beta IS - (\mu + \sigma)E, \\ \dot{I} = \sigma E - (\nu + \mu)I \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

dont sa matrice jacobienne au point (S^*, E^*, I^*) est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -\mu - \beta I^* & 0 & -\beta S^* \\ \beta I^* & -\mu - \sigma & \beta S^* \\ 0 & \sigma & -\mu - \nu \end{pmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique de Routh (P) :

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} -(\mu + \beta I^*) - \lambda & 0 & -\beta S^* \\ \beta I^* & -(\mu + \sigma) - \lambda & \beta S^* \\ 0 & \sigma & -(\mu + \nu) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -(\mu + \beta I^* + \lambda)[(\mu + \sigma + \lambda)(\mu + \nu + \lambda) - \beta\sigma S^*] - \beta^2\sigma S^* I^* = 0 \\ &\iff -\lambda^3 - \lambda^2(3\mu + \sigma + \nu + \beta I^*) - \lambda[(\mu + \beta I^*)(\mu + \sigma) \\ &\quad + (\mu + \beta I^*)(\mu + \nu) + (\mu + \sigma)(\mu + \nu) - \beta\sigma S^*] + (\mu\beta\sigma S^*) = 0 \\ &\iff \lambda^3 + \lambda^2(3\mu + \sigma + \nu + \beta I^*) + \lambda[(\mu + \beta I^*)(\mu + \sigma) + (\mu + \beta I^*)(\mu + \nu) \\ &\quad + (\mu + \sigma)(\mu + \nu) - \beta\sigma S^*] - (\mu\beta\sigma S^*) = 0. \end{aligned}$$

En effet, le polynôme de Routh d'ordre 3 est :

$$P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

où les coefficients de Routh sont donnée par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 3\mu + \sigma + \nu + \beta I^*, \\ a_2 &= (\mu + \beta I^*)(\mu + \sigma) + (\mu + \beta I^*)(\mu + \nu) + (\mu + \sigma)(\mu + \nu) - \beta\sigma S^*, \\ a_3 &= -(\mu\beta\sigma S^*). \end{aligned}$$

Nous remplaçons S^* par sa valeur, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 3\mu + \sigma + \nu + \beta I^*, \\ a_2 &= (\mu + \beta I^*)[(\mu + \sigma) + (\mu + \nu)], \\ a_3 &= -\mu(\mu + \sigma)(\mu + \nu). \end{aligned}$$

En suite, on calcul les déterminants de Hurwitz,

(i) $H_1 = |a_1| = a_1 > 0$ si $I^* \geq 0$. Or $I^* \geq 0$ lorsque $\mathbf{R}_0 \geq 1$.

Par suite, si $\mathbf{R}_0 > 1$ nous avons $\mathbf{H}_1 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_2 - a_3 \\ &= (3\mu + \sigma + \nu + \beta I^*) (\mu + \beta I^*) [(\mu + \sigma) + (\mu + \nu)] + \mu (\mu + \sigma) (\mu + \nu). \end{aligned}$$

Alors, $\mathbf{H}_2 > 0$ lorsque $\mathbf{R}_0 > 1$.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= a_3 H_2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{H}_3 > 0$ lorsque $\mathbf{R}_0 > 1$.

Conclusion

$H_1, H_2, H_3 > 0$, le point d'équilibre endémique (S^*, E^*, I^*) est *localement asymptotiquement stable* si $\mathbf{R}_0 > 1$. □

II.5 Persistance uniforme

Proposition 3.

Le système (II.1) est uniformément persistant ([1],[3],[19]) s'il existe $0 < \epsilon_0 < 1$ telles que :

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) &> \epsilon_0, & \liminf_{t \rightarrow +\infty} E(t) &> \epsilon_0, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) &> \epsilon_0, & \liminf_{t \rightarrow +\infty} R(t) &> \epsilon_0. \end{aligned}$$

Preuve.

En utilisant l'hypothèse $S + E + I + R = 1$, le modèle (II.1) peut être réduit à un système tridimensionnel

$$\begin{cases} \dot{E} = \beta I S - (\mu + \sigma) E, \\ \dot{I} = \sigma E - (\nu + \mu) I, \\ \dot{R} = \nu I - (\mu + \gamma) R. \end{cases} \quad \text{(II.4)}$$

On peut voir que la région $\Omega = \{(E, I, R) : E(t), I(t), R(t) > 0, E + I + R \leq 1\}$ est positivement invariant. Il existe toujours un point d'équilibre trivial $(0, 0, 0)$ qui correspond à l'état sans maladie. D'après le théorème (1), nous pouvons voir que la persistance uniforme du système (II.4) équivaut à l'instabilité du point d'équilibre $(0, 0, 0)$. Une conclusion du théorème (1) donnent la persistance uniforme du système (II.4).

□

II.6 Une nouvelle approche de la stabilité équi-uniforme du point d'équilibre endémique

Le système (II.1) et d'autres modèles épidémiologiques sont connu le fait que les fonctions de Lyapunov ont été rarement construites pour établir la stabilité globale du point d'équilibre endémique .

Dans cette section nous appliquons les résultats de Van Den Driech [28] sur notre modèle.

On définit le taux de reproduction de base par :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\sigma}{(\sigma + \mu)(\nu + \mu)},$$

Et on considère la restriction des paramètres du système (II.1) donnée par :

$$\nu\gamma < \sigma_0 (\beta\eta_0 + \nu + \mu) (\beta\eta_0 + \gamma + \mu) \text{ avec } \eta_0 = \min I > 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\sigma - \nu - \mu < \gamma. \quad (\text{II.6})$$

Théorème 5.

Supposons que $R_0 > 1$. Alors aucune courbe fermée ne peut être invariante par rapport au système (II.1) à condition que (II.5) ou (II.6) doit être satisfaite .

Aussi, chaque semi trajectoire de (II.1) dans Ω converge vers le point d'équilibre endémique.

Pour chaque $(S, E, I, R) \in \mathring{\Omega}$, la matrice jacobienne du système (II.1) peut s'écrire

$$J = -\mu I_{4 \times 4} + \phi, \quad (\text{II.7})$$

où $I_{4 \times 4}$ est la matrice identité (4×4) et

$$\phi = \begin{pmatrix} -\beta I & 0 & -\beta S & \gamma \\ \beta I & -\sigma & \beta S & 0 \\ 0 & \sigma & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu & -\gamma \end{pmatrix}$$

qui satisfait

$$(1, 1, 1, 1) \phi = (0, 0, 0, 0). \quad (\text{II.8})$$

L'ensemble des systèmes différentiels linéaires

$$\dot{Z}(t) = A(t) Z(t), \quad A \in \mathcal{F}$$

est équi-uniformément asymptotiquement stable s'il existe $M, m > 0$ telles que,

$$|Z(t)| \leq M |Z(s)| e^{-m(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t < +\infty. \quad (\text{II.9})$$

On considère l'ensemble des systèmes linéaires associés à (II.1),

$$\dot{Z}(t) = [\mu I_{4 \times 4} + J^{[3]}(x(t))] Z(t), \quad (\text{II.10})$$

où

$$x(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t)) \in \mathring{\Omega},$$

et $J^{[3]}(x(t))$ est la troisième matrice de composé additif de $J(x(t))$ dans (II.7).

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.

On suppose que

- (a) *Le système (II.1) est uniformément persistant .*
- (b) *Le système (II.10) est équi-uniformément asymptotiquement stable.*

Alors aucune courbe fermée ne peut être invariante par rapport au système (II.1) et chaque semi trajectoire dans Ω converge vers le point d'équilibre .

Pour appliquer la proposition (4) dans la preuve du théorème (5) nous utilisons la méthode direct de Lyapunov pour établir la stabilité équi-uniforme asymptotique de l'ensemble des systèmes linéaires (II.10).

Pour $(x, z) \in \mathbb{R}_+^4 \times \mathbb{R}^4$, soit $(x, z) \rightarrow V(x, z)$ une fonction localement lipschitzienne et soit $\dot{V}(x, z) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(x + hf(x), z + h(\mu I_{4 \times 4} + J^{[3]}(x))z) - V(x, z)]$.

Si $x(t)$ est la solution de (II.1) et $z(t)$ est la solution de (II.7), alors

$$D_+ V(x(t), z(t)) = \dot{V}(x, z).$$

Corrolaire 1.

Supposons que la condition (a) de la proposition (4) soit satisfaite. Supposons qu'il existe des nombres positifs $a_1, a_2, b > 0$ tels que :

i) $a_1|z| \leq V(x, z) \leq a_2|z|,$

ii) $\dot{V}(x, z) \leq -bV(x, z).$

Pour tout $(x, z) \in K \times \mathbb{R}^4$. Alors les résultats de la proposition (4) sont bien conservés.

Preuve du théorème (5).

On vas utiliser la proposition (4) avec le corollaire (1) pour prouver le théorème (5).

D'après le théorème (1), nous pouvons voir que la persistance uniforme de notre système (II.1) est équivalent à l'instabilité de l'équilibre sans maladie $(0, 0, 0)$ si et seulement si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Nous devons choisir une fonction le Lyapunov V pour l'ensemble des systèmes linéaires (II.10) qui vérifie les conditions i) et ii) du corollaire (1). Soit $z(t) = (X(t), Y(t), Z(t), W(t))$ la solution du système (II.10) et soit $x(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t))$ la solution du système (II.1) avec $x(0) \in K$, un compact absorbant.

D'après (II.10) et par un calcul direct [6] et [27], il s'ensuit que la fonction à valeur vectorielle $\left(\left(\frac{\alpha}{E} \right) |X|, \left(\frac{1}{E} \right) |Y|, \left(\frac{1}{I} \right) (|Z| + |W|) \right)$, où α est un nombre positif, vérifie le système d'inégalités suivantes,

$$\begin{aligned} D_+ \frac{\alpha|X|}{E} &\leq - \left(\frac{E'}{E} + \beta g(I) + \sigma + \nu + 2\mu \right) \frac{\alpha|X|}{E} + \frac{\alpha\gamma I}{E} \frac{|Z| + |W|}{I}, \\ D_+ \frac{|Y|}{E} &\leq \frac{\nu \alpha |X|}{\alpha E} - \left(\frac{E'}{E} + \beta g(I) + \sigma + \gamma + 2\mu \right) \frac{|Y|}{E} + \frac{\beta |g'(I)| I S}{E} \frac{|Z| + |W|}{I}, \\ D_+ \frac{|Z| + |W|}{I} &\leq \frac{\sigma E}{I} \frac{|Y|}{E} - \left(\frac{I'}{I} + \nu + \gamma + 2\mu \right) \frac{|Z| + |W|}{I}, \end{aligned}$$

où D_+ désigne la dérivée à droite par rapport à t.

On utilise les equations du système (II.1),

$$\frac{E'}{E} = \frac{\beta g(I)S}{E} - \sigma - \mu, \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{I'}{I} = \frac{\sigma E}{I} - \nu - \mu, \quad (\text{II.12})$$

et en particulier

$$\frac{E'}{E} + \sigma + \mu = \frac{\beta g(I)S}{E} \geq 0. \quad (\text{II.13})$$

Par l'hypothèse de la persistance uniforme de (II.1) et la relation (II.5), il existe $T > 0$ tel que $t > T$, ceci implique

$$|(S(t), E(t), I(t), R(t))| > \sigma_0, \quad (\text{II.14})$$

et

$$I(t) \geq \eta_0, \quad (\text{II.15})$$

pour tout $(S(0), E(0), I(0), R(0))$ dans l'ensemble compact K . Les relations (II.11) - (II.15) impliquent

$$D_+ \frac{\alpha |X|}{E} \leq -(\beta \eta_0 + \nu + \mu) \frac{\alpha |X|}{E} + \frac{\alpha \gamma}{\sigma_0} \frac{|Z| + |W|}{I}, \quad (\text{II.16})$$

$$D_+ \frac{|Y|}{E} \leq \frac{\nu \alpha |X|}{\alpha E} - \left(\frac{\beta g(I)S}{E} + \beta \eta_0 + \gamma + \mu \right) \frac{|Y|}{E} + \frac{\beta g(I)S}{E} \frac{|Z| + |W|}{I}, \quad (\text{II.17})$$

$$D_+ \frac{|Z| + |W|}{I} \leq \frac{\sigma E}{I} \frac{|Y|}{E} - \left(\frac{\sigma E}{I} + \gamma + \mu \right) \frac{|Z| + |W|}{I}. \quad (\text{II.18})$$

Nous choisissons la fonction de Lyapunov $V_1 = V_1(S, E, I, R, X, Y, Z, W)$ défini par

$$V_1 = \max \left\{ \frac{\alpha |X|}{E}, \frac{|Y|}{E}, \frac{|Z| + |W|}{I} \right\}, \quad (\text{II.19})$$

où α doit être spécifier plus tard. Utilisant (II.14) et le fait que chacune de $S(t), E(t), I(t)$ et $R(t)$ est majorée par 1, nous déduisons que il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ deux constantes indépendantes de $(S(0), E(0), I(0), R(0))$ telles que

$$\alpha_1 |(X, Y, Z, W)| \leq |V_1| \leq \alpha_2 |(X, Y, Z, W)| \quad (\text{II.20})$$

où la norme $|(X, Y, Z, W)|$ peut être choisi comme $|X| + |Y| + |Z| + |W|$.

Ainsi V_1 satisfait la première condition du corollaire (1). Les inégalités (II.16) - (II.18) impliquent

$$D_+V_1 \leq -bV_1$$

où

$$-b = \max \left\{ -(\beta\eta_0 + \nu + \mu) + \frac{\alpha\gamma}{\sigma_0}, -(\beta\eta_0 + \gamma + \mu) + \frac{\nu}{\alpha}, -(\gamma + \mu) \right\}.$$

Selon le corollaire (1), la conclusion du théorème (5) est valable si α peut être choisi pour que $b > 0$. Cela est possible quand

$$\nu\gamma < \sigma_0(\beta\eta_0 + \nu + \mu)(\beta\eta_0 + \gamma + \mu),$$

dans ce cas on peut choisir n'importe quel $\alpha \in \left(\frac{\nu}{(\beta\eta_0 + \gamma + \mu)}, \frac{\sigma_0(\beta\eta_0 + \nu + \mu)}{\gamma} \right)$ dans la définition (II.19) de V_1 . □

Chapitre III

Un modèle épidémique SIS avec l'âge de la vaccination

La vaccination est une méthode couramment utilisée pour contrôler des maladies, telles que la rougeole, la poliomyélite, la diphtérie, le tétanos, la coqueluche, la tuberculose [9]. L'étude de la vaccination, du traitement et des changements comportementaux liés à la transmission de la maladie a fait l'objet d'une analyse théorique intense [9]-[24].

Il existe une grande variabilité dans la structure des modèles de vaccination, en fonction de la maladie et de type du vaccin. La durée de l'immunité est un aspect qui influe beaucoup sur l'impact des vaccins dans la santé publique. Certains vaccins confèrent une immunité permanente contre l'infection, par exemple, les vaccins contre la coqueluche [37] et la varicelle [4]. Une fois qu'un vaccin a disparu du corps de la personne vaccinée, ce dernier redevient sensible à la maladie. Li et Ma [24] ont établi un modèle épidémique avec des stratégies dans lesquelles le vaccin était disponible à la fois pour les nouveau-nés, les personnes susceptibles et l'immunité des personnes vaccinées était temporaire. Ils ont considéré le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = (1 - q)A - \mu S(t) - pS(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) + \eta v(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} = qA + pS(t) - (\mu + \eta)v(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t), \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où $S(t)$, $v(t)$ et $I(t)$ désignent les nombres d'individus susceptibles, vaccinés et infectieux à l'instant t , respectivement. Le système (III.1) a été formulé comme un système d'EDO en supposant que tous les individus d'une classe se comportent d'une manière identique, quel que soit le temps passé dans leur classe. Cependant, les expériences précoces d'infectivité [10] rapportées par Francis, ainsi que les mesures des titres d'antigène et d'anticorps du VIH ont montré la possibilité d'un pic d'infectivité précoce (quelques semaines après l'exposition) et d'un plateau d'infectivité tardif (environ un an avant l'apparition du SIDA « complet »).

Par conséquent, il est nécessaire d'intégrer l'âge de la durée dans la modélisation. Depuis que Hoppensteadt a établi un modèle d'épidémie dépendant de l'âge dans [16], les effets du facteur d'âge sur les modèles d'épidémie ont été largement pris en compte (voir, par exemple, [18]-[35]). Dans ce chapitre, nous introduisons un modèle **SIS** avec l'âge de vaccination, dans lequel le vaccin perd ses propriétés protectrices avec le temps et il finit par rendre les individus vaccinés à nouveau susceptibles (Par exemple, le présent vaccin anti-VHB, sa protection immunitaire ne peut durer longtemps et ne confère aucune immunité à certains personnes). Le modèle que nous avons considéré prend la forme

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - pS(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) + \int_0^\infty \eta(a)v(a,t)da, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial a} = -(\mu + \eta(a))v(a,t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t), \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

avec la condition au limite

$$v(0,t) = pS(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{III.3})$$

et les conditions initiales

$$S(0) = S_0, \quad v(a,0) = v_0(a), \quad I(0) = I_0, \quad a \geq 0. \quad (\text{III.4})$$

- ▷ a : représente l'âge de la vaccination qui signifie le temps passé en classe vaccinée.
- ▷ $v(a,t)$: est la densité d'individus vaccinés à l'âge de vaccination a et au temps t et on suppose que les nouveaux individus vaccinés entrent dans la classe vaccinée $v(a,t)$ avec un âge de vaccination égal à zéro.
- ▷ $\eta(a)$: est Le taux de perte du vaccin qui est une fonction dépend de l'âge a .
- ▷ $\int_0^\infty \eta(a)v(a,t)da$: est le nombre d'individus passant de la classe vaccinée à la classe susceptible au temps t .

Les paramètres $p, q, A, \beta, \gamma, \mu$ et μ_1 sont des constantes positives. A est le taux de natalité des nouveau-nés, μ est le taux de mortalité naturelle et μ_1 est le taux de mortalité induite par la maladie, β est le taux de transmission du virus, γ est le taux de récupération des individus infectés. La population susceptible est vaccinée à un taux constant p .

III.1 Analyse du modèle

Dans cette section, on donne quelques hypothèses sur la fonction $\eta(a)$, qui est supposée d'être biologiquement significatif et de permettre de traiter le problème (III.2) mathématiquement.

hypothèse III.1.1.

Pour le problème (III.2) - (III.4), nous supposons que

- (i) $\eta(a) \in L^1_+(0, \infty)$,
- (ii) $\eta(a)$ est Lipschitz continue sur \mathcal{R}^+ avec le coefficient M_n ,
- (iii) il existe $\mu_0 \in (0, \mu]$ tel que $\eta(a) \geq \mu_0$ pour $a \geq 0$.

On définit l'espace des fonctions pour le problème (III.2) - (III.4) comme

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}^+ \times L^1_+(0, \infty) \times \mathcal{R}^+,$$

muni de la norme

$$\| (x_1, x_2, x_3) \|_{\mathcal{X}} = x_1 + \int_0^\infty x_2(s) ds + x_3.$$

Ensuite, la condition initiale (III.4) est dans \mathcal{X} , c'est-à-dire

$$x_0 = (S_0, v_0(\cdot), I_0) \in \mathcal{X}. \quad (\text{III.5})$$

où $S_0, I_0 \in \mathcal{R}^+$ et $v_0(a) \in L^1_+(0, \infty)$.

Par la théorie des équations différentielles [13], le système (III.2) avec la condition initiale (III.5) admet une solution unique non négative. Par conséquent, nous obtenons un semi flot continu $\Phi : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ pour le système (III.2) qui est défini comme

$$\Phi(t, x_0) = \Phi_t(x_0) = (S(t), v(\cdot, t), I(t)), \quad t \geq 0, x_0 \in \mathcal{X}$$

avec

$$\begin{aligned} \|\Phi_t(x_0)\|_{\mathcal{X}} &= \|(S(t), v(\cdot, t), I(t))\|_{\mathcal{X}} \\ &= S(t) + \int_0^\infty v(s, t) ds + I(t). \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Proposition III.1.1.

Pour $h > 0$, soit $u(t, h) = he^{-(\mu+\mu_0)t}$. Alors $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, h) = 0$ et $\|\phi(t, x_0)\|_{\mathcal{X}} \leq u(t, h)$ si $\|x_0\|_{\mathcal{X}} \leq h$.

Preuve. Il est clair que, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, h) = 0$. Pour $x_0 \in \mathcal{X}$, $\|x_0\|_{\mathcal{X}} \leq h$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|\phi(t, x_0)\|_{\mathcal{X}} &= |0| + \int_0^{\infty} |z(a, t)| da + |0| \\
 &= \int_t^{\infty} |v_0(a-t) \frac{\rho(a)}{\rho(a-t)}| da \\
 &= \int_0^{\infty} |v_0(\tau) \frac{\rho(t+\tau)}{\rho(\tau)}| d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} |v_0(\tau) \exp\left(-\int_{\tau}^{t+\tau} \varepsilon(s) ds\right)| d\tau \\
 &\leq e^{-(\mu+\mu_0)t} \int_0^{\infty} |v_0(\tau)| d\tau \\
 &\leq e^{-(\mu+\mu_0)t} \|x_0\|_{\mathcal{X}} \\
 &\leq u(t, h).
 \end{aligned}$$

□

On définit l'espace d'état du système (III.2) comme suit :

$$\Omega = \left\{ (S(t), v(\cdot, t), I(t)) \in \mathcal{X}, 0 \leq S(t) + \int_0^{\infty} v(a, t) da + I(t) \leq \frac{A}{\tilde{\mu}} \right\},$$

avec

$$\tilde{\mu} = \min\{\mu, \mu_1\}.$$

Théorème III.1.1.

Pour le système (III.2), nous avons

- (i) Ω est positivement invariant pour Φ ,
- (ii) Φ est un point dissipatif et Ω est un attracteur incluse dans \mathcal{X} .

Preuve. Pour $t \geq 0$, $x_0 \in \Omega$, d'après l'équation (III.6), nous avons

$$\frac{d}{dt} \|\Phi_t(x_0)\|_{\mathcal{X}} = \frac{dS(t)}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} v(a, t) da + \frac{dI(t)}{dt}. \quad (\text{III.7})$$

Compte tenu de l'équation (III.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} v(a, t) da &= \frac{d}{dt} \int_0^t pS(t-a)\rho(a) da + \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} v_0(a-t) \frac{\rho(a)}{\rho(a-t)} da \\
 &= \frac{d}{dt} \int_0^t pS(\tau)\rho(t-\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} v_0(\tau) \frac{\rho(t+\tau)}{\rho(\tau)} d\tau \\
 &= pS(t)\rho(0) + \int_0^t pS(\tau)\rho(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} v_0(\tau) \frac{d}{dt} \frac{\rho(t+\tau)}{\rho(\tau)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Notons que

$$\rho(0) = 1, \frac{d\rho(a)}{da} = -\varepsilon(a)\rho(a),$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty v(a, t) da = pS(t) - \int_0^\infty \varepsilon(a)v(a, t) da, \quad (\text{III.8})$$

la combinaison de (III.7) et (III.8) donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\Phi_t(x_0)\|_{\mathcal{X}} &= \frac{dS(t)}{dt} + pS(t) - \int_0^\infty \varepsilon(a)v(a, t) da + \frac{dI(t)}{dt} \\ &= A - \mu S(t) - pS(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) + \int_0^\infty \eta(a)v(a, t) da \\ &\quad + pS(t) - \int_0^\infty \varepsilon(a)v(a, t) da + \beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t) \\ &= A - \mu S(t) - \mu \int_0^\infty v(a, t) da - \mu_1 I(t) \\ &\leq A - \tilde{\mu} \left(S(t) + \int_0^\infty v(a, t) da + I(t) \right) \\ &= A - \tilde{\mu} \|\Phi_t(x_0)\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Il découle de la formule de variation des constantes que pour $t \geq 0$,

$$\|\Phi_t(x_0)\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{A}{\tilde{\mu}} - e^{\tilde{\mu}t} \left(\frac{A}{\tilde{\mu}} - \|x_0\|_{\mathcal{X}} \right),$$

ce qui implique $\|\Phi_t(x_0)\|_{\mathcal{X}} \in \Omega$. Par conséquent, Ω est positivement invariant pour Φ . De plus, puisque $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t(x_0)\|_{\mathcal{X}} \leq A/\tilde{\mu} \quad \forall x_0 \in \mathcal{X}$, Φ est un point dissipatif et Ω est un attracteur dans \mathcal{X} . \square

Le résultat suivant est une conséquence directe de l'hypothèse (III.1.1) et du théorème (III.1.1).

Corollaire III.1.1.

Si $x_0 \in \mathcal{X}$ et $\|x_0\|_{\mathcal{X}} \leq M$ pour certain $M \geq A/\tilde{\mu}$, alors les affirmations suivantes sont vérifiées :

- (i) $0 \leq S(t), I(t), \int_0^\infty v(a, t) da \leq M$,
- (ii) $v(0, t) \leq pM$.

III.2 Régularité Asymptotique (en anglais : Asymptotic Smoothness)

Dans cette section, nous étudions la régularité asymptotique d'un semi flot généré par le système (III.2) qui est nécessaire pour obtenir les propriétés globales du système.

Premièrement, nous donnons la définition de la régularité asymptotique.

Définition III.2.1.

Un semi flot $\Phi(t, x_0) : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est dit asymptotiquement régulière, si, pour tout ensemble non vide, fermé borné $B \subset \mathcal{X}$ pour lequel $\Phi(t, B) \subset B$, il existe un ensemble compact $B_0 \subset B$ tel que B_0 est un attracteur de B .

Pour vérifier la régularité asymptotique d'un semi-flot du système (III.2), nous avons besoin le résultat suivant.

Lemme III.2.1.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées, alors le semi-flot $\Phi(t, x_0) = \phi(t, x_0) + \varphi(t, x_0) : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est asymptotiquement régulière.

- (i) il existe une fonction $u : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^+$ tel que $u(t, h) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ et $\|\phi(t, x_0)\|_{\mathcal{X}} \leq u(t, h)$ si $\|x_0\|_{\mathcal{X}} \leq h$.
- (ii) Pour $t \geq 0$, $\varphi(t, x_0)$ est complètement continu.

Dans notre application, nous divisons le semi-flot Φ en deux opérateurs suivants $\phi(t, x_0), \varphi(t, x_0) : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$,

$$\phi(t, x_0) = (0, z(\cdot, t), 0), \quad \varphi(t, x_0) = (S(t), \tilde{z}(\cdot, t), I(t)),$$

dans lequel

$$z(a, t) = \begin{cases} 0, & t > a \geq 0, \\ v(a, t), & a \geq t \geq 0, \end{cases} \quad \tilde{z}(a, t) = \begin{cases} v(a, t), & t > a \geq 0, \\ 0, & a \geq t \geq 0. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Alors, pour $t \geq 0$, nous avons $\Phi(t, x_0) = \phi(t, x_0) + \varphi(t, x_0)$. En utilisant la formulation de

Volterra ([36] et [17]), et en intégrant le terme $v(a, t)$ du système (III.2), on trouve

$$v(a, t) = \begin{cases} v(0, t-a) \exp(-\int_0^a \varepsilon(s) ds) = pS(t-a)\rho(a), & t > a \geq 0, \\ v_0(a-t) \exp(-\int_{a-t}^a \varepsilon(s) ds) = v_0(a-t) \frac{\rho(a)}{\rho(a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

où $\rho(a) = \exp(-\int_0^a \varepsilon(s) ds)$, $\varepsilon(a) = \mu + \eta(a)$. Ainsi, par la définition (III.2), on obtient

$$z(a, t) = \begin{cases} 0, & t > a \geq 0, \\ v_0(a-t) \frac{\rho(a)}{\rho(a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

$$\tilde{z}(a, t) = \begin{cases} pS(t-a)\rho(a), & t > a \geq 0, \\ 0, & a \geq t \geq 0. \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Pour satisfaire la condition (ii) du lemme (III.2.1), nous devons prouver que pour tout ensemble fermé, borné $B \subset \mathcal{X}$, $\varphi(t, B)$ est compact. Par le corollaire (III.1.1), $S(t)$ et $I(t)$ restent dans l'ensemble compact $[0, A/\tilde{\mu}] \subset [0, M]$, où $M \geq A/\tilde{\mu}$. Les résultats suivants donnent un critère pour la compacité dans $L^1_+(0, \infty)$.

Proposition III.2.1.

Soit $K \subset L^p(0, \infty)$ fermé et borné où $p \geq 1$. Alors K est compact si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty |f(z+h) - f(z)|^p dz = 0$ pour $f \in K$,
- (ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty |f(z)|^p dz = 0$ pour $f \in K$.

Théorème III.2.1.

Pour $t \geq 0$, $\varphi(t, x_0)$ est complètement continu.

Preuve. Notons que

$$\rho(a) \leq e^{-(\mu+\mu_0)a}.$$

Il résulte de (III.1.1) que

$$\int_h^\infty |\tilde{z}(a, t)| da \leq \int_h^\infty pM e^{-(\mu+\mu_0)a} da = \frac{pM}{\mu + \mu_0} e^{-(\mu+\mu_0)h},$$

ceci implique

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_h^\infty |\tilde{z}(a, t)| da = 0.$$

Afin de vérifier la condition (i), pour $t \geq 0$, $h \in (0, t)$ suffisamment petite, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{z}(a+h, t) - \tilde{z}(a, t)| da &= \int_0^{t-h} |pS(t-a-h)\rho(a+h) - pS(t-a)\rho(a)| da \\ &+ \int_{t-h}^t |0 - pS(t-a)\rho(a)| da \\ &\leq \int_0^{t-h} pS(t-a-h)|\rho(a+h) - \rho(a)| da \\ &+ \int_0^{t-h} \rho(a)|pS(t-a-h) - pS(t-a)| da \\ &+ \int_{t-h}^t pS(t-a)\rho(a) da. \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

On note

$$\Delta = \int_0^{t-h} \rho(a)|pS(t-a-h) - pS(t-a)| da. \quad (\text{III.14})$$

Depuis $0 \leq \rho(a) \leq 1$ et $\rho(a)$ est une fonction non croissante par rapport à a , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_0^{t-h} |\rho(a+h) - \rho(a)| da &= \int_0^{t-h} \rho(a) da - \int_0^{t-h} \rho(a+h) da \\ &= \int_0^{t-h} \rho(a) da - \int_h^t \rho(a) da \\ &= \int_0^{t-h} \rho(a) da - \int_h^{t-h} \rho(a) da - \int_{t-h}^t \rho(a) da \\ &= \int_0^h \rho(a) da - \int_{t-h}^t \rho(a) da \leq h. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

En combinant (III.13) – (III.15) nous obtenons

$$\int_0^\infty |\tilde{z}(a+h, t) - \tilde{z}(a, t)| da \leq 2pMh + \Delta.$$

D'après (III.1.1), nous obtenons $|dS/dt|$ est majoré par $A + (\mu + p + \gamma + \bar{\eta})M + \beta M^2$, ce qui implique $S(\cdot)$ est Lipschitz dans l'intervalle $(0, \infty)$, c'est-à-dire

$$|S(t-a-h) - S(t-a)| \leq M_s h.$$

Par conséquent, il découle de (III.14) que

$$\Delta \leq \int_0^{t-h} pM_s h e^{-(\mu_0 + \mu)a} da \leq \frac{pM_s h}{\mu_0 + \mu}.$$

En conclusion, nous avons

$$\int_0^\infty |\tilde{z}(a+h, t) - \tilde{z}(a, t)| da \leq \left(2pM + \frac{pM_s h}{\mu_0 + \mu} \right) h,$$

qui converge vers 0 quand $h \rightarrow 0$ et donc la condition (i) est prouvée. Ainsi, $\tilde{z}(a, t)$ reste dans un sous-ensemble compact $B_{\tilde{z}}$ qui mène à $\phi(t, B) \subseteq [0, M] \times B_{\tilde{z}} \times [0, M]$, qui est compact dans X . Alors $\varphi(t, x_0)$ est complètement continu. \square

En combinant (III.2.1), (III.1.1) et le théorème (III.2.1) nous obtenons la régularité asymptotique.

Théorème III.2.2.

Le semi-flot $\Phi(t, x_0)$ du système (III.2) est *asymptotiquement régulière*.

III.3 Étude de la stabilité locale

Dans cette section, nous étudions la stabilité locale du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique du système (III.2) en analysant respectivement les équations caractéristiques correspondantes.

Le système (III.2) admet toujours l'équilibre sans maladie $E_0(S^0, v^0(a), 0)$, où

$$S^0 = \frac{A}{\mu + p(1 - \theta)}, \quad v^0(a) = pS^0\rho(a),$$

avec $\theta = \int_0^\infty \eta(a)\rho(a)da$. Il est facile de voir que,

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\infty \eta(a) \exp\left(-\int_0^a \mu + \eta(s)ds\right) da \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu a} \eta(a) \exp\left(-\int_0^a \eta(s)ds\right) da \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu a} d\left(-\exp\left(-\int_0^a \eta(s)ds\right)\right) \\ &= -\left[e^{-\mu a} \exp\left(-\int_0^a \eta(s)ds\right)\right]_0^\infty - \mu \int_0^\infty \exp\left(-\mu a - \int_0^a \eta(s)ds\right) da \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

On définit

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\mathbf{A}\beta + \mathbf{p}\theta(\mu_1 + \gamma)}{(\mu + \mathbf{p})(\mu_1 + \gamma)}. \tag{III.16}$$

Si $\mathcal{R}_0 > 1$, le système (III.2) admet un équilibre endémique unique $E^*(S^*, v^*(a), I^*)$, où

$$S^* = \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta}, \quad v^*(a) = pS^*\rho(a), \quad I^* = \frac{(\mu + p)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mu_1} S^*.$$

Tout d'abord, nous étudions la stabilité locale du point d'équilibre sans maladie E_0 . On fait le changement de variables suivant :

$$x_1(t) = S(t) - S^0, \quad x_2(a, t) = v(a, t) - v^0(a), \quad x_3(t) = I(t).$$

La linéarisation du système (III.2) au point E_0 donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = -\mu x_1(t) - px_1(t) - \beta S^0 x_3(t) + \gamma x_3(t) + \int_0^\infty \eta(a) x_2(a, t) da, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial x_2}{\partial a} = -(\mu + \eta(a)) x_2(a, t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = \beta S^0 x_3(t) - (\mu_1 + \gamma) x_3(t), \\ x_2(0, t) = px_1(t). \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

Soient

$$x_1(t) = x_1^0 e^{\lambda t}, \quad x_2(a, t) = x_2^0(a) e^{\lambda t}, \quad x_3(t) = x_3^0 e^{\lambda t}, \quad (\text{III.18})$$

x_1^0, x_3^0 sont des constants et $x_2^0(a)$ est une fonction dépend de a . En remplaçant (III.18) dans (III.17), il s'ensuit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda x_1^0 = -\mu x_1^0 - px_1^0 - \beta S^0 x_3^0 + \gamma x_3^0 + \int_0^\infty \eta(a) x_2^0(a) da, \\ \frac{dx_2^0(a)}{da} + \lambda x_2^0(a) = -(\mu + \eta(a)) x_2^0(a), \\ \lambda x_3^0 = \beta S^0 x_3^0 - (\mu_1 + \gamma) x_3^0, \\ x_2^0(0) = px_1^0. \end{array} \right. \quad (\text{III.19})$$

Si $x_3^0 \neq 0$, Il découle de la troisième équation de (III.19) que

$$\lambda = \beta S^0 - \mu_1 - \gamma = \frac{(\mu + p)(\mu_1 + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)}{A} S^0. \quad (\text{III.20})$$

Par conséquent, il y a une racine réelle $\lambda < 0$ si $\mathcal{R}_0 < 1$. Sinon, $\lambda > 0$ quand $\mathcal{R}_0 > 1$.

Si $x_3^0 = 0$, en intégrant la deuxième équation du système (III.19) de 0 à a , ce qui donne

$$x_2^0(a) = px_1^0 e^{-(\lambda + \mu)a - \int_0^a \eta(s) ds}. \quad (\text{III.21})$$

En injectant (III.21) dans la première équation de (III.19), nous obtenons l'équation caractéristique du système (III.2) au point d'équilibre E_0 :

$$\lambda + \mu + p - p \int_0^\infty \eta(a) e^{-(\lambda + \mu)a - \int_0^a \eta(s) ds} da = 0. \quad (\text{III.22})$$

On note

$$K(\lambda) = \int_0^\infty \eta(a) e^{-(\lambda+\mu)a - \int_0^a \eta(s) ds} da. \quad (\text{III.23})$$

Il est clair, $K(0) = \theta$. Supposons que $\text{Re}\lambda \geq 0$, alors $|K(\lambda)| \leq \theta \leq 1$, à partir de l'équation (III.22), nous obtenons

$$\text{Re}(\lambda) = \text{Re}(pK(\lambda) - \mu - p) < 0.$$

C'est une contradiction. Cela signifie que toutes les racines de (III.22) ont des parties réelles négatives. Par conséquent, le point d'équilibre sans maladie E_0 est *localement asymptotiquement stable* si $\mathcal{R}_0 < 1$ et il est *instable* si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dans la suite, nous étudions la stabilité locale du point d'équilibre endémique E^* . Un simple changement de variables donné par :

$$y_1(t) = S(t) - S^*, \quad y_2(a, t) = v(a, t) - v^*(a), \quad y_3(t) = I(t) - I^*.$$

La linéarisation du système (III.2) au point E^* est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -\mu y_1(t) - p y_1(t) - \beta I^* y_1(t) - \beta S^* y_3(t) + \gamma y_3(t) + \int_0^\infty \eta(a) y_2(a, t) da, \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{\partial y_2}{\partial a} = -(\mu + \eta(a)) y_2(a, t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = \beta I^* y_1(t) + \beta S^* y_3(t) - (\mu_1 + \gamma) y_3(t), \\ y_2(0, t) = p y_1(t). \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Soient

$$y_1(t) = y_1^0 e^{\lambda t}, \quad y_2(a, t) = y_2^0(a) e^{\lambda t}, \quad y_3(t) = y_3^0 e^{\lambda t}, \quad (\text{III.25})$$

y_1^0, y_3^0 sont des constants et $y_2^0(a)$ est une fonction dépend de a . En remplaçant (III.25) dans (III.24), il s'ensuit que

$$\begin{cases} \lambda y_1^0 = -\mu y_1^0 - p y_1^0 - \beta I^* y_1^0 - \beta S^* y_3^0 + \gamma y_3^0 + \int_0^\infty \eta(a) y_2^0(a) da, \\ \frac{dy_2^0(a)}{da} + \lambda y_2^0(a) = -(\mu + \eta(a)) y_2^0(a), \\ \lambda y_3^0 = \beta I^* y_1^0 + \beta S^* y_3^0 - (\mu_1 + \gamma) y_3^0, \\ y_2^0(0) = p y_1^0. \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

En intégrant la deuxième équation du système (III.26) de 0 à a , nous obtenons

$$y_2^0(a) = py_1^0 e^{-(\lambda+\mu)a - \int_0^a \eta(s) ds}. \quad (\text{III.27})$$

En injectant (III.27) dans la première équation de (III.26), on trouve

$$\lambda y_1^0 = -\mu y_1^0 - py_1^0 - \beta I^* y_1^0 - \beta S^* y_2^0 + \gamma y_2^0 + py_1^0 K(\lambda), \quad (\text{III.28})$$

où $k(\lambda)$ est déjà défini dans (III.23). La combinaison de la troisième équation du système (III.26) et (III.28) donne l'équation caractéristique du système (III.2) au point E^* suivante :

$$\lambda(\lambda + \mu + p - pk(\lambda) + \beta I^*) + \beta \mu_1 I^* = 0. \quad (\text{III.29})$$

Supposons que $Re(\lambda) \geq 0$. L'équation (III.29) peut s'écrire

$$\lambda + \mu + p - pk(\lambda) + \beta I^* = -\frac{\beta \mu_1 I^*}{\lambda},$$

Ceci implique

$$Re(\lambda + \mu + p - pk(\lambda) + \beta I^*) > 0, \quad Re\left(-\frac{\beta \mu_1 I^*}{\lambda}\right) \leq 0.$$

C'est une contradiction. Cela signifie que toutes les racines de (III.26) ont des parties réelles négatives. Par conséquent, le point d'équilibre endémique E_0 est *localement asymptotiquement stable* si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Nous résumons cet étude dans le théorème suivant :

Théorème III.3.1.

Si $\mathcal{R}_0 < 1$, le point d'équilibre sans maladie $E_0(S^0, v^0(a), 0)$ du système (III.2) est *localement asymptotiquement stable*. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, E_0 est *instable* et l'équilibre endémique $E^*(S^*, v^*(a), I^*)$ existe et il est *localement asymptotiquement stable*.

III.4 Persistance uniforme

Dans cette section, nous étudions la persistance du système (III.2).

On définit les espaces suivants

$$\tilde{X} = \mathcal{R}^+, \quad \tilde{Y} = \{I(t) \in \tilde{X} : I(t) > 0\},$$

$$Y = \mathcal{R}^+ \times L_+^1(0, \infty) \times \tilde{Y}, \quad \partial Y = X \setminus Y, \quad \partial \tilde{Y} = \tilde{X} \setminus \tilde{Y}.$$

Selon [25], nous avons le résultat suivant.

Proposition III.4.1.

Les sous-ensembles Y et ∂Y sont positivement invariants sous le semi-flot $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$, c'est-à-dire, $\Phi(t, Y) \subset Y$ et $\Phi(t, \partial Y) \subset \partial Y$ pour $t \geq 0$.

De plus, le théorème suivant est important pour trouver la persistance uniforme du système (III.2).

Théorème III.4.1.

Le point d'équilibre sans maladie E_0 est *globalement asymptotiquement stable* pour le semi-flot $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ réduit à ∂Y .

Preuve. Soit $(S_0, v_0(\cdot), I_0) \in \partial Y$. Alors $I_0 \in \partial \tilde{Y}$ et

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t), \\ I(0) &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $S(t) \leq A/\tilde{\mu}$ quand $t \rightarrow \infty$, nous avons $I(t) \leq \tilde{I}(t)$ où

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = \frac{AB}{\tilde{\mu}}\tilde{I}(t) - (\mu_1 + \gamma)\tilde{I}(t), \\ \tilde{I}(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Le système (III.30) admet une solution unique $\tilde{I}(t) = 0$, ce qui implique $I(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

On considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - pS(t) + \int_0^\infty \eta(a)v(a, t)da, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial a} = -(\mu + \eta(a))v(a, t), \\ v(0, t) = pS(t), \quad S(0) = S_0, \quad v(a, 0) = v_0(a), \end{cases}$$

$\tilde{E}_0(S^0, v^0(a))$ est l'unique point d'équilibre. D'après (III.10), nous avons

$$\frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - pS(t) + p \int_0^t \eta(a)S(t-a)\rho(a)da + A - \mu S(t) - pS(t) + \int_t^\infty \eta(a)v_0(a-t) \frac{\rho(a)}{\rho(a-t)} da. \quad (\text{III.31})$$

On note $\int_0^\infty v_0(a-t) \frac{\rho(a)}{\rho(a-t)} da \leq e^{-(\mu+\mu_0)t} \|v_0\|_{L^1}$

Ceci implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_0(a-t) \frac{\rho(a)}{\rho(a-t)} = 0.$$

Ainsi, $\forall \epsilon > 0, \exists T > 0$, pour $t > T$, nous avons

$$\frac{dS(t)}{dt} \leq A - \mu S(t) - pS(t) + p \int_0^t \eta(a) S(t-a) \rho(a) da + \epsilon,$$

ce qui donne

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq \frac{A + \epsilon}{\mu + p - p\theta}.$$

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, en laissant $\epsilon \rightarrow 0$, on déduit que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq \frac{A}{\mu + p - p\theta}. \quad (\text{III.32})$$

D'autre part, il résulte de (III.31) que

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq A - \mu S(t) - pS(t) + p \int_0^t \eta(a) S(t-a) \rho(a) da,$$

ce qui donne

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{A}{\mu + p - p\theta}.$$

Ceci, avec l'équation (III.32), donne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{A}{\mu + p - p\theta}.$$

Pour $a \geq 0$, il résulte de (III.10) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(a, t) = pS^0 \rho(a).$$

Par conséquent, le point d'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable dans ∂Y . \square

En appliquant le théorème I.5.1 dans [26], nous pouvons énoncer un résultat important de la persistance uniforme dans le théorème suivant :

Théorème III.4.2.

Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. Le semi-flot $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément persistant par rapport à $(Y, \partial Y)$ s'il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que pour $x \in Y$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, x)\|_{\mathcal{X}} \geq \epsilon$. De plus, il existe un attracteur global compact A d'un ensemble borné dans Y .

Preuve. Il découle du théorème (III.4.1) que E_0 est *globalement asymptotiquement stable* dans ∂Y . Ainsi, il suffit de prouver que

$$W^S(E_0) \cap Y = \emptyset,$$

avec

$$W^S(E_0) = \{x \in Y : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = E_0\}.$$

Supposons qu'il existe $y \in Y$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = E_0$. Donc on peut trouver une suite $\{y_n\} \subset Y$ tel que

$$\|\Phi(t, y_n) - E_0\| < \frac{1}{n}, \quad t \geq 0$$

où

$$\Phi(t, y_n) = (S_n(t), v_n(\cdot, t), I_n(t)), \quad y_n = (S_n(0), v_n(\cdot, 0), I_n(0)).$$

On choisit $\eta > 0$ assez grand tel que $S^0 - \frac{1}{n} > 0$ et l'inégalité suivante est valable

$$R_0 - 1 - \frac{\beta}{n} > 0. \tag{III.33}$$

Pour $\eta > 0$, $\exists T > 0$ tel que pour tout $t > T$, nous avons

$$S^0 - \frac{1}{n} < S_n(t) < S^0 + \frac{1}{n}, \quad 0 \leq I_n(t) \leq \frac{1}{n}, \tag{III.34}$$

En insérant (III.34) dans la seconde équation de (III.2) et en utilisant le principe de comparaison, on obtient

$$I_n(t) \geq \tilde{I}(t),$$

où $\tilde{I}(t)$ est la solution du système suivant

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = \beta(S^0 - \frac{1}{n})\tilde{I}(t) - (\mu_1 + \gamma)\tilde{I}(t), \\ \tilde{I}(0) = I_n(0). \end{cases} \tag{III.35}$$

à partir de (III.35), nous voyons

$$\tilde{I}(t) = I_n(0)e^{(R_0 - 1 - \frac{\beta}{n})t}. \tag{III.36}$$

D'après les équations (III.33) et (III.36), nous avons $\tilde{I}(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$ ce qui implique $I_n(t)$ est borné. Ceci contredit (III.34). Ainsi, $W^S(E_0) \cap Y = \emptyset$ est vrai. Par [26], $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément persistant. \square

III.5 Étude de la stabilité globale

Dans cette section, nous nous intéressons à la stabilité globale de chacun des points d'équilibre possibles du système (III.2). La technique des preuves consiste à utiliser des fonctions appropriées de Lyapunov et le Principe d'invariance de LaSalle.

Soit

$$g(x) = x - 1 - \ln x, \quad x \in (0, \infty).$$

Il est clair que $g(x) \geq 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in (0, +\infty)$ et $\min_{0 < x < +\infty} g(x) = g(1) = 0$.

On définit

$$\omega(a) = \int_a^\infty \eta(s) \exp\left(-\int_a^s \epsilon(\tau) d\tau\right) ds. \quad (\text{III.37})$$

Si $a \geq 0$, $\omega(a) > 0$ et $\omega(0) = \theta$. Il s'ensuit que

$$\frac{d\omega(a)}{da} = \omega(a)\epsilon(a) - \eta(a).$$

Nous avons d'abord affirmé et prouvé notre résultat sur la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie $E_0(S^0, v^0(a), 0)$.

Théorème III.5.1.

Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et $A\beta + p\theta\gamma > (\mu + p)\gamma$, le point d'équilibre sans maladie $E_0(S^0, v^0(a), 0)$ du système (III.2)-(III.4) est *Globalement Asymptotiquement Stable*.

Preuve.

Soit $(S(t), v(a, t), I(t))$ la solution positive du système (III.2) avec la condition au limite (III.3) et les conditions initiales (III.4). On définit

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t),$$

avec

$$L_1(t) = S^0 g\left(\frac{S(t)}{S^0}\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0}\right) I(t),$$

$$L_2(t) = \int_0^\infty \omega(a) v^0(a) g\left(\frac{v(a, t)}{v^0(a)}\right) da.$$

En calculant la dérivée de $L_1(t)$ et en remplaçant $A = \mu S^0 + pS^0 - pS^0\theta$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_1(t)}{dt} &= S^0 \left(\frac{1}{S^0} - \frac{1}{S(t)} \right) (A - \mu S(t) - pS(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t)) \\
 &+ \left(1 - \frac{S^0}{S(t)} \right) \int_0^\infty \eta(a)v(a,t)da + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0} \right) [\beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t)] \\
 &= S^0 \left(\frac{1}{S^0} - \frac{1}{S(t)} \right) ((\mu + p)(S^0 - S(t)) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t)) \\
 &+ \left(1 - \frac{S^0}{S(t)} \right) \left(\int_0^\infty \eta(a)v(a,t)da - pS^0\theta \right) \\
 &+ \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0} \right) [\beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t)] \\
 &= (\mu + p)S^0 \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) - \beta I(t)(S(t) - S^0) + \gamma I(t) \left(1 - \frac{S^0}{S(t)} \right) \quad (\text{III.38}) \\
 &+ \int_0^\infty \eta(a)v^0(a) \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} - 1 - \frac{S^0 v(a,t)}{v^0(a)S(t)} + \frac{S^0}{S(t)} \right) da \\
 &+ \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0} \right) [\beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t)] \\
 &= (\mu + p)S^0 \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) + \gamma I(t) \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) \\
 &+ \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0} \right) (\beta S^0 - \mu_1 - \gamma)I(t) \\
 &+ \int_0^\infty \eta(a)v^0(a) \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} - 1 - \frac{S^0 v(a,t)}{v^0(a)S(t)} + \frac{S^0}{S(t)} \right) da.
 \end{aligned}$$

On note $\frac{\partial v}{\partial a} = v_a$, on dérive $L_2(t)$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_2(t)}{dt} &= \int_0^\infty \omega(a)v^0(a) \frac{\partial}{\partial t} g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) da \\
 &= \int_0^\infty \omega(a) \frac{v(a,t) - v^0(a)}{v(a,t)} \frac{\partial v}{\partial t} da \quad (\text{III.39}) \\
 &= - \int_0^\infty \omega(a) (v(a,t) - v^0(a)) \left(\frac{v_a(a,t)}{v(a,t)} + \mu + \eta(a) \right) da.
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{\partial}{\partial t} g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) = \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} - 1 \right) \left(\frac{v_a(a,t)}{v(a,t)} + \mu + \eta(a) \right), \quad (\text{III.40})$$

En remplaçant (III.40) dans (III.39), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_2(t)}{dt} &= - \int_0^\infty \omega(a)v^0(a) \frac{\partial}{\partial a} g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) da \\
 &= \left[-\omega(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \frac{d}{da} (\omega(a)v^0(a)) da \\
 &= - \left[\omega(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \right]_{a=\infty} + \omega(0)v^0(0)g \left(\frac{v(0,t)}{v^0(0)} \right) \\
 &\quad + \int_0^\infty g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \left[v^0(a) \frac{d\omega(a)}{da} + \omega(a) \frac{dv^0(a)}{da} \right] da \\
 &= - \left[\omega(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \right]_{a=\infty} + pS^0\theta \left(\frac{S(t)}{S^0} - 1 - \ln \frac{S(t)}{S^0} \right) \\
 &\quad - \int_0^\infty \eta(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) da.
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

En combinant (III.38) et (III.41), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \frac{dL(t)}{dt} &= \gamma I(t) \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0} \right) (\beta S^0 - \mu_1 - \gamma) I(t) \\
 &\quad - \left[\omega(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \right]_{a=\infty} + (\mu + p)S^0 \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) \\
 &\quad + \int_0^\infty \eta(a)v^0(a) \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} - 1 - \frac{S^0 v(a,t)}{v^0(a)S(t)} + \frac{S^0}{S(t)} \right) da \\
 &\quad + pS^0\theta \left(\frac{S(t)}{S^0} - 1 - \ln \frac{S(t)}{S^0} \right) - \int_0^\infty \eta(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) da \\
 &= \gamma I(t) \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0} \right) (\beta S^0 - \mu_1 - \gamma) I(t) \\
 &\quad - \left[\omega(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \right]_{a=\infty} + (\mu + p)S^0 \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) \\
 &\quad + \int_0^\infty \eta(a)v^0(a) \left[1 - \frac{S^0 v(a,t)}{v^0(a)S(t)} + \ln \frac{S^0 v(a,t)}{v^0(a)S(t)} \right] da \\
 &\quad + pS^0\theta \left(\frac{S^0}{S(t)} + \frac{S(t)}{S^0} - 2 \right) \\
 &= \gamma I(t) \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta S^0} \right) (\beta S^0 - \mu_1 - \gamma) I(t) \\
 &\quad - \left[\omega(a)v^0(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^0(a)} \right) \right]_{a=\infty} - \int_0^\infty \eta(a)v^0(a)g \left(\frac{S^0 v(a,t)}{v^0(a)S(t)} \right) da \\
 &\quad + (\mu + p + p\theta)S^0 \left(2 - \frac{S^0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^0} \right).
 \end{aligned} \tag{III.42}$$

Par conséquent, $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et $A\beta + p\theta\gamma > (\mu + p)\gamma$ assurent $L'(t) \leq 0$ pour tous $S, v, I \geq 0$.

Soit M le plus grand sous-ensemble invariant de l'ensemble $\Sigma = \{(S(t), v(a,t), I(t)) | L'(t) = 0\}$.

Nous affirmons que $M = \{E_0\}$. En fait, si $\mathcal{R}_0 < 1$, il résulte de (III.42) que

$\Sigma = \{(S(t), v(a, t), I(t)) \mid S(t) = S^0, v(a, t) = v^0(a), I(t) = 0\}$, ceci implique $M = \{E_0\}$.

Pour $\mathcal{R}_0 = 0$, $\Sigma = \{(S(t), v(a, t), I(t)) \mid S(t) = S_0, v(a, t) = v^0(a)\}$ et $I(t) = 0$ de la première équation de (III.2). Notant que si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, $E_0(S^0, V^0(a), 0)$ est *localement asymptotiquement stable*. Nous voyons qu'il est *globalement stable*. \square

Théorème III.5.2.

Si $\mathcal{R}_0 > 1$, le point d'équilibre endémique $E^*(S^*, v^*(a), I^*)$ du problème (III.2)-(III.4) est *globalement asymptotiquement stable*.

Preuve.

Soit $(S(t), v(a, t), I(t))$ la solution positive du problème (III.2)-(III.4). On définit

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t),$$

avec

$$U_1(t) = S^* g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + k_1 I^* g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right),$$

$$U_2(t) = \int_0^\infty \omega(a) v^*(a) g\left(\frac{v(a, t)}{v^*(a)}\right) da,$$

où $\omega(a)$ est déjà défini dans (III.37) et k_1 est une constante positive à déterminer plus tard.

Nous calculons la dérivée de $U_1(t)$ la solution positive du système (III.2), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{dU_1(t)}{dt} &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(A - \mu S(t) - pS(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) + \int_0^\infty \eta(a)v(a, t) da\right) \\ &\quad + k_1 \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) [\beta S(t)I(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t)] \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(\mu S^* + pS^* + \beta S^* I^* - \gamma I^* - \int_0^\infty \eta(a)v^*(a) da\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(-\mu S(t) - pS(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) + \int_0^\infty \eta(a)v(a, t) da\right) \\ &\quad + k_1 \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) [\beta S(t)I(t) - \beta S^* I(t)] \tag{III.43} \\ &= (\mu + p)S^* \left(2 - \frac{S(t)}{S^*} - \frac{S^*}{S(t)}\right) + (\beta S^* I^* - \gamma I^*) \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \\ &\quad + \beta S^* I(t) \left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) + \gamma I(t) \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \\ &\quad + \int_0^\infty \eta(a)v^*(a) \left(\frac{v(a, t)}{v^*(a)} - 1 - \frac{S^*v(a, t)}{v^*(a)S(t)} + \frac{S^*}{S(t)}\right) da \\ &\quad + k_1 \beta S^* I(t) \left(\frac{S(t)}{S^*} - 1\right) + k_1 \beta S^* I^* \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right). \end{aligned}$$

On choisit $K_1 > 0$ tel que

$$K_1\beta S^* = \beta S^* - \gamma = \mu_1. \quad (\text{III.44})$$

D'après (III.43) et (III.44), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dU_1(t)}{dt} &= (\mu + p)S^* \left(2 - \frac{S(t)}{S^*} - \frac{S^*}{S(t)} \right) \\ &+ k_1\beta S^* I^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) + \gamma I(t) \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) \\ &+ \int_0^\infty \eta(a)v^*(a) \left(\frac{v(a,t)}{v^*(a)} - 1 - \frac{S^*v(a,t)}{v^*(a)S(t)} + \frac{S^*}{S(t)} \right) da. \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

De la même façon pour (III.40) et (III.41), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dU_2(t)}{dt} &= - \left[\omega(a)v^*(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^*(a)} \right) \right]_{a=\infty} + pS^*\theta \left(\frac{S(t)}{S^*} - 1 - \ln \frac{S(t)}{S^*} \right) \\ &- \int_0^\infty \eta(a)v^*(a)g \left(\frac{v(a,t)}{v^*(a)} \right) da. \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Par conséquent, nous obtenons de (III.45) et (III.46)

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= k_1\beta S^* I^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) + \gamma I(t) \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) \\ &+ \int_0^\infty \eta(a)v^*(a) \left(1 - \frac{S^*v(a,t)}{v^*(a)S(t)} + \ln \frac{S^*v(a,t)}{v^*(a)S(t)} \right) da \\ &+ (\mu + p + p\theta) \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Par conséquent, si $\mathcal{R}_0 > 1$, $U'(t) \leq 0$ pour tous $S, v, I \geq 0$. D'après l'égalité (III.47), $U'(t) = 0$ si et seulement si $S(t) = S^*$, $v(a, t) = v^*(a)$. De plus, à partir de la première équation de (III.2), il suit que $I(t) = I^*$. Notant que si $\mathcal{R}_0 > 1$, le point d'équilibre endémique E^* est *localement stable*, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle, nous voyons qu'il est *globalement asymptotiquement stable*. \square

III.6 Simulation numérique et discussion

Nous avons proposé un modèle d'épidémie *SIS* avec l'âge de la vaccination. Nous avons calculé le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 pour montrer que si $\mathcal{R}_0 > 1$, la maladie peut entrer dans la population des individus susceptibles et le point d'équilibre endémique unique est globalement asymptotiquement stable, et si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, des conditions suffisantes sont obtenues pour la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie.

Dans la suite, pour vérifier les résultats théoriques obtenus, nous effectuons des simulations numériques pour le modèle (III.2).

Soit

$$\eta(a) = \begin{cases} 0.04, & a \geq 10; \\ 0, & a \in (0, 10). \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Exemple 1

Soit

$$A = 10, \mu = 0.06, \mu_1 = 0.2, \gamma = 0.2, \Delta t = 0.02.$$

Les valeurs initiales sont

$$S(0) = 30, v(a, 0) = 6e^{-0.3a}, I(0) = 1.$$

On choisit $\beta = 0.001, p = 0.1$, ceci implique, $\mathcal{R}_0 = 0.29405$. Il existe un point d'équilibre sans maladie $E^0(S^0, v^0(a), 0)$, où $S^0 = 30, v^0(a) = pS^0\rho(a)$. De plus la condition suffisante $A\beta + p\theta\gamma > (\mu + p)\gamma$ est vérifiée. D'après le théorème (III.5.1), E_0 est *globalement stable*. Le nombre total de la population vaccinée $V(t)$ converge vers $V^0 = \int_0^a v^0(a)da = 28.8973$.

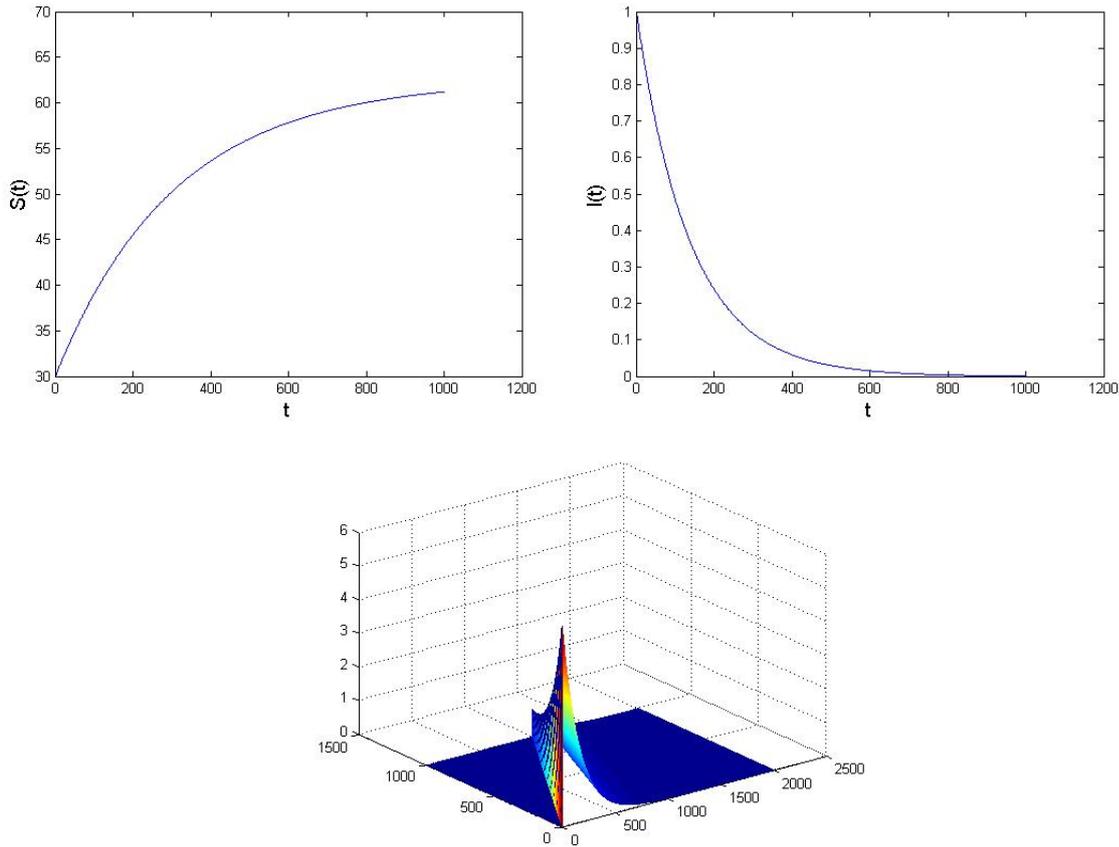


Figure III.1 – $\mathcal{R}_0 = 0.29405 < 1$, $A\beta + p\theta\gamma > (\mu + p)\gamma$. Le point d'équilibre sans maladie $E_0(S^0, v^0(a), 0)$ est *globalement stable*, et la population susceptible et vaccinée converge vers $S^0 = 30$, $v^0(a) = pS^0\rho(a)$, respectivement. Le nombre total de population vaccinée $V(t)$ converge vers $V^0 = 28,8973$

La figure-III.1 montre que le point d'équilibre E_0 est *globalement asymptotiquement stable*, ce qui confirme notre résultat obtenu dans le théorème (III.5.1).

Exemple 2

Soit

$$A = 10, \mu = 0.06, \mu_1 = 1, \gamma = 2, \Delta t = 0.02.$$

Les valeurs initiales sont

$$S(0) = 40, v(a, 0) = 6e^{-0.3a}, I(0) = 5.$$

On choisit $\beta = 0.1$, $p = 0.1$, ce qui donne, $\mathcal{R}_0 = 2.2211$. Il existe un unique point d'équilibre endémique $E^*(S^*, v^*(a), I^*)$, où $S^* = 30.01$, $v^*(a) = pS^*\rho(a)$, $I^* = 5.199$. De plus, le nombre total de la population vaccinée $V(t)$ converge vers $V^* = 25.9$.

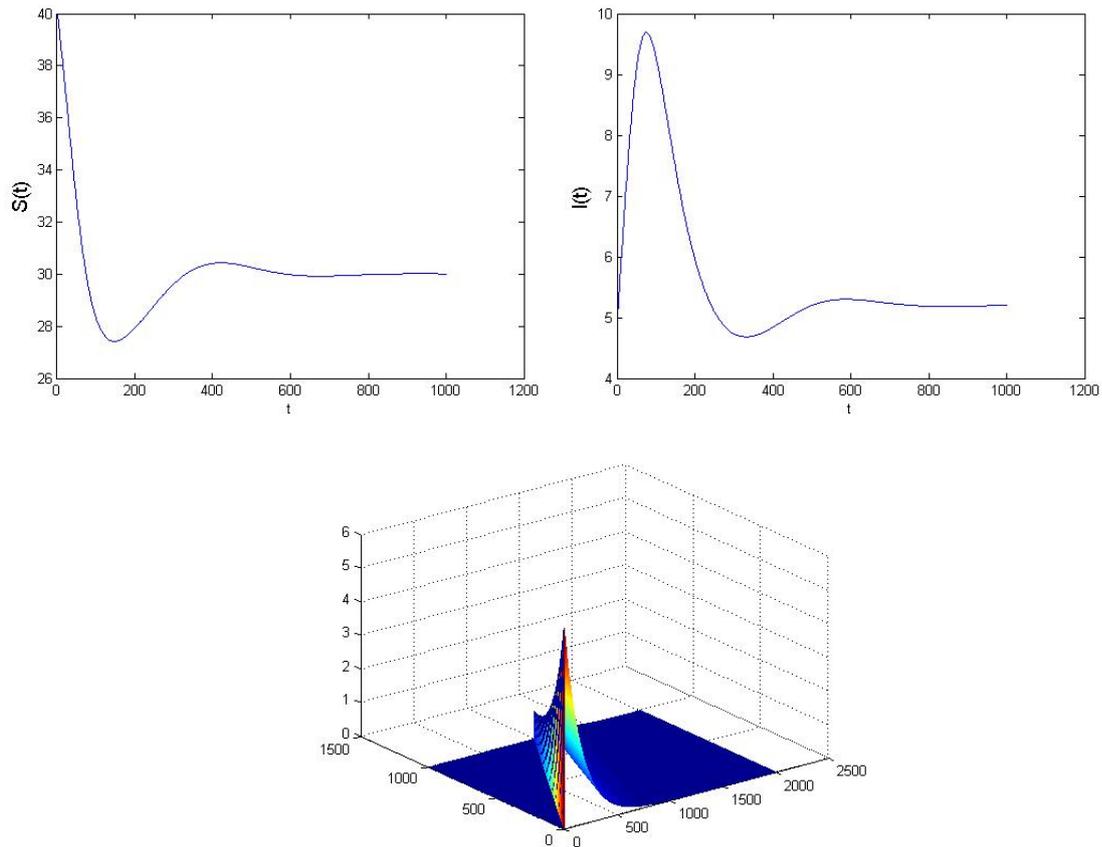


Figure III.2 – $\mathcal{R}_0 = 2.2211 > 1$. Le point d'équilibre endémique $E^*(S^*, v^*(a), I^*)$ est *globalement stable*, et la population susceptible et vaccinée converge vers $S^* = 30.01$, $v^*(a) = pS^*\rho(a)$, $I^* = 5.199$, respectivement. Le nombre total de population vaccinée $V(t)$ converge vers $V^* = 25.9315$

La **figure-III.2** montre que le point d'équilibre E^* est *globalement asymptotiquement stable*, ce qui confirme notre résultat obtenu dans le théorème (III.5.2).

Conclusion

Dans ce travail nous avons proposé une étude générale sur deux modèles épidémiologiques *SEIRS* et *SIS* avec âge de la vaccination.

Dans le premier chapitre on a étudié le cas d'une maladie infectieuse décrite par un modèle *SEIRS*. Nous avons consacré une partie de notre travail à un concept central en épidémiologie : le taux de reproduction de base. Ensuite on a présenté un résultat principal pour la stabilité globale des points d'équilibre sans maladie et endémique. On a obtenu des résultats par des méthodes différentes : la méthode directe de Lyapounov, le principe d'invariance de LaSalle, le critère de Routh-Hurwitz et par des théorie fondamentale de la persistance uniforme et de l'approche de la stabilité équi-uniforme. Dans le deuxième chapitre on a fait l'étude d'un modèle structuré en âge *SIS* qui joue un rôle important dans la transmission des maladies infectieuses. Notre effort de modélisation, nous a conduit à analyser la régularité asymptotique du semi flot et la stabilité globale du modèle en utilisant deux fonctions de Lyapounov. et on a conclu ce travail par des simulations numériques du modèle dont le but de confirmer les résultats théoriques obtenus.

Enfin, avec une bonne collaboration avec les professionnels de santé, nous pensons pouvoir concevoir, avec nos modèles des outils pour fournir des informations importantes en matière de santé publique pour le contrôle de l'épidémie du virus des maladies infectieuses mais aussi la prévention et la surveillance.

Bibliographie

- [1] BHATIA, N. P. Attraction and non-saddle sets in dynamical systems. *J. Diff. Eqs.* (1970).
- [2] BHATIA, N. P., AND SZEGÖ, G. P. Stability theory of dynamical systems. *Springer-Verlag* (1970).
- [3] BUTLER, G. J., A. W. P. Persistence in dynamical systems. *J. Diff. Eqs* (1986).
- [4] CHAVES, S.S., G. P. Z. J. C. R. G. D. M. L. S. J. Loss of vaccineinduced immunity to varicella over time. *N. Engl. J. Med.* (2007).
- [5] CHOW, S. N., AND HALE, J. K. Methods of bifurcation theory,. *Springer-Verlag, New York*, (1982).
- [6] COPPEL, W. Stability and asymptotic behavior of differentail equation. *Heatt, Boston.* (1965).
- [7] DIEUDONNE., J. Eléments d'analyse. tome i. fondements de l'analyse moderne . 3 éme edition. *Paris Gauthier-Villars* (1979.).
- [8] D.R. MERKIN, F. A., AND SMIRNOV, A. Introduction to the theory of stability. *Texts in Applied Mathematics. Springer New York*, (2012.).
- [9] ELBASHA, E., D. E. I. R. Model for assessing human papillomavirus vaccination strategies. *Emerg. Infect. Dis.* (2007).
- [10] FRANCIS, D.P., F. P. B. J. M. H. G. J. M. C. S. B. M. J. P. E. H. A. Infection of chimpanzees with lymphadenopathyassociated virus. *Lancet* (1986).
- [11] FRANÇOISE., J.-P. Oscillations en biologie. analyse qualitative et modèles. *Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598 CNRS. Université P.-M. Curie, Paris VI.* (2000).
- [12] GUCKENHEIMER, J., AND HOLMES., P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector elds. *Springer-Verlag, New York*, (1983).
- [13] HALE, J. Functional differential equations. *Springer, Berlin* (1971).
- [14] HETHCOTE, H. W. Qualitative analyses of communicable disease models. *Math. Biosci* (1976).

- [15] HETHCOTE, H. W. Qualitative analyses of communicable disease models. *SIAM Rev* (2000).
- [16] HOPPENSTEADT, F. An age-dependent epidemic model. *J. Franklin Inst.* (1974).
- [17] IANNELLI, M. Mathematical theory of age-structured population dynamics. *Giardini Editori e Stampatori, Pisa* (1994).
- [18] IANNELLI, M., M. M. L. X. Strain replacement in an epidemic model with super-infection and perfect vaccination. *Math. Biosci.* (2005).
- [19] I.ZENDAGUI, AND S.BENTOUT. Sur la modélisation de l'épidémiologie. *C.U.B.B.A.T* (2018).
- [20] LASALLE, J. Stability theory for ordinary differential equations. *J. Differ. Equations* (1968).
- [21] LASALLE, J. Stability of nonautonomous systems. *Nonlinear Anal, Theory, Methods Appl* (1976).
- [22] LASALLE, J. P. The stability of dynamical systems, society for industrial and applied mathematics, philadelphia, pa.,. *Regional Conference Series in Applied Mathematics.* (1976).
- [23] LASALLE, J. P., AND LEFSCHETZ, S. Stability by liapunov's direct method. *Academic Press* (1961).
- [24] LI, J., M. Z. Global analysis of sis epidemic models with variable total population size. *Math. Comput. Modell.* (2004).
- [25] MAGAL, P. Compact attractors for time periodic age-structured population models. *Electron. J. Differ. Equ.* (2001).
- [26] MAGAL, P., Z. X.-Q. Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems. *SIAM J. Math. Anal.* (2005).
- [27] MARTIN, R. Logarithmic norms and projections applied to linear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* (1974).
- [28] M.Y.LI. Periodic solutions to a class of autonomous systems, in differential equations and applications to biologie and to industry. *World Scientific, Singapore* (1996).
- [29] O. DIEKMANN, J. A. P. H., AND J., J. A. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio r_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations,. *J. Math. Biol.* (1990).
- [30] O. DIEKMANN, J. A. P. H., AND METZ, J. A. J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio r_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations,. *J. Math. Biol.*, (1990).

-
- [31] S.BUSENBERG, AND DEN DRIESSCHE, P. A method for proving the nonexistence of limit cycles. *J. Math. analysis applic* (1993).
- [32] T.A.BUNTON. Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. *Academic Press, inc* (1985).
- [33] VAN DEN DRIESSCHE, P., AND WATMOUGH, J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences* (2002).
- [34] VAN DEN DRIESSCHE, P., AND WATMOUGH, J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences* (2002).
- [35] WANG, J., Z. R. K. T. The stability analysis of an SVEIR model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes. *J. Biol. Dyn.* (2015).
- [36] WEBB, G. Theory of nonlinear age-dependent population dynamics. *Marcel Dekker, New York* (1985).
- [37] WENDELBOE, A.M., V. R. A. S. S. E. J. Duration of immunity against pertussis after natural infection or vaccination. *Pediatr. Infect. Dis. J.* (2005).
- [38] WIGGINS., S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos,. *Springer-Verlag, New York, second edition*, (2003).